И. С. ГРАДШТЕЙН и И. М. РЫЖИК

ТАБЛИЦЫ
ИНТЕГРАЛОВ, СУММ, РЯДОВ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ

ИЗДАНИЕ 4-е,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ ПРИ УЧАСТИИ
Ю. В ГЕРОНИМУСА
и М. Ю. ЦЕЙТЛИНА

ФМ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

Г 75

АННОТАЦИЯ

Книга представляет собой большое собрание интегралов и формул (около 12 000), относящихся к элементарным и специальным функциям. В четвертом издании значительно расширены разделы, посвященные неопределенным и определенным интегралам от элементарных функций и определенным интегралам от специальных функций. Включены интегралы от специальных функций, отсутствовавшие в предыдущем издании. В связи с этим главы, относящиеся к специальным функциям, дополнены необходимыми разделами.

Глава об интегральных преобразованиях, имевшаяся в третьем издании, исключена. Ее материал размещен в других частях книги.

Книга предназначена для научно-исследовательских институтов, лабораторий, конструкторских бюро и научных работников в области математики, физики, техники.

Израиль Соломонович Градштейн и Иосиф Моисеевич Рыжик

Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений

М., Физматгиз, 1963 г., 1100 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор ***В. Н. Крючкова*** Корректор *А. С. Бакулова*

Печать с матриц. Подписано к печати 6/III 1963 г. Бумага 70×108 1/16.
Физ. печ. л. 68,75. Условн. печ. л. 94,19. Уч.-изд. л. 83,54. Допечатка тиража 19 000 экз.
Т 01581. Цена книги 4 р. 33 к.

Государственное издательство физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Гос. типография «Пяргале», Вильнюс, ул. Латако, 6. Заказ № 910

ОГЛАВЛЕНИЕ

3—4. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В существующих математических справочниках как советских, так и иностранных количество приводимых формул по интегралам, суммам, рядам и произведениям безусловно недостаточно не только для научных работников-математиков, но и для инженеров, занимающихся теоретической и исследовательской работой. Настоящие таблицы составлены с целью заполнить этот пробел. Здесь собрано свыше 5000 формул из различных источников.

Книга предназначена главным образом для научных работников и инженеров-исследователей в области физико-математических наук. Поэтому в ней пояснительная часть занимает мало места. В основном книга является сборником формул.

Большое внимание уделено специальным функциям, в особенности эллиптическим, цилиндрическим и шаровым. В книге имеется много формул, относящихся к этим функциям.

Пользуюсь также случаем, чтобы выразить искреннюю благодарность проф. В. В. Степанову, А. И. Маркушевичу и И. Н. Бронштейну за ценные советы и указания, которые я от них получил при выполнении этой работы.

И. Рыжик

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

И. М. Рыжик, автор первого и второго изданий этих таблиц, погиб во время Великой Отечественной войны. По предложению издательства эти таблицы мною переработаны.

В отдел определенных интегралов были внесены следующие изменения. Все «факультеты» вроде $2^{n-2/3}$ были заменены гамма-функцией, а там, где это было возможно,— обыкновенными произведениями и факториалами, так как мы считали, что «факультеты» мало знакомы современному читателю и вносят только излишние затруднения. Там, где правые части формул можно было заменить какой-либо специальной функцией или специальным числом — это было сделано. Был прибавлен ряд интегралов, приводящих к специальным функциям. Были опущены интегралы от выражений, содержащих комплексные величины, и некоторые другие интегралы; кроме того, был изменен порядок следования формул.

Изменен и способ нумерации формул. Все формулы, определения и теоремы разбиты на разделы, которые занумерованы. Принцип нумерации имеет некоторое сходство с десятичной системой классификации и легко может быть выяснен из оглавления. В оглавлении указаны только более крупные разделы, номера которых содержат одну, две или три цифры. Самые мелкие разделы книги содержат четыре цифры. В эти разделы входят одна или несколько формул (теорем или определений), номера которых напечатаны светлым шрифтом. Цифра «нуль» забронирована за разделами, носящими общий характер: за введениями, определениями и т. п. Первой главе книги, включающей ряд теорем общего характера и носящей несколько вводный характер, также присвоен нулевой номер.

Нововведением в этом издании являются ссылки, сделанные в конце формул и указывающие на литературу, из которой эта формула взята*). Я старался делать ссылки, в первую очередь, на советские издания и особенно на оригинальные, во вторую очередь, на иностранные книги и, наконец, в третью очередь, на справочники. Ссылки на журнальную литературу отсутствуют. Формула, взятая из какой-либо книги, иногда видоизменялась. В этом случае в конце библиографической ссылки ставилась буква *и* («изменено»). В частности, буква *и* может означать исправление замеченной опечатки.

И. Градштейн

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке четвертого издания И. С. Градштейн задумал значительное расширение справочника. Смерть помешала ему реализовать свои замыслы полностью. Им были составлены новые таблицы интегралов от элементарных функций и собраны некоторые материалы для составления таблиц интегралов от специальных функций.

Издательство поручило нам подготовить к печати оставшуюся от И. С. Градштейна рукопись, дополнив ее недостающими разделами.

При выполнении этой работы мы старались следовать плану рукописи и предыдущего издания и сохранили, во всяком случае, их главные особенности: порядок следования формул и ссылки на источники. Из предыдущего издания в книгу включены без изменений разделы, касающиеся сумм, рядов, произведений и элементарных функций. Остальные разделы подвергались переработке. Особенно сильно расширены таблицы определенных интегралов от элементарных и специальных функций. Появились разделы, например интегралы от функций Матье, функций Струве, функций Ломмеля и ряда других функций, которых в старом издании не было совсем. Вообще, в четвертом издании справочника число рассматриваемых специальных функций по сравнению с третьим изданием увеличилось. В связи с этим главы, относящиеся к специальным функциям, дополнены соответствующими разделами.

Большинство определений специальных функций, принятых в предыдущем издании, сохранено. На другие определения мы переходили лишь иногда, следуя источникам, содержащим наиболее богатый материал по интегралам от соответствующих специальных функций.

Изменены также некоторые обозначения. Имевшаяся в третьем издании глава, посвященная интегральным преобразованиям, из четвертого издания исключена. Ее материал размещен в других частях справочника.

Мы выражаем глубокую признательность А. Ф. Лапко, который внимательно прочитал рукопись и сделал целый ряд полезных замечаний.

Ю. Геронимус, М. Цейтлин

---

*) Указатель литературы, на которую имеются ссылки, помещен на стр. 1099—1100. После шифра, указывающего книгу, в библиографических ссылках стоят числа. Числа, не заключенные ни в какие скобки, означают страницы; числа в круглых скобках — номера формул, цифры в квадратных скобках — номера таблиц.

О ПОРЯДКЕ СЛЕДОВАНИЯ ФОРМУЛ

Вопрос о целесообразном порядке следования формул, особенно в таком отделе, как определенные интегралы, оказался весьма сложным. Естественно приходит мысль об установлении некоторого порядка, аналогичного словарному. Однако простое установление такого порядка в формулах интегрального исчисления почти невозможно. Действительно, в любой формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = A$$

можно сделать целый ряд подстановок вида $x=\varphi(t)$ и получить таким образом ряд «синонимов» данной формулы. Надо сказать, что обилием таких «синонимов» и сложных по виду формул грешат как таблица определенных интегралов Bierens de Haan'a, так и первые издания данного справочника. Мы старались в настоящем издании оставить только наиболее простые из «формул-синонимов». О простоте формулы мы судили в основном по простоте аргументов «внешних» функций, входящих в подынтегральное выражение. Где это было можно, мы сложную формулу заменяли более простой. Иногда при этом несколько более сложных формул приводятся к одной более простой. Тогда мы оставляли только эту более простую формулу. Иногда, в результате таких упрощающих подстановок, мы приходили к интегралу, который можно вычислить, пользуясь формулами отдела 2 и формулой Ньютона—Лейбница, или к интегралу, имеющему вид

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — нечетная функция. Тогда мы такой интеграл опускали.

Приведем пример (№ 26 на стр. 159 второго издания):

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\operatorname{ctg} x - 1)^{p-1}}{\sin^2 x} \ln \operatorname{tg} x\,dx = -\frac{\pi}{p}\operatorname{cosec} p\pi. \tag{1}$$

Естественная подстановка $\operatorname{ctg} x - 1 = u$; с ее помощью получим

$$\int_0^{\infty} u^{p-1}\ln(1+u)\,du = \frac{\pi}{p}\operatorname{cosec} p\pi. \tag{2}$$

Этого интеграла непосредственно в справочнике не было. Его можно было получить из других более сложных формул, имевшихся в справочнике. Далее №№ 59 и 60 являются частными видами формулы № 26 на стр. 159. Все эти интегралы в новом издании опущены. Вместо них имеется формула (2) и формула, получающаяся из интеграла (1) при подстановке $\operatorname{ctg} x = v$.

Второй пример (№ 24 на стр. 172 второго издания)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{tg}^p x + \operatorname{ctg}^p x) \ln \operatorname{tg} x \, dx = 0.$$

Подстановка $\operatorname{tg} x = u$ дает

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln(u^p + u^{-p}) \ln u}{1+u^2} \, du.$$

Полагаем далее $v = \ln u$. Тогда

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{ve^v}{1+e^{2v}} \ln(e^{pv} + e^{-pv}) \, dv = \int_{-\infty}^\infty v \frac{\ln 2 \operatorname{ch} pv}{2 \operatorname{ch} v} \, dv.$$

Подынтегральная функция нечетна и, следовательно, интеграл равен нулю.

Итак, раньше, чем искать интеграл в таблицах, подынтегральное выражение следует упростить и притом так, чтобы возможно более простыми оказались аргументы («внутренние функции») у функций, входящих в подынтегральное выражение.

Функции упорядочиваются по старшинству следующим образом.

Сначала идут элементарные функции:

1. Функция $f(x) = x$.
2. Показательная функция.
3. Гиперболические функции.
4. Тригонометрические функции.
5. Логарифмическая функция.
6. Обратные гиперболические функции. (В формулах, содержащих определенные интегралы, они заменены соответствующими логарифмами.)
7. Обратные тригонометрические функции.

Далее следуют специальные функции:

8. Эллиптические интегралы.
9. Эллиптические функции.
10. Интегральный логарифм, интегральная показательная функция, интегральный синус и интегральный косинус.
11. Интегралы вероятности и интегралы Френеля.
12. Гамма-функция и родственные ей функции.
13. Цилиндрические функции.
14. Функции Матье.
15. Шаровые функции.
16. Ортогональные многочлены.
17. Гипергеометрические функции.
18. Вырожденные гипергеометрические функции.
19. Функции параболического цилиндра.
20. Функции Мейера и Мак-Роберта.
21. Дзета-функция Римана.

В таблицах эти функции располагаются в порядке старшинства, причем внешняя функция принимается во внимание в первую очередь: чем старше функция, тем дальше ставится соответствующая формула. Предположим, что в несколько выражений входит одна и та же внешняя функция; например, в выражениях $\sin e^x$, $\sin x$, $\sin \ln x$ внешняя функция — синус — общая. Такие выражения располагаются в порядке внутренних функций. Например, указанные три функции расположатся в таком порядке: $\sin x$, $\sin e^x$, $\sin \ln x$.

В приведенном нами списке отсутствуют следующие функции: многочлен, рациональная, алгебраическая и степенная функции. Встречающаяся в таблицах определенных интегралов алгебраическая функция сводится обычно к конечной комбинации корней рациональной степени, и поэтому мы можем для классификации наших формул условно считать степенную функцию обобщением алгебраической, а следовательно, и рациональной функции *). Все указанные функции мы будем отличать от перечисленных выше и будем рассматривать как некоторые операторы. Таким образом, в выражении $\sin^2 e^x$ мы будем считать, что к внешней функции $\sin$ приложен оператор возведения в квадрат. В выражении $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ мы будем считать, что к тригонометрическим функциям $\sin$ и $\cos$ приложен рациональный оператор. Операторы мы также будем различать по старшинству:

1. Многочлен (тем старше, чем выше его степень).
2. Рациональный оператор.
3. Алгебраический оператор (по существу $A^{\frac{p}{q}}$, где $q>0$ и p — рациональные числа, тем старше, чем больше q).
4. Степенной оператор.

Выражения с одинаковыми внешними и внутренними функциями располагаются в порядке старшинства операторов, например так:

$$\sin x,\ \sin x\cos x,\ \frac{1}{\sin x}=\sec x,\ \frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x,\ \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x},\ \sin^m x,\ \sin^m x\cos x.$$

Далее, если в подынтегральное выражение входят две внешние функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ (причем $\varphi_1(x)$ старше $\varphi_2(x)$), над которыми произведена какая-либо из указанных операций, то соответствующий интеграл ставится за всеми интегралами, содержащими одну только функцию $\varphi_1(x)$, в порядке старшинства $\varphi_2(x)$. Так за тригонометрическими функциями следуют тригонометрические и степенные функции (т. е. $\varphi_2(x)=x$), далее идут

тригонометрические и показательные,
тригонометрические, показательные и степенные и т. д.,
тригонометрические и гиперболические и т. д.

Интегралы, в которые входят две функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, располагаются в соответствующем разделе в порядке, зависящем только от старшей функции $\varphi_1(x)$. Если же порядок нескольких интегралов в зависимости только от старшей функции совпадает, то эти интегралы располагаются в порядке, определяемом второй функцией.

К указанным правилам общего характера прибавляются еще некоторые частные соображения, которые легко усмотреть непосредственно в таблицах. Например, функция $e^{\frac{1}{x}}$, согласно сказанному, старше e^x, но $\ln x$ и $\ln\frac{1}{x}$ имеют одно и то же старшинство, так как $\ln\frac{1}{x}=-\ln x$: в разделе «степенные и алгебраические функции» из степенных функций вида $(a+bx)^n$, $(\alpha+\beta x)^\nu$ образуются многочлены, рациональные функции и даже степенные функции от степенных функций.

*) При n натуральном степенная функция $(a+bx)^n$ от двучлена $a+bx$ есть многочлен; при n целом отрицательном $(a+bx)^n$ является рациональной функцией; при иррациональном степенная функция $(a+bx)^n$ не является даже алгебраической функцией.

0. ВВЕДЕНИЕ

0.1 КОНЕЧНЫЕ СУММЫ

0.11 Прогрессии

0.111 Арифметическая прогрессия.

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a+kr)=\frac{n}{2}[2a+(n-1)r]=\frac{n}{2}(a+l)\quad [l\text{ — последний член}].$$

0.112 Геометрическая прогрессия.

$$\sum_{k=1}^{n} aq^{k-1}=\frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

0.113 Арифметико-геометрическая прогрессия.

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a+kr)q^k=\frac{a-[a+(n-1)r]q^n}{1-q}+\frac{rq(1-q^{n-1})}{(1-q)^2}. \qquad \text{Жл (5)}$$

0.12 Суммы степеней натуральных чисел

0.121

$$\sum_{k=1}^{n} k^q=\frac{n^{q+1}}{q+1}+\frac{n^q}{2}+\frac{1}{2}\binom{q}{1}B_2n^{q-1}+\frac{1}{4}\binom{q}{3}B_4n^{q-3}+\frac{1}{6}\binom{q}{5}B_6n^{q-5}+\ldots=$$

$$=\frac{n^{q+1}}{q+1}+\frac{n^q}{2}+\frac{qn^{q-1}}{12}-\frac{q(q-1)(q-2)}{720}n^{q-3}+\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{30\,240}n^{q-5}-\ldots$$

[последний член содержит n или n^2]. Ч 332

1. $$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}. \qquad \text{Ч 333}$$

2. $$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad \text{Ч 333}$$

3. $$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \qquad \text{Ч 333}$$

4. $$\sum_{k=1}^{n} k^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1). \qquad \text{Ч 333}$$

5. $\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1).$ Ч 333

6. $\sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{1}{42} n (n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1).$ Ч 333

7. $\sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{1}{24} n^2 (n+1)^2 (3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2).$ Ч 333

0.122 $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^q = \frac{2^q}{q+1} n^{q+1} - \frac{1}{2}\binom{q}{1} 2^{q-1} B_2 n^{q-1} - \\ - \frac{1}{4}\binom{q}{3} 2^{q-3} (2^3 - 1) B_4 n^{q-3} - \ldots$$

[Последний член содержит n или n^2.]

1. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$

2. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3} n (4n^2 - 1).$ Жл (32а)

3. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2 (2n^2 - 1).$ Жл (32б)

0.123 $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2 = \frac{1}{12} n (n+1)(n+2)(3n+5).$

0.124 $\sum_{k=1}^{q} k(n^2 - k^2) = \frac{1}{4} q (q+1)(2n^2 - q^2 - q).$

0.125 $\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1.$ А (188.1)

0.126 $\sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)!}{k!\,(n-k)!} = \sqrt{\frac{e}{\pi}} K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right).$ В 94

0.13 Суммы величин, обратных натуральным числам

0.131 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = C + \ln n + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{n(n+1)\ldots(n+k-1)},$

где

$$A_k = \frac{1}{k} \int_0^1 x(1-x)(2-x)(3-x)\ldots(k-1-x)\,dx.$$

$$A_2 = \frac{1}{12}, \qquad A_3 = \frac{1}{12},$$

$$A_4 = \frac{19}{80}, \qquad A_5 = \frac{9}{20},$$ Жл (59) А (1876)

0.132 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{2}(C+\ln n)+\ln 2+\frac{B_2}{8n^2}+\frac{(2^3-1)B_4}{64n^4}+\ldots$$ Жл(71а)и

0.133 $$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{2n+1}{2n(n+1)}.$$ Жл(184f)

0.14 Суммы произведений величин, обратных натуральным числам

0.141

1. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[p+(k-1)q](p+kq)}=\frac{n}{p(p+nq)}.$$ ГК III(64)и

2. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[p+(k-1)q](p+kq)[p+(k+1)q]}=\frac{n(2p+nq+q)}{2p(p+q)(p+nq)[p+(n+1)q]}.$$ ГК III (65) и

3. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[p+(k-1)q](p+kq)\ldots[p+(k+l)q]}=\frac{1}{(l+1)q}\left\{\frac{1}{p(p+q)\ldots(p+lq)}-\right.$$ $$\left.-\frac{1}{(p+nq)[p+(n+1)q]\ldots[p+(n+l)q]}\right\}.$$ А (1856) и

4. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[1+(k-1)q][1+(k-1)q+p]}=$$ $$=\frac{1}{p}\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k-1)q}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k-1)q+p}\right].$$ ГК III (66) и

0.142 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k-1}{(k+2)!}=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{(n+2)!}.$$ Жл (157)

0.15 Суммы биномиальных коэффициентов
(n — натуральное число)

0.151

1. $$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{n}=\binom{n+m+1}{n+1}.$$ Кр 64 (70.1)

2. $$1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=2^{n-1}.$$ Кр 62 (58.1)

3. $$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots=2^{n-1}.$$ Кр 62 (58.1)

4. $$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^m\binom{n-1}{m}.$$ Кр 64 (70.2)

0.152

1. $$\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$ Кр 62 (59.1)

2. $\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right).$ Кр 62 (59.2)

3. $\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right).$ Кр 62 (59.3)

0.153

1. $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right).$ Кр 63 (60.1)

2. $\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right).$ Кр 63 (60.2)

3. $\binom{n}{2}+\binom{n}{6}+\binom{n}{10}+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right).$ Кр 63 (60.3)

4. $\binom{n}{3}+\binom{n}{7}+\binom{n}{11}+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right).$ Кр 63 (60.4)

0.154

1. $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}=2^{n-1}(n+2).$ Кр 63 (66.1)

2. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k\binom{n}{k}=0.$ Кр 63 (66.2)

0.155

1. $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{n}{n+1}.$ Кр 63 (67)

2. $\sum_{k=0}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$ Кр 63 (68.1)

3. $\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{(\alpha+1)^{n+1}-1}{n+1}.$ Кр 63 (68.2)

4. $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}.$ Кр 64 (69)

0.156

1. $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{n+m}{p}$ [m — натуральное число]. Кр 64 (71.1)

2. $\sum_{k=0}^{n-p}\binom{n}{k}\binom{n}{p+k}=\frac{(2n)!}{(n-p)!\,(n+p)!}.$ Кр 64 (71.2)

0.157

1. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$ Кр 64 (72.1)

2. $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}.$ Кр 64 (72.2)

3. $\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\binom{2n+1}{k}^2=0.$ Кр 64 (72.3)

4. $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}^2=\frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}.$ Кр 64 (72.4)

0.2 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

0.21 Сходимость числовых рядов

Ряд

0.211 $$\sum_{k=1}^{\infty}u_k=u_1+u_2+u_3+\ldots$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

0.212 $$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|=|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots,$$

составленный из абсолютных значений (модулей) его членов. Если же ряд 0.211 сходится, а ряд 0.212 расходится, то ряд 0.211 называется *условно сходящимся*. Всякий абсолютно сходящийся ряд *сходится*.

0.22 Признаки сходимости

0.221 Пусть

$$\lim_{k\to\infty}|u_k|^{\frac{1}{k}}=q.$$

Если при этом $q<1$ то ряд 0.211 сходится абсолютно; если же $q>1$, то ряд 0.211 расходится. (Коши.)

0.222 Пусть

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=q.$$

Если при этом $q<1$, то ряд 0.211 сходится абсолютно, если же $q>1$, то ряд 0.211 расходится. Если $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|$ стремится к 1, оставаясь больше единицы, то ряд 0.211 расходится. (Даламбер.)

0.223 Пусть

$$\lim_{k\to\infty}k\left\{\left|\frac{u_k}{u_{k+1}}\right|-1\right\}=q.$$

Если при этом $q>1$, то ряд 0.211 сходится абсолютно; если же $q<1$, то ряд 0.211 расходится. (Раабе.)

0.224 Пусть $f(x)$ — положительная, убывающая функция, и пусть при k натуральных

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e^kf(e^k)}{f(k)}=q.$$

Если при этом $q<1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}f(k)$ сходится; если же $q>1$, то этот ряд расходится. (Ермаков.)

0.225 Пусть

$$\left|\frac{u_k}{u_{k+1}}\right| = 1 + \frac{q}{k} + \frac{|v_k|}{k^p},$$

где $p > 1$, а $|v_k|$ ограничены, т. е. $|v_k|$ меньше некоторого M, которое не зависит от k. Если при этом $q > 1$, то ряд 0.211 сходится абсолютно, если же $q \leqslant 1$, то этот ряд расходится. (Гаусс.)

0.226 Пусть функция $f(x)$, определенная при $x \geqslant q \geqslant 1$, непрерывна, положительна и монотонно убывает. При выполнении этих условий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится интеграл

$$\int_q^{\infty} f(x)\,dx.$$

(Интегральный признак Коши.)

0.227 Пусть все члены последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n$ положительны; в таком случае ряд

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots$$

называется *знакочередующимся* (или *знакопеременным*).

Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю, т. е. если

2. $$u_{k+1} < u_k \text{ и } \lim_{k\to\infty} u_k = 0,$$

то ряд 0.227 1. сходится. При этом остаток ряда

3. $$\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-n+1} u_k = \left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} u_k \right| < u_{n+1}.$$

(Лейбниц.)

0.228 Если ряд

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = v_1 + v_2 + \ldots + v_k + \ldots$$

сходится, а числа u_k образуют монотонную и ограниченную последовательность, т. е. если для некоторого числа M и для всех k $|u_k| < M$, от ряд

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_k v_k + \ldots$$

сходится. (Абель.) ФИ II 354

0.229 Если частичные суммы ряда 0.228 1. в совокупности ограничены, а числа u_k образуют монотонную последовательность, стремящуюся к нулю, т. е. если

$$\left| \sum_{k=1}^{n} v_k \right| < M \; [n = 1, 2, 3, \ldots] \text{ и } \lim_{k\to\infty} u_k = 0,$$

то ряд 0.228 2. сходится. (Дирихле.) ФИ II 355

0.23 — 0.24 Примеры числовых рядов

0.231 Прогрессии

1. $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}$ $\quad [|q| < 1]$.

2. $\sum_{k=0}^{\infty} (a + kr) q^k = \frac{a}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2}$ $\quad [|q| < 1]$ (сравни **0.113**).

0.232

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \ln 2$ (сравни **1.511**).

2. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)(4k+1)} = \frac{\pi}{4}$ (сравни **1.643**).

0.233

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots = \zeta(p)$ $\quad [\mathrm{Re}\, p > 1]$ **УВ II 44**

2. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^p} = (1 - 2^{1-p}) \zeta(p)$ $\quad [\mathrm{Re}\, p > 0]$ **УВ II 46**

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!} |B_{2n}|$. **Ф II 721**

4. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}}{(2n)!} |B_{2n}|$. **Жл (165)**

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2n}} = \frac{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{2\cdot(2n)!} |B_{2n}|$. **Жл (184b)**

6. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(2k-1)^{2n+1}} = \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n)!} |E_{2n}|$. **Жл (184d)**

0.234

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$. **Э 158и**

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. **Э 163**

3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = G$. **Ф II 482**

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$. **Э 163**

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. **Э 163**

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536}$. Э 164

7. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12} - \ln 2$.

0.235 $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^n}$,

$S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{\pi^2-8}{16}$, $S_3 = \frac{32-3\pi^2}{64}$, $S_4 = \frac{\pi^4+30\pi^2-384}{768}$. Жл (186)

0.236

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(4k^2-1)} = 2\ln 2 - 1$. Бр$_{26}$ 51*и*

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(9k^2-1)} = \frac{3}{2}(\ln 3 - 1)$. Бр$_{26}$ 51*и*

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(36k^2-1)} = -3 + \frac{3}{2}\ln 3 + 2\ln 2$. Бр$_{26}$ 52, А (6913.3)

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(4k^2-1)^2} = \frac{1}{8}$. Бр$_{26}$ 52

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(4k^2-1)^2} = \frac{3}{2} - 2\ln 2$. Бр$_{26}$ 52

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{12k^2-1}{k(4k^2-1)^2} = 2\ln 2$. А (6917.3), Бр$_{26}$ 52

0.237

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}$. А (6917.2), Бр$_{26}$ 52

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)(4k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$.

3. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{3}{4}$ (сравни **0.133**).

4. $\sum_{k=1,\, k\neq m}^{\infty}{}' \frac{1}{(m+k)(m-k)} = -\frac{3}{4m^2}$ [m — целое число]. А (6916.1)

5. $\sum_{k=1,\, k\neq m}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{k-1}}{(m-k)(m+k)} = \frac{3}{4m^2}$ [m — четное число]. А (6916.2)

0.238

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2k(2k+1)} = \ln 2 - \frac{1}{2}$. ГК III (93,

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)\,2k\,(2k+1)} = \frac{1}{2}(1-\ln 2).$ ГК III (94)u

3. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)(3k+4)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{\pi}{12\sqrt{3}}.$ ГК III (95)

0.239

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{3k-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2\right).$ ГК III (85), Бр$_{08}$ 161 (1)

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{3k-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2\right).$ Бр$_{08}$ 161 (1)

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{4k-3} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\pi + 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right].$ Бр$_{08}$ 161 (1)

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{E\left(\frac{k+3}{2}\right)} \frac{1}{k} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$ ГК III (87)

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{E\left(\frac{k+3}{2}\right)} \frac{1}{2k-1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{E\left(\frac{k+5}{3}\right)} \frac{1}{2k-1} = \frac{5\pi}{12}.$ ГК III (88)

7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(8k-1)(8k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{16}\left(\sqrt{2}+1\right).$

0.241

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k} = \ln 2.$ Жл (172g)

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$ Жл (174)

0.242 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{n^{2k}} = \frac{n^2}{n^2+1}.$

0.243

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[p+(k-1)q](p+kq)\ldots[p+(k+l)q]} = \frac{1}{(l+1)q}\,\frac{1}{p(p+q)\ldots(p+lq)}$

(см. также 0.141 3.)

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{[p+(k-1)q][p+(k-1)q+1][p+(k-1)q+2]\ldots[p+(k-1)q+l-1]} =$

$= \frac{1}{l!}\int\limits_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^l}{1-xt^q}\,dt \quad [q>0,\ x^2 \leqslant 1].$ Бр$_{08}$ 161 (2)u, А (6.704)

0.244

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+p)(k+q)} = \frac{1}{q-p} \int_0^1 \frac{x^p - x^q}{1-x} dx \quad [p > -1,\ q > -1,\ p \neq q].$ ГК II: (90)

2. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{p+(k-1)q} = \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t^q} dt \quad [p > 0,\ q > 0].$ Бр$_{08}$ 161 (1)

Суммы величин, обратных факториалам

0.245

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e = 2{,}71828\ldots$

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} = 0{,}36787\ldots$

3. $2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)!} = \frac{1}{e} = 0{,}36787\ldots$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1.$

5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) = 1{,}54308\ldots$

6. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) = 1{,}17520\ldots$

7. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} = \cos 1 = \cos 57^\circ 17' 45'' = 0{,}54030\ldots$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} = \sin 1 = \sin 57^\circ 17' 45'' = 0{,}84147\ldots$

0.246

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} = I_0(2) = 2{,}27958530\ldots$

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(k+1)!} = I_1(2) = 1{,}590636855\ldots$

3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(k+n)!} = I_n(2).$

4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} = J_0(2) = 0{,}22389078\ldots$

5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!} = J_1(2) = 0{,}57672481\ldots$

6. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!} = J_n(2).$

0.247 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(n+k-1)!} = \frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)!}.$ Жл (159)

0.248 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!} = S_n,$

$$S_1 = e, \quad S_2 = 2e, \quad S_3 = 5e, \quad S_4 = 15e,$$
$$S_5 = 52e, \quad S_6 = 203e, \quad S_7 = 877e, \quad S_8 = 4140e.$$ Жл (185)

0.249 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^3}{k!} = 15e.$ Жл (76)

0.25 Бесконечные произведения

0.250 Пусть дана последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1+a_k)$, конечный или бесконечный (но определенного знака), то этот предел называют значением *бесконечного произведения* $\prod_{k=1}^{\infty} (1+a_k)$ и пишут:

1. $$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1+a_k) = \prod_{k=1}^{\infty} (1+a_k).$$

Если бесконечное произведение имеет конечное отличное от нуля, значение то его называют *сходящимся*, в противоположном случае бесконечное произведение называют *расходящимся*. Ф II 400

0.251 Для того чтобы бесконечное произведение **0.250** 1. сходилось, необходимо, чтобы $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Ф II 403

0.252 Если для всех значений индекса k (начиная с некоторого) все $a_k > 0$ или все $a_k < 0$, то для сходимости произведения 0.250 1. необходима и достаточна сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

0.253 Произведение $\prod_{k=1}^{\infty} (1+a_k)$ называется *абсолютно сходящимся*, если произведение $\prod_{k=1}^{\infty} (1+|a_k|)$ сходится. Ф II 406

0.254 Из абсолютной сходимости бесконечного произведения следует его сходимость.

0.255 Произведение $\prod_{k=1}^{\infty} (1+a_k)$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ абсолютно сходится. Ф II 406

0.26 Примеры бесконечных произведений

0.261 $$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\right)=\sqrt{2}.$$ Э 171

0.262

1. $$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{2}.$$ Ф II 401

2. $$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right)=\frac{2}{\pi}.$$ Ф II 401

3. $$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$ Ф II 401

0.263 $$\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{6\cdot 8}{5\cdot 7}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{10\cdot 12\cdot 14\cdot 16}{9\cdot 11\cdot 13\cdot 15}\right)^{\frac{1}{8}}\ldots=e.$$

0.264 $$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[k]{e}}{1+\frac{1}{k}}=e^{C}.$$ Ф II 402

0.265 $$\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots=\frac{2}{\pi}.$$ Ф II 402

0.266 $$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2^k})=\frac{1}{1-x}\qquad [|x|<1].$$ Ф II 401

0.3 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

0.30 Определения и теоремы

0.301 Ряд

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),$$

составленный из функций, называется *функциональным рядом*. Множество значений независимой переменной x, при которых ряд 0.301 1. сходится, образует *область сходимости* этого ряда.

0.302 Ряд, сходящийся для всех значений x из области M, называется *равномерно сходящимся* в этой области, если для каждого $\varepsilon>0$ существует такое число N, что при $n>N$ неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right|<\varepsilon$$

выполняется для всех x из M.

0.303 Если члены функционального ряда 0.301 1. удовлетворяют в области M неравенствам

$$|f_k(x)|<u_k\quad (k=1,2,3,\ldots),$$

где u_k суть члены некоторого сходящегося числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k=u_1+u_2+\ldots+u_k+\ldots,$$

то ряд 0.301 1. сходится в M равномерно. (Вейерштрасс.) Ф II 449

0.304 Пусть ряд 0.301 1. сходится равномерно в области M, а функции $g_k(x)$ (при каждом x) образуют монотонную последовательность и ограничены в совокупности, т. е. для некоторого числа L и для всех n и x выполняются неравенства

1. $$|g_n(x)| \leqslant L;$$

тогда ряд

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$$

сходится равномерно в области M. (Абель.) Ф II 451

0.305 Пусть частичные суммы ряда 0.301 1. ограничены в совокупности т. е. пусть для некоторого L и для всех n и x из M выполняются неравенства

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| < L;$$

пусть, кроме того, функции $g_n(x)$ (при каждом x) образуют монотонную последовательность, которая сходится к нулю равномерно в области M. Тогда ряд 0.304 2. сходится равномерно в области M. (Дирихле.) Ф II 451

0.306 Если функции $f_k(x)$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и составленный из них ряд 0.301 1. сходится на этом отрезке равномерно то его можно почленно интегрировать, т. е.

$$\int_a^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(x)\, dx \qquad [a \leqslant x \leqslant b]. \qquad \text{Ф II 459}$$

0.307 Пусть функции $f_n(x)$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ имеют на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные $f_n'(x)$. Если на этом отрезке ряд 0.301 1. сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$, составленный из производных, сходится равномерно, то ряд 0.301 1. можно почленно дифференцировать, т. е.

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right\}' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x). \qquad \text{Ф II 460}$$

0.31 Степенные ряды

0.311 Функциональный ряд вида

1. $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\xi)^k = a_0 + a_1(x-\xi) + a_2(x-\xi)^2 + \ldots$$

называется *степенным рядом*. Для каждого степенного ряда 0.311 1., если только он не является всюду расходящимся, область сходимости представляет собой круг с центром в точке ξ и радиусом, равным R, в каждой точке внутри этого круга степенной ряд 0.311 1. сходится абсолютно, а вне его расходится. Круг этот называют *кругом сходимости*, а его радиус — *радиусом сходимости*. Если ряд сходится во всех точках комплексной плоскости, то говорят, что его *радиус сходимости равен бесконечности* $(R = +\infty)$.

0.312 Степенные ряды можно почленно интегрировать и дифференцировать внутри круга сходимости, т. е.

$$\int_{\xi}^{x} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\xi)^k \right\} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-\xi)^{k+1},$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\xi)^k \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-\xi)^{k-1}.$$

Радиус сходимости ряда, получающегося в результате почленного интегрирования или дифференцирования, совпадает с радиусом сходимости исходного ряда.

Операции над степенными рядами

0.313 Деление степенных рядов.

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k} = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

где

$$c_n + \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} c_{n-k} a_k - b_n = 0,$$

или

$$c_n = \frac{(-1)^n}{a_0^n} \begin{vmatrix} a_1 b_0 - a_0 b_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 b_0 - a_0 b_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_3 b_0 - a_0 b_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} b_0 - a_0 b_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 \\ a_n b_0 - a_0 b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix}. \qquad \text{А (6360)}$$

0.314 Возведение степенных рядов в степень

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

где

$$c_0 = a_0^n, \quad c_m = \frac{1}{m a_0} \sum_{k=1}^{m} (kn - m + k) a_k c_{m-k} \text{ при } m \geqslant 1$$

[n — натуральное число]. А (6361)

0.315 Подстановка ряда в ряд.

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k y^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k;$$

$$c_1 = a_1 b_1, \quad c_2 = a_2 b_1 + a_1^2 b_2, \quad c_3 = a_3 b_1 + 2a_1 a_2 b_2 + a_1^3 b_3,$$

$$c_4 = a_4 b_1 + a_2^2 b_2 + 2a_1 a_3 b_2 + 3a_1^2 a_2 b_3 + a_1^4 b_4, \ \dots \qquad \text{А (6362)}$$

0.316 Умножение степенных рядов.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k; \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \qquad \text{Ф II 372}$$

Ряд Тейлора

0.317 Если функция $f(x)$ в окрестности точки ξ имеет производные всех порядков, то можно написать ряд:

1. $$f(\xi) + \frac{(x-\xi)}{1!} f'(\xi) + \frac{(x-\xi)^2}{2!} f''(\xi) + \frac{(x-\xi)^3}{3!} f'''(\xi) + \ldots,$$

называемый *рядом Тейлора* для функции $f(x)$.

Ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, если *остаточный член*

2. $$R_n(x) = f(x) - f(\xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

стремится к нулю при $n \to \infty$.

Выражения для **остаточного члена** в ряде Тейлора.

3. $$R_n(x) = \frac{(x-\xi)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi + \theta(x-\xi)) \quad [0 < \theta < 1]. \quad \text{(Лагранж.)}$$

4. $$R_n(x) = \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!} (1-\theta)^n f^{(n+1)}(\xi + \theta(x-\xi)) \quad [0 < \theta < 1]. \quad \text{(Коши.)}$$

5. $$R_n(x) = \frac{\psi(x-\xi) - \psi(0)}{\psi'[(x-\xi)(1-\theta)]} \frac{(x-\xi)^n (1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi + \theta(x-\xi)) \quad [0 < \theta < 1],$$

(Шлемильх.)

где $\psi(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая следующим двум условиям: 1) она вместе со своей производной $\psi'(x)$ непрерывна в промежутке $(0, x-\xi)$; 2) производная $\psi'(x)$ не меняет знак в том же промежутке; положив $\psi(x) = x^{p+1}$, получаем следующую форму остаточного члена:

$$R_n(x) = \frac{(x-\xi)^{n+1}(1-\theta)^{n-p-1}}{(p+1)\,n!} f^{(n+1)}(\xi + \theta(x-\xi)) \quad [0 < p \leqslant n; \ 0 < \theta < 1].$$

(Роше.)

6. $$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{\xi}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt.$$

0.318 Другие виды записи **ряда Тейлора**:

1. $$f(a+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(a) = f(a) + \frac{x}{1!} f'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

2. $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

[Ряд Маклорена.]

0.319 Ряд Тейлора для функций многих переменных:

$$f(x, y) = f(\xi, \eta) + (x-\xi)\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial x} + (y-\eta)\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left\{(x-\xi)^2 \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial x^2} + 2(x-\xi)(y-\eta)\frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial x \, \partial y} + (y-\eta)^2 \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial y^2}\right\} + \ldots$$

0.32 Тригонометрические ряды

0.320 Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом $2l$ абсолютно интегрируемая (хотя бы в несобственном смысле) в промежутке $(-l, l)$. *Рядом Фурье* этой функции называется тригонометрический ряд

1. $$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}+b_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

коэффициенты которого (*коэффициенты Фурье*) определяются по формулам:

2. $$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt=\frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

3. $$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt=\frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt \quad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Признаки сходимости

0.321 Ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к числу

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

если при некотором $h>0$ интеграл

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)|}{t}\,dt$$

существует. При этом предполагается, что функция $f(x)$ в точке x_0 либо непрерывна либо имеет с обеих сторон разрывы первого рода (скачки) и что оба предела $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ существуют. (Дини.) ФIII 524

0.322 Ряд Фурье периодической функции $f(x)$, удовлетворяющей на отрезке $[a, b]$ условиям Дирихле, сходится в каждой точке x_0 к значению $\frac{1}{2}\{f(x_0+0)+f(x_0-0)\}$. (Дирихле.)

Про функцию $f(x)$ говорят, что она *удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке* $[a, b]$, если она на этом отрезке ограничена и если отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число интервалов, внутри каждого из которых функция $f(x)$ непрерывна и монотонна.

0.323 Ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к $\frac{1}{2}\{f(x_0+0)+f(x_0-0)\}$, если в некотором промежутке $(x_0-h,\ x_0+h)$ с центром в этой точке функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение. (Жордан-Дирихле.) ФIII 528

Определение функции с ограниченным изменением. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором отрезке $[a, b]$ где $a<b$. Разобьем этот отрезок произвольным образом на части с помощью точек деления.

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

и образуем сумму

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|.$$

Различным способам деления отрезка $[a, b]$ (т. е. различному выбору точек деления x_i) соответствуют, вообще говоря, различные суммы. Если эти суммы в их совокупности ограничены сверху, то говорят что функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет *ограниченное изменение* (или *ограниченную вариацию*). Точную верхнюю грань этих сумм называют *полным изменением* (или *полной вариацией*) функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. ФIII 91

0.324 Пусть функция $f(x)$ кусочно непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в каждом отрезке непрерывности имеет кусочно непрерывную производную. Тогда в каждой точке x_0 отрезка $[a, b]$ ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится к $\frac{1}{2}\{f(x_0+0)+f(x_0-0)\}$.

0.325 Функцию $f(x)$, определенную в промежутке $(0, l)$, можно разложить в ряд по косинусам вида

1. $$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l},$$

где

2. $$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt.$$

0.326 Функцию $f(x)$, определенную в промежутке $(0, l)$, можно разложить в ряд по синусам вида

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

где

2. $$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt.$$

Признаки сходимости для рядов 0.325 1. и 0.326 1. аналогичны признакам сходимости для ряда 0.320 1. (см. 0.321—0.324).

0.327 Коэффициенты Фурье a_k и b_k (определяемые формулами 0.320 2. и 0.320 3.) абсолютно интегрируемой функции стремятся к нулю при $k\to\infty$.

Для функции $f(x)$, интегрируемой с квадратом в промежутке $(-l, l)$, выполняется *уравнение замкнутости*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx. \quad \text{(А. М. Ляпунов.)} \qquad \text{ФIII 705}$$

0.328 Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции, интегрируемые с квадратом в промежутке $(-l, l)$, а a_k, b_k и α_k, β_k — их коэффициенты Фурье. Для таких функций выполняется *обобщенное уравнение замкнутости* (*равенство Парсеваля*)

$$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\alpha_k+b_k\beta_k)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\varphi(x)\,dx. \qquad \text{ФIII 709}$$

Примеры тригонометрических рядов см. 1.44, 1.45.

0.33 Асимптотические ряды

0.330 Среди расходящихся рядов можно особо выделить обширный класс рядов, называемых асимптотическими или полусходящимися. Несмотря на то, что эти ряды расходятся, значения функций, которые они представляют могут быть вычислены с большой точностью, если взять сумму надлежащего числа членов этих рядов. У знакочередующихся асимптотических рядов наибольшая точность получается при обрыве ряда на том члене, который предшествует члену наименьшему по абсолютной величине; в этом случае погрешность (по своей абсолютной величине) не превышает абсолютной величины первого из отброшенных членов (сравни 0.227 3.).

Асимптотические ряды имеют очень много свойств, аналогичных свойствам сходящихся рядов, и играют поэтому большую роль в анализе.

Асимптотическое разложение функции обозначается так:

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n}.$$

Определение *асимптотического разложения*. Расходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{z^n}$ представляет собой асимптотическое разложение функции $f(z)$ в данной области значений $\arg z$, если выражение $R_n(z) = z^n [f(z) - S_n(z)]$, где $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{z^k}$, удовлетворяет условию. $\lim_{|z|\to\infty} R_n(z) = 0$ при определенном n.

Ф II 820

Расходящийся ряд, представляющий собой асимптотическое разложение некоторой функции, называется *асимптотическим рядом*.

0.331 Свойства асимптотических рядов:

1. Над асимптотическими рядами можно производить действия сложения, вычитания, умножения и возведения в степень, точно так же, как и над абсолютно сходящимися рядами, ряды, полученные в результате этих действий, будут также асимптотическими.

2. Два асимптотических ряда можно делить друг на друга при единственном условии, что первый член A_0 делителя не равняется нулю. Ряд, полученный при делении, будет также асимптотическим. Ф II 823—825

3. Асимптотический ряд можно почленно интегрировать, и полученный ряд будет также асимптотическим. Дифференцирование же асимптотического ряда, вообще говоря, недопустимо. Ф II 824

4. Одно и то же асимптотическое разложение может представлять собой разные функции. С другой стороны, данная функция может быть только единственным способом разложена в асимптотический ряд. УВ I 208

0.4 НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

0.41 Дифференцирование определенного интеграла по параметру

0.410
$$\frac{d}{da} \int_{\psi(a)}^{\varphi(a)} f(x, a)\,dx = f(\varphi(a), a) \frac{d\varphi(a)}{da} - f(\psi(a), a) \frac{d\psi(a)}{da} + \int_{\psi(a)}^{\varphi(a)} \frac{d}{da} f(x, a)\,dx.$$

Ф II 680

0.411 В частности:

1. $\frac{d}{da}\int_b^a f(x)\,dx = f(a).$

2. $\frac{d}{db}\int_b^a f(x)\,dx = -f(b).$

0.42 Производная n-го порядка от произведения (Правило Лейбница)

Пусть u и v — дифференцируемые n раз функции от x. Тогда

$$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = u\frac{d^nv}{dx^n} + \binom{n}{1}\frac{du}{dx}\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \binom{n}{3}\frac{d^3u}{dx^3}\frac{d^{n-3}v}{dx^{n-3}} + \ldots + v\frac{d^nu}{dx^n}$$

или, символически,

$$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = (u+v)^{(n)}.$$ Ф I 272

0.43 Производная n-го порядка от сложной функции

0.430 Если $f(x) = F(y)$ и $y = \varphi(x)$, то

1. $\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{U_1}{1!}F'(y) + \frac{U_2}{2!}F''(y) + \frac{U_3}{3!}F'''(y) + \ldots + \frac{U_n}{n!}F^{(n)}(y),$

где

$$U_k = \frac{d^n}{dx^n}y^k - \frac{k}{1!}y\frac{d^n}{dx^n}y^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!}y^2\frac{d^n}{dx^n}y^{k-2} - \ldots + (-1)^{k-1}ky^{k-1}\frac{d^ny}{dx^n}.$$

A (7361), Гу I_1 75

2. $\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \sum \frac{n!}{i!j!h!\ldots k!}\frac{d^mF}{dy^m}\left(\frac{y'}{1!}\right)^i\left(\frac{y''}{2!}\right)^j\left(\frac{y'''}{3!}\right)^h\ldots\left(\frac{y^{(l)}}{l!}\right)^k,$

причем знак $\sum$ должен быть распространен на все решения в целых положительных числах уравнения $i+2j+3h+\ldots+lk=n$, а $m=i+j+h+\ldots+k$. Гу $\mathrm{I}_1$77

0.431

1. $(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^{2n}}F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{n-1}{x^{2n-1}}\frac{n}{1!}F^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n-1)(n-2)}{x^{2n-2}}\frac{n(n-1)}{2!}F^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) + \ldots$ A (7362.1)

2. $(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}e^{\frac{a}{x}} = \frac{1}{x^n}e^{\frac{a}{x}}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^n + (n-1)\binom{n}{1}\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1} + (n-1)(n-2)\binom{n}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{n-2} + (n-1)(n-2)(n-3)\binom{n}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^{n-3} + \ldots\right\}.$

A (7362.2)

0.432

1. $$\frac{d^n}{dx^n}F(x^2)=(2x)^nF^{(n)}(x^2)+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}F^{(n-1)}(x^2)+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}F^{(n-2)}(x^2)+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{3!}(2x)^{n-6}F^{(n-3)}(x^2)+\ldots \quad \text{A (7363.1)}$$

2. $$\frac{d^n}{dx^n}e^{ax^2}=(2ax)^ne^{ax^2}\left\{1+\frac{n(n-1)}{1!(4ax^2)}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!(4ax^2)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{3!(4ax^2)^3}+\ldots\right\}. \quad \text{A (7363.2)}$$

3. $$\frac{d^n}{dx^n}(1+ax^2)^p=\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)(2ax)^n}{(1+ax^2)^{n-p}}\times$$
$$\times\left\{1+\frac{n(n-1)}{1!(p-n+1)}\frac{1+ax^2}{4ax^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!(p-n+1)(p-n+2)}\left(\frac{1+ax^2}{4ax^2}\right)^2+\ldots\right\}. \quad \text{A (7363.3)}$$

4. $$\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}=(-1)^{m-1}\frac{(2m-1)!!}{m}\sin(m\arccos x). \quad \text{A (7363.4)}$$

0.433

1. $$\frac{d^n}{dx^n}F\left(\sqrt{x}\right)=\frac{F^{(n)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^n}-\frac{n(n-1)}{1!}\frac{F^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+1}}+$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2!}\frac{F^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+2}}-\ldots \quad \text{A (7364.1)}$$

2. $$\frac{d^n}{dx^n}\left(1+a\sqrt{x}\right)^{2n-1}=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\frac{a}{\sqrt{x}}\left(a^2-\frac{1}{x}\right)^{n-1}. \quad \text{A (7364.2)}$$

0.434 $$\frac{d^n}{dx^n}y^p=p\binom{n-p}{n}\left\{-\binom{n}{1}\frac{1}{p-1}y^{p-1}\frac{d^ny}{dx^n}+\binom{n}{2}\frac{1}{p-2}y^{p-2}\frac{d^ny^2}{dx^n}-\ldots\right\}.$$
A (737.1)

0.435 $$\frac{d^n}{dx^n}\ln y=\binom{n}{1}\left\{\frac{1}{1\cdot y}\frac{d^ny}{dx^n}-\binom{n}{2}\frac{1}{2\cdot y^2}\frac{d^ny^2}{dx^n}+\binom{n}{3}\frac{1}{3\cdot y^3}\frac{d^ny^3}{dx^n}-\ldots\right\}.$$
A (737.2)

1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

1.1 СТЕПЕНИ БИНОМОВ

1.11 Степенные ряды

1.110 $(1+x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-k+1)}{k!}x^k + \ldots$

Если q не является ни натуральным числом, ни нулем, то ряд сходится абсолютно при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$; при $x = 1$ ряд сходится для $q > -1$ и расходится для $q \leqslant -1$; при $x = 1$ он сходится абсолютно для $q > 0$; при $x = -1$ он сходится абсолютно для $q > 0$ и расходится для $q < 0$; при $q = n$ натуральном ряд **1.110** превращается в конечную сумму **1.111**. ФП 425

1.111

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}.$$

1.112

1. $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1}$

(см. также **1.121** 2.).

2. $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} kx^{k-1}$.

3. $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots$

4. $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots$

1.113 $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k \qquad [x^2 < 1]$.

1.114

1. $\left(1+\sqrt{1+x}\right)^q = 2^q \left\{1 + \frac{q}{1!}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{q(q-3)}{2!}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \right.$
$\left. + \frac{q(q-4)(q-5)}{3!}\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \ldots \right\}$ [$x^2 < 1$, q — действительное число]. А (6351.1)

2. $$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^q = 1+\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^2(q^2-2^2)(q^2-4^2)\ldots[q^2-(2k)^2]\,x^{2k+2}}{(2k+2)!}+$$
$$+qx+q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(q^2-1^2)(q^2-3^2)\ldots[q^2-(2k-1)^2]}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$
$[x^2<1,\ q$ — действительное число$]$. А (6351.2)

1.12 Ряды рациональных дробей

1.121

1. $$\frac{x}{1-x}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}x^{2^{k-1}}}{1+x^{2^{k-1}}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} \qquad [x^2<1].$$ А (6350.3)

2. $$\frac{1}{x-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{x^{2^{k-1}}+1} \qquad [x^2>1].$$ А (6350.3)

1.2 ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

1.21 Представление в виде ряда

1.211

1. $$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

2. $$a^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^k}{k!}.$$

3. $$e^{-x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{k!}.$$

1.212 $$e^x(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k(k+1)}{k!}.$$

1.213 $$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}x^{2k}}{(2k)!} \qquad [x<2\pi].$$ Ф II 520

1.214 $$e^{e^x}=e\left(1+x+\frac{2x^2}{2!}+\frac{5x^3}{3!}+\frac{15x^4}{4!}+\ldots\right).$$ А (6460.3)

1.215

1. $$e^{\sin x}=1+x+\frac{x^2}{2!}-\frac{3x^4}{4!}-\frac{8x^5}{5!}+\frac{3x^6}{6!}+\frac{56x^7}{7!}+\ldots$$ А (6460.4)

2. $$e^{\cos x}=e\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}-\frac{31x^6}{6!}+\ldots\right).$$ А (6460.5)

3. $$e^{\operatorname{tg} x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{3x^3}{3!}+\frac{9x^4}{4!}+\frac{37x^5}{5!}+\ldots$$ А (6460.6)

1.216

1. $$e^{\arcsin x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{5x^4}{4!}+\ldots$$ А (6460.7)

2. $$e^{\operatorname{arctg} x}=1+x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{7x^4}{4!}-\ldots$$ А (6460.8)

1.217

1. $\pi \frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+k^2}$ (сравни **1.421** 3.). А (6707.1)

2. $\frac{2\pi}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{x^2+k^2}$ (сравни **1.422** 3.). А (6707.2)

1.22 Функциональные соотношения

1.221

1. $a^x = e^{x \ln a}$.

2. $a^{\log_a x} = a^{\frac{1}{\log_x a}} = x$.

1.222

1. $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$.

2. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

1.223 $e^{ax} - e^{bx} = (a-b)\, x \exp\left[\frac{1}{2}(a+b)\, x\right] \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(a-b)^2 x^2}{4k^2\pi^2}\right]$. МО 216

1.23 Ряды показательных функций

1.231 $\sum_{k=0}^{\infty} a^{kx} = \frac{1}{1-a^x}$ $[a > 1$ и $x < 0$ или $0 < a < 1$ и $x > 0]$.

1.232

1. $\operatorname{th} x = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2kx}$ $[x > 0]$.

2. $\operatorname{sech} x = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)x}$ $[x > 0]$.

3. $\operatorname{cosech} x = 2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)x}$ $[x > 0]$.

1.3—1.4 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1.30 Введение

Тригонометрический и гиперболический синус связаны соотношениями:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{i} \sin ix, \qquad \sin x = \frac{1}{i} \operatorname{sh} ix.$$

Тригонометрический и гиперболический косинусы связаны соотношениями:

$$\operatorname{ch} x = \cos ix, \qquad \cos x = \operatorname{ch} ix.$$

Благодаря такой двойственности каждому соотношению, в которое входят тригонометрические функции, формально можно поставить в соответствие некоторое соотношение, в которое входят соответствующие гиперболические функции, и наоборот, каждому соотношению, в которое входят гиперболические функции, формально можно поставить в соответствие некоторое соотношение, в которое входят тригонометрические функции. Во многих (однако не во всех) случаях обе пары соотношений действительно имеют смысл.

Идея двойственности соотношений проводится в приведенном ниже списке формул. Однако, в списке указаны не все «двойники», имеющие смысл.

1.31 Основные функциональные соотношения

1.311

1. $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = -i \operatorname{sh} ix.$
2. $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = -i \sin(ix).$
3. $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \operatorname{ch} ix.$
4. $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \cos ix.$
5. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{i} \operatorname{th} ix.$
6. $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{i} \operatorname{tg} ix.$
7. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = i \operatorname{cth} ix.$
8. $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{\operatorname{th} x} = i \operatorname{ctg} ix.$

1.312

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$
2. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$

1.313

1. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x.$
2. $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x.$
3. $\sin(x \pm iy) = \sin x \operatorname{ch} y \pm i \operatorname{sh} y \cos x.$
4. $\operatorname{sh}(x \pm iy) = \operatorname{sh} x \cos y \pm i \sin y \operatorname{ch} x.$
5. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$
6. $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$
7. $\cos(x \pm iy) = \cos x \operatorname{ch} y \mp i \sin x \operatorname{sh} y.$
8. $\operatorname{ch}(x \pm iy) = \operatorname{ch} x \cos y \pm i \operatorname{sh} x \sin y.$
9. $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$
10. $\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$
11. $\operatorname{tg}(x \pm iy) = \frac{\operatorname{tg} x \pm i \operatorname{th} y}{1 \mp i \operatorname{tg} x \operatorname{th} y}.$
12. $\operatorname{th}(x \pm iy) = \frac{\operatorname{th} x \pm i \operatorname{tg} y}{1 \pm i \operatorname{th} x \operatorname{tg} y}.$

1.314

1. $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x \pm y) \cos \frac{1}{2}(x \mp y).$
2. $\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{1}{2}(x \pm y) \operatorname{ch} \frac{1}{2}(x \mp y).$
3. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y).$
4. $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{1}{2}(x + y) \operatorname{ch} \frac{1}{2}(x - y).$

5. $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(y-x).$

6. $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{1}{2}(x+y) \operatorname{sh} \frac{1}{2}(x-y).$

7. $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}.$ 8. $\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}.$

1.315

1. $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y)\sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x.$
2. $\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{sh}(x+y)\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y.$
3. $\cos^2 x - \sin^2 y = \cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 y - \sin^2 x.$
4. $\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 y = \operatorname{ch}(x+y)\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 y.$

1.316

1. $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$ 2. $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{sh} nx + \operatorname{ch} ny$

[n — целое число].

1.317

1. $\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos x)}.$ 2. $\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x - 1)}.$

3. $\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos x)}.$ 4. $\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x + 1)}.$

5. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}.$ 6. $\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1}.$

Знак перед корнем в формулах 1.317 1., 1.317 2., 1.317 3. выбирается в соответствии со знаком левой части; знак же левой части зависит от значения x.

1.32 Выражение степеней тригонометрических и гиперболических функций через функции кратных аргументов (дуг)

1.320

1. $\sin^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k}\, 2 \binom{2n}{k} \cos 2(n-k)x + \binom{2n}{n} \right\}.$ Кр 56 (10,2)

2. $\operatorname{sh}^{2n} x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k}\, 2 \binom{2n}{k} \operatorname{ch} 2(n-k)x + \binom{2n}{n} \right\}.$

3. $\sin^{2n-1} x = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k-1} \binom{2n-1}{k} \sin(2n-2k-1)x.$

Кр 56 (10,4)

4. $\operatorname{sh}^{2n-1} x = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k-1} \binom{2n-1}{k} \operatorname{sh}(2n-2k-1)x.$

5. $\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} 2 \binom{2n}{k} \cos 2(n-k)x + \binom{2n}{n} \right\}.$ Кр 56 (10,1)

6. $\operatorname{ch}^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} 2 \binom{2n}{k} \operatorname{ch} 2(n-k)x + \binom{2n}{n} \right\}.$

7. $\cos^{2n-1} x = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} \cos(2n-2k-1)x.$ Кр 56 (10,3)

8. $\operatorname{ch}^{2n-1} x = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} \operatorname{ch}(2n-2k-1)x.$

Частные случаи

1.321

1. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(-\cos 2x + 1).$
2. $\sin^3 x = \frac{1}{4}(-\sin 3x + 3\sin x).$
3. $\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3).$
4. $\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x).$
5. $\sin^6 x = \frac{1}{32}(-\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10).$
6. $\sin^7 x = \frac{1}{64}(-\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x).$

1.322

1. $\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1).$
2. $\operatorname{sh}^3 x = \frac{1}{4}(\operatorname{sh} 3x - 3\operatorname{sh} x).$
3. $\operatorname{sh}^4 x = \frac{1}{8}(\operatorname{ch} 4x - 4\operatorname{ch} 2x + 3).$
4. $\operatorname{sh}^5 x = \frac{1}{16}(\operatorname{sh} 5x - 5\operatorname{sh} 3x + 10\operatorname{sh} x).$
5. $\operatorname{sh}^6 x = \frac{1}{32}(\operatorname{ch} 6x - 6\operatorname{ch} 4x + 15\operatorname{ch} 2x - 10).$
6. $\operatorname{sh}^7 x = \frac{1}{64}(\operatorname{sh} 7x - 7\operatorname{sh} 5x + 21\operatorname{sh} 3x - 35\operatorname{sh} x).$

1.323

1. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1).$
2. $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x).$
3. $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3).$
4. $\cos^5 x = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x).$
5. $\cos^6 x = \frac{1}{32}(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10).$
6. $\cos^7 x = \frac{1}{64}(\cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x).$

1.324

1. $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1).$

2. $\operatorname{ch}^3 x = \frac{1}{4}(\operatorname{ch} 3x + 3\operatorname{ch} x).$

3. $\operatorname{ch}^4 x = \frac{1}{8}(\operatorname{ch} 4x + 4\operatorname{ch} 2x + 3).$

4. $\operatorname{ch}^5 x = \frac{1}{16}(\operatorname{ch} 5x + 5\operatorname{ch} 3x + 10\operatorname{ch} x).$

5. $\operatorname{ch}^6 x = \frac{1}{32}(\operatorname{ch} 6x + 6\operatorname{ch} 4x + 15\operatorname{ch} 2x + 10).$

6. $\operatorname{ch}^7 x = \frac{1}{64}(\operatorname{ch} 7x + 7\operatorname{ch} 5x + 21\operatorname{ch} 3x + 35\operatorname{ch} x).$

1.33 Выражение тригонометрических и гиперболических функций кратных аргументов (дуг) через степени этих функций

1.331

1. $$\sin nx = n\cos^{n-1}x\sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x + \binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5 x - \ldots;$$
$$= \sin x\left\{2^{n-1}\cos^{n-1}x - \binom{n-2}{1}2^{n-3}\cos^{n-3}x + \right.$$
$$\left. + \binom{n-3}{2}2^{n-5}\cos^{n-5}x - \binom{n-4}{3}2^{n-7}\cos^{n-7}x + \ldots\right\}. \qquad \text{A (3.175).}$$

2. $$\operatorname{sh} nx = \operatorname{sh} x \sum_{k=1}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} \binom{n}{2k-1}\operatorname{sh}^{2k-2}x\operatorname{ch}^{n-2k+1}x;$$
$$= \operatorname{sh} x \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^k\binom{n-k-1}{k}2^{n-2k-1}\operatorname{ch}^{n-2k-1}x.$$

3. $$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x - \ldots;$$
$$= 2^{n-1}\cos^n x - \frac{n}{1}2^{n-3}\cos^{n-2}x +$$
$$+ \frac{n}{2}\binom{n-3}{1}2^{n-5}\cos^{n-4}x - \frac{n}{3}\binom{n-4}{2}2^{n-7}\cos^{n-6}x + \ldots \qquad \text{A (3.175)}$$

4. $$\operatorname{ch} nx = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \binom{n}{2k}\operatorname{sh}^{2k}x\operatorname{ch}^{n-2k}x =$$
$$= 2^{n-1}\operatorname{ch}^n x + n\sum_{k=1}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k\frac{1}{k}\binom{n-k-1}{k-1}2^{n-2k-1}\operatorname{ch}^{n-2k}x,$$

1.332

1. $$\sin 2nx = 2n\cos x\left\{\sin x - \frac{4n^2-2^2}{3!}\sin^3 x + \frac{(4n^2-2^2)(4n^2-4^2)}{5!}\sin^5 x - \ldots\right\};$$ A (3.171)

$$= (-1)^{n-1}\cos x\left\{2^{2n-1}\sin^{2n-1} x - \frac{2n-2}{1!}2^{2n-3}\sin^{2n-3} + \frac{(2n-3)(2n-4)}{2!}2^{2n-5}\sin^{2n-5} x - \frac{(2n-4)(2n-5)(2n-6)}{3!}2^{2n-7}\sin^{2n-7} x + \ldots\right\}.$$ A (3.173)

2. $$\sin(2n-1)x = (2n-1)\left\{\sin x - \frac{(2n-1)^2-1^2}{3!}\sin^3 x + \frac{[(2n-1)^2-1^2][(2n-1)^2-3^2]}{5!}\sin^5 x - \ldots\right\}.$$ A (3.172)

$$= (-1)^{n-1}\left\{2^{2n-2}\sin^{2n-1} x - \frac{2n-1}{1!}2^{2n-4}\sin^{2n-3} x + \frac{(2n-1)(2n-4)}{2!}2^{2n-6}\sin^{2n-5} x - \frac{(2n-1)(2n-5)(2n-6)}{3!}2^{2n-8}\sin^{2n-7} x + \ldots\right\}.$$ A (3.174)и

3. $$\cos 2nx = 1 - \frac{4n^2}{2!}\sin^2 x + \frac{4n^2(4n^2-2^2)}{4!}\sin^4 x - \frac{4n^2(4n^2-2^2)(4n^2-4^2)}{6!}\sin^6 x + \ldots;$$ A (3.171)

$$= (-1)^n\left\{2^{2n-1}\sin^{2n} x - \frac{2n}{1!}2^{2n-3}\sin^{2n-2} x + \frac{2n(2n-3)}{2!}2^{2n-5}\sin^{2n-4} - \frac{2n(2n-4)(2n-5)}{3!}2^{2n-7}\sin^{2n-6} + \ldots\right\}.$$ A (3.173)и

4. $$\cos(2n-1)x = \cos x\left\{1 - \frac{(2n-1)^2-1^2}{2!}\sin^2 x + \frac{[(2n-1)^2-1^2][(2n-1)^2-3^2]}{4!}\sin^4 x - \ldots\right\};$$ A (3.172)

$$= (-1)^{n-1}\cos x\left\{2^{2n-2}\sin^{2n-2} x - \frac{2n-3}{1!}2^{2n-4}\sin^{2n-4} x + \frac{(2n-4)(2n-5)}{2!}2^{2n-6}\sin^{2n-6} x - \frac{(2n-5)(2n-6)(2n-7)}{3!}2^{2n-3}\sin^{2n-8} x + \ldots\right\}.$$ A (3.174)

Пользуясь формулами и замечанием **1.30**, можно для $\operatorname{sh} 2nx$, $\operatorname{sh}(2n-1)x$, $\operatorname{ch} 2nx$, $\operatorname{ch}(2n-1)x$ написать формулы, аналогичные **1.332**, подобно тому, как это было сделано в формулах **1.331**.

Частные случаи

1.333

1. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.
2. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.
3. $\sin 4x = \cos x(4\sin x - 8\sin^3 x)$.

4. $\sin 5x = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x.$
5. $\sin 6x = \cos x\,(6\sin x - 32\sin^3 x + 32\sin^5 x).$
6. $\sin 7x = 7\sin x - 56\sin^3 x + 112\sin^5 x - 64\sin^7 x.$

1.334

1. $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x.$
2. $\operatorname{sh} 3x = 3\operatorname{sh} x + 4\operatorname{sh}^3 x.$
3. $\operatorname{sh} 4x = \operatorname{ch} x\,(4\operatorname{sh} x + 8\operatorname{sh}^3 x).$
4. $\operatorname{sh} 5x = 5\operatorname{sh} x + 20\operatorname{sh}^3 x + 16\operatorname{sh}^5 x.$
5. $\operatorname{sh} 6x = \operatorname{ch} x\,(6\operatorname{sh} x + 32\operatorname{sh}^3 x + 32\operatorname{sh}^5 x).$
6. $\operatorname{sh} 7x = 7\operatorname{sh} x + 56\operatorname{sh}^3 x + 112\operatorname{sh}^5 x + 64\operatorname{sh}^7 x.$

1.335

1. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$
2. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$
3. $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1.$
4. $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x.$
5. $\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1.$
6. $\cos 7x = 64\cos^7 x - 112\cos^5 x + 56\cos^3 x - 7\cos x.$

1.336

1. $\operatorname{ch} 2x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1.$
2. $\operatorname{ch} 3x = 4\operatorname{ch}^3 x - 3\operatorname{ch} x.$
3. $\operatorname{ch} 4x = 8\operatorname{ch}^4 x - 8\operatorname{ch}^2 x + 1.$
4. $\operatorname{ch} 5x = 16\operatorname{ch}^5 x - 20\operatorname{ch}^3 x + 5\operatorname{ch} x.$
5. $\operatorname{ch} 6x = 32\operatorname{ch}^6 x - 48\operatorname{ch}^4 x + 18\operatorname{ch}^2 x - 1.$
6. $\operatorname{ch} 7x = 64\operatorname{ch}^7 x - 112\operatorname{ch}^5 x + 56\operatorname{ch}^3 x - 7\operatorname{ch} x.$

1.34 Некоторые суммы тригонометрических и гиперболических функций

1.341

1. $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(x+ky) = \sin\left(x + \frac{n-1}{2}y\right)\sin\frac{ny}{2}\operatorname{cosec}\frac{y}{2}.$ А (361.8)

2. $\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(x+ky) = \operatorname{sh}\left(x + \frac{n-1}{2}y\right)\operatorname{sh}\frac{ny}{2}\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}.$

3. $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x+ky) = \cos\left(x + \frac{n-1}{2}y\right)\sin\frac{ny}{2}\operatorname{cosec}\frac{y}{2}.$ А (361.9)

4. $\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(x+ky) = \operatorname{ch}\left(x + \frac{n-1}{2}y\right)\operatorname{sh}\frac{ny}{2}\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}.$

5. $\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k\cos(x+ky) = \sin\left(x + \frac{2n-1}{2}y\right)\sin ny\sec\frac{y}{2}.$ Жл (202)

6. $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sin(x+ky)=\sin\left\{x+\frac{n-1}{2}(y+\pi)\right\}\sin\frac{n(y+\pi)}{2}\sec\frac{y}{2}.$

Жл (202а)

Частные случаи

1.342

1. $\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2}.$ A (361.1)

2. $\sum_{k=0}^{n}\cos kx=\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2}+1=\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x\operatorname{cosec}\frac{x}{2}.$

A (361.2)

3. $\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x=\sin^2 nx\operatorname{cosec}x.$ A (361.7)

4. $\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x=\frac{1}{2}\sin 2nx\operatorname{cosec}x.$ Жл (207)

1.343

1. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos kx=-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\cos\frac{x}{2}}.$ A (361.11)

2. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sin(2k-1)x=(-1)^{n+1}\frac{\sin 2nx}{2\cos x}.$ A (361.10)

3. $\sum_{k=1}^{n}\cos(4k-3)x+\sum_{k=1}^{n}\sin(4k-1)x=$

$=\sin 2nx(\cos 2nx+\sin 2nx)(\cos x+\sin x)\operatorname{cosec}2x.$ Жл (208)

1.344

1. $\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}.$ A (361.19)

2. $\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2\pi k^2}{n}=\frac{\sqrt{n}}{2}\left(1+\cos\frac{n\pi}{2}-\sin\frac{n\pi}{2}\right).$ A (361.18)

3. $\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2\pi k^2}{n}=\frac{\sqrt{n}}{2}\left(1+\cos\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}\right).$ A (361.17)

1.35 Суммы степеней кратных дуг

1.351

1. $\sum_{k=1}^{n}\sin^2 kx=\frac{1}{4}[(2n+1)\sin x-\sin(2n+1)x]\operatorname{cosec}x;$

$=\frac{n}{2}-\frac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}.$ A (361.3)

2. $$\sum_{k=1}^{n} \cos^2 kx = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\cos nx \sin (n+1)x \operatorname{cosec} x;$$
$$= \frac{n}{2} + \frac{\cos (n+1)x \sin nx}{2\sin x}.$$ А (361.4)и

3. $$\sum_{k=1}^{n} \sin^3 kx = \frac{3}{4}\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{nx}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2} -$$
$$-\frac{1}{4}\sin\frac{3(n+1)x}{2}\sin\frac{3nx}{2}\operatorname{cosec}\frac{3x}{2}.$$ Жл (210)

4. $$\sum_{k=1}^{n} \cos^3 kx = \frac{3}{4}\cos\frac{n+1}{2}x \sin\frac{nx}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2} +$$
$$+\frac{1}{4}\cos\frac{3(n+1)}{2}x \sin\frac{3nx}{2}\operatorname{cosec}\frac{3x}{2}.$$ Жл (211)и

5. $$\sum_{k=1}^{n} \sin^4 kx = \frac{1}{8}[3n - 4\cos (n+1)x \sin nx \operatorname{cosec} x +$$
$$+\cos 2(n+1)x \sin 2nx \operatorname{cosec} 2x].$$ Жл (212)

6. $$\sum_{k=1}^{n} \cos^4 kx = \frac{1}{8}[3n + 4\cos (n+1)x \sin nx \operatorname{cosec} x +$$
$$+\cos 2(n+1)x \sin 2nx \operatorname{cosec} 2x].$$ Жл (213)

1.352

1. $$\sum_{k=1}^{n-1} k\sin kx = \frac{\sin nx}{4\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{n\cos\frac{2n-1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$ А (361.5)

2. $$\sum_{k=1}^{n-1} k\cos kx = \frac{n\sin\frac{2n-1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1-\cos nx}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$ А (361.6)

1.353

1. $$\sum_{k=1}^{n-1} p^k \sin kx = \frac{p\sin x - p^n \sin nx + p^{n+1}\sin (n-1)x}{1-2p\cos x + p^2}.$$ А (361.12)и

2. $$\sum_{k=1}^{n-1} p^k \operatorname{sh} kx = \frac{p\operatorname{sh} x - p^n \operatorname{sh} nx + p^{n+1}\operatorname{sh} (n-1)x}{1-2p\operatorname{ch} x + p^2}.$$

3. $$\sum_{k=0}^{n-1} p^k \cos kx = \frac{1-p\cos x - p^n \cos nx + p^{n+1}\cos (n-1)x}{1-2p\cos x + p^2}.$$ А (361.13)и

4. $$\sum_{k=0}^{n-1} p^k \operatorname{ch} kx = \frac{1-p\operatorname{ch} x - p^n \operatorname{ch} nx + p^{n+1}\operatorname{ch} (n-1)x}{1-2p\operatorname{ch} x + p^2}.$$ Жл (396)

1.36 Суммы произведений тригонометрических функций кратных дуг

1.361

1. $$\sum_{k=1}^{n} \sin kx \sin (k+1) x = \frac{1}{4}[(n+1)\sin 2x - \sin 2(n+1)x] \operatorname{cosec} x.$$ Жл (214)

2. $$\sum_{k=1}^{n} \sin kx \sin (k+2) x = \frac{n}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos (n+3) x \sin nx \operatorname{cosec} x.$$ Жл (216)

3. $$\sum_{k=1}^{n} \sin kx \cos (2k-1) y = \sin\left\{ny + \frac{n+1}{2}x\right\} \sin\frac{n(x+2y)}{2} \operatorname{cosec}\frac{x+2y}{2} - \sin\left\{ny - \frac{n+1}{2}x\right\} \sin\frac{n(2y-x)}{2} \operatorname{cosec}\frac{2y-x}{2}.$$ Жл (217)

1.362

1. $$\sum_{k=1}^{n} \left(2^k \sin^2\frac{x}{2^k}\right)^2 = \left(2^n \sin\frac{x}{2^n}\right)^2 - \sin^2 x.$$ А (361.15)

2. $$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^k}\sec\frac{x}{2^k}\right)^2 = \operatorname{cosec}^2 x - \left(\frac{1}{2^n}\operatorname{cosec}\frac{x}{2^n}\right)^2.$$ А (361.14)

1.37 Суммы тангенсов кратных дуг

1.371

1. $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - 2\operatorname{ctg} 2x.$$ А (361.16)

2. $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2k}}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2^k} = \frac{2^{2n+2}-1}{3\cdot 2^{2n-1}} + 4\operatorname{ctg}^2 2x - \frac{1}{2^{2n}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}.$$ А (361.20)

1.38 Суммы, приводящие к гиперболическим тангенсам и к гиперболическим котангенсам

1.381

1. $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{th} x \dfrac{1}{n\sin^2\dfrac{2k+1}{4n}\pi}}{1+\dfrac{\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{tg}^2\dfrac{2k+1}{4n}\pi}} = \operatorname{th} 2nx.$$ Жл (402)и

2. $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\operatorname{th} x \dfrac{1}{n\sin^2\dfrac{k\pi}{2n}}}{1+\dfrac{\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{tg}^2\dfrac{k\pi}{2n}}} = \operatorname{cth} 2nx - \frac{1}{2n}(\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x).$$ Жл (403)

3. $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{th} x \dfrac{2}{(2n+1)\sin^2\dfrac{2k+1}{2(2n+1)}\pi}}{1+\dfrac{\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{tg}^2\dfrac{2k+1}{2(2n+1)}\pi}} = \operatorname{th}(2n+1)x - \frac{\operatorname{th} x}{2n+1}.$$ Жл (404)

4. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{th} x \dfrac{2}{(2n+1)\sin^2 \dfrac{k\pi}{(2n+1)}}}{1+\dfrac{\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{tg}^2 \dfrac{k\pi}{(2n+1)}}} = \operatorname{cth}(2n+1)x - \frac{\operatorname{cth} x}{2n+1}.$$ Жл (405)

1.382

1. $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\dfrac{\sin^2 \dfrac{2k+1}{4n}\pi}{\operatorname{sh} x} + \dfrac{1}{2}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}} = 2n \operatorname{th} nx.$$ Жл (406)

2. $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\dfrac{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2n}}{\operatorname{sh} x} + \dfrac{1}{2}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}} = 2n \operatorname{cth} nx - 2\operatorname{cth} x.$$ Жл (407)

3. $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\dfrac{\sin^2 \dfrac{2k+1}{2(2n+1)}\pi}{\operatorname{sh} x} + \dfrac{1}{2}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}} = (2n+1)\operatorname{th}\frac{(2n+1)x}{2} - \operatorname{th}\frac{x}{2}.$$ Жл (408)

4. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\dfrac{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2n+1}}{\operatorname{sh} x} + \dfrac{1}{2}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}} = (2n+1)\operatorname{cth}\frac{(2n+1)x}{2} - \operatorname{cth}\frac{x}{2}.$$ Жл (409)

1.39 Представление косинусов и синусов кратных дуг в виде конечных произведений

1.391

1. $$\sin nx = n \sin x \cos x \prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{n}}\right)$$ [n — четное]. Жл (568)

2. $$\cos nx = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}}\right)$$ [n — четное]. Жл (569)

3. $$\sin nx = n \sin x \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{n}}\right)$$ [n — нечетное]. Жл (570)

4. $$\cos nx = \cos x \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}}\right)$$ [n — нечетное]. Жл (571)и

1.392

1. $$\sin nx = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right).$$ Жл (548)

2. $$\cos nx = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \sin\left(x + \frac{2k-1}{2n}\pi\right).$$ Жл (549)

1.393

1. $$\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(x+\frac{2k}{n}\pi\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos nx \qquad [n \text{ — нечетно}];$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\left[(-1)^{\frac{n}{2}}-\cos nx\right] \qquad [n \text{ — четно}]. \qquad \text{Жл (543)}$$

2. $$\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{2k}{n}\pi\right)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}\sin nx \qquad [n\text{—нечетно}],$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}(1-\cos nx) \qquad [n \text{ — четно}]. \qquad \text{Жл (544)}$$

1.394 $$\prod_{k=0}^{n-1}\left\{x^2-2xy\cos\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)+y^2\right\}=x^{2n}-2x^ny^n\cos n\alpha+y^{2n}. \qquad \text{Жл (573)}$$

1.395

1. $$\cos nx-\cos ny=2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left\{\cos\quad-\cos x\left(y+\frac{2k\pi}{n}\right)\right\}. \qquad \text{Жл (572)}$$

2. $$\operatorname{ch} nx-\cos ny=2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left\{\operatorname{ch} x-\cos\left(y+\frac{2k\pi}{n}\right)\right\}. \qquad \text{Жл (538)}$$

1.396

1. $$\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)=\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}. \qquad \text{Кр 58 (28.1)}$$

2. $$\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)=\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}. \qquad \text{Кр 58 (28.2)}$$

3. $$\prod_{k=1}^{n}\left(x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)=\frac{x^{2n+1}-1}{x+1}. \qquad \text{Кр 58 (28.3)}$$

4. $$\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+1\right)=x^{2n}+1. \qquad \text{Кр 58 (28.4)}$$

1.41 Разложение тригонометрических и гиперболических функций в степенные ряды

1.411

1. $$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

2. $$\operatorname{sh} x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

3. $$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

4. $$\operatorname{ch} x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

5. $\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} |B_{2k}| x^{2k-1} \quad \left[x^2 < \frac{\pi^2}{4}\right].$ Ф II 523

6. $\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17}{315}x^7 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1} \quad \left[x^2 < \frac{\pi^2}{4}\right].$

7. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}|B_{2k}|}{(2k)!} x^{2k-1} \quad [x^2 < \pi^2].$ Ф II 523и

8. $\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \ldots = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1} \quad [x^2 < \pi^2].$ Ф II 522и

9. $\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k)!} x^{2k} \quad \left[x^2 < \frac{\pi^2}{4}\right].$ Ч 330и

10. $\operatorname{sech} x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} - \frac{61x^6}{720} + \ldots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \quad \left[x^2 < \frac{\pi^2}{4}\right].$ Ч 330

11. $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(2^{2k-1}-1)|B_{2k}|x^{2k-1}}{(2k)!} \quad [x^2 < \pi^2].$ Ч 329и

12. $\operatorname{cosech} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{6}x + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + \ldots = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(2^{2k-1}-1)B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}$ $[x^2 < \pi^2].$ Жл (418)

1.412

1. $\sin^2 x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}x^{2k}}{(2k)!}.$ Жл (452)и

2. $\cos^2 x = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}x^{2k}}{(2k)!}.$ Жл (443)

3. $\sin^3 x = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3^{2k+1}-3}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$ Жл (452а)и

4. $\cos^3 x = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(3^{2k}+3)x^{2k}}{(2k)!}.$ Жл (443а)

1.413

1. $\operatorname{sh} x = \operatorname{cosec} x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k}x^{4k-2}}{(4k-2)!}.$ Жл (508)

2. $\operatorname{ch} x = \sec x + \sec x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}x^{4k}}{(4k)!}.$ Жл (507)

3. $\operatorname{sh} x = x \sec x - \sec x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sec x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{E\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{2^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$ Жл (510)

4. $\operatorname{ch} x = x \operatorname{cosec} x + \operatorname{cosec} x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} =$

$$= \operatorname{cosec} x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k\left(\frac{k-1}{2}\right)} \frac{2^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}. \qquad \text{Жл (509)}$$

1.414

1. $\cos[n \ln(x + \sqrt{1+x^2})] =$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(n^2+0^2)(n^2+2^2)\ldots[n^2+(2k)^2]}{(2k+2)!} x^{2k+2} \quad [x^2 < 1]. \qquad \text{А (6456.1)}$$

2. $\sin[n \ln(x + \sqrt{1+x^2})] =$

$$= nx - n^2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(n^2+1^2)(n^2+3^2)\ldots[n^2+(2k-1)^2]\, x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad [x^2 < 1]. \qquad \text{А (6456.2)}$$

Степенные ряды для $\ln \sin x$, $\ln \cos x$ и $\ln \operatorname{tg} x$ см. 1.518.

1.42 Разложение на простейшие дроби

1.421

1. $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \frac{4x}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 - x^2}.$ Бр$_{08}$ (191), А (6495.1)

2. $\operatorname{th} \frac{\pi x}{2} = \frac{4x}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 + x^2}.$

3. $\operatorname{ctg} \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - k^2} = \frac{1}{\pi x} + \frac{x}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k(x-k)}.$

А (6495.2), Жл (450а)

4. $\operatorname{cth} \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + k^2}$ (сравни 1.217 1.).

5. $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{2} = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(2k-1)^2 - x^2}{(1^2 - x^2)^2 (3^2 - x^2)^2 \ldots [(2k-1)^2 - x^2]^2}.$ Жл (450)

1.422

1. $\sec \frac{\pi x}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k-1}{(2k-1)^2 - x^2}.$ А (6495.3)и

2. $\sec^2 \frac{\pi x}{2} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2k-1-x)^2} + \frac{1}{(2k-1+x)^2} \right\}.$ Жл (451)и

3. $\operatorname{cosec} \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^2 - k^2}$ (см. также 1.217 2.). А (6495.4)и

4. $\operatorname{cosec}^2 \pi x = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2} = \frac{1}{\pi^2 x^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2 + k^2}{(x^2 - k^2)^2}.$ Жл (446)

5. $\dfrac{1+x\operatorname{cosec} x}{2x^2}=\dfrac{1}{x^2}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{(x^2-k^2\pi^2)}.$ Жл (449)

6. $\operatorname{cosec}\pi x=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left(\dfrac{1}{x-k}+\dfrac{1}{k}\right).$ Жл (450b)

1.423 $\dfrac{\pi^2}{4m^2}\operatorname{cosec}^2\dfrac{\pi}{m}+\dfrac{\pi}{4m}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{m}-\dfrac{1}{2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1-k^2m^2)^2}.$ Жл (477)

1.43 Представление в виде бесконечного произведения

1.431

1. $\sin x=x\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$ Э 149

2. $\operatorname{sh} x=x\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$ Э 148

3. $\cos x=\prod\limits_{k=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right).$ Э 149

4. $\operatorname{ch} x=\prod\limits_{k=0}^{\infty}\left(1+\dfrac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right).$ Э 149

1.432

1. $\cos x-\cos y=$

$$=2\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\sin^2\frac{y}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{(2k\pi+y)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2k\pi-y)^2}\right).$$ А (653.2)

2. $\operatorname{ch} x-\cos y=$

$$=2\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\sin^2\frac{y}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{(2k\pi+y)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(2k\pi-y)^2}\right).$$ А (653.1)

1.433 $\cos\dfrac{\pi x}{4}-\sin\dfrac{\pi x}{4}=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^k x}{2k-1}\right].$ $Бр_{08}$ 189

1.434 $1+\sin x=\dfrac{1}{8}(\pi+2x)^2\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left[1-\left(\dfrac{\pi+2x}{2k\pi}\right)^2\right]^2.$ МО 216

1.435 $\dfrac{\sin\pi(x+a)}{\sin\pi a}=\dfrac{x+a}{a}\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x}{k-a}\right)\left(1+\dfrac{x}{k+a}\right).$ МО 216

1.436 $1-\dfrac{\sin^2\pi x}{\sin^2\pi a}=\prod\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left[1-\left(\dfrac{x}{k-a}\right)^2\right].$ МО 216

1.437 $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}=-\prod\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left[1-\left(\dfrac{2x}{x+k\pi}\right)^2\right].$ МО 216

1.438 $\frac{\operatorname{ch} x - \cos a}{1 - \cos a} = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{x}{2k\pi + a} \right)^2 \right].$ МО 216

1.439

1. $\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k}$ $[|x| < 1]$. А (651), МО 216

2. $\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4}{3} \sin^2 \left(\frac{x}{3^k} \right) \right].$ МО 216

1.44—1.45 Тригонометрические ряды

1.441

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2}$ $[0 < x < 2\pi]$. Ф III 539

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2(1 - \cos x)}$ $[0 < x < 2\pi]$. Ф III 550 *и*, А (6814)

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin kx}{k} = \frac{x}{2}$ $[-\pi < x < \pi]$. Ф III 542

4. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos kx}{k} = \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)$ $[-\pi < x < \pi]$. Ф III 550

1.442

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (2k-1) x}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$ $[0 < x < \pi]$. Ф III 541

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos (2k-1) x}{2k-1} = \frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ $[0 < x < \pi]$. Бр_{08} 168, Жл(266), ГК III(195)

3. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin (2k-1) x}{2k-1} = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$ $\left[-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right].$

Бр_{08} 168, Жл (268) *и*

4. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos (2k-1) x}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$ $[0 < x < \pi]$. Бр_{08} 168, Жл (269)

1.443

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi x}{k^{2n}} = (-1)^{n-1} 2^{2n-1} \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} \sum_{k=0}^{2n}{}' (-1)^k \binom{2n}{k} B_{2n-k} \varrho^k;$

$$= (-1)^{n-1} \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} \left(\frac{x}{2} \right)$$

$\left[0 < x < 1, \varrho = \frac{x}{2} - E \left(\frac{x}{2} \right) \right].$ Ч 340, Ге 71

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi x}{k^{2n+1}} = (-1)^n 2^{2n} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \binom{2n+1}{k} B_{2n-k+1} \varrho^k;$$
$$= (-1)^n \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!} B_{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\left[0 < x < 1;\ \varrho = \frac{x}{2} - E\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$ Ч 340

3. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4} \qquad [0 \leqslant x \leqslant 2\pi].$$ Ф III 547

4. $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} \qquad [-\pi \leqslant x \leqslant \pi].$$ Ф III 544

5. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3} = \frac{\pi^2 x}{6} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{x^3}{12}$$ А (6816)

6. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2 x^2}{12} + \frac{\pi x^3}{12} - \frac{x^4}{48} \qquad [0 \leqslant x \leqslant 2\pi].$$ А (6817)

7. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^5} = \frac{\pi^4 x}{90} - \frac{\pi^2 x^3}{36} + \frac{\pi x^4}{48} - \frac{x^5}{240}$$ А (6818)

1.444

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2(k+1)x}{k(k+1)} = \sin 2x - (\pi - 2x)\sin^2 x - \sin x \cos x \ln(4\sin^2 x)$$
$$[0 \leqslant x \leqslant \pi].$$ Бр$_{08}$ 168, ГК III (190)

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2(k+1)x}{k(k+1)} = \cos 2x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin 2x + \sin^2 x \ln(4\sin^2 x)$$
$$[0 \leqslant x \leqslant \pi].$$ Бр$_{08}$ 168

3. $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k+1)x}{k(k+1)} = \sin x - \frac{x}{2}(1+\cos x) - \sin x \ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|.$$ МО 213

4. $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(k+1)x}{k(k+1)} = \cos x - \frac{x}{2}\sin x - (1+\cos x)\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|.$$ МО 213

5. $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{4}x \qquad \left[-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right];$$
$$= \frac{\pi}{4}(\pi - x) \qquad \left[\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi\right].$$ МО 213

6. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right) \qquad [-\pi \leqslant x \leqslant \pi].$$ Ф III 546

7. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\sin x \qquad \left[0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right].$$ Жл (591)

1.445

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{k^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} \alpha(\pi-x)}{\operatorname{sh} \alpha\pi}$ $[0 < x < 2\pi]$. Бр$_{08}$ 257, Жл (411)

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{\operatorname{ch} \alpha(\pi-x)}{\operatorname{sh} \alpha\pi} - \frac{1}{2\alpha^2}$ $[0 < x < 2\pi]$. Бр$_{08}$ 257, Жл (410)

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kx}{k^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{sh} \alpha\pi} - \frac{1}{2\alpha^2}$ $[-\pi \leqslant x \leqslant \pi]$. Ф III 546

4. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k \sin kx}{k^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \alpha\pi}$ $[-\pi < x < \pi]$. Ф III 546

5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \sin kx}{k^2-\alpha^2} = \pi \frac{\sin\{\alpha[(2m+1)\pi - x]\}}{2 \sin \alpha\pi}$

$[2m\pi \leqslant x \leqslant (2m+1)\pi$, α не равно целому числу$]$ МО 213

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2} \frac{\cos[\alpha\{(2m+1)\pi - x\}]}{\alpha \sin \alpha\pi}$

$[2m\pi \leqslant x \leqslant (2m+1)\pi$, α не равно целому числу$]$. МО 213

7. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k \sin kx}{k^2-\alpha^2} = \pi \frac{\sin[\alpha(2m\pi - x)]}{2 \sin \alpha\pi}$

$[(2m-1)\pi \leqslant x \leqslant (2m+1)\pi$, α не равно целому числу$]$. Ф III 545 *и*

8. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2} \frac{\cos[\alpha(2m\pi - x)]}{\alpha \sin \alpha\pi}$

$[(2m-1)\pi \leqslant x \leqslant (2m+1)\pi$, α не равно целому числу$]$. Ф III 545 *и*

1.446

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos(2k+1)x}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{\pi}{8} \cos^2 x - \frac{1}{3} \cos x$$

$\left[-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right]$. Бр$_{08}$ 256, ГК III (189)

1.447

1. $\sum_{k=1}^{\infty} p^k \sin kx = \frac{p \sin x}{1 - 2p \cos x + p^2}$ Ф II 559

2. $\sum_{k=0}^{\infty} p^k \cos kx = \frac{1 - p \cos x}{1 - 2p \cos x + p^2}$ $[|p| < 1]$. Ф II 559 *и*

3. $1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} p^k \cos kx = \frac{1 - p^2}{1 - 2p \cos x + p^2}$ Ф II 559 *и*, МО 213

1.448

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k \sin kx}{k} = \operatorname{arctg} \frac{p \sin x}{1 - p \cos x}$ Ф II 559

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k \cos kx}{k} = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2p \cos x + p^2}}$ Ф II 559

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{2k-1} \sin (2k-1) x}{2k-1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2p \sin x}{1 - p^2}$ Жл (594)

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{2k-1} \cos (2k-1) x}{2k-1} = \frac{1}{4} \ln \frac{1 + 2p \cos x + p^2}{1 - 2p \cos x + p^2}$ Жл (259)

$[0 < x < 2\pi, \ p^2 \leqslant 1]$.

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} p^{2k-1} \sin (2k-1) x}{2k-1} = \frac{1}{4} \ln \frac{1 + 2p \sin x + p^2}{1 - 2p \sin x + p^2}$ Жл (261)

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} p^{2k-1} \cos (2k-1) x}{2k-1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2p \cos x}{1 - p^2}$ Жл (597)

$[0 < x < \pi, \ p^2 \leqslant 1]$.

1.449

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k \sin kx}{k!} = e^{p \cos x} \sin (p \sin x)$ Жл (486)

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k \cos kx}{k!} = e^{p \cos x} \cos (p \sin x)$ Жл (485)

$[p^2 \leqslant 1]$.

Разложение гиперболических функций в тригонометрические ряды

1.451

1. $\operatorname{sh} x = \cos x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1^2+0^2)(1^2+2^2) \ldots [1^2+(2k)^2]}{(2k+1)!} \sin^{2k+1} x.$ Жл (504)

2. $\operatorname{ch} x = \cos x + \cos x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1^2+1^2)(1^2+3^2) \ldots [1^2+(2k-1)^2]}{(2k)!} \sin^{2k} x.$ Жл (503)

1.452

$$\left.\begin{array}{ll}1.\ \operatorname{sh}(x\cos\theta)=\sec(x\sin\theta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}\cos(2k+1)\theta}{(2k+1)!} & \text{Жл (391)}\\ 2.\ \operatorname{ch}(x\cos\theta)=\sec(x\sin\theta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}\cos 2k\theta}{(2k)!} & \text{Жл (390)}\\ 3.\ \operatorname{sh}(x\cos\theta)=\operatorname{cosec}(x\sin\theta)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}\sin 2k\theta}{(2k)!} & \text{Жл (393)}\\ 4.\ \operatorname{ch}(x\cos\theta)=\operatorname{cosec}(x\sin\theta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}\sin(2k+1)\theta}{(2k+1)!} & \text{Жл (392)}\end{array}\right\}\ [x^2<1].$$

1.46 Ряды произведений показательных и тригонометрических функций

1.461

1. $$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt}\sin kx=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\operatorname{ch} t-\cos x}\quad [t>0].$$ МО 213

2. $$1+2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt}\cos kx=\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t-\cos x}\quad [t>0].$$ МО 213

1.462 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx\sin ky}{k}e^{-2k|t|}=\frac{1}{4}\ln\left[\frac{\sin^2\frac{x+y}{2}+\operatorname{sh}^2 t}{\sin^2\frac{x-y}{2}+\operatorname{sh}^2 t}\right].$$ МО 214

1.463

1. $$e^{x\cos\varphi}\cos(x\sin\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^n\cos n\varphi}{n!}\quad [x^2<1].$$ А (6476.1)

2. $$e^{x\cos\varphi}\sin(x\sin\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^n\sin n\varphi}{n!}\quad [x^2<1].$$ А (6476.2)

1.47 Ряды гиперболических функций

1.471

1. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh} kx}{k!}=e^{\operatorname{ch} x}\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x).$$ Жл (395)

2. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch} kx}{k!}=e^{\operatorname{ch} x}\operatorname{ch}(\operatorname{sh} x).$$ Жл (394)

1.472

1. $$\sum_{k=1}^{\infty}p^k\operatorname{sh} kx=\frac{p\operatorname{sh} x}{1-2p\operatorname{ch} x+p^2}\quad [p^2<1].$$ Жл (396)

2. $$\sum_{k=0}^{\infty}p^k\operatorname{ch} kx=\frac{1-p\operatorname{ch} x}{1-2p\operatorname{ch} x+p^2}\quad [p^2<1].$$ Жл (397)и

1.48 «Угол параллельности» Лобачевского $\Pi(x)$

1.480 Определение.

1. $\Pi(x) = 2\operatorname{arcctg} e^{x} = 2\operatorname{arctg} e^{-x} \quad [x \geqslant 0].$ Ло III 297, Ло I 120

2. $\Pi(x) = \pi - \Pi(-x) \quad [x < 0].$ Ло III 183, Ло I 93

1.481 Функциональные соотношения.

1. $\sin \Pi(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$ Ло III 297

2. $\cos \Pi(x) = \operatorname{th} x.$ Ло III 297

3. $\operatorname{tg} \Pi(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$ Ло III 297

4. $\operatorname{ctg} \Pi(x) = \operatorname{sh} x.$ Ло III 297

5. $\sin \Pi(x+y) = \frac{\sin \Pi(x) \sin \Pi(y)}{1 + \cos \Pi(x) \cos \Pi(y)}.$ Ло III 297

6. $\cos \Pi(x+y) = \frac{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)}{1 + \cos \Pi(x) \cos \Pi(y)}.$ Ло III 183

1.482 Связь с гудерманианом.

$$\operatorname{gd}(-x) = \Pi(x) - \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл (определенный) от угла параллельности см. 3.851.

1.49 Гиперболическая амплитуда (гудерманиан) $\operatorname{gd} x$

1.490 Определение.

1. $\operatorname{gd} x = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = 2\operatorname{arctg} e^{x} - \frac{\pi}{2}.$ ЯЭ 73

2. $x = \int_0^{\operatorname{gd} x} \frac{dt}{\cos t} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{gd} x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$ ЯЭ 73

1.491 Функциональные соотношения.

1. $\operatorname{ch} x = \sec(\operatorname{gd} x).$ А (343.1), ЯЭ 73

2. $\operatorname{sh} x = \operatorname{tg}(\operatorname{gd} x).$ А (343.2), ЯЭ 73

3. $e^{x} = \sec(\operatorname{gd} x) + \operatorname{tg}(\operatorname{gd} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{gd} x}{2}\right) = \frac{1 + \sin(\operatorname{gd} x)}{\cos(\operatorname{gd} x)}.$
А (343.3), А (344.5), ЯЭ 74*и*

4. $\operatorname{th} x = \sin(\operatorname{gd} x).$ А (344.3), ЯЭ 73

5. $\operatorname{th} \frac{x}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{gd} x\right).$ А (344.4), ЯЭ 74

6. $\operatorname{arctg}(\operatorname{th} x) = \frac{1}{2} \operatorname{gd} 2x.$ А (344.6)*и*

1.492 Если $\gamma = \operatorname{gd} x$, то $ix = \operatorname{gd} i\gamma.$ ЯЭ 74

1.493 Разложение в ряды.

1. $\frac{\operatorname{gd} x}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \operatorname{th}^{2k+1} \frac{x}{2}$. ЯЭ 74

2. $\frac{x}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \operatorname{tg}^{2k+1}\left(\frac{1}{2}\operatorname{gd} x\right)$. ЯЭ 74

3. $\operatorname{gd} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} - \frac{61x^7}{5040} + \ldots$ ЯЭ 74

4. $x = \operatorname{gd} x + \frac{(\operatorname{gd} x)^3}{6} + \frac{(\operatorname{gd} x)^5}{24} + \frac{61(\operatorname{gd} x)^7}{5040} + \ldots \quad \left[\operatorname{gd} x < \frac{\pi}{2}\right]$. ЯЭ 74

1.5 ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

1.51 Представление в виде ряда

1.511 $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \qquad [-1 < x \leqslant 1].$$

1.512

1. $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k} \qquad [0 < x \leqslant 2].$$

2. $\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right] =$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k-1} \qquad [0 < x].$$

3. $\ln x = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \ldots =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{x-1}{x}\right)^k \qquad \left[x \geqslant \frac{1}{2}\right].$$ А (644.6)

1.513

1. $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1} \qquad [x^2 < 1]$. Ф II 421

2. $\ln\frac{x+1}{x-1} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)x^{2k-1}} \qquad [x^2 > 1]$. А (644.9)

3. $\ln\frac{x}{x-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kx^k} \qquad [x^2 > 1]$. Жл (88а), Ф II 421

4. $\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \qquad [x^2 < 1]$. Жл (88b)

5. $\frac{1-x}{x} \ln \frac{1}{1-x} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}$ $[x^2 < 1]$. Жл (102)

6. $\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$ $[x^2 < 1]$. Жл (88е)

7. $\frac{(1-x)^2}{2x^3} \ln \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k(k+1)(k+2)}$ $[x^2 < 1]$. А (6445.1)

1.514 $\ln(1 - 2x\cos\varphi + x^2) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{k} x^k.$ МО 98, Ф II 485

$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \operatorname{Arsh} x$ см. **1.631**, **1.641**, **1.642**, **1.646**.

1.515

1. $\ln(1 + \sqrt{1+x^2}) = \ln 2 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} x^2 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} x^4 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} x^6 + \ldots;$

$$= \ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} \qquad [x^2 \leqslant 1]. \quad \text{Жл (91)}$$

2. $\ln(1 + \sqrt{1+x^2}) = \ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \cdot 3x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5x^5} - \ldots;$

$$= \ln x + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!}{2^{2k-1} \cdot k!\,(k-1)!\,(2k+1)\,x^{2k+1}}$$

$[x^2 \geqslant 1]$. А (644.4)

3. $\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) =$

$$= x - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k-1}(k-1)!\,k!}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad [x^2 < 1]. \quad \text{Жл (93)}$$

4. $\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ $[x^2 < 1]$. Жл (94)

1.516

1. $\frac{1}{2}\{\ln(1 \pm x)\}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mp 1)^{k+1} x^{k+1}}{k+1} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$ $[x^2 < 1]$. Жл (86), Жл (85)

2. $\frac{1}{6}\{\ln(1 + x)\}^3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{k+2}}{k+2} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}$ $[x^2 < 1]$. А (644.14)

3. $-\ln(1 + x) \cdot \ln(1 - x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k} \sum_{n=1}^{2k-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $[x^2 < 1]$. Жл (87)

4. $\frac{1}{4x}\left\{\frac{1+x}{\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + 2\ln(1-x)\right\} = \frac{1}{2x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(2k-1)\,2k\,(2k+1)}$

$[0 < x < 1]$. А (6445.2)

1.517

1. $$\frac{1}{2x}\left\{1-\ln(1+x)-\frac{1-x}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^{k-1}}{(2k-1)\,2k\,(2k+1)}\quad [0<x\leqslant 1].$$

А (6445.3)

2. $$\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{4k-2}}{2k-1}\sum_{n=1}^{2k-1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\quad [x^2<1].$$ Бр$_{08}$ 163

3. $$\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\ln(1+x^2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^{2k+1}}{2k+1}\sum_{n=1}^{2k}\frac{1}{n}\quad [x^2<1].$$ А (6455.3)

1.518

1. $$\ln\sin x=\ln x-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}-\ldots;$$
$$=\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k-1}B_{2k}x^{2k}}{k\,(2k)!}\quad [x^2<\pi^2].$$ А (643.1)u

2. $$\ln\cos x=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\frac{17x^8}{2520}-\ldots;$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)B_{2k}}{k\,(2k)!}x^{2k}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^{2k}x}{k}\quad\left[x^2<\frac{\pi^2}{4}\right].$$

Ф II 524

3. $$\ln\operatorname{tg} x=\ln x+\frac{x^2}{3}+\frac{7}{90}x^4+\frac{62}{2835}x^6+\frac{127}{18\,900}x^8+\ldots;$$
$$=\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2^{2k-1}-1)\,2^{2k}B_{2k}x^{2k}}{k\,(2k)!}\quad\left[x^2<\frac{\pi^2}{4}\right].$$ А (643.3)u

Степенные ряды для $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{n\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\}$ см. 1.414.

1.52 Ряды логарифмических функций (сравни 1.431)

1.521

1. $$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)=\ln\cos x.$$

2. $$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)=\ln\sin x-\ln x.$$

1.6 ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1.61 Область определения

Главные значения функций, обратных тригонометрическим, определяются неравенствами.

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi \qquad [-1 \leqslant x \leqslant 1]. \quad \text{Ф II 553}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}; \ 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi \qquad [-\infty < x < +\infty]. \quad \text{Ф II 552}$$

1.62—1.63 Функциональные соотношения

1.621 Связь обратных тригонометрических функций с одноименными тригонометрическими функциями

1. $\arcsin(\sin x) = x - 2n\pi \quad \left[2n\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right];$

$= -x + (2n+1)\pi \quad \left[(2n+1)\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right].$

2. $\arccos(\cos x) = x - 2n\pi \quad [2n\pi \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi],$

$= -x + 2(n+1)\pi \quad [(2n+1)\pi \leqslant x \leqslant 2(n+1)\pi].$

3. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - n\pi \quad \left[n\pi - \frac{\pi}{2} < x < n\pi + \frac{\pi}{2}\right].$

4. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x - n\pi \quad [n\pi < x < (n+1)\pi].$

1.622 Связь между обратными тригонометрическими функциями, обратными гиперболическими функциями и логарифмом.

1. $\arcsin z = \frac{1}{i}\ln(iz + \sqrt{1-z^2}) = \frac{1}{i}\operatorname{Arsh}(iz).$

2. $\arccos z = \frac{1}{i}\ln(z + \sqrt{z^2-1}) = \frac{1}{i}\operatorname{Arch} z.$

3. $\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1}{i}\operatorname{Arth}(iz).$

4. $\operatorname{arcctg} z = \frac{1}{2i}\ln\frac{iz-1}{iz+1} = i\operatorname{Arcth}(iz).$

5. $\operatorname{Arsh} z = \ln(z + \sqrt{z^2+1}) = \frac{1}{i}\arcsin(iz).$

6. $\operatorname{Arch} z = \ln(z + \sqrt{z^2-1}) = i\arccos z.$

7. $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{i}\operatorname{arctg} iz.$

8. $\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} = \frac{1}{i}\operatorname{arcctg}(-iz).$

Соотношения между различными обратными тригонометрическими функциями

1.623

1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$ Но 43

2. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$ Но 43

1.624

1. $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} \qquad [0 \leqslant x \leqslant 1];$

$= -\arccos\sqrt{1-x^2} \qquad [-1 \leqslant x \leqslant 0].$ Но 47 (5)

2. $\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad [x^2 < 1].$ Но 46 (2)

3. $\arcsin x = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad [0 < x \leqslant 1];$

$= \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi \qquad [-1 \leqslant x < 0].$ Но 49 (10)

4. $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} \qquad [0 \leqslant x \leqslant 1];$

$= \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2} \qquad [-1 \leqslant x \leqslant 0].$ Но 48 (6)

5. $\arccos x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad [0 < x \leqslant 1];$

$= \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad [-1 \leqslant x < 0].$ Но 48 (8)

6. $\arccos x = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad [-1 \leqslant x < 1].$ Но 46 (4)

7. $\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$ Но 6 (3)

8. $\operatorname{arctg} x = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad [x \geqslant 0];$

$= -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad [x \leqslant 0].$ Но 48 (7)

9. $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} \qquad [x > 0];$

$= \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} - \pi \qquad [x < 0].$ Но 49 (9)

10. $\operatorname{arcctg} x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad [x > 0];$

$= \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad [x < 0].$ Но 49 (11)

11. $\operatorname{arcctg} x = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$ Но 46 (4)

12. $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \qquad [x > 0];$

$= \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \qquad [x < 0].$ Но 49 (12)

1.625.

1. $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$

$[xy \leqslant 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leqslant 1];$

$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$

$[x > 0,\ y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1];$

$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$

$[x < 0,\ y < 0, \text{ и } x^2 + y^2 > 1].$ Но 54 (1), ГК I (880)

2. $\arcsin x + \arcsin y = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right)$ $[x \geqslant 0,\ y \geqslant 0]$;

$= -\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right)$ $[x < 0,\ y < 0]$. Но 55

3. $\arcsin x + \arcsin y = \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy}$

$[xy \leqslant 0$ или $x^2 + y^2 < 1]$;

$= \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy} + \pi$

$[x > 0,\ y > 0$ и $x^2 + y^2 > 1]$;

$= \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy} - \pi$

$[x < 0,\ y < 0$ и $x^2 + y^2 > 1]$. Но 56

4. $\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$

$[xy \geqslant 0$ или $x^2 + y^2 \leqslant 1]$;

$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$

$[x > 0,\ y < 0$ и $x^2 + y^2 > 1]$;

$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$

$[x < 0,\ y > 0$ и $x^2 + y^2 > 1]$. Но 55 (2)

5. $\arcsin x - \arcsin y = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} + xy\right)$ $[x > y]$;

$= -\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} + xy\right)$ $[x < y]$. Но 56

6. $\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$ $[x + y \geqslant 0]$;

$= 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$ $[x + y < 0]$. Но 57 (3)

7. $\arccos x - \arccos y = -\arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$ $[x \geqslant y]$;

$= \arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$ $[x < y]$. Но 57 (4)

8. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$ $[xy < 1]$;

$= \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$ $[x > 0,\ xy > 1]$;

$= -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$ $[x < 0,\ xy > 1]$. Но 59 (5), ГК I (879)

9. $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x-y}{1+xy}$ $[xy > -1]$;

$= \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x-y}{1+xy}$ $[x > 0,\ xy < -1]$;

$= -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x-y}{1+xy}$ $[x < 0,\ xy < -1]$. Но 59 (6)

1.626

1. $2 \arcsin x = \arcsin (2x\sqrt{1-x^2}) \qquad \left[|x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right];$

$= \pi - \arcsin (2x\sqrt{1-x^2}) \qquad \left[\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leqslant 1\right];$

$= -\pi - \arcsin (2x\sqrt{1-x^2}) \qquad \left[-1 \leqslant x < -\frac{1}{\sqrt{2}}\right].$

Но 61 (7)

2. $2 \arccos x = \arccos (2x^2 - 1) \qquad [0 \leqslant x \leqslant 1];$

$= 2\pi - \arccos (2x^2 - 1) \qquad [-1 \leqslant x < 0].$ Но 61 (8)

3. $2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \qquad [|x| < 1];$

$= \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} + \pi \qquad [x > 1];$

$= \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} - \pi \qquad [x < -1].$ Но 61 (9)

1.627

1. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad [x > 0];$

$= -\frac{\pi}{2} \qquad [x < 0].$ ГК I (878)

2. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4} \qquad [x > -1];$

$= -\frac{3}{4}\pi \qquad [x < -1].$ Но 62, ГК I (881)

1.628

1. $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = -\pi - 2 \operatorname{arctg} x \qquad [x < -1];$

$= 2 \operatorname{arctg} x \qquad [-1 \leqslant x \leqslant 1];$

$= \pi - 2 \operatorname{arctg} x \qquad [x > 1].$ Но 65

2. $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} x \qquad [x \geqslant 0];$

$= -2 \operatorname{arctg} x \qquad [x \leqslant 0].$ Но 66

1.629 $\frac{2x-1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{2x-1}{2}\pi\right) = E(x).$ ГК I (886)

1.631 Соотношения между обратными гиперболическими функциями.

1. $\operatorname{Arsh} x = \operatorname{Arch} \sqrt{x^2+1} = \operatorname{Arth} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$ ЯЭ 68

2. $\operatorname{Arch} x = \operatorname{Arsh} \sqrt{x^2-1} = \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$ ЯЭ 68

3. $\operatorname{Arth} x = \operatorname{Arsh} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arch} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcth} \frac{1}{x}.$ ЯЭ 68

4. $\operatorname{Arsh} x \pm \operatorname{Arsh} y = \operatorname{Arsh} (x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2}).$ ЯЭ 69

5. $\operatorname{Arch} x \pm \operatorname{Arch} y = \operatorname{Arch} (xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}).$ ЯЭ 69

6. $\operatorname{Arth} x \pm \operatorname{Arth} y = \operatorname{Arth} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}.$ ЯЭ 69

1.64 Представление в виде ряда

1.641

1. $$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots;$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1} = xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right) \quad [x^2 < 1].$$
Ф II 479

2. $$\operatorname{Arsh} x = x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 - \ldots;$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1};$$
$$= xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right) \quad [x^2 < 1].$$
Ф II 480

1.642

1. $$\operatorname{Arsh} x = \ln 2x + \frac{1}{2}\frac{1}{2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{4x^4} + \ldots;$$
$$= \ln 2x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(2k)!\, x^{-2k}}{2^{2k}(k!)^2\, 2k} \quad [x^2 > 1].$$
A (6480.2)u

2. $$\operatorname{Arch} x = \ln 2x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2\, 2k} x^{-2k} \quad [x^2 > 1].$$
A (6480.3)u

1.643

1. $$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots;$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \quad [x^2 \leqslant 1].$$
Ф II 479

2. $$\operatorname{Arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad [x^2 < 1].$$
A (6480.4)

1.644

1. $$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^k;$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{1+x^2}\right) \quad [x^2 < \infty].$$
A (641.3)

2. $$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots;$$
$$= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)x^{2k+1}} \quad [x^2 \geqslant 1]$$ (см. также 1.643).
A (641.4)

1.645

1. $$\operatorname{arcsec} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2\cdot 3x^3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5x^5} - \dots ;$$
$$= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!\, x^{-(2k+1)}}{(k!)^2\, 2^{2k}\, (2k+1)};$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{x^2}\right) \quad [x^2 > 1].$$ А (641.5)

2. $$(\arcsin x)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}\,(k!)^2 x^{2k+2}}{(2k+1)!\,(k+1)} \quad [x^2 \leqslant 1].$$ А (642.1), ГК III (152)и

3. $$(\arcsin x)^3 = x^3 + \frac{3!}{5!} 3^2 \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) x^5 + \frac{3!}{7!} 3^2\cdot 5^2 \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right) x^7 + \dots$$
$[x^2 \leqslant 1]$. Бр$_{08}$188, А (642.2), ГК III (153)и

1.646

1. $$\operatorname{Arsh} \frac{1}{x} = \operatorname{Arcosech} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}\,(k!)^2\,(2k+1)} x^{-2k-1} \quad [x^2 > 1].$$ А (6480.5)

2. $$\operatorname{Arch} \frac{1}{x} = \operatorname{Arsech} x = \ln \frac{2}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}\,(k!)^2 2k} x^{2k} \quad [0 < x < 1].$$ А (6480.6)

3. $$\operatorname{Arsh} \frac{1}{x} = \operatorname{Arcosech} x = \ln \frac{2}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k)!}{2^{2k}\,(k!)^2\, 2k} x^{2k} \quad [0 < x < 1].$$ А (6480.7)и

4. $$\operatorname{Arth} \frac{1}{x} = \operatorname{Arcth} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{-(2k+1)}}{2k+1} \quad [x^2 > 1].$$ А (6480.8)

2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

2.0 ВВЕДЕНИЕ

2.00 Замечания общего характера

Во всех формулах этого отдела постоянная интегрирования опущена. В силу этого знак равенства ($=$) в этом отделе означает, что функции, стоящие слева и справа от этого знака, отличаются на постоянную. Например (см. 201 15.), мы пишем

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arcctg} x,$$

хотя

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arcctg} x + \frac{\pi}{2}.$$

При интегрировании некоторых функций получается логарифм абсолютной величины $\left(\text{например, } \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)$. В таких формулах знак абсолютной величины в аргументе логарифма нами для простоты записи опущен.

В некоторых случаях существенно указать вполне определенную первообразную функцию. Такие первообразные функции, записанные в виде определенных интегралов, помещены не в разделе 2, а в других разделах.

К этим формулам близко примыкают формулы, у которых пределы интеграла и подынтегральная функция зависят от одного и того же параметра.

Ряд формул при некоторых значениях постоянных (параметров) или при некоторых соотношениях между этими постоянными теряет смысл (например, формула 2.02 8. при $n=-1$, формула 2.02 15. при $a=b$). Эти значения постоянных и соотношения между ними большей частью бывают совершенно ясно видны из самой структуры правой части формулы (не содержащей знака интеграла). Поэтому мы опускаем в этом разделе соответствующие оговорки. Однако, если при тех значениях параметров, при которых некоторая формула теряет смысл, значение интеграла дается с помощью другой формулы, то мы эту вторую формулу сопровождаем соответствующим разъяснением.

Буквы x, y, $t, \ldots$ означают независимые переменные; f, g, $\varphi, \ldots$ — функции от x, y, $t, \ldots$; f', g', $\varphi', \ldots$, f'', g'', $\varphi'', \ldots$ — их производные первого, второго и т. д. порядков; a, b, m, $p, \ldots$ — постоянные, под которыми следует, вообще говоря, разуметь любые действительные числа. Если какая-либо формула справедлива только при некоторых значениях постоянных (например, только при положительных, или только при целых числах), то делается соответствующая оговорка, если только данное ограничение не следует из самого вида формулы; так, в формулах 2.148 4. и 2.442 6 никаких оговорок не сделано, так как из самого их вида ясно, что n должно в них быть натуральным (т. е. целым положительным) числом.

2.01 Основные интегралы

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1).$

При $n = -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x.$

3. $\int e^x\,dx = e^x.$

4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}.$

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x.$

6. $\int \cos x\,dx = \sin x.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$

9. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \sec x.$

10. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cosec} x.$

11. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln \cos x.$

12. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln \sin x.$

13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x).$

15. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arcctg} x.$

16. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = -\arccos x.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$

20. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x.$

21. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x.$

22. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x.$

23. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x.$

24. $\int \operatorname{th} x\,dx = \ln \operatorname{ch} x.$

25. $\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln \operatorname{sh} x.$

26. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln \operatorname{th}\frac{x}{2}.$

2.02 Общие формулы

1. $\int af\,dx = a\int f\,dx$

2. $\int [af \pm b\varphi \pm c\psi \pm \dots]\,dx = a\int f\,dx \pm b\int \varphi\,dx \pm c\int \psi\,dx \pm \dots$

3. $\frac{d}{dx}\int f\,dx = f.$

4. $\int f'\,dx = f.$

5. $\int f'\varphi\,dx = f\varphi - \int f\varphi'\,dx$ [интегрирование по частям]

6. $\int f^{(n+1)}\varphi\,dx = \varphi f^{(n)} - \varphi' f^{(n-1)} + \varphi'' f^{(n-2)} - \dots + (-1)^n \varphi^{(n)} f +$

$$+ (-1)^{n+1}\int \varphi^{(n+1)} f\,dx$$

7. $\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(y)]\,\varphi'(y)\,dy \quad [x=\varphi(y)]$ [правило подстановки]

8. $\int (f)^n f'\,dx = \frac{(f)^{n+1}}{n+1}$

При $n = -1$

$$\int \frac{f'\,dx}{f} = \ln f.$$

9. $\int (af+b)^n f'\,dx = \frac{(af+b)^{n+1}}{a(n+1)}.$

10. $\int \frac{f'\,dx}{\sqrt{af+b}} = \frac{2\sqrt{af+b}}{a}.$

11. $\int \frac{f'\varphi - \varphi' f}{\varphi^2}\,dx = \frac{f}{\varphi}.$

12. $\int \frac{f'\varphi - \varphi' f}{f\varphi}\,dx = \ln\frac{f}{\varphi}.$

13. $\int \frac{dx}{f(f\pm\varphi)} = \pm\int \frac{dx}{f\varphi} \mp \int \frac{dx}{\varphi(f\pm\varphi)}.$

14. $\int \frac{f'\,dx}{\sqrt{f^2+a}} = \ln(f+\sqrt{f^2+a}).$

15. $\int \frac{f\,dx}{(f+a)(f+b)} = \frac{a}{a-b}\int \frac{dx}{(f+a)} - \frac{b}{a-b}\int \frac{dx}{(f+b)}.$

При $a = b$

$$\int \frac{f\,dx}{(f+a)^2} = \int \frac{dx}{f+a} - a\int \frac{dx}{(f+a)^2}.$$

16. $\int \frac{f\,dx}{(f+\varphi)^n} = \int \frac{dx}{(f+\varphi)^{n-1}} - \int \frac{\varphi\,dx}{(f+\varphi)^n}.$

17. $\int \frac{f'\,dx}{p^2+q^2f^2} = \frac{1}{pq}\operatorname{arctg}\frac{qf}{p}.$

18. $\int \frac{f'\,dx}{q^2f^2-p^2} = \frac{1}{2pq}\ln\frac{qf-p}{qf+p}.$

19. $\int \frac{f\,dx}{1-f} = -x + \int \frac{dx}{1-f}.$

20. $\int \frac{f^2\,dx}{f^2-a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{f\,dx}{f-a} + \frac{1}{2}\int \frac{f\,dx}{f+a}$.

21. $\int \frac{f'\,dx}{\sqrt{a^2-f^2}} = \arcsin\frac{f}{a}$.

22. $\int \frac{f'\,dx}{af^2+bf} = \frac{1}{b}\ln\frac{f}{af+b}$.

23. $\int \frac{f'\,dx}{f\sqrt{f^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{f}{a}$.

24. $\int \frac{(f'\varphi - f\varphi')\,dx}{f^2+\varphi^2} = \operatorname{arctg}\frac{f}{\varphi}$.

25. $\int \frac{(f'\varphi - f\varphi')\,dx}{f^2-\varphi^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{f-\varphi}{f+\varphi}$.

2.1 РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

2.10 Общие правила интегрирования

2.101 Чтобы проинтегрировать любую рациональную дробную функцию $\frac{F(x)}{f(x)}$, где $F(x)$ и $f(x)$ — многочлены, не имеющие общих множителей, нужно сначала выделить целую часть $E(x)$ ($E(x)$ — многочлен), если таковая имеется, и взять интеграл от целой части и интеграл от остатка

$$\int \frac{F(x)\,dx}{f(x)} = \int E(x)\,dx + \int \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx.$$

Интегрирование остатка, являющегося правильной дробной функцией (степень числителя меньше степени знаменателя), основывается на разложении ее на элементарные дроби.

2.102 Если $a, b, c, \ldots, m$ — корни уравнения $f(x)=0$, а $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu$ — их соответствующие кратности, так что $f(x)=(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-m)^\mu$, то $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ может быть разложена на следующие элементарные дроби:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = {} & \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \\ & + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + \frac{M_\mu}{(x-m)^\mu} + \frac{M_{\mu-1}}{(x-m)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{M_1}{x-m},\end{aligned}$$

где числители отдельных дробей определяются следующими формулами:

$$A_{\alpha-k+1} = \frac{\psi_1^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}, \quad B_{\beta-k+1} = \frac{\psi_2^{(k-1)}(b)}{(k-1)!}, \quad \ldots, \quad M_{\mu-k+1} = \frac{\psi_m^{(k-1)}(m)}{(k-1)!},$$

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi(x)(x-a)^\alpha}{f(x)}, \quad \psi_2(x) = \frac{\varphi(x)(x-b)^\beta}{f(x)}, \quad \ldots, \quad \psi_m(x) = \frac{\varphi(x)(x-m)^\mu}{f(x)}. \qquad \text{Т 51}u$$

Если $a, b, \ldots, m$ — простые корни, т. е. $\alpha=\beta=\ldots=\mu=1$, то

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{M}{x-m},$$

где

$$A=\frac{\varphi(a)}{f'(a)}\qquad B=\frac{\varphi(b)}{f'(b)},\ \ldots,\ M=\frac{\varphi(m)}{f'(m)}.$$

Если некоторые корни уравнения $f(x)=0$ мнимы, то, соединяя вместе элементарные дроби соответствующие сопряженным корням, можно после некоторых преобразований соответствующие пары дробей представить в виде действительных дробей вида

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+2Bx+C}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2Bx+C)^2}+\ldots+\frac{M_px+N_p}{(x^2+2Bx+C)^p}.$$

2.103 Таким образом, интегрирование правильной рациональной дроби $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ приводится к интегралам вида $\int\frac{g\,dx}{(x-a)^{\alpha}}$ или $\int\frac{Mx+N}{(A+2Bx+Cx^2)^p}dx$. Первые для $\alpha>1$ дают рациональные функции, для $\alpha=1$ — логарифмы; вторые — рациональные функции и логарифмы или арктангенсы:

1. $\int\frac{g\,dx}{(x-a)^{\alpha}}=g\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^{\alpha}}=-\frac{g}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}}.$

2. $\int\frac{g\,dx}{x-a}=g\int\frac{d(x-a)}{x-a}=g\ln|x-a|.$

3. $$\int\frac{Mx+N}{(A+2Bx+Cx^2)^p}dx=\frac{NB-MA+(NC-MB)x}{2(p-1)(AC-B^2)(A+2Bx+Cx^2)^{p-1}}+\frac{(2p-3)(NC-MB)}{2(p-1)(AC-B^2)}\int\frac{dx}{(A+2Bx+Cx^2)^{p-1}}.$$

4. $$\int\frac{dx}{A+2Bx+Cx^2}=\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\operatorname{arctg}\frac{Cx+B}{\sqrt{AC-B^2}}\qquad [AC>B^2];$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{B^2-AC}}\ln\left|\frac{Cx+B-\sqrt{B^2-AC}}{Cx+B+\sqrt{B^2-AC}}\right|\qquad [AC<B^2].$$

5. $$\int\frac{(Mx+N)\,dx}{A+2Bx+Cx^2}=\frac{M}{2C}\ln|A+2Bx+Cx^2|+\frac{NC-MB}{C\sqrt{AC-B^2}}\operatorname{arctg}\frac{Cx+B}{\sqrt{AC-B^2}}\qquad [AC>B^2];$$
$$=\frac{M}{2C}\ln|A+2Bx+Cx^2|+\frac{NC-MB}{2C\sqrt{B^2-AC}}\ln\left|\frac{Cx+B-\sqrt{B^2-AC}}{Cx+B+\sqrt{B^2-AC}}\right|\qquad [AC<B^2].$$

Метод Остроградского—Эрмита

2.104 При помощи метода Остроградского — Эрмита можно найти рациональную часть $\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx$ без нахождения корней уравнения $f(x)=0$ и без разложения на элементарные дроби:

$$\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx=\frac{M}{D}+\int\frac{N\,dx}{Q}.\qquad \text{ФП 49}$$

Здесь M, N, D, Q — целые рациональные функции от x, причем D — общий наибольший делитель функции $f(x)$ и ее производной $f'(x)$, $Q=\frac{f(x)}{D}$, M —

полином степени не выше $m-1$, если m — степень полинома D, и N — полином степени не выше $n-1$, если n — степень полинома Q. Коэффициенты полиномов M и N определяются путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x в следующем тождестве:

$$\varphi(x) = M'Q - M(T - Q') + ND,$$

где $T = \frac{f'(x)}{D}$, M' и Q' — производные полиномов и Q.

2.11—2.13 Формы, содержащие биномы $a + bx^k$

2.110 Формулы приведения для $z_k = a + bx^k$.

1. $$\int x^n z_k^m\,dx = \frac{x^{n+1} z_k^m}{km+n+1} + \frac{amk}{km+n+1}\int x^n z_k^{m-1}\,dx =$$ Ла 126 (4)

$$= \frac{x^{n+1}}{m+1}\sum_{s=0}^{p} \frac{(ak)^s (m+1)m(m-1)\ldots(m-s+1)\,z_k^{m-s}}{[mk+n+1][(m-1)k+n+1]\ldots[(m-s)k+n+1]} +$$

$$+ \frac{(ak)^{p+1} m(m-1)\ldots(m-p+1)(m-p)}{[mk+n+1][(m-1)k+n+1]\ldots[(m-p)k+n+1]}\int x^n z_k^{m-p-1}\,dx.$$

2. $$\int x^n z_k^m\,dx = \frac{-x^{n+1} z_k^{m+1}}{ak(m+1)} + \frac{km+k+n+1}{ak(m+1)}\int x^n z_k^{m+1}\,dx.$$ Ла 126 (6)

3. $$\int x^n z_k^m\,dx = \frac{x^{n+1} z_k^m}{n+1} - \frac{bkm}{n+1}\int x^{n+k} z_k^{m-1}\,dx.$$ Ла 125 (1)

4. $$\int x^n z_k^m\,dx = \frac{x^{n+1-k} z_k^{m+1}}{bk(m+1)} - \frac{n+1-k}{bk(m+1)}\int x^{n-k} z_k^{m+1}\,dx.$$ Ла 125 (2)

5. $$\int x^n z_k^m\,dx = \frac{x^{n+1-k} z_k^{m+1}}{b(km+n+1)} - \frac{a(n+1-k)}{b(km+n+1)}\int x^{n-k} z_k^m\,dx.$$ Ла 126 (3)

6. $$\int x^n z_k^m\,dx = \frac{x^{n+1} z_k^{m+1}}{a(n+1)} - \frac{b(km+k+n+1)}{a(n+1)}\int x^{n+k} z_k^m\,dx.$$ Ла 126 (5)

Формы, содержащие биномы $z_1 = a + bx$

2.111

1. $$\int z_1^m\,dx = \frac{z_1^{m+1}}{b(m+1)}.$$

При $m = -1$

$$\int \frac{dx}{z_1} = \frac{1}{b}\ln z_1.$$

2. $$\int \frac{x^n\,dx}{z_1^m} = \frac{x^n}{z_1^{m-1}(n+1-m)b} - \frac{na}{(n+1-m)b}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{z_1^m}.$$

При $n = m - 1$ можно применять формулу:

3. $$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{z_1^m} = -\frac{x^{m-1}}{z_1^{m-1}(m-1)b} + \frac{1}{b}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{z_1^{m-1}}.$$

При $m = 1$

$$\int \frac{x^n\,dx}{z_1} = \frac{x^n}{nb} - \frac{ax^{n-1}}{(n-1)b^2} + \frac{a^2x^{n-2}}{(n-2)b^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{a^{n-1}x}{1\cdot b^n} + \frac{(-1)^n a^n}{b^{n+1}}\ln z_1.$$

4. $$\int \frac{x^n\,dx}{z_1^2} = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{ka^{k-1}x^{n-k}}{(n-k)b^{k+1}} +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{a^n}{b^{n+1}z_1} + (-1)^{n+1}\frac{na^{n-1}}{b^{n+1}}\ln z_1.$$

2.112

1. $\int \frac{x\,dx}{z_1} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \ln z_1.$

2. $\int \frac{x^2\,dx}{z_1} = \frac{x^2}{2b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^3} \ln z_1.$

2.113

1. $\int \frac{dx}{z_1^2} = -\frac{1}{bz_1}.$

2. $\int \frac{x\,dx}{z_1^2} = -\frac{x}{bz_1} + \frac{1}{b^2} \ln z_1 = \frac{a}{b^2 z_1} + \frac{1}{b^2} \ln z_1.$

3. $\int \frac{x^2\,dx}{z_1^2} = \frac{x}{b^2} - \frac{a^2}{b^3 z_1} - \frac{2a}{b^3} \ln z_1.$

2.114

1. $\int \frac{dx}{z_1^3} = -\frac{1}{2bz_1^2}.$

2. $\int \frac{x\,dx}{z_1^3} = -\left[\frac{x}{b} + \frac{a}{2b^2}\right] \frac{1}{z_1^2}.$

3. $\int \frac{x^2\,dx}{z_1^3} = \left[\frac{2ax}{b^2} + \frac{3a^2}{2b^3}\right] \frac{1}{z^2} + \frac{1}{b^3} \ln z_1.$

4. $\int \frac{x^3\,dx}{z_1^3} = \left[\frac{x}{b} + 2\frac{a}{b^2} x^2 - 2\frac{a^2}{b^3} x - \frac{5}{2}\frac{a^3}{b^4}\right] \frac{1}{z_1^2} - 3\frac{a}{b^4} \ln z_1.$

2.115

1. $\int \frac{dx}{z_1^4} = -\frac{1}{3bz_1^3}.$

2. $\int \frac{x\,dx}{z_1^4} = -\left[\frac{x}{2b} + \frac{a}{6b^2}\right] \frac{1}{z_1^3}.$

3. $\int \frac{x^2\,dx}{z_1^4} = -\left[\frac{x^2}{b} + \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{3b^3}\right] \frac{1}{z_1^3}.$

4. $\int \frac{x^3 dx}{z_1^4} = \left[\frac{3ax^2}{b^2} + \frac{9a^2x}{2b^3} + \frac{11a^3}{6b^4}\right] \frac{1}{z_1^3} + \frac{1}{b^4} \ln z_1.$

2.116

1. $\int \frac{dx}{z_1^5} = -\frac{1}{4bz_1^4}.$

2. $\int \frac{x\,dx}{z_1^5} = -\left[\frac{x}{3b} + \frac{a}{12b^2}\right] \frac{1}{z_1^4}.$

3. $\int \frac{x^2\,dx}{z_1^5} = -\left[\frac{x^2}{2b} + \frac{ax}{3b^2} + \frac{a^2}{12b^3}\right] \frac{1}{z_1^4}.$

4. $\int \frac{x^3\,dx}{z_1^5} = -\left[\frac{x^3}{b} + \frac{3ax^2}{2b^2} + \frac{a^2x}{b^3} + \frac{a^3}{4b^4}\right] \frac{1}{z_1^4}.$

2.117

1. $\int \frac{dx}{x^n z_1^m} = -\frac{1}{(n-1)\,ax^{n-1}z_1^{m-1}} + \frac{b(2-n-m)}{a(n-1)} \int \frac{dx}{x^{n-1}z_1^m}.$

2. $\int \frac{dx}{z_1^m} = -\frac{1}{(m-1)\,bz_1^{m-1}}.$

3. $\int \frac{dx}{xz_1^m} = \frac{1}{z_1^{m-1}a(m-1)} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{xz_1^{m-1}}.$

4. $\int \frac{dx}{x^n z_1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k b^{k-1}}{(n-k)\,a^k x^{n-k}} + \frac{(-1)^n b^{n-1}}{a^n} \ln \frac{z_1}{x}.$

2.118

1. $\int \frac{dx}{xz_1} = -\frac{1}{a} \ln \frac{z_1}{x}$.
2. $\int \frac{dx}{x^2 z_1} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \ln \frac{z_1}{x}$.
3. $\int \frac{dx}{x^3 z_1} = -\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{a^2 x} - \frac{b^2}{a^3} \ln \frac{z_1}{x}$.

2.119

1. $\int \frac{dx}{xz_1^2} = \frac{1}{az_1} - \frac{1}{a^2} \ln \frac{z_1}{x}$.
2. $\int \frac{dx}{x^2 z_1^2} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{2b}{a^2}\right] \frac{1}{z_1} + \frac{2b}{a^3} \ln \frac{z_1}{x}$.
3. $\int \frac{dx}{x^3 z_1^2} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{2a^2 x} + \frac{3b^2}{a^3}\right] \frac{1}{z_1} - \frac{3b^2}{a^4} \ln \frac{z_1}{x}$.

2.121

1. $\int \frac{dx}{xz_1^3} = \left[\frac{3}{2a} + \frac{bx}{a^2}\right] \frac{1}{z_1^2} - \frac{1}{a^3} \ln \frac{z_1}{x}$.
2. $\int \frac{dx}{x^2 z_1^3} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{9b}{2a^2} + \frac{3b^2 x}{a^3}\right] \frac{1}{z_1^2} + \frac{3b}{a^4} \ln \frac{z_1}{x}$.
3. $\int \frac{dx}{x^3 z_1^3} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{2b}{a^2 x} + \frac{9b^2}{a^3} + \frac{6b^3 x}{a^4}\right] \frac{1}{z_1^2} - \frac{6b^2}{a^5} \ln \frac{z_1}{x}$.

2.122

1. $\int \frac{dx}{xz_1^4} = \left[\frac{11}{6a} + \frac{5bx}{2a^2} + \frac{b^2 x^2}{a^3}\right] \frac{1}{z_1^3} - \frac{1}{a^4} \ln \frac{z_1}{x}$.
2. $\int \frac{dx}{x^2 z_1^4} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{22b}{3a^2} + \frac{10b^2 x}{a^3} + \frac{4b^3 x^2}{a^4}\right] \frac{1}{z_1^3} + \frac{4b}{a^5} \ln \frac{z_1}{x}$.
3. $\int \frac{dx}{x^3 z_1^4} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{2a^2 x} + \frac{55b^2}{3a^3} + \frac{25b^3 x}{a^4} + \frac{10b^4 x^2}{a^5}\right] \frac{1}{z_1^3} - \frac{10b^2}{a^6} \ln \frac{z_1}{x}$.

2.123

1. $\int \frac{dx}{xz_1^5} = \left[\frac{25}{12a} + \frac{13bx}{3a^2} + \frac{7b^2 x^2}{2a^3} + \frac{b^3 x^3}{a^4}\right] \frac{1}{z_1^4} - \frac{1}{a^5} \ln \frac{z_1}{x}$.
2. $\int \frac{dx}{x^2 z_1^5} = \left[-\frac{1}{ax} - \frac{125b}{12a^2} - \frac{65b^2 x}{3a^3} - \frac{35b^3 x^2}{2a^4} - \frac{5b^4 x^3}{a^5}\right] \frac{1}{z_1^4} + \frac{5b}{a^6} \ln \frac{z_1}{x}$.
3. $\int \frac{dx}{x^3 z_1^5} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{a^2 x} + \frac{125b^2}{4a^3} + \frac{65b^3 x}{a^4} + \frac{105b^4 x^2}{2a^5} + \frac{15b^5 x^3}{a^6}\right] \frac{1}{z_1^4} - \frac{15b^2}{a^7} \ln \frac{z_1}{x}$.

2.124 Формы, содержащие биномы $z_2 = a + bx^2$.

1. $\int \frac{dx}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} x \sqrt{\frac{b}{a}}$ $[ab > 0]$ (см. также 2.141 2.);

$= \frac{1}{2i\sqrt{ab}} \ln \frac{a + xi\sqrt{ab}}{a - xi\sqrt{ab}}$ $[ab < 0]$ (см. также 2.143 2. и 2.143 3.).

2. $\int \frac{x\,dx}{z_2^m} = -\frac{1}{2b(m-1)z_2^{m-1}}$ (см. также 2.145 2., 2.145 6. и 2.18).

Формы, содержащие биномы $z_3 = a + bx^3$

Обозначение: $\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

2.125

1. $\int \frac{x^n\,dx}{z_3^m} = \frac{x^{n-2}}{z_3^{m-1}(n+1-3m)\,b} - \frac{(n-2)\,a}{b\,(n+1-3m)} \int \frac{x^{n-3}\,dx}{z_3^m}$,

2. $\int \frac{x^n\,dx}{z_3^m} = \frac{x^{n+1}}{3a\,(m-1)\,z_3^{m-1}} - \frac{n+4-3m}{3a\,(m-1)} \int \frac{x^n\,dx}{z_3^{m-1}}$. Ла 133 (1)

2.126

1. $\int \frac{dx}{z_3} = \frac{\alpha}{3a}\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{(x+\alpha)^2}{x^2-\alpha x+\alpha^2} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2\alpha - x}\right\}$;

$= \frac{\alpha}{3a}\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{(x+\alpha)^2}{x^2-\alpha x+\alpha^2} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-\alpha}{\alpha\sqrt{3}}\right\}$

(см. также 2.141 3. и 2.143 4.).

2. $\int \frac{x\,dx}{z_3} = -\frac{1}{3b\alpha}\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{(x+\alpha)^2}{x^2-\alpha x+\alpha^2} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-\alpha}{\alpha\sqrt{3}}\right\}$

(см. также 2.145 3. и 2.145 7.).

3. $\int \frac{x^2\,dx}{z_3} = \frac{1}{3b}\ln(1+x^3\alpha^{-3}) = \frac{1}{3b}\ln z_3$.

4. $\int \frac{x^3\,dx}{z_3} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int\frac{dx}{z_3}$ (см. 2.126 1.).

5. $\int \frac{x^4\,dx}{z_3} = \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{b}\int\frac{x\,dx}{z_3}$ (см. 2.126 2.).

2.127

1. $\int \frac{dx}{z_3^2} = \frac{x}{3az_3} + \frac{2}{3a}\int\frac{dx}{z_3}$ (см. 2.126 1.).

2. $\int \frac{x\,dx}{z_3^2} = \frac{x^2}{3az_3} + \frac{1}{3a}\int\frac{x\,dx}{z_3}$ (см. 2.126 2.).

3. $\int \frac{x^2\,dx}{z_3^2} = -\frac{1}{3bz_3}$.

4. $\int \frac{x^3\,dx}{z_3^2} = -\frac{x}{3bz_3} + \frac{1}{3b}\int\frac{dx}{z_3}$ (см. 2.126 1.).

2.128

1. $\int \frac{dx}{x^n z_3^m} = -\frac{1}{(n-1)\,ax^{n-1}z_3^{m-1}} - \frac{b\,(3m+n-4)}{a\,(n-1)}\int\frac{dx}{x^{n-3}z_3^m}$.

2. $\int \frac{dx}{x^n z_3^m} = \frac{1}{3a\,(m-1)\,x^{n-1}z_3^{m-1}} + \frac{n+3m-4}{3a\,(m-1)}\int\frac{dx}{x^n z_3^{m-1}}$. Ла 133 (2)

2.129

1. $\int \frac{dx}{xz_3} = \frac{1}{3a}\ln\frac{x^3}{z_3}$.

2. $\int \frac{dx}{x^2z_3} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int\frac{x\,dx}{z_3}$ (см. 2.126 2.).

3. $\int \frac{dx}{x^3z_3} = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{z_3}$ (см. 2.126 1.).

2.131

1. $\int \frac{dx}{xz_3^2} = \frac{1}{3az_3} + \frac{1}{3a^2} \ln \frac{x^3}{z_3}$.

2. $\int \frac{dx}{x^2z_3^2} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{4bx^2}{3a^2}\right]\frac{1}{z_3} - \frac{4b}{3a^2}\int \frac{x\,dx}{z_3}$ (см. 2.126 2.).

3. $\int \frac{dx}{x^3z_3^2} = -\left[\frac{1}{2ax^2} + \frac{5bx}{6a^2}\right]\frac{1}{z_3} - \frac{5b}{3a^2}\int \frac{dx}{z_3}$ (см. 2.126 1.).

Формы, содержащие биномы $z_4 = a + bx^4$

Обозначения: $\alpha = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$ $\alpha' = \sqrt[4]{\frac{-a}{b}}$

2.132

1. $\int \frac{dx}{z_4} = \frac{\alpha}{4a\sqrt{2}}\left\{\ln \frac{x^2+\alpha x\sqrt{2}+\alpha^2}{x^2-\alpha x\sqrt{2}+\alpha^2} + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha x\sqrt{2}}{\alpha^2-x^2}\right\}$ $[ab > 0]$

(см. также 2.141 4.)

$= \frac{\alpha}{4a}\left\{\ln \frac{x+\alpha}{x-\alpha'} + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\alpha'}\right\}$ $[ab < 0]$ (см. также 2.143 5.).

2. $\int \frac{x\,dx}{z_4} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\,\mathrm{arctg}\, x^2\sqrt{\frac{b}{a}}$ $[ab > 0]$ (см. также 2.145 4.).

$= \frac{1}{4i\sqrt{ab}} \ln \frac{a+x^2 i\sqrt{ab}}{a-x^2 i\sqrt{ab}}$ $[ab < 0]$ (см. также 2.145 8.).

3. $\int \frac{x^2\,dx}{z_4} = \frac{1}{4b\alpha\sqrt{2}}\left\{\ln \frac{x^2-\alpha x\sqrt{2}+\alpha^2}{x^2+\alpha x\sqrt{2}+\alpha^2} + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha x\sqrt{2}}{\alpha^2-x^2}\right\}$ $[ab > 0]$;

$= -\frac{1}{4b\alpha'}\left\{\ln \frac{x+\alpha'}{x-\alpha'} - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\alpha'}\right\}$ $[ab < 0]$.

4. $\int \frac{x^3\,dx}{z_4} = \frac{1}{4b} \ln z_4$

2.133

1. $\int \frac{x^n\,dx}{z_4^m} = \frac{x^{n+1}}{4a(m-1)z_4^{m-1}} + \frac{4m-n-5}{4a(m-1)}\int \frac{x^n\,dx}{z_4^{m-1}}$ Ла 134 (1)

2. $\int \frac{x^n\,dx}{z_4^m} = \frac{x^{n-3}}{z_4^{m-1}(n+1-4m)b} - \frac{(n-3)a}{b(n+1-4m)}\int \frac{x^{n-4}\,dx}{z_4^m}$.

2.134

1. $\int \frac{dx}{z_4^2} = \frac{x}{4az_4} + \frac{3}{4a}\int \frac{dx}{z_4}$ (см. 2.132 1.).

2. $\int \frac{x\,dx}{z_4^2} = \frac{x^2}{4az_4} + \frac{1}{2a}\int \frac{x\,dx}{z_4}$ (см. 2.132 2.).

3. $\int \frac{x^2\,dx}{z_4^2} = \frac{x^3}{4az_4} + \frac{1}{4a}\int \frac{x^2\,dx}{z_4}$ (см. 2.132 3.).

4. $\int \frac{x^3\,dx}{z_4^2} = \frac{x^4}{4az_4} = -\frac{1}{4bz_4}$.

2.135 $\int \frac{dx}{x^n z_4^m} = -\frac{1}{(n-1)\,a x^{n-1} z_4^{m-1}} - \frac{b(4m+n-5)}{(n-1)\,a}\int \frac{dx}{x^{n-4} z_4^m}$.

При $n = 1$

$\int \frac{dx}{xz_4^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{xz_4^{m-1}} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{x^{-3}z_4^m}$.

2.136

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{xz_4} = \frac{\ln x}{a} - \frac{\ln z_4}{4a} = \frac{1}{4a} \ln \frac{x^4}{z_4}$.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 z_4} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{x^2\,dx}{z_4}$ (см. 2.132 3.).

2.14 Формы, содержащие биномы $1 \pm x^n$

2.141

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)$.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arcctg} x$ (см. также 2.124 1.).

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \ln \frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{2-x}$ (см. также 2.126 1.)

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ (см. также 2.132 1.).

2.142 $$\int \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{2}{n} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} P_k \cos \frac{2k+1}{n}\pi + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} Q_k \sin \frac{2k+1}{n}\pi$$

[n — положительное четное], Т (43) и

$$= \frac{1}{n} \ln(1+x) - \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} P_k \cos \frac{2k+1}{n}\pi + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} Q_k \sin \frac{2k+1}{n}\pi$$

[n — положительное нечетное]. Т (45)

$$P_k = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 - 2x \cos \frac{2k+1}{n}\pi + 1\right),$$

$$Q_k = \operatorname{arctg} \frac{x \sin \frac{2k+1}{n}\pi}{1 - x \cos \frac{2k+1}{n}\pi} = \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \frac{2k+1}{n}\pi}{\sin \frac{2k+1}{n}\pi}.$$

2.143

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x)$.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{Arth} x$ $[-1 < x < 1]$ (см. также 2.141 1.).

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} = -\operatorname{Arcth} x$ $[x > 1,\quad x < -1]$.

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^3} = \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1-x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{2+x}$ (см. также 2.126 1.).

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} (\operatorname{Arth} x + \operatorname{arctg} x)$

(см. также 2.132 1.)

2.144

1. $$\int \frac{dx}{1-x^n} = \frac{1}{n} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} P_k \cos \frac{2k}{n} \pi + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} Q_k \sin \frac{2k}{n} \pi$$

[n — положительное четное].

$$P_k = \frac{1}{2} \ln \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k}{n} \pi + 1\right), \quad Q_k = \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \frac{2k}{n} \pi}{\sin \frac{2k}{n} \pi}. \qquad \text{T(47)}$$

2. $$\int \frac{dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n} \ln (1-x) + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} P_k \cos \frac{2k+1}{n} \pi +$$

$$+ \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} Q_k \sin \frac{2k+1}{n} \pi$$ [n — положительное нечетное] T(49)

$$P_k = \frac{1}{2} \ln \left(x^2 + 2x \cos \frac{2k+1}{n} \pi + 1\right), \quad Q_k = \operatorname{arctg} \frac{x + \cos \frac{2k+1}{n} \pi}{\sin \frac{2k+1}{n} \pi}.$$

2.145

1. $\int \frac{x\,dx}{1+x} = x - \ln(1+x).$
2. $\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$
3. $\int \frac{x\,dx}{1+x^3} = -\frac{1}{6} \ln \frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ (см. также 2.126 2.).
4. $\int \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2.$
5. $\int \frac{x\,dx}{1-x} = -\ln(1-x) - x.$
6. $\int \frac{x\,dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2).$
7. $\int \frac{x\,dx}{1-x^3} = -\frac{1}{6} \ln \frac{(1-x)^2}{1+x+x^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ (см. также 2.126 2.).
8. $\int \frac{x\,dx}{1-x^4} = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$ (см. также 2.132 2.).

2.146 При m и n — натуральных.

1. $$\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{m\pi(2k-1)}{2n} \ln \left\{1 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + x^2\right\} +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{m\pi(2k-1)}{2n} \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{\sin \frac{2k-1}{2n} \pi}$$ [$m < 2n$]. T(44)и

2. $$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^{2n+1}} = (-1)^{m+1}\frac{\ln(1+x)}{2n+1} -$$
$$-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{m\pi(2k-1)}{2n+1}\ln\left\{1-2x\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi+x^2\right\}+$$
$$+\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{m\pi(2k-1)}{2n+1}\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n+1}\pi}\qquad [m\leqslant 2n].$$ Т (46)и

3. $$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2n}\{(-1)^{m+1}\ln(1+x)-\ln(1-x)\}-$$
$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{km\pi}{n}\ln\left(1-2x\cos\frac{k\pi}{n}+x^2\right)+$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{km\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}\qquad [m<2n].$$ Т (48)

4. $$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^{2n+1}} = -\frac{1}{2n+1}\ln(1-x)+$$
$$+(-1)^{m+1}\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{m\pi(2k-1)}{2n+1}\ln\left(1+2x\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi+x^2\right)+$$
$$+(-1)^{m+1}\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{m\pi(2k-1)}{2n+1}\operatorname{arctg}\frac{x+\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n+1}\pi}\qquad [m\leqslant 2n].$$ Т (50)

2.147

1. $$\int \frac{x^m\,dx}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2}\int\frac{x^m\,dx}{1-x^n}+\frac{1}{2}\int\frac{x^m\,dx}{1+x^n}.$$

2. $$\int \frac{x^m\,dx}{(1+x^2)^n} = -\frac{1}{2n-m-1}\cdot\frac{x^{m-1}}{(1+x^2)^{n-1}}+\frac{m-1}{2n-m-1}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{(1+x^2)^n}.$$
Ла 139 (28)

3. $$\int \frac{x^m}{1+x^2}\,dx = \frac{x^{m-1}}{m-1}-\int\frac{x^{m-2}}{1+x^2}\,dx.$$

4. $$\int \frac{x^m\,dx}{(1-x^2)^n} = \frac{1}{2n-m-1}\frac{x^{m-1}}{(1-x^2)^{n-1}}-\frac{m-1}{2n-m-1}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{(1-x^2)^n}=$$
$$=\frac{1}{2n-2}\frac{x^{m-1}}{(1-x^2)^{n-1}}-\frac{m-1}{2n-2}\int\frac{x^m\,dx}{(1-x^2)^{n-1}}.$$ Ла 139 (33)

5. $$\int \frac{x^m\,dx}{1-x^2} = -\frac{x^{m-1}}{m-1}+\int\frac{x^{m-2}\,dx}{1-x^2}.$$

2.148

1. $$\int \frac{dx}{x^m(1+x^2)^n} = -\frac{1}{m-1}\frac{1}{x^{m-1}(1+x^2)^{n-1}}-\frac{2n+m-3}{m-1}\int\frac{dx}{x^{m-2}(1+x^2)^n}.$$
Ла 139 (29)

При $m=1$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}+\int\frac{dx}{x(1+x^2)^{n-1}}.$$ Ла 139 (31)

При $m=1$ и $n=1$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. $$\int \frac{dx}{x^m(1+x^2)} = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} - \int \frac{dx}{x^{m-2}(1+x^2)}.$$

3. $$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.$$ Ф II 40

4. $$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2n-1}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots(2n-2k+1)}{2^k(n-1)(n-2)\dots(n-k)(1+x^2)^{n-k}} + \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}(n-1)!}\operatorname{arctg} x.$$ Т (91)

2.149

1. $$\int \frac{dx}{x^m(1-x^2)^n} = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}(1-x^2)^{n-1}} + \frac{2n+m-3}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}(1-x^2)^n}.$$ Ла 139 (34)

При $m=1$

$$\int \frac{dx}{x(1-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(1-x^2)^{n-1}} + \int \frac{dx}{x(1-x^2)^{n-1}}.$$ Ла 139 (36)

При $m=1$ и $n=1$

$$\int \frac{dx}{x(1-x^2)} = \ln \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. $$\int \frac{dx}{(1-x^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1-x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(1-x^2)^{n-1}}.$$ Ла 139 (35)

3. $$\int \frac{dx}{(1-x^2)^n} = \frac{x}{2n-1}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots(2n-2k+1)}{2^k(n-1)(n-2)\dots(n-k)(1-x^2)^{n-k}} + \frac{(2n-3)!!}{2^n\cdot(n-1)!}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$ Т (91)

2.15 Формы, содержащие пары биномов: $a+bx$ и $\alpha+\beta x$

Обозначения: $z=a+bx$; $t=\alpha+\beta x$; $\Delta=a\beta-\alpha b$

2.151 $$\int z^n t^m\,dx = \frac{z^{n+1}t^m}{(m+n+1)b} - \frac{m\Delta}{(m+n+1)b}\int z^n t^{m-1}\,dx.$$

2.152

1. $$\int \frac{z}{t}\,dx = \frac{bx}{\beta} + \frac{\Delta}{\beta^2}\ln t.$$

2. $$\int \frac{t}{z}\,dx = \frac{\beta x}{b} - \frac{\Delta}{b^2}\ln z.$$

2.153 $$\int \frac{t^m\,dx}{z^n} = \frac{1}{(m-n+1)b}\frac{t^m}{z^{n-1}} - \frac{m\Delta}{(m-n+1)b}\int \frac{t^{m-1}\,dx}{z^n};$$

$$= \frac{1}{(n-1)\Delta}\frac{t^{m+1}}{z^{n-1}} - \frac{(m-n+2)\beta}{(n-1)\Delta}\int \frac{t^m\,dx}{z^{n-1}};$$

$$= -\frac{1}{(n-1)b}\frac{t^m}{z^{n-1}} + \frac{m\beta}{(n-1)b}\int \frac{t^{m-1}}{z^{n-1}}\,dx.$$

2.154 $\int \frac{dx}{zt} = \frac{1}{\Delta} \ln \frac{t}{z}$.

2.155 $$\int \frac{dx}{z^n t^m} = -\frac{1}{(m-1)\Delta} \frac{1}{t^{m-1} z^{n-1}} - \frac{(m+n-2)b}{(m-1)\Delta} \int \frac{dx}{t^{m-1} z^n};$$
$$= \frac{1}{(n-1)\Delta} \frac{1}{t^{m-1} z^{n-1}} + \frac{(m+n-2)\beta}{(n-1)\Delta} \int \frac{dx}{t^m z^{n-1}}.$$

2.156 $\int \frac{x\,dx}{zt} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{a}{b}\ln z - \frac{\alpha}{\beta}\ln t\right)$.

2.16 Формы, содержащие трехчлены $a + bx^k + cx^{2k}$

2.160 Формулы приведения для $R_k = a + bx^k + cx^{2k}$.

1. $$\int x^{m-1} R_k^n\,dx = \frac{x^m R_k^{n+1}}{ma} - \frac{(m+k+nk)b}{ma} \int x^{m+k-1} R_k^n\,dx - \frac{(m+2k+2kn)c}{ma} \int x^{m+2k-1} R_k^n\,dx.$$

2. $$\int x^{m-1} R_k^n\,dx = \frac{x^m R_k^n}{m} - \frac{bkn}{m} \int x^{m+k-1} R_k^{n-1}\,dx - \frac{2ckn}{m} \int x^{m+2k-1} R_k^{n-1}\,dx.$$

3. $$\int x^{m-1} R_k^n\,dx = \frac{x^{m-2k} R_k^{n+1}}{(m+2kn)c} - \frac{(m-2k)a}{(m+2kn)c} \int x^{m-2k-1} R_k^n\,dx - \frac{(m-k+kn)b}{(m+2kn)c} \int x^{m-k-1} R_k^n\,dx;$$
$$= \frac{x^m R_k^n}{m+2kn} + \frac{2kna}{m+2kn} \int x^{m-1} R_k^{n-1}\,dx + \frac{bkn}{m+2kn} \int x^{m+k-1} R_k^{n-1}\,dx.$$

2.161 Формы, содержащие трехчлен $R_2 = a + bx^2 + cx^4$.

Обозначения: $f = \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2-4ac}$, $g = \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2-4ac}$,

$h = \sqrt{b^2-4ac}$, $q = \sqrt[4]{\frac{a}{c}}$, $l = 2a(n-1)(b^2-4ac)$, $\cos\alpha = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}$.

1. $$\int \frac{dx}{R_2} = \frac{c}{h}\left\{\int \frac{dx}{cx^2+f} - \int \frac{dx}{cx^2+g}\right\} \quad [h^2 > 0];$$ Ла 146 (5)

$$= \frac{1}{4cq^3 \sin\alpha}\left\{\sin\frac{\alpha}{2} \ln \frac{x^2 + 2qx\cos\frac{\alpha}{2} + q^2}{x^2 - 2qx\cos\frac{\alpha}{2} + q^2} + 2\cos\frac{\alpha}{2} \operatorname{arctg} \frac{x^2-q^2}{2qx\sin\frac{\alpha}{2}}\right\} \quad [h^2 < 0].$$
Ла 146 (8) и

2. $$\int \frac{x\,dx}{R_2} = \frac{1}{2h} \ln \frac{cx^2+f}{cx^2+g} \quad [h^2 > 0];$$ Ла 146 (6)

$$= \frac{1}{2cq^2 \sin\alpha} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - q^2\cos\alpha}{q^2 \sin\alpha} \quad [h^2 < 0].$$ Ла 146 (9) и

3. $$\int \frac{x^2\,dx}{R_2} = \frac{g}{h} \int \frac{dx}{cx^2+g} - \frac{f}{h} \int \frac{dx}{cx^2+f} \quad [h^2 > 0].$$ Ла 146 (7)

4. $$\int \frac{dx}{R_2^2} = \frac{bcx^2 + (b^2-2ac)x}{lR_2} + \frac{b^2-6ac}{l} \int \frac{dx}{R_2} + \frac{bc}{l} \int \frac{x^2\,dx}{R_2}.$$

5. $$\int \frac{dx}{R_2^n} = \frac{bcx^3 + (b^2-2ac)x}{lR_2^{n-1}} + \frac{(4n-7)bc}{l} \int \frac{x^2\,dx}{R_2^{n-1}} + \frac{2(n-1)h^2 + 2ac - b^2}{l} \int \frac{dx}{R_2^{n-1}} \quad [n > 1].$$ Ла 146 (10)

6. $$\int \frac{dx}{x^m R_2^n} = -\frac{1}{(m-1)\,ax^{m-1}R_2^{n-1}} - \frac{(m+2n-3)\,b}{(m-1)\,a}\int \frac{dx}{x^{m-2}R^n} - \frac{(m+4n-5)\,b}{(m-1)\,a}\int \frac{dx}{x^{m-4}R_2^n}.$$ Ла 147 (12)и

2.17 Формы, содержащие квадратный трехчлен $a+bx+cx^2$ и степени x

Обозначения: $R=a+bx+cx^2$; $\Delta=4ac-b^2$

2.171

1. $$\int x^{m+1}R^n\,dx = \frac{x^mR^{n+1}}{c\,(m+2n+2)} - \frac{am}{c\,(m+2n+2)}\int x^{m-1}R^n\,dx - \frac{b\,(m+n+1)}{c\,(m+2n+2)}\int x^mR^n\,dx.$$ Т (97)

2. $$\int \frac{R^n\,dx}{x^{m+1}} = -\frac{R^{n+1}}{amx^m} + \frac{b\,(n-m+1)}{am}\int \frac{R^n\,dx}{x^m} + \frac{c\,(2n-m+2)}{am}\int \frac{R^n\,dx}{x^{m-1}}.$$ Ла 142(3), Т (98)и

3. $$\int \frac{dx}{R^{n+1}} = \frac{b+2cx}{n\Delta R^n} + \frac{(4n-2)\,c}{n\Delta}\int \frac{dx}{R^n}.$$ Т (94)и

4. $$\int \frac{dx}{R^{n+1}} = \frac{(2cx+b)}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k(2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+1)\,c^k}{n\,(n-1)\dots(n-k)\,\Delta^{k+1}R^{n-k}} + 2^n\frac{(2n-1)!!\,c^n}{n!\,\Delta^n}\int \frac{dx}{R}.$$ Т (96)и

2.172 $$\int \frac{dx}{R} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\ln\frac{b+2cx-\sqrt{-\Delta}}{b+2cx+\sqrt{-\Delta}} = \frac{-2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{Arth}\frac{b+2cx}{\sqrt{-\Delta}} \quad [\Delta<0];$$
$$= \frac{-2}{b+2cx} \quad [\Delta=0];$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\frac{b+2cx}{\sqrt{\Delta}} \quad [\Delta>0].$$

2.173

1. $$\int \frac{dx}{R^2} = \frac{b+2cx}{\Delta R} + \frac{2c}{\Delta}\int \frac{dx}{R}$$ (см. 2.172).

2. $$\int \frac{dx}{R^3} = \frac{b+2cx}{\Delta}\left\{\frac{1}{2R^2} + \frac{3c}{\Delta R}\right\} + \frac{6c^2}{\Delta^2}\int \frac{dx}{R}$$ (см. 2.172).

2.174

1. $$\int \frac{x^m\,dx}{R^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)\,cR^{n-1}} - \frac{(n-m)\,b}{(2n-m-1)\,c}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{R^n} + \frac{(m-1)\,a}{(2n-m-1)\,c}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{R^n}.$$

При $m=2n-1$ эта формула неприменима, вместо нее можно применить

2. $$\int \frac{x^{2n-1}\,dx}{R^n} = \frac{1}{c}\int \frac{x^{2n-3}\,dx}{R^{n-1}} - \frac{a}{c}\int \frac{x^{2n-3}\,dx}{R^n} - \frac{b}{c}\int \frac{x^{2n-2}\,dx}{R^n}.$$

2.175

1. $$\int \frac{x\,dx}{R} = \frac{1}{2c}\ln R - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{R}$$ (см. 2.172).

2. $$\int \frac{x\,dx}{R^2} = -\frac{2a+bx}{\Delta R} - \frac{b}{\Delta}\int \frac{dx}{R}$$ (см. 2.172).

3. $$\int \frac{x\,dx}{R^3} = -\frac{2a+bx}{2\Delta R^2} - \frac{3b(b+2cx)}{2\Delta^2 R} - \frac{3bc}{\Delta^2}\int \frac{dx}{R}$$ (см. 2.172).

4. $$\int \frac{x^2\,dx}{R} = \frac{x}{c} - \frac{b}{2c^2}\ln R + \frac{b^2-2ac}{2c^2}\int \frac{dx}{R}$$ (см. 2.172).

5. $$\int \frac{x^2\,dx}{R^2} = \frac{ab+(b^2-2ac)x}{c\Delta R} + \frac{2a}{\Delta}\int \frac{dx}{R}$$ (см. 2.172)

6. $$\int \frac{x^2\,dx}{R^3} = \frac{ab+(b^2-2ac)x}{2c\Delta R^2} + \frac{(2ac+b^2)(b+2cx)}{2c\Delta^2 R} + \frac{2ac+b^2}{\Delta^2}\int \frac{dx}{R}$$ (см. 2.172).

7. $$\int \frac{x^3\,dx}{R} = \frac{x^2}{2c} - \frac{bx}{c^2} + \frac{b^2-ac}{2c^3}\ln R - \frac{b(b^2-3ac)}{2c^3}\int \frac{dx}{R}$$ (см. 2.172).

8. $$\int \frac{x^3\,dx}{R^2} = \frac{1}{2c^2}\ln R + \frac{a(2ac-b^2)+b(3ac-b^2)x}{c^2\Delta R} - \frac{b(6ac-b^2)}{2c^2\Delta}\int \frac{dx}{R}$$ (см. 2.172).

9. $$\int \frac{x^3\,dx}{R^3} = -\left(\frac{x^4}{c} + \frac{abx}{c\Delta} + \frac{2a^2}{c\Delta}\right)\frac{1}{2R^2} - \frac{3ab}{2c\Delta}\int \frac{dx}{R^2}$$ (см. 2.173 1.).

2.176 $$\int \frac{dx}{x^m R^n} = \frac{-1}{(m-1)ax^{m-1}R^{n-1}} - \frac{b(m+n-2)}{a(m-1)}\int \frac{dx}{x^{m-1}R^n} - \frac{c(m+2n-3)}{a(m-1)}\int \frac{dx}{x^{m-2}R^n}.$$

2.177

1. $$\int \frac{dx}{xR} = \frac{1}{2a}\ln \frac{x^2}{R} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{R}$$ (см. 2.172).

2. $$\int \frac{dx}{xR^2} = \frac{1}{2a^2}\ln \frac{x^2}{R} + \frac{1}{2aR}\left\{1 - \frac{b(b+2cx)}{\Delta}\right\} - \frac{b}{2a^2}\left(1 + \frac{2ac}{\Delta}\right)\int \frac{dx}{R}$$ (см. 2.172).

3. $$\int \frac{dx}{xR^3} = \frac{1}{4aR^2} + \frac{1}{2a^2R} + \frac{1}{2a^3}\ln \frac{x^2}{R} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{R^3} - \frac{b}{2a^2}\int \frac{dx}{R^2} - \frac{b}{2a^3}\int \frac{dx}{R}$$ (см. 2.172, 2.173).

4. $$\int \frac{dx}{x^2R} = -\frac{b}{2a^2}\ln \frac{x^2}{R} - \frac{1}{ax} + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\int \frac{dx}{R}$$ (см. 2.172).

5. $$\int \frac{dx}{x^2R^2} = -\frac{b}{a^3}\ln \frac{x^2}{R} - \frac{a+bx}{a^2xR} + \frac{(b^2-3ac)(b+2cx)}{a^2\Delta R} - \frac{1}{\Delta}\left(\frac{b^4}{a^3} - \frac{6b^2c}{a^2} + \frac{6c^2}{a}\right)\int \frac{dx}{R}$$ (см. 2.172).

6. $$\int \frac{dx}{x^2R^3} = -\frac{1}{axR^2} - \frac{3b}{a}\int \frac{dx}{xR^3} - \frac{5c}{a}\int \frac{dx}{R^3}$$ (см. 2.173 и 2.177 3.).

7. $$\int \frac{dx}{x^3R} = -\frac{ac-b^2}{2a^3}\ln \frac{x^2}{R} + \frac{b}{a^2x} - \frac{1}{2ax^2} + \frac{b(3ac-b^2)}{2a^3}\int \frac{dx}{R}$$ (см. 2.172).

8. $$\int \frac{dx}{x^3R^2} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{2a^2x}\right)\frac{1}{R} + \left(\frac{3b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)\int \frac{dx}{xR^2} + \frac{9bc}{2a^2}\int \frac{dx}{R^2}$$ (см. 2.173 1. и 2.177 2.).

9. $$\int \frac{dx}{x^3R^3} = \left(\frac{-1}{2ax^2} + \frac{2b}{a^2x}\right)\frac{1}{R^2} + \left(\frac{6b^2}{a^2} - \frac{3c}{a}\right)\int \frac{dx}{xR^3} + \frac{10bc}{a^2}\int \frac{dx}{R^3}$$ (см. 2.173 2., 2.177 3.).

2.18 Формы, содержащие квадратный трехчлен $a+bx+cx^2$ и бином $\alpha+\beta x$

Обозначения: $R=a+bx+cx^2$; $z=\alpha+\beta x$; $A=a\beta^2-\alpha b\beta+c\alpha^2$; $B=b\beta-2c\alpha$; $\Delta=4ac-b^2$.

1. $$\int z^m R^n\,dx=\frac{\beta z^{m-1}R^{n+1}}{(m+2n+1)c}-\frac{(m+n)B}{(m+2n+1)c}\int z^{m-1}R^n\,dx-\frac{(m-1)A}{(m+2n+1)c}\int z^{m-2}R^n\,dx.$$

2. $$\int\frac{R^n\,dx}{z^m}=-\frac{1}{(m-2n-1)\beta}\frac{R^n}{z^{m-1}}-\frac{2nA}{(m-2n-1)\beta^2}\int\frac{R^{n-1}\,dx}{z^m}-\frac{nB}{(m-2n-1)\beta^2}\int\frac{R^{n-1}\,dx}{z^{m-1}};$$ Ла 184 (4)и

$$=\frac{-\beta}{(m-1)A}\frac{R^{n+1}}{z^{m-1}}-\frac{(m-n-2)B}{(m-1)A}\int\frac{R^n\,dx}{z^{m-1}}-\frac{(m-2n-3)c}{(m-1)A}\int\frac{R^n\,dx}{z^{m-2}};$$ Ла 148 (5)

$$=-\frac{1}{(m-1)\beta}\frac{R^n}{z^{m-1}}+\frac{nB}{(m-1)\beta^2}\int\frac{R^{n-1}\,dx}{z^{m-1}}+\frac{2nc}{(m-1)\beta^2}\int\frac{R^{n-1}\,dx}{z^{m-2}}$$ Ла 148 (6)

3. $$\int\frac{z^m\,dx}{R^n}=\frac{\beta}{(m-2n+1)c}\frac{z^{m-1}}{R^{n-1}}-\frac{(m-n)B}{(m-2n+1)c}\int\frac{z^{m-1}\,dx}{R^n}-\frac{(m-1)A}{(m-2n+1)c}\int\frac{z^{m-2}\,dx}{R^n};$$ Ла 147 (1)

$$=\frac{b+2cx}{(n-1)\Delta}\frac{z^m}{R^{n-1}}-\frac{2(m-2n+3)c}{(n-1)\Delta}\int\frac{z^m\,dx}{R^{n-1}}-\frac{Bm}{(n-1)\Delta}\int\frac{z^{m-1}\,dx}{R^{n-1}}$$ Ла 148 (3)

4. $$\int\frac{dx}{z^mR^n}=-\frac{\beta}{(m-1)A}\frac{1}{z^{m-1}R^{n-1}}-\frac{(m+n-2)B}{(m-1)A}\int\frac{dx}{z^{m-1}R^n}-\frac{(m+2n-3)c}{(m-1)A}\int\frac{dx}{z^{m-2}R^n};$$ Ла 148 (7)

$$=\frac{\beta}{2(n-1)A}\frac{1}{z^{m-1}R^{n-1}}-\frac{B}{2A}\int\frac{dx}{z^{m-1}R^n}+\frac{(m+2n-3)\beta^2}{2(n-1)A}\int\frac{dx}{z^mR^{n-1}}.$$ Ла 148 (8)

При $m=1$ и $n=1$

$$\int\frac{dx}{zR}=\frac{\beta}{2A}\ln\frac{z^2}{R}-\frac{B}{2A}\int\frac{dx}{R}.$$

При $A=0$

$$\int\frac{dx}{z^mR^n}=-\frac{\beta}{(m+n-1)B}\frac{1}{z^mR^{n-1}}-\frac{(m+2n-2)c}{(m+n-1)B}\int\frac{dx}{z^{m-1}R^n}.$$ Ла 148 (9)

2.2 АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

2.20 Введение

2.201 Интегралы $\int R\left(x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^r,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^s,\ \ldots\right)dx$, где r, s, ... — рациональные числа, приводятся к интегралам от рациональных функций подстановкой

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^m,$$ Ф II 57

где m общий знаменатель дробей r, s, ...

2.202 Интегралы вида $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$ (интегралы от биномиальных дифференциалов), где m, n и p — рациональные числа, выражаются через элементарные функции только в следующих случаях:

а) когда p — целое число; тогда этот интеграл имеет вид суммы интегралов, указанных в 2.201;

б) когда $\frac{m+1}{n}$ — целое число; подстановкой $x^n = z$ этот интеграл преобразуется к виду $\frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}\,dz$, рассмотренному в 2.201;

в) когда $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число; при помощи той же подстановки $x^n = z$ данный интеграл приводится к интегралу вида $\frac{1}{n}\int \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{\frac{m+1}{n}+p-1}\,dz$, рассмотренному в 2.201.

Формулы приведения для интегралов от биномиальных дифференциалов см. 2.110.

2.21 Формы, содержащие бином $a+bx^k$ и $\sqrt{x}$

Обозначение: $z_1 = a+bx$.

2.211
$$\int \frac{dx}{z_1\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{bx}{a}} \qquad [ab>0];$$
$$= \frac{1}{i\sqrt{ab}}\ln\frac{a-bx+2i\sqrt{xab}}{z_1} \qquad [ab<0].$$

2.212
$$\int \frac{x^m\sqrt{x}}{z_1}\,dx = 2\sqrt{x}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k a^k x^{m-k}}{(2m-2k+1)\,b^{k+1}} + (-1)^{m+1}\frac{a^{m+1}}{b^{m+1}}\int\frac{dx}{z_1\sqrt{x}}$$
(см. 2.211).

2.213

1. $$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{z_1} = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{a}{b}\int\frac{dx}{z_1\sqrt{x}}$$ (см. 2.211).

2. $$\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{z_1} = \left(\frac{x}{3b}-\frac{a}{b^2}\right)2\sqrt{x} + \frac{a^2}{b^2}\int\frac{dx}{z_1\sqrt{x}}$$ (см. 2.211).

3. $$\int \frac{x^2\sqrt{x}\,dx}{z_1} = \left(\frac{x^2}{5b}-\frac{xa}{3b^2}+\frac{a^2}{b^3}\right)2\sqrt{x} - \frac{a^3}{b^3}\int\frac{dx}{z_1\sqrt{x}}$$ (см. 2.211).

4. $$\int \frac{dx}{z_1^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{az_1} + \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{z_1\sqrt{x}}$$ (см. 2.211).

5. $$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{z_1^2} = -\frac{\sqrt{x}}{bz_1} + \frac{1}{2b}\int\frac{dx}{z_1\sqrt{x}}$$ (см. 2.211).

6. $$\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{z_1^2} = \frac{2x\sqrt{x}}{bz_1} - \frac{3a}{b}\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{z_1^2}$$ (см. 2.213 5.).

7. $$\int \frac{x^2\sqrt{x}\,dx}{z_1^2} = \left(\frac{x^2}{3b}-\frac{5ax}{3b^2}\right)\frac{2\sqrt{x}}{z_1} + \frac{5a^2}{b^2}\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{z_1^2}$$ (см. 2.213 5.).

8. $$\int \frac{dx}{z_1^3\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{2az_1^2}+\frac{3}{4a^2z_1}\right)\sqrt{x} + \frac{3}{8a^2}\int\frac{dx}{z_1\sqrt{x}}$$ (см. 2.211).

9. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{z_1^3} = \left(-\frac{1}{2bz_1^2} + \frac{1}{4abz_1}\right)\sqrt{x} + \frac{1}{8ab}\int \frac{dx}{z_1\sqrt{x}}$ (см. 2.211).

10. $\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{z_1^3} = -\frac{2x\sqrt{x}}{bz_1^2} + \frac{3a}{b}\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{z_1^3}$ (см. 2.213 9.).

11. $\int \frac{x^2\sqrt{x}\,dx}{z_1^3} = \left(\frac{x^2}{b} + \frac{5ax}{b^2}\right)\frac{2\sqrt{x}}{z_1^2} - \frac{15a^2}{b^2}\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{z_1^3}$ (см. 2.213 9.).

Обозначения: $z_2 = a + bx^2$, $\alpha = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$, $\alpha' = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$.

2.214 $\int \frac{dx}{z_2\sqrt{x}} = \frac{1}{b\alpha^3\sqrt{2}}\left[\ln\frac{x+\alpha\sqrt{2x}+\alpha^2}{\sqrt{z_2}} + \operatorname{arctg}\frac{\alpha\sqrt{2x}}{\alpha^2-x}\right] \quad \left[\frac{a}{b} > 0\right];$

$= \frac{1}{2b\alpha'^3}\left(\ln\frac{\alpha'-\sqrt{x}}{\alpha'+\sqrt{x}} - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\alpha'}\right) \quad \left[\frac{a}{b} < 0\right].$

2.215 $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{z_2} = \frac{1}{b\alpha\sqrt{2}}\left[-\ln\frac{x+\alpha\sqrt{2x}+\alpha^2}{\sqrt{z_2}} + \operatorname{arctg}\frac{\alpha\sqrt{2x}}{\alpha^2-x}\right] \quad \left[\frac{a}{b} > 0\right];$

$= \frac{1}{2b\alpha'}\left[\ln\frac{\alpha'-\sqrt{x}}{\alpha'+\sqrt{x}} + 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\alpha'}\right] \quad \left[\frac{a}{b} < 0\right].$

2.216

1. $\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{z_2} = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{z_2\sqrt{x}}$ (см. 2.214).

2. $\int \frac{x^2\sqrt{x}\,dx}{z_2} = \frac{2x\sqrt{x}}{3b} - \frac{a}{b}\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{z_2}$ (см. 2.215).

3. $\int \frac{dx}{z_2^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2az_2} + \frac{3}{4a}\int \frac{dx}{z_2\sqrt{x}}$ (см. 2.214).

4. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{z_2^2} = \frac{x\sqrt{x}}{2az_2} + \frac{1}{4a}\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{z_2}$ (см. 2.215).

5. $\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{z_2^2} = -\frac{\sqrt{x}}{2bz_2} + \frac{1}{4b}\int \frac{dx}{z_2\sqrt{x}}$ (см. 2.214).

6. $\int \frac{x^2\sqrt{x}\,dx}{z_2^2} = -\frac{x\sqrt{x}}{2bz_2} + \frac{3}{4b}\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{z_2}$ (см. 2.215).

7. $\int \frac{dx}{z_2^3\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{4az_2^2} + \frac{7}{16a^2z_2}\right)\sqrt{x} + \frac{21}{32a^2}\int \frac{dx}{z_2\sqrt{x}}$ (см. 2.214).

8. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{z_2^3} = \left(\frac{1}{4az_2^2} + \frac{5}{16a^2z_2}\right)x\sqrt{x} + \frac{5}{32a^2}\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{z_2}$ (см. 2.215).

9. $\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{z_2^3} = \frac{(bx^2-3a)\sqrt{x}}{16abz_2^2} + \frac{3}{32ab}\int \frac{dx}{z_2\sqrt{x}}$ (см. 2.214).

10. $\int \frac{x^2\sqrt{x}\,dx}{z_2^3} = -\frac{2x\sqrt{x}}{5bz_2^2} + \frac{3a}{5b}\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{z_2^3}$ (см. 2.216 8.).

2.22 – 2.23 Формы, содержащие $\sqrt[n]{(a+bx)^k}$

Обозначение: $z = a + bx$.

2.220 $\int x^n \sqrt[l]{z^{lm+f}}\,dx = \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k} z^{n-k} a^k}{ln - lk + l(m+1) + f}\right\} \frac{l\sqrt[l]{z^{l(m+1)+f}}}{b^{n+1}}.$

Квадратный корень

2.221 $\int x^n \sqrt{z^{2m-1}}\,dx = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k} z^{n-k} a^k}{2n-2k+2m+1} \right\} \frac{2\sqrt{z^{2m+1}}}{b^{n+1}}.$

2.222

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{z}} = \frac{2}{b}\sqrt{z}.$
2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{z}} = \left(\frac{1}{3}z - a\right)\frac{2\sqrt{z}}{b^2}.$
3. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{z}} = \left(\frac{1}{5}z^2 - \frac{2}{3}az + a^2\right)\frac{2\sqrt{z}}{b^3}.$

2.223

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{z^3}} = -\frac{2}{b\sqrt{z}}.$
2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{z^3}} = (z+a)\frac{2}{b^2\sqrt{z}}.$
3. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{z^3}} = \left(\frac{z^2}{3} - 2az - a^2\right)\frac{2}{b^3\sqrt{z}}.$

2.224

1. $\int \frac{z^m\,dx}{x^n\sqrt{z}} = -\frac{z^m\sqrt{z}}{(n-1)\,ax^{n-1}} + \frac{2m-2n+3}{2(n-1)}\,\frac{b}{a}\int \frac{z^m\,dx}{x^{n-1}\sqrt{z}}.$
2. $$\int \frac{z^m\,dx}{x^n\sqrt{z}} = -z^m\sqrt{z}\left\{\frac{1}{(n-1)\,ax^{n-1}} + \right.$$
$$+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(2m-2n+3)(2m-2n+5)\ldots(2m-2n+2k+1)}{2^k(n-1)(n-2)\ldots(n-k-1)\,x^{n-k-1}}\,\frac{b^k}{a^{k+1}} +$$
$$+\frac{(2m-2n+3)(2m-2n+5)\ldots(2m-3)(2m-1)}{2^{n-1}(n-1)!\,x}\,\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\int\frac{z^m\,dx}{x\sqrt{z}}.$$

При $n=1$

3. $\int \frac{z^m}{x\sqrt{z}}\,dx = \frac{2z^m}{(2m-1)\sqrt{z}} + a\int \frac{z^{m-1}}{x\sqrt{z}}\,dx.$
4. $\int \frac{z^m}{x\sqrt{z}}\,dx = \sum_{k=1}^{m}\frac{2a^{m-k}z^k}{(2k-1)\sqrt{z}} + a^m\int\frac{dx}{x\sqrt{z}}.$
5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{z}-\sqrt{a}}{\sqrt{z}+\sqrt{a}} \qquad [a>0];$
$\qquad = \frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{-a}} \qquad [a<0].$

2.225

1. $\int \frac{\sqrt{z}\,dx}{x} = 2\sqrt{z} + a\int\frac{dx}{x\sqrt{z}}$ (см. 2.224 4.).
2. $\int \frac{\sqrt{z}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{z}}{x} + \frac{b}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{z}}$ (см. 2.224 4.).
3. $\int \frac{\sqrt{z}\,dx}{x^3} = -\frac{\sqrt{z^3}}{2ax^2} + \frac{b\sqrt{z}}{4ax} - \frac{b^2}{8a}\int\frac{dx}{x\sqrt{z}}$ (см. 2.224 4.).

2.226

1. $\int \frac{\sqrt{z^3}\,dx}{x} = \left(\frac{z}{3}+a\right)2\sqrt{z} + a^2 \int \frac{dx}{x\sqrt{z}}$ (см. 2.224 4.).

2. $\int \frac{\sqrt{z^3}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{z^5}}{ax} + \frac{3b}{2a}\int \frac{\sqrt{z^3}\,dx}{x}$ (см. 2.226 1.).

3. $\int \frac{\sqrt{z^3}\,dx}{x^3} = -\left(\frac{1}{2ax^2}+\frac{b}{4a^2x}\right)\sqrt{z^5} + \frac{3b^2}{8a^2}\int \frac{\sqrt{z^3}\,dx}{x}$ (см. 2.226 1.).

2.227 $\int \frac{dx}{xz^m\sqrt{z}} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2}{(2k+1)\,a^{m-k}z^k\sqrt{z}} + \frac{1}{a^m}\int \frac{dx}{x\sqrt{z}}$. (см. 2.224 4.).

2.228

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{z}} = -\frac{\sqrt{z}}{ax} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{z}}$ (см. 2.224 4.).

2. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{z}} = \left(-\frac{1}{2ax^2}+\frac{3b}{4a^2x}\right)\sqrt{z} + \frac{3b^2}{8a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{z}}$ (см. 2.224 4.).

2.229

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{z^3}} = \frac{2}{a\sqrt{z}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x\sqrt{z}}$ (см. 2.224 4.).

2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{z^3}} = \left(-\frac{1}{ax}-\frac{3b}{a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{3b}{2a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{z}}$ (см. 2.224 4.).

3. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{z^3}} = \left(-\frac{1}{2ax^2}+\frac{5b}{4a^2x}+\frac{15b^2}{4a^3}\right)\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{15b^2}{8a^3}\int \frac{dx}{x\sqrt{z}}$ (см. 2.224 4.).

Кубический корень

2.231

1. $\int \sqrt[3]{z^{3m+1}}\,x^n dx = \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k} z^{n-k}a^k}{3n-3k+3\,(m+1)+1}\right\} \frac{3\sqrt[3]{z^{3(m+1)+1}}}{b^{n+1}}$.

2. $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt[3]{z^{3m+2}}} = \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k} z^{n-k}a^k}{3n-3k-3\,(m-1)-2}\right\} \frac{3}{b^{n+1}\sqrt[3]{z^{3(m-1)+2}}}$.

3. $\int \sqrt[3]{z^{3m+2}}\,x^n\,dx = \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k} z^{n-k}a^k}{3n-3k+3\,(m+1)+2}\right\} \frac{3\sqrt[3]{z^{3(m+1)+2}}}{b^{n+1}}$.

4. $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt[3]{z^{3m+1}}} = \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k} z^{n-k}a^k}{3n-3k-3\,(m-1)-1}\right\} \frac{3}{b^{n+1}\sqrt[3]{z^{3(m-1)+1}}}$.

5. $\int \frac{z^n\,dx}{x^m\sqrt[3]{x^2}} = -\frac{z^{n+\frac{1}{3}}}{(m-1)\,ax^{m-1}} + \frac{3n-3m+4}{3\,(m-1)}\,\frac{b}{a}\int \frac{z^n\,dx}{x^{m-1}\sqrt[3]{z^2}}$.

При $m=1$

$$\int \frac{z^n\,dx}{x\sqrt[3]{z^2}} = \frac{3z^n}{(3n-2)\sqrt[3]{z^2}} + a\int \frac{z^{n-1}\,dx}{x\sqrt[3]{z^2}}.$$

6. $\int \frac{dx}{xz^n\sqrt[3]{z^2}} = \frac{3\sqrt[3]{z}}{(3n-1)\,az^n} + \frac{1}{a}\int \frac{\sqrt[3]{z}\,dx}{xz^n}$.

2.232 $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{z^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \left\{ \frac{3}{2} \ln \frac{\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{z}+2\sqrt[3]{a}} \right\}.$

2.233

1. $\int \frac{\sqrt[3]{z}\,dx}{x} = 3\sqrt[3]{z} + a \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{z^2}}$ (см. 2.232).

2. $\int \frac{\sqrt[3]{z}\,dx}{x^2} = -\frac{z\sqrt[3]{z}}{ax} + \frac{b}{a}\sqrt[3]{z} + \frac{b}{3}\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{z^2}}$ (см. 2.232).

3. $\int \frac{\sqrt[3]{z}\,dx}{x^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{3a^2x} \right) z\sqrt[3]{z} - \frac{b^2}{3a^2}\sqrt[3]{z} - \frac{b^3}{9a}\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{z^2}}$ (см. 2.232).

4. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{z^2}} = -\frac{\sqrt[3]{z}}{ax} - \frac{2b}{3a}\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{z^2}}$ (см. 2.232).

5. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{z^2}} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{6a^2x} \right] \sqrt[3]{z} + \frac{5b^2}{9a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{z^2}}$ (см. 2.232).

2.234

1. $\int \frac{z^n\,dx}{x^m\sqrt[3]{z}} = -\frac{z^n\sqrt[3]{z^2}}{(m-1)\,ax^{m-1}} + \frac{3n-3m+5}{3(m-1)}\,\frac{b}{a}\int \frac{z^n\,dx}{x^{m-1}\sqrt[3]{z}}.$

При $m=1$:

2. $\int \frac{z^n\,dx}{x\sqrt[3]{z}} = \frac{3z^n}{(3n-1)\sqrt[3]{z}} + a\int \frac{z^{n-1}\,dx}{x\sqrt[3]{z}}.$

3. $\int \frac{dx}{xz^n\sqrt[3]{z}} = \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{(3n-2)\,az^n} + \frac{1}{a}\int \frac{\sqrt[3]{z^2}\,dx}{xz^n}.$

2.235 $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{z}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \left\{ \frac{3}{2} \ln \frac{\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{z}+2\sqrt[3]{a}} \right\}.$

2.236

1. $\int \frac{\sqrt[3]{z^2}\,dx}{x} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{z^2} + a\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{z}}$ (см. 2.235).

2. $\int \frac{\sqrt[3]{z^2}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt[3]{z^5}}{ax} + \frac{b}{a}\sqrt[3]{z^2} + \frac{2b}{3}\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{z}}$ (см. 2.235).

3. $\int \frac{\sqrt[3]{z^2}\,dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{6a^2x} \right] z^{\frac{5}{3}} - \frac{b^2}{6a^2}\sqrt[3]{z^2} - \frac{b^3}{9a}\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{z}}$ (см. 2.235).

4. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{z}} = -\frac{\sqrt[3]{z^2}}{ax} - \frac{b}{3a}\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{z}}$ (см. 2.235).

5. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{z}} = \left[-\frac{1}{2ax^2} + \frac{2b}{3a^2x} \right] \sqrt[3]{z} + \frac{2b^2}{9a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{z}}$ (см. 2.235).

2.24 Формы, содержащие $\sqrt{a+bx}$ и бином $\alpha+\beta x$

Обозначения: $z=a+bx$, $t=\alpha+\beta x$, $\Delta=a\beta-b\alpha$.

2.241

1. $\int \frac{z^m t^n\,dx}{\sqrt{z}} = \frac{2}{(2n+2m+1)\beta}\,t^{n+1}z^{m-1}\sqrt{z} + \frac{(2m-1)\Delta}{(2n+2m+1)\beta}\int \frac{z^{m-1}t^n\,dx}{\sqrt{z}}.$

Ла 176 (1)

2. $\int \frac{t^n z^m\,dx}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z^{2m+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\alpha^{n-k}\beta^k}{b^{k+1}} \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} \frac{z^{k-p}a^p}{2k-2p+2m+1}.$

2.242

1. $\int \frac{t\,dx}{\sqrt{z}} = \frac{2\alpha\sqrt{z}}{b} + \beta\left(\frac{z}{3} - a\right)\frac{2\sqrt{z}}{b^2}.$

2. $\int \frac{t^2\,dx}{\sqrt{z}} = \frac{2\alpha^2\sqrt{z}}{b} + 2\alpha\beta\left(\frac{z}{3} - a\right)\frac{2\sqrt{z}}{b^2} + \beta^2\left(\frac{z^2}{5} - \frac{2}{3}za + a^2\right)\frac{2\sqrt{z}}{b^3}.$

3. $\int \frac{t^3\,dx}{\sqrt{z}} = \frac{2\alpha^3\sqrt{z}}{b} + 3\alpha^2\beta\left(\frac{z}{3} - a\right)\frac{2\sqrt{z}}{b^2} +$
$+ 3\alpha\beta^2\left(\frac{z^2}{5} - \frac{2}{3}za + a^2\right)\frac{2\sqrt{z}}{b^3} + \beta^3\left(\frac{z^3}{7} - \frac{3z^2a}{5} + za^2 - a^3\right)\frac{2\sqrt{z}}{b^4}.$

4. $\int \frac{tz\,dx}{\sqrt{z}} = \frac{2\alpha\sqrt{z^3}}{3b} + \beta\left(\frac{z}{5} - \frac{a}{3}\right)\frac{2\sqrt{z^3}}{b^2}.$

5. $\int \frac{t^2z\,dx}{\sqrt{z}} = \frac{2\alpha^2\sqrt{z^3}}{3b} + 2\alpha\beta\left(\frac{z}{5} - \frac{a}{3}\right)\frac{2\sqrt{z^3}}{b^2} + \beta^2\left(\frac{z^2}{7} - \frac{2za}{5} + \frac{a^2}{3}\right)\frac{2\sqrt{z^3}}{b^3}.$

6. $\int \frac{t^3z\,dx}{\sqrt{z}} = \frac{2\alpha^3\sqrt{z^3}}{3b} + 3\alpha^2\beta\left(\frac{z}{5} - \frac{a}{3}\right)\frac{2\sqrt{z^3}}{b^2} +$
$+ 3\alpha\beta^2\left(\frac{z^2}{7} - \frac{2za}{5} + \frac{a^2}{3}\right)\frac{2\sqrt{z^3}}{b^3} + \beta^3\left(\frac{z^3}{9} - \frac{3z^2a}{7} + \frac{3za^2}{5} - \frac{a^3}{3}\right)\frac{2\sqrt{z^3}}{b^4}.$

7. $\int \frac{tz^2\,dx}{\sqrt{z}} = \frac{2\alpha\sqrt{z^5}}{5b} + \beta\left(\frac{z}{7} - \frac{a}{5}\right)\frac{2\sqrt{z^5}}{b^2}.$

8. $\int \frac{t^2z^2\,dx}{\sqrt{z}} = \frac{2\alpha^2\sqrt{z^5}}{5b} + 2\alpha\beta\left(\frac{z}{7} - \frac{a}{5}\right)\frac{2\sqrt{z^5}}{b^2} + \beta^2\left(\frac{z^2}{9} - \frac{2za}{7} + \frac{a^2}{5}\right)\frac{2\sqrt{z^5}}{b^3}.$

9. $\int \frac{t^3z^2\,dx}{\sqrt{z}} = \frac{2\alpha^3\sqrt{z^5}}{5b} + 3\alpha^2\beta\left(\frac{z}{7} - \frac{a}{5}\right)\frac{2\sqrt{z^5}}{b^2} +$
$+ 3\alpha\beta^2\left(\frac{z^2}{9} - \frac{2za}{7} + \frac{a^2}{5}\right)\frac{2\sqrt{z^5}}{b^3} + \beta^3\left(\frac{z^3}{11} - \frac{3z^2a}{9} + \frac{3za^2}{7} - \frac{a^3}{5}\right)\frac{2\sqrt{z^5}}{b^4}$

10. $\int \frac{tz^3\,dx}{\sqrt{z}} = \frac{2\alpha\sqrt{z^7}}{7b} + \beta\left(\frac{z}{9} - \frac{a}{7}\right)\frac{2\sqrt{z^7}}{b^2}.$

11. $\int \frac{t^2z^3\,dx}{\sqrt{z}} = \frac{2\alpha^2\sqrt{z^7}}{7b} + 2\alpha\beta\left(\frac{z}{9} - \frac{a}{7}\right)\frac{2\sqrt{z^7}}{b^2} + \beta^2\left(\frac{z^2}{11} - \frac{2za}{9} + \frac{a^2}{7}\right)\frac{2\sqrt{z^7}}{b^3}.$

12. $\int \frac{t^3z^3\,dx}{\sqrt{z}} = \frac{2\alpha^3\sqrt{z^7}}{7b} + 3\alpha^2\beta\left(\frac{z}{9} - \frac{a}{7}\right)\frac{2\sqrt{z^7}}{b^2} +$
$+ 3\alpha\beta^2\left(\frac{z^2}{11} - \frac{2za}{9} + \frac{a^2}{7}\right)\frac{2\sqrt{z^7}}{b^3} + \beta^3\left(\frac{z^3}{13} - \frac{3z^2a}{11} + \frac{3za^2}{9} - \frac{a^3}{7}\right)\frac{2\sqrt{z^7}}{b^4}.$

2.243

1. $\int \frac{t^n\,dx}{z^m\sqrt{z}} = \frac{2}{(2m-1)\Delta}\frac{t^{n+1}}{z^m}\sqrt{z} - \frac{(2n-2m+3)\beta}{(2m-1)\Delta}\int \frac{t^n\,dx}{z^{m-1}\sqrt{z}};$
$= -\frac{2}{(2m-1)b}\frac{t^n}{z^m}\sqrt{z} + \frac{2n\beta}{(2m-1)b}\int \frac{t^{n-1}\,dx}{z^{m-1}\sqrt{z}}.$ Ла 176 (2)

2. $\int \frac{t^n\,dx}{z^m\sqrt{z}} = \frac{2}{\sqrt{z^{2m-1}}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\alpha^{n-k}\beta^k}{b^{k+1}}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}\frac{z^{k-p}a^p}{2k-2p-2m+1}.$

2.244

1. $$\int \frac{t\,dx}{z\sqrt{z}} = -\frac{2\alpha}{b\sqrt{z}} + \frac{2\beta(z+a)}{b^2\sqrt{z}}.$$

2. $$\int \frac{t^2\,dx}{z\sqrt{z}} = -\frac{2\alpha^2}{b\sqrt{z}} + \frac{4\alpha\beta(z+a)}{b^2\sqrt{z}} + \frac{2\beta^2\left(\frac{z^2}{3} - 2za - a^2\right)}{b^3\sqrt{z}}.$$

3. $$\int \frac{t^3\,dx}{z\sqrt{z}} = -\frac{2\alpha^3}{b\sqrt{z}} + \frac{6\alpha^2\beta(z+a)}{b^2\sqrt{z}} + \frac{6\alpha\beta^2\left(\frac{z^2}{3} - 2za - a^2\right)}{b^3\sqrt{z}} + \frac{2\beta^3\left(\frac{z^3}{5} - z^2a + 3za^2 + a^3\right)}{b^4\sqrt{z}}.$$

4. $$\int \frac{t\,dx}{z^2\sqrt{z}} = -\frac{2\alpha}{3b\sqrt{z^3}} - \frac{2\beta\left(z - \frac{a}{3}\right)}{b^2\sqrt{z^3}}.$$

5. $$\int \frac{t^2\,dx}{z^2\sqrt{z}} = -\frac{2\alpha^2}{3b\sqrt{z^3}} - \frac{4\alpha\beta\left(z - \frac{a}{3}\right)}{b^2\sqrt{z^3}} + \frac{2\beta^2\left(z^2 + 2az - \frac{a^2}{3}\right)}{b^3\sqrt{z^3}}.$$

6. $$\int \frac{t^3\,dx}{z^2\sqrt{z}} = -\frac{2\alpha^3}{3b\sqrt{z^3}} - \frac{6\alpha^2\beta\left(z - \frac{a}{3}\right)}{b^2\sqrt{z^3}} + \frac{6\alpha\beta^2\left(z^2 + 2za - \frac{a^2}{3}\right)}{b^3\sqrt{z^3}} + \frac{2\beta^3\left(\frac{z^3}{3} - 3z^2a - 3za^2 + \frac{a^3}{3}\right)}{b^4\sqrt{z^3}}.$$

7. $$\int \frac{t\,dx}{z^3\sqrt{z}} = -\frac{2\alpha}{5b\sqrt{z^5}} - \frac{2\beta\left(\frac{z}{3} - \frac{a}{5}\right)}{b^2\sqrt{z^5}}.$$

8. $$\int \frac{t^2\,dx}{z^3\sqrt{z}} = -\frac{2\alpha^2}{5b\sqrt{z^5}} - \frac{4\alpha\beta\left(\frac{z}{3} - \frac{a}{5}\right)}{b^2\sqrt{z^5}} - \frac{2\beta^3\left(z^2 - \frac{2za}{3} + \frac{a^2}{5}\right)}{b^3\sqrt{z^5}}.$$

9. $$\int \frac{t^3\,dx}{z^3\sqrt{z}} = -\frac{2\alpha^3}{5b\sqrt{z^5}} - \frac{6\alpha^2\beta\left(\frac{z}{3} - \frac{a}{5}\right)}{b^2\sqrt{z^5}} - \frac{6\alpha\beta^2\left(z^2 - \frac{2za}{3} + \frac{a^2}{5}\right)}{b^3\sqrt{z^5}} + \frac{2\beta^3\left(z^3 + 3z^2a - za^3 + \frac{a^3}{5}\right)}{b^4\sqrt{z^5}}.$$

2.245

1. $$\int \frac{z^m\,dx}{t^n\sqrt{z}} = -\frac{2}{(2n-2m-1)\beta}\,\frac{z^{m-1}}{t^{n-1}}\sqrt{z} - \frac{(2m-1)\Delta}{(2n-2m-1)\beta}\int \frac{z^{m-1}\,dx}{t^n\sqrt{z}};$$ Ла 176 (3)

$$= -\frac{1}{(n-1)\beta}\,\frac{z^{m-1}}{t^{n-1}}\sqrt{z} + \frac{(2m-1)b}{2(n-1)\beta}\int \frac{z^{m-1}}{t^{n-1}\sqrt{z}}\,dx;$$

$$= -\frac{1}{(n-1)\Delta}\,\frac{z^m}{t^{n-1}}\sqrt{z} - \frac{(2n-2m-3)b}{2(n-1)\Delta}\int \frac{z^m\,dx}{t^{n-1}\sqrt{z}}.$$

2. $$\int \frac{z^m\,dx}{t^n\sqrt{z}} = -z^m\sqrt{z}\left\{\frac{1}{(n-1)\Delta}\,\frac{1}{t^{n-1}} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(2n-2m-3)(2n-2m-5)\ldots(2n-2m-2k+1)\,b^{k-1}}{2^{k-1}(n-1)(n-2)\ldots(n-k)\,\Delta^k}\,\frac{1}{t^{n-k}}\right\} - \frac{(2n-2m-3)(2n-2m-5)\ldots(-2m+3)(-2m+1)\,b^{n-1}}{2^{n-1}\cdot(n-1)!\,\Delta^n}\int \frac{z^m\,dx}{t\sqrt{z}}.$$

При $n=1$

3. $\int \frac{z^m\,dx}{t\sqrt{z}} = \frac{2}{(2m-1)\beta}\frac{z^m}{\sqrt{z}} + \frac{\Delta}{\beta}\int \frac{z^{m-1}\,dx}{t\sqrt{z}}$.

4. $\int \frac{z^m\,dx}{t\sqrt{z}} = 2\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta^k}{(2m-2k-1)\beta^{k+1}}\frac{z^{m-k}}{\sqrt{z}} + \frac{\Delta^m}{\beta^m}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$.

2.246
$$\int \frac{dx}{t\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{\beta\Delta}} \ln \frac{\beta\sqrt{z}-\sqrt{\beta\Delta}}{\beta\sqrt{z}+\sqrt{\beta\Delta}} \qquad [\beta\Delta > 0];$$
$$= \frac{2}{\sqrt{-\beta\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{\beta\sqrt{z}}{\sqrt{-\beta\Delta}} \qquad [\beta\Delta < 0];$$
$$= -\frac{2\sqrt{z}}{bt} \qquad [\Delta = 0].$$

2.247
$$\int \frac{dx}{tz^m\sqrt{z}} = \frac{2}{z^{m-1}\sqrt{z}} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\beta^{k-1}z^k}{\Delta^k(2m-2k+1)} + \frac{\beta^m}{\Delta^m}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}} \qquad \text{(см. 2.246).}$$

2.248

1. $\int \frac{dx}{tz\sqrt{z}} = \frac{2}{\Delta\sqrt{z}} + \frac{\beta}{\Delta}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

2. $\int \frac{dx}{tz^2\sqrt{z}} = \frac{2}{3\Delta z\sqrt{z}} + \frac{2\beta}{\Delta^2\sqrt{z}} + \frac{\beta^2}{\Delta^2}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

3. $\int \frac{dx}{tz^3\sqrt{z}} = \frac{2}{5\Delta z^2\sqrt{z}} + \frac{2\beta}{3\Delta^2 z\sqrt{z}} + \frac{2\beta^2}{\Delta^3\sqrt{z}} + \frac{\beta^3}{\Delta^3}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

4. $\int \frac{dx}{t^2\sqrt{z}} = -\frac{\sqrt{z}}{\Delta t} - \frac{b}{2\Delta}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

5. $\int \frac{dx}{t^2z\sqrt{z}} = -\frac{1}{\Delta t\sqrt{z}} - \frac{3b}{\Delta^2\sqrt{z}} - \frac{3b\beta}{2\Delta^2}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

6. $\int \frac{dx}{t^2z^2\sqrt{z}} = -\frac{1}{\Delta tz^2\sqrt{z}} - \frac{5b}{3\Delta^2 z\sqrt{z}} - \frac{5b\beta}{\Delta^3\sqrt{z}} - \frac{5b\beta^2}{2\Delta^3}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

7. $\int \frac{dx}{t^2z^3\sqrt{z}} = -\frac{1}{\Delta tz^2\sqrt{z}} - \frac{7b}{5\Delta^2z^2\sqrt{z}} - \frac{7b\beta}{3\Delta^3 z\sqrt{z}} - \frac{7b\beta^2}{\Delta^4\sqrt{z}} -$
$$- \frac{7b\beta^3}{2\Delta^4}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}} \qquad \text{(см. 2.246).}$$

8. $\int \frac{dx}{t^3\sqrt{z}} = -\frac{\sqrt{z}}{2\Delta t^2} + \frac{3b\sqrt{z}}{4\Delta^2 t} + \frac{3b^2}{8\Delta^2}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

9. $\int \frac{dx}{t^3z\sqrt{z}} = -\frac{1}{2\Delta t^2\sqrt{z}} + \frac{5b}{4\Delta^2 t\sqrt{z}} + \frac{15b^2}{4\Delta^3\sqrt{z}} + \frac{15b^2\beta}{8\Delta^3}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

10. $\int \frac{dx}{t^3z^2\sqrt{z}} = -\frac{1}{2\Delta t^2z\sqrt{z}} + \frac{7b\sqrt{z}}{4\Delta^3tz\sqrt{z}} + \frac{35b^2}{12\Delta^3z\sqrt{z}} +$
$$+ \frac{35b^2\beta}{4\Delta^4\sqrt{z}} + \frac{35b^2\beta^2}{8\Delta^4}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}} \qquad \text{(см. 2.246).}$$

11. $\int \frac{dx}{t^3z^3\sqrt{z}} = -\frac{1}{2\Delta t^2z^2\sqrt{z}} + \frac{9b}{4\Delta^2tz^2\sqrt{z}} + \frac{63b^2}{20\Delta^3z^2\sqrt{z}} +$
$$+ \frac{21b^2\beta}{4\Delta^4z\sqrt{z}} + \frac{63b^2\beta^2}{4\Delta^5\sqrt{z}} + \frac{63b^2\beta^3}{8\Delta^5}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}} \qquad \text{(см. 2.246).}$$

12. $\int \frac{z\,dx}{t\sqrt{z}} = \frac{2\sqrt{z}}{\beta} + \frac{\Delta}{\beta}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

13. $\int \frac{z^2\,dx}{t\sqrt{z}} = \frac{2z\sqrt{z}}{3\beta} + \frac{2\Delta\sqrt{z}}{\beta^2} + \frac{\Delta^2}{\beta^2}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

14. $\int \frac{z^3\,dx}{t\sqrt{z}} = \frac{2z^2\sqrt{z}}{5\beta} + \frac{2\Delta z\sqrt{z}}{3\beta^2} + \frac{2\Delta^2\sqrt{z}}{\beta^3} + \frac{\Delta^3}{\beta^3}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

15. $\int \frac{z\,dx}{t^2\sqrt{z}} = -\frac{z\sqrt{z}}{\Delta t} + \frac{b\sqrt{z}}{\beta\Delta} + \frac{b}{2\beta}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

16. $\int \frac{z^2\,dx}{t^2\sqrt{z}} = -\frac{z^2\sqrt{z}}{\Delta t} + \frac{bz\sqrt{z}}{\beta\Delta} + \frac{3b\sqrt{z}}{\beta^2} + \frac{3b\Delta}{2\beta^2}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

17. $\int \frac{z^3\,dx}{t^2\sqrt{z}} = -\frac{z^3\sqrt{z}}{\Delta t} + \frac{bz^3\sqrt{z}}{\beta\Delta} + \frac{5bz\sqrt{z}}{3\beta^2} + \frac{5b\Delta\sqrt{z}}{\beta^3} +$

$+ \frac{5\Delta^2 b}{2\beta^3}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

18. $\int \frac{z\,dx}{t^3\sqrt{z}} = -\frac{z\sqrt{z}}{2\Delta t^2} - \frac{bz\sqrt{z}}{4\Delta^2 t} + \frac{b^3\sqrt{z}}{4\beta\Delta^2} + \frac{b^2}{8\beta\Delta}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

19. $\int \frac{z^2\,dx}{t^3\sqrt{z}} = -\frac{z^2\sqrt{z}}{2\Delta t^2} + \frac{bz^2\sqrt{z}}{4\Delta^2 t} + \frac{b^2 z\sqrt{z}}{4\beta\Delta^2} +$

$+ \frac{3b^2\sqrt{z}}{4\beta^2\Delta} + \frac{3b^2}{8\beta^2}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

20. $\int \frac{z^3\,dx}{t^3\sqrt{z}} = -\frac{z^3\sqrt{z}}{2\Delta t^2} + \frac{3bz^3\sqrt{z}}{\Delta^2 t} + \frac{3b^2 z^2\sqrt{z}}{4\beta\Delta^2} + \frac{5b^2 z\sqrt{z}}{4\beta^2\Delta} +$

$+ \frac{15b^2\sqrt{z}}{4\beta^3} + \frac{15b^2\Delta}{8\beta^3}\int \frac{dx}{t\sqrt{z}}$ (см. 2.246).

2.249

1. $\int \frac{dx}{z^m t^n \sqrt{z}} = \frac{2}{(2m-1)\Delta}\,\frac{\sqrt{z}}{t^{n-1}z^m} + \frac{(2n+2m-3)\beta}{(2m-1)\Delta}\int \frac{dx}{t^n z^{m-1}\sqrt{z}}$;

Ла 177 (4).

$= -\frac{1}{(n-1)\Delta}\,\frac{\sqrt{z}}{z^m t^{n-1}} - \frac{(2n+2m-3)b}{2(n-1)\Delta}\int \frac{dx}{t^{n-1}z^m\sqrt{z}}$.

2. $\int \frac{dx}{z^m t^n \sqrt{z}} = \frac{\sqrt{z}}{z^m}\left\{\frac{-1}{(n-1)\Delta}\,\frac{1}{t^{n-1}} + \right.$

$\left. + \sum_{k=2}^{n-1}(-1)^k \frac{(2n+2m-3)(2n+2m-5)\ldots(2n+2m-2k+1)\,b^{k-1}}{2^{k-1}(n-1)(n-2)\ldots(n-k)\,\Delta^k}\cdot\frac{1}{t^{n-k}}\right\} +$

$+ (-1)^{n-1}\frac{(2n+2m-3)(2n+2m-5)\ldots(-2m+3)(-2m+1)\,b^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!\,\Delta^{n-1}}\int \frac{dx}{tz^m\sqrt{z}}$.

При $n=1$

$$\int \frac{dx}{z^m t\sqrt{z}} = \frac{2}{(2m-1)\Delta}\,\frac{1}{z^{m-1}\sqrt{z}} + \frac{\beta}{\Delta}\int \frac{dx}{tz^{m-1}\sqrt{z}}.$$

2.25 Формы, содержащие $\sqrt{a+bx+cx^2}$

Способы интегрирования

2.251 Рационализация подынтегрального выражения в интегралах вида $\int R\left(x, \sqrt{a+bx+cx^2}\right)dx$ достигается с помощью по крайней мере одной из следующих трех подстановок, называемых *подстановками Эйлера*:

1) $\sqrt{a+bx+cx^2}=xt\pm\sqrt{a}$ при $a>0$;

2) $\sqrt{a+bx+cx^2}=t\pm x\sqrt{c}$ при $c>0$;

3) $\sqrt{c(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$ при условии, что корни x_1 и x_2 уравнения $a+bx+cx^2=0$ действительны.

2.252 Кроме подстановок Эйлера, существует еще следующий способ вычисления интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt{a+bx+cx^2}\right)dx$. При помощи уничтожения иррациональности в знаменателе и простейших алгебраических операций подынтегральное выражение может быть сведено к сумме некоторой рациональной функции от x и выражения вида $\frac{P_1(x)}{P_2(x)\sqrt{a+bx+cx^2}}$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — два многочлена. При помощи выделения из рациональной функции $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ целой части и разложения остатка на простейшие дроби интеграл от последнего выражения сводится к сумме интегралов, каждый из которых имеет один из следующих трех видов:

I. $\int \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$, где $P(x)$ — многочлен некоторой степени r;

II. $\int \frac{dx}{(x+p)^k\sqrt{a+bx+cx^2}}$;

III. $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(\alpha+\beta x+x^2)^m\sqrt{c(a_1+b_1x+x^2)}}$, $\left(a_1=\frac{a}{c},\ b_1=\frac{b}{c}\right)$.

I. $\int \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=Q(x)\sqrt{a+bx+cx^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$, где $Q(x)$ — многочлен $(r-1)$-й степени. Его коэффициенты, а также число λ вычисляются по методу неопределенных коэффициентов из тождества

$$P(x)=Q'(x)(a+bx+cx^2)+\frac{1}{2}Q(x)(b+2cx)+\lambda. \qquad \text{ФII 77}$$

Интегралы вида $\int \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ (при $r\leqslant 3$) можно также вычислить, пользуясь формулами 2.26.

II. Интегралы вида $\int \frac{P(x)\,dx}{(x+p)^k\sqrt{a+bx+cx^2}}$ при условии, что степень n многочлена $P(x)$ ниже k, с помощью подстановки $t=\frac{1}{x+p}$ приводятся к интегралу вида $\int\frac{P(t)\,dt}{\sqrt{\alpha+\beta t+\gamma t^2}}$ (см. также 2.281).

III. Интегралы вида $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(\alpha+\beta x+x^2)^m\sqrt{c(a_1+b_1x+x^2)}}$ вычисляются следующим способом.

Если $b_1 \neq \beta$, то при помощи подстановки

$$x = \frac{a_1 - \alpha}{\beta - b_1} + \frac{t-1}{t+1} \frac{\sqrt{(a_1-\alpha)^2 - (\alpha b_1 - a_1\beta)(\beta - b_1)}}{\beta - b_1}$$

этот интеграл приводится к интегралу вида $\int \frac{P(t)\,dt}{(t^2+p)^m \sqrt{c(t^2+q)}}$, где $P(t)$— многочлен степени не выше $2m-1$. Интеграл $\int \frac{P(t)\,dt}{(t^2+p)^m \sqrt{t^2+q}}$ сводится к сумме интегралов вида $\int \frac{t\,dt}{(t^2+p)^k \sqrt{t^2+q}}$ и $\int \frac{dt}{(t^2+p)^k \sqrt{t^2+q}}$.

Если $b_1 = \beta$, то к интегралам вида $\int \frac{P(t)\,dt}{(t^2+p)^m \sqrt{c(t^2+q)}}$ приводит подстановка $t = x + \frac{b_1}{2}$.

Интеграл $\int \frac{t\,dt}{(t^2+p)^k \sqrt{c(t^2+q)}}$ берется с помощью подстановки $t^2 + q = u^2$.

Интеграл $\int \frac{dt}{(t^2+p)^k \sqrt{c(t^2+q)}}$ берется с помощью подстановки $\frac{t}{\sqrt{t^2+q}} = v$ (см. также 2.283). ФП 78—82

2.26 Формы, содержащие $\sqrt{a+bx+cx^2}$ и целые степени x

Обозначения: $R = a + bx + cx^2$, $\Delta = 4ac - b^2$

Упрощенные формулы для случая $b = 0$ см. 2.27.

2.260

1. $$\int x^m \sqrt{R^{2n+1}}\,dx = \frac{x^{m-1}\sqrt{R^{2n+3}}}{(m+2n+2)c} - \frac{(2m+2n+1)b}{2(m+2n+2)c} \int x^{m-1}\sqrt{R^{2n+1}}\,dx - \frac{(m-1)a}{(m+2n+2)c} \int x^{m-2}\sqrt{R^{2n+1}}\,dx.$$ Т (192) и

2. $$\int \sqrt{R^{2n+1}}\,dx = \frac{2cx+b}{4(n+1)c}\sqrt{R^{2n+1}} + \frac{2n+1}{8(n+1)}\frac{\Delta}{c}\int \sqrt{R^{2n-1}}\,dx.$$ Т(188)

3. $$\int \sqrt{R^{2n+1}}\,dx = \frac{(2cx+b)\sqrt{R}}{4(n+1)c}\left\{R^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n+1)(2n-1)\dots(2n-2k+1)}{8^{k+1}n(n-1)\dots(n-k)}\left(\frac{\Delta}{c}\right)^{k+1} R^{n-k-1}\right\} + \frac{(2n+1)!!}{8^{n+1}(n+1)!}\left(\frac{\Delta}{c}\right)^{n+1}\int \frac{dx}{\sqrt{R}}.$$ Т (190)

2.261 При $n = -1$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(2\sqrt{cR} + 2cx + b) \quad [c > 0];$$ Т (127)

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Arsh} \frac{2cx+b}{\sqrt{\Delta}} \quad [c > 0,\ \Delta > 0];$$ Д (380 001)

$$= \frac{-1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{2cx+b}{\sqrt{-\Delta}} \quad [c < 0,\ \Delta < 0];$$ Т (128)

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(2cx+b) \quad [c > 0,\ \Delta = 0].$$ Д (380 001)

2.262

1. $\int \sqrt{R}\,dx = \frac{(2cx+b)\sqrt{R}}{4c} + \frac{\Delta}{8c}\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ (см. 2.261).

2. $\int x\sqrt{R}\,dx = \frac{\sqrt{R^3}}{3c} - \frac{(2cx+b)\,b}{8c^2}\sqrt{R} - \frac{b\Delta}{16c^2}\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ (см. 2.261).

3. $$\int x^2\sqrt{R}\,dx = \left(\frac{x}{4c} - \frac{5b}{24c^2}\right)\sqrt{R^3} + \left(\frac{5b^2}{16c^2} - \frac{a}{4c}\right)\frac{(2cx+b)\sqrt{R}}{4c} + \left(\frac{5b^2}{16c^2} - \frac{a}{4c}\right)\frac{\Delta}{8c}\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$$ (см. 2.261).

4. $$\int x^3\sqrt{R}\,dx = \left(\frac{x^2}{5c} - \frac{7bx}{40c^2} + \frac{7b^2}{48c^3} - \frac{2a}{15c^2}\right)\sqrt{R^3} - \left(\frac{7b^3}{32c^3} - \frac{3ab}{8c^2}\right)\frac{(2cx+b)\sqrt{R}}{4c} - \left(\frac{7b^3}{32c^3} - \frac{3ab}{8c^3}\right)\frac{\Delta}{8c}\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$$ (см. 2.261).

5. $\int \sqrt{R^3}\,dx = \left(\frac{R}{8c} + \frac{3\Delta}{64c^2}\right)(2cx+b)\sqrt{R} + \frac{3\Delta^2}{128c^2}\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ (см. 2.261).

6. $$\int x\sqrt{R^3}\,dx = \frac{\sqrt{R^5}}{5c} - (2cx+b)\left(\frac{b}{16c^2}\sqrt{R^3} + \frac{3\Delta b}{128c^3}\sqrt{R}\right) - \frac{3\Delta^2 b}{256c^3}\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$$ (см. 2.261).

7. $$\int x^2\sqrt{R^3}\,dx = \left(\frac{x}{6c} + \frac{7b}{60c^2}\right)\sqrt{R^5} + \left(\frac{7b^2}{24c^2} - \frac{a}{6c}\right)\left(2x + \frac{b}{c}\right)\left(\frac{\sqrt{R^3}}{8} + \frac{3\Delta}{64c}\sqrt{R}\right) + \left(\frac{7b^2}{4c} - a\right)\frac{\Delta^2}{256c^3}\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$$ (см. 2.261).

8. $$\int x^3\sqrt{R^3}\,dx = \left(\frac{x^2}{7c} - \frac{3bx}{28c^2} + \frac{3b^3}{40c^3} - \frac{2a}{35c^2}\right)\sqrt{R^5} - \left(\frac{3b^3}{16c^3} - \frac{ab}{4c^2}\right)\left(2x + \frac{b}{c}\right)\left(\frac{\sqrt{R^3}}{8} + \frac{3\Delta}{64c}\sqrt{R}\right) - \left(\frac{3b^2}{4c} - a\right)\frac{3\Delta^2 b}{512c^4}\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$$ (см. 2.261).

2.263

1. $$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{R^{2n+1}}} = \frac{x^{m-1}}{(m-2n)\,c\sqrt{R^{2n-1}}} - \frac{(2m-2n-1)\,b}{2\,(m-2n)\,c}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{R^{2n+1}}} - \frac{(m-1)\,a}{(m-2n)\,c}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{R^{2n+1}}}.$$ Т (193) *и*

При $m = 2n$

2. $$\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{R^{2n+1}}} = -\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\,c\sqrt{R^{2n-1}}} - \frac{b}{2c}\int \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{R^{2n+1}}}\,dx + \frac{1}{c}\int \frac{x^{2n-2}}{\sqrt{R^{2n-1}}}\,dx.$$ Т (194) *и*

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{R^{2n+1}}} = \frac{2(2cx+b)}{(2n-1)\Delta\sqrt{R^{2n-1}}} + \frac{8(n-1)c}{(2n-1)\Delta} \int \frac{dx}{\sqrt{R^{2n-1}}}.$ Т (189)

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{R^{2n+1}}} = \frac{2(2cx+b)}{(2n-1)\Delta\sqrt{R^{2n-1}}} \times$

$$\times \left\{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{8^k(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2k-1)} \frac{c^k}{\Delta^k} R^k\right\} \quad [n \geqslant 1].$$ Т (191)

2.264

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ (см. **2.261**).

2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}} = \frac{\sqrt{R}}{c} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ (см. **2.261**).

3. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}} = \left(\frac{x}{2c} - \frac{3b}{4c^2}\right)\sqrt{R} + \left(\frac{3b^2}{8c^2} - \frac{a}{2c}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ (см. 2.261).

4. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{R}} = \left(\frac{x^2}{3c} - \frac{5bx}{12c^2} + \frac{5b^2}{8c^3} - \frac{2a}{3c^2}\right)\sqrt{R} -$

$$-\left(\frac{5b^3}{16c^3} - \frac{3ab}{4c^2}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$$ (см. **2.261**).

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{R^3}} = \frac{2(2cx+b)}{\Delta\sqrt{R}}.$

6. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R^3}} = -\frac{2(2a+bx)}{\Delta\sqrt{R}}.$

7. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{R^3}} = -\frac{(\Delta-b^2)x - 2ab}{c\Delta\sqrt{R}} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ (см. **2.261**).

8. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{R^3}} = \frac{c\Delta x^2 + b(10ac-3b^2)x + a(8ac-3b^2)}{c^2\Delta\sqrt{R}} - \frac{3b}{2c^2}\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ (см. **2.261**).

2.265 $\int \frac{\sqrt{R^{2n+1}}}{x^m}\,dx =$

$$= -\frac{\sqrt{R^{2n+3}}}{(m-1)ax^{m-1}} + \frac{(2n-2m+5)b}{2(m-1)a}\int \frac{\sqrt{R^{2n+1}}}{x^{m-1}}\,dx +$$

$$+\frac{(2n-m+4)c}{(m-1)a}\int \frac{\sqrt{R^{2n+1}}}{x^{m-2}}\,dx.$$ Т (195)

При $m=1$

$$\int \frac{\sqrt{R^{2n+1}}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{R^{2n+1}}}{2n+1} + \frac{b}{2}\int \sqrt{R^{2n-1}}\,dx + a\int \frac{\sqrt{R^{2n-1}}}{x}\,dx.$$ Т (198)

При $a=0$

$$\int \frac{\sqrt{(bx+cx^2)^{2n+1}}}{x^m}\,dx = \frac{2\sqrt{(bx+cx^2)^{2n+3}}}{(2n-2m+3)bx^m} +$$

$$+\frac{2(m-2n-3)c}{(2n-2m+3)b}\int \frac{\sqrt{(bx+cx^2)^{2n+1}}}{x^{m-1}}.$$ Ла 169 (3)

При $m=0$ см. 2.260 2. и 2.260 3.

При $n=-1$ и $m=1$:

2.266 $\int \frac{dx}{x\sqrt{R}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{2a+bx+2\sqrt{aR}}{x}$ $[a>0]$; Т (137)

$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2a+bx}{x\sqrt{b^2-4ac}}$ $[a<0,\ \Delta<0]$; Т (138)

$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{2a+bx}{2\sqrt{-a}\sqrt{R}}$ $[a<0]$; Ла 178 (6) и

$= -\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Arsh} \frac{2a+bx}{x\sqrt{\Delta}}$ $[a>0,\ \Delta>0]$; Д (380 111)

$= -\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Arth} \frac{2a+bx}{2\sqrt{a}\sqrt{R}}$ $[a>0]$;

$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{x}{2a+bx}$ $[a>0,\ \Delta=0]$;

$= -\frac{2\sqrt{bx+cx^2}}{bx}$ $[a=0,\ b\neq 0]$. Ла 170 (16)

2.267

1. $\int \frac{\sqrt{R}\,dx}{x} = \sqrt{R} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{R}} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ (см. 2.261 и 2.266).

2. $\int \frac{\sqrt{R}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{R}}{x} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{R}} + c\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ (см. 2.261 и 2.266).

При $a=0$

$$\int \frac{\sqrt{bx+cx^2}}{x^2}\,dx = -\frac{2\sqrt{bx+cx^2}}{x} + c\int \frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}}$$ (см. 2.261).

3. $\int \frac{\sqrt{R}\,dx}{x^3} = -\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{b}{4ax}\right)\sqrt{R} - \left(\frac{b^2}{8a} - \frac{c}{2}\right)\int \frac{dx}{x\sqrt{R}}$ (см. 2.266).

При $a=0$

$$\int \frac{\sqrt{bx+cx^2}}{x^3}\,dx = -\frac{2\sqrt{(bx+cx^2)^3}}{3bx^3}.$$

4. $\int \frac{\sqrt{R^3}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{R^3}}{3} + \frac{2bcx+b^2+8ac}{8c}\sqrt{R} +$

$+ a^2\int \frac{dx}{x\sqrt{R}} + \frac{b(12ac-b^2)}{16c}\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ (см. 2.261 и 2.266).

5. $\int \frac{\sqrt{R^3}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{R^5}}{ax} + \frac{cx+b}{a}\sqrt{R^3} + \frac{3}{4}(2cx+3b)\sqrt{R} +$

$+ \frac{3}{2}ab\int \frac{dx}{x\sqrt{R}} + \frac{3(4ac+b^2)}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ (см. 2.261 и 2.266).

При $a=0$

$$\int \frac{\sqrt{(bx+cx^2)^3}}{x^2} = \frac{\sqrt{(bx+cx^2)^3}}{2x} + \frac{3b}{4}\sqrt{bx+cx^2} + \frac{3b^2}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}}$$

(см. 2.261).

6. $\int \frac{\sqrt{R^3}}{x^3}\,dx = -\left(\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{4a^2x}\right)\sqrt{R^5} + \frac{bcx+2ac+b^2}{4a^2}\sqrt{R^3} +$

$+ \frac{3(bcx+2ac+b^2)}{4a}\sqrt{R} + \frac{3}{8}(4ac+b^2)\int \frac{dx}{x\sqrt{R}} + \frac{3}{2}bc\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$

(см. 2.261 и 2.266).

При $a=0$

$$\int \frac{\sqrt{(bx+cx^2)^3}}{x^3}dx=\left(c-\frac{2b}{x}\right)\sqrt{bx+cx^2}+\frac{3bc}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}}\qquad \text{(см. 2.261).}$$

2.268 $$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{R^{2n+1}}}=-\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}\sqrt{R^{2n-1}}}-$$
$$-\frac{(2n+2m-3)b}{2(m-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{R^{2n+1}}}-\frac{(2n+2m-2)c}{(m-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{R^{2n+1}}}.\qquad \text{Т (196)}$$

При $m=1$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{R^{2n+1}}}=\frac{1}{(2n-1)a\sqrt{R^{2n-1}}}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{R^{2n+1}}}+\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x\sqrt{R^{2n-1}}}.\qquad \text{Т (199)}$$

При $a=0$

$$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{(bx+cx^2)^{2n+1}}}=-\frac{2}{(2n+2m-1)bx^m\sqrt{(bx+cx^2)^{2n-1}}}-$$
$$-\frac{(4n+2m-2)c}{(2n+2m-1)b}\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{(bx+cx^2)^{2n+1}}}\qquad \text{(сравни 2.265).}$$

2.269

1. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{R}}\qquad \text{(см. 2.266).}$$

2. $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{R}}=-\frac{\sqrt{R}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{R}}\qquad \text{(см. 2.266).}$$

При $a=0$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{bx+cx^2}}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{bx^2}+\frac{2c}{b^2x}\right)\sqrt{bx+cx^2}.$$

3. $$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{R}}=\left(-\frac{1}{2ax^2}+\frac{3b}{4a^2x}\right)\sqrt{R}+\left(\frac{3b^2}{8a^2}-\frac{c}{2a}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{R}}\qquad \text{(см. 2.266).}$$

При $a=0$

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{bx+cx^2}}=\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{bx^3}+\frac{4c}{3b^2x^2}-\frac{8c^2}{3b^3x}\right)\sqrt{bx+cx^2}.$$

4. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{R^3}}=-\frac{2(bcx-2ac+b^2)}{a\Delta\sqrt{R}}+\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x\sqrt{R}}\qquad \text{(см. 2.266).}$$

При $a=0$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(bx+cx^2)^3}}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{bx}+\frac{4c}{b^2}-\frac{8c^2x}{b^3}\right)\frac{1}{\sqrt{bx+cx^2}}.$$

5. $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{R^3}}=\left(-\frac{1}{ax}+\frac{2bc}{a\Delta}+\frac{c(3b^2-3ac)x}{a^2\Delta}\right)\frac{1}{\sqrt{R}}-\frac{3b}{2a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{R}}$$
(см. 2.266).

При $a=0$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(bx+cx^2)^3}}=\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{bx^2}+\frac{2c}{b^2x}-\frac{8c^2}{b^3}-\frac{16c^3x}{b^4}\right)\frac{1}{\sqrt{bx+cx^2}}.$$

6. $$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{R^3}}=\left(-\frac{1}{ax^2}+\frac{5b}{2a^2x}-\frac{15b^4-62acb^2+24a^2c^2}{2a^3\Delta}-\right.$$
$$\left.-\frac{bc(15b^2-52ac)x}{2a^3\Delta}\right)\frac{1}{2\sqrt{R}}+\frac{15b^2-12ac}{8a^3}\int\frac{dx}{x\sqrt{R}}\qquad \text{(см. 2.266).}$$

При $a=0$

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{(bx+cx^2)^3}}=\frac{2}{7}\left(-\frac{1}{bx^3}+\frac{8c}{5b^2x^2}-\frac{16c^2}{5b^3x}+\frac{64c^3}{5b^4}+\frac{128c^4x}{5b^5}\right)\frac{1}{\sqrt{bx+cx^2}}.$$

2.27 Формы, содержащие $\sqrt{a+cx^2}$ и целые степени x

Обозначения: $u=\sqrt{a+cx^2}$.

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(x\sqrt{c}+u\right) \qquad [c>0];$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin x\sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad [c<0 \text{ и } a>0].$$

$$I_2=\frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\frac{u-\sqrt{a}}{u+\sqrt{a}} \qquad [a>0 \text{ и } c>0];$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a}-u}{\sqrt{a}+u} \qquad [a>0 \text{ и } c<0];$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arcsec} x\sqrt{-\frac{c}{a}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arccos\frac{1}{x}\sqrt{-\frac{a}{c}} \qquad [a<0 \text{ и } c>0].$$

2.271

1. $\int u^5\,dx=\frac{1}{6}xu^5+\frac{5}{24}axu^3+\frac{5}{16}a^2xu+\frac{5}{16}a^3I_1.$ Д (230.05)u
2. $\int u^3\,dx=\frac{1}{4}xu^3+\frac{3}{8}axu+\frac{3}{8}a^2I_1.$ Д (230.03)u
3. $\int u\,dx=\frac{1}{2}xu+\frac{1}{2}aI_1.$ Д (230.01)u
4. $\int\frac{dx}{u}=I_1.$ Д (200.01)u
5. $\int\frac{dx}{u^3}=\frac{1}{a}\frac{x}{u}$ Д (200.03)u
6. $\int\frac{dx}{u^{2n+1}}=\frac{1}{a^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n-1}{k}\frac{c^kx^{2k+1}}{u^{2k+1}}.$
7. $\int\frac{x\,dx}{u^{2n+1}}=-\frac{1}{(2n-1)cu^{2n-1}}.$ Д (201.9)u

2.272

1. $\int x^2u^3\,dx=\frac{1}{6}\frac{xu^5}{c}-\frac{1}{24}\frac{axu^3}{c}-\frac{1}{16}\frac{a^2xu}{c}-\frac{1}{16}\frac{a^3}{c}I_1.$ Д (232.03) u
2. $\int x^2u\,dx=\frac{1}{4}\frac{xu^3}{c}-\frac{1}{8}\frac{axu}{c}-\frac{1}{8}\frac{a^2}{c}I_1.$ Д (232.01) u
3. $\int\frac{x^2}{u}dx=\frac{1}{2}\frac{xu}{c}-\frac{1}{2}\frac{a}{c}I_1.$ Д (202.01) u
4. $\int\frac{x^2}{u^3}dx=-\frac{x}{cu}+\frac{1}{c}I_1.$ Д (202.03) u
5. $\int\frac{x^2}{u^5}dx=\frac{1}{3}\frac{x^3}{au^3}.$ Д (202.05) u
6. $\int\frac{x^2\,dx}{u^{2n+1}}=\frac{1}{a^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{2k+3}\binom{n-2}{k}\frac{c^kx^{2k+3}}{u^{2k+3}}.$
7. $\int\frac{x^3\,dx}{u^{2n+1}}=-\frac{1}{(2n-3)c^2u^{2n-3}}+\frac{a}{(2n-1)c^2u^{2n-1}}.$ Д (203.9) u

2.273

1. $\int x^4u^3\,dx=\frac{1}{8}\frac{x^3u^5}{c}-\frac{axu^5}{16c^2}+\frac{a^2xu^3}{64c^3}+\frac{3a^3xu}{128c^3}+\frac{3a^4}{128c^3}I_1.$ Д (234.03) и

2. $\int x^4u\,dx=\frac{1}{6}\frac{x^3u^3}{c}-\frac{axu^3}{8c^2}+\frac{a^2xu}{16c^2}+\frac{a^3}{16c^2}I_1.$ Д (234.01) и

3. $\int\frac{x^4}{u}\,dx=\frac{1}{4}\frac{x^3u}{c}-\frac{3}{8}\frac{axu}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{a^3}{c^2}I_1.$ Д (204.01) и

4. $\int\frac{x^4}{u^3}\,dx=\frac{1}{2}\frac{xu}{c^2}+\frac{ax}{c^2u}-\frac{3}{2}\frac{a}{c^2}I_1.$ Д (204.03) и

5. $\int\frac{x^4}{u^5}\,dx=-\frac{x}{c^2u}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{cu^3}+\frac{1}{c^2}I_1.$ Д (204.05) и

6. $\int\frac{x^4}{u^7}\,dx=\frac{1}{5}\frac{x^5}{au^5}.$ Д (204.07) и

7. $\int\frac{x^4\,dx}{u^{2n+1}}=\frac{1}{a^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-3}\frac{(-1)^k}{2k+5}\binom{n-3}{k}\frac{c^kx^{2k+5}}{u^{2k+5}}.$

8. $\int\frac{x^5\,dx}{u^{2n+1}}=-\frac{1}{(2n-5)\,c^3u^{2n-5}}+\frac{2a}{(2n-3)\,c^3u^{2n-3}}-\frac{a^2}{(2n-1)\,c^3u^{2n-1}}.$ Д (205.9)и

2.274

1. $\int x^6u^3\,dx=\frac{1}{10}\frac{x^5u^5}{c}-\frac{ax^3u^5}{16c^2}+\frac{a^2xu^5}{32c^3}-\frac{a^3xu^3}{128c^3}-\frac{3a^4xu}{256c^3}-\frac{3}{256}\frac{a^5}{c^3}I_1.$

2. $\int x^6u\,dx=\frac{1}{8}\frac{x^5u^3}{c}-\frac{5}{48}\frac{ax^2u^3}{c^2}+\frac{5a^2xu^3}{64c^3}-\frac{5a^3xu}{128c^3}-\frac{5}{128}\frac{a^4}{c^3}I_1.$

3. $\int\frac{x^6}{u}\,dx=\frac{1}{6}\frac{x^5u}{c}-\frac{5}{24}\frac{ax^3u}{c^2}+\frac{5}{16}\frac{a^2xu}{c^3}-\frac{5}{16}\frac{a^3}{c^3}I_1.$ Д (206.01) и

4. $\int\frac{x^6}{u^3}\,dx=\frac{1}{4}\frac{x^5}{cu}-\frac{5}{8}\frac{ax^3}{c^2u}-\frac{15}{8}\frac{a^2x}{c^3u}+\frac{15}{8}\frac{a^2}{c^3}I_1.$ Д (206.03) и

5. $\int\frac{x^6}{u^5}\,dx=\frac{1}{2}\frac{x^5}{cu^3}+\frac{10}{3}\frac{ax^3}{c^2u^3}+\frac{5}{2}\frac{a^2x}{c^3u^3}-\frac{5}{2}\frac{a}{c^3}I_1.$ Д (206.05) и

6. $\int\frac{x^6}{u^7}\,dx=-\frac{23}{15}\frac{x^5}{cu^5}-\frac{7}{3}\frac{ax^3}{c^2u^5}-\frac{a^2x}{c^3u^5}+\frac{1}{c^3}I_1.$ Д (206.07) и

7. $\int\frac{x^6}{u^9}\,dx=\frac{1}{7}\frac{x^7}{au^7}.$ Д (206.09) и

8. $\int\frac{x^6\,dx}{u^{2n+1}}=\frac{1}{a^{n-3}}\sum_{k=0}^{n-4}\frac{(-1)^k}{2k+7}\binom{n-4}{k}\frac{c^kx^{2k+7}}{u^{2k+7}}.$

9. $\int\frac{x^7\,dx}{u^{2n+1}}=-\frac{1}{(2n-7)\,c^4u^{2n-7}}+\frac{3a}{(2n-5)\,c^4u^{2n-5}}-\frac{3a^2}{(2n-3)\,c^4u^{2n-3}}+$
$+\frac{a^3}{(2n-1)\,c^4u^{2n-1}}.$ Д (207.9)и

2.275

1. $\int\frac{u^5}{x}\,dx=\frac{u^5}{5}+\frac{1}{3}au^3+a^2u+a^3I_2.$ Д (241.05)и

2. $\int\frac{u^3}{x}\,dx=\frac{u^3}{3}+au+a^2I_2.$ Д (241.03)и

3. $\int\frac{u}{x}\,dx=u+aI_2.$ Д (241.01)и

4. $\int\frac{dx}{xu}=I_2.$ Д (221.01)и

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{xu^{2n+1}} = \frac{1}{a^n} I_2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)\, a^{n-k} u^{2k+1}}.$

6. $\displaystyle\int \frac{u^5}{x^2}\, dx = -\frac{u^5}{x} + \frac{5}{4} cxu^3 + \frac{15}{8} acxu + \frac{15}{8} a^2 I_1.$ Д (242.05)и

7. $\displaystyle\int \frac{u^3}{x^2}\, dx = -\frac{u^3}{x} + \frac{3}{2} cxu + \frac{3}{2} a I_1.$ Д (242.03)и

8. $\displaystyle\int \frac{u}{x^2}\, dx = -\frac{u}{x} + I_1.$ Д (242.01)и

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 u^{2n+1}} = -\frac{1}{a^{n+1}} \left\{ \frac{u}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \binom{n}{k} c^k \left(\frac{x}{u}\right)^{2k-1} \right\}.$

2.276

1. $\displaystyle\int \frac{u^5}{x^3}\, dx = -\frac{u^5}{2x^2} + \frac{5}{6} cu^3 + \frac{5}{2} acu + \frac{5}{2} a^2 c I_2.$ Д (243.05)и

2. $\displaystyle\int \frac{u^3}{x^3}\, dx = -\frac{u^3}{2x^2} + \frac{3}{2} cu + \frac{3}{2} ac I_2.$ Д (243.03)и

3. $\displaystyle\int \frac{u}{x^3}\, dx = -\frac{u}{2x^2} + \frac{c}{2} I_2.$ Д (243.01)и

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 u} = -\frac{u}{2ax^2} - \frac{c}{2a} I_2.$ Д (223.01)и

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 u^3} = -\frac{1}{2ax^2 u} - \frac{3c}{2a^2 u} - \frac{3c}{2a^2} I_2.$ Д (223.03)и

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 u^5} = -\frac{1}{2ax^2 u^3} - \frac{5}{6} \frac{c}{a^3 u^3} - \frac{5}{2} \frac{c}{a^3 u} - \frac{5}{2} \frac{c}{a^3} I_2.$ Д (223.05)и

7. $\displaystyle\int \frac{u^5}{x^4}\, dx = -\frac{au^5}{3x^3} - \frac{2acu}{x} + \frac{c^2 xu}{2} + \frac{5}{2} ac I_1.$ Д (244.05)и

8. $\displaystyle\int \frac{u^3}{x^4}\, dx = -\frac{u^3}{3x^3} - \frac{cu}{x} + c I_1.$ Д (244.03)и

9. $\displaystyle\int \frac{u}{x^4}\, dx = -\frac{u^3}{3ax^3}.$ Д (244.01)и

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 u^{2n+1}} = \frac{1}{a^{n+3}} \left\{ -\frac{u^3}{3x^3} + (n+1) \frac{cu}{x} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k-3} \binom{n+1}{k} c^k \left(\frac{x}{u}\right)^{2k-3} \right\}.$

2.277

1. $\displaystyle\int \frac{u^3}{x^5}\, dx = -\frac{u^3}{4x^4} - \frac{3}{8} \frac{cu^3}{ax^2} + \frac{3}{8} \frac{c^2 u}{a} + \frac{3}{8} c^2 I_2.$ Д (245.03)и

2. $\displaystyle\int \frac{u}{x^5}\, dx = -\frac{u}{4x^4} - \frac{1}{8} \frac{cu}{ax^2} - \frac{1}{8} \frac{c^3}{a} I_2.$ Д (245.01)и

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5 u} = -\frac{u}{4ax^4} + \frac{3}{8} \frac{cu}{a^2 x^2} + \frac{3}{8} \frac{c^2}{a^2} I_2.$ Д (225.01)и

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5 u^3} = -\frac{1}{4ax^4 u} + \frac{5}{8} \frac{c}{a^2 x^2 u} + \frac{15}{8} \frac{c^2}{a^3 u} + \frac{15}{8} \frac{c^2}{a^3} I_2.$ Д (225.03)и

2.278

1. $\displaystyle\int \frac{u^3}{x^6}\, dx = -\frac{u^5}{5ax^5}.$ Д (246.03)и

2. $\displaystyle\int \frac{u}{x^6}\, dx = -\frac{u^3}{5ax^5} + \frac{2}{15} \frac{cu^3}{a^2 x^3}.$ Д (246.01)и

3. $\int \frac{dx}{x^6 u} = \frac{1}{a^3}\left(-\frac{u^5}{5x^5} + \frac{2}{3}\frac{cu^3}{x^3} - \frac{c^2 u}{x}\right).$* Д (226.01)$u$

4. $\int \frac{dx}{x^6 u^{2n+1}} = \frac{1}{a^{n+3}}\left\{-\frac{u^5}{5x^5} + \frac{1}{3}\binom{n+2}{1}\frac{cu^3}{x^3} - \binom{n+2}{2}\frac{c^2 u}{x} + \right.$

$$\left. + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{(-1)^k}{2k-5}\binom{n+2}{k} c^k \left(\frac{x}{u}\right)^{2k-5}\right\}.$$

2.28 Формы, содержащие $\sqrt{a+bx+cx^2}$ и многочлены первой и второй степени

Обозначение: $R = a + bx + cx^2$

См. также 2.252.

2.281 $\int \frac{dx}{(x+p)^n \sqrt{R}} = -\int \frac{t^{n-1}dt}{\sqrt{c + (b-2pc)t + (a-bp+cp^2)t^2}} \quad \left[t = \frac{1}{x+p}\right].$

2.282

1. $\int \frac{\sqrt{R}\,dx}{x+p} = c\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + (b-cp)\int \frac{dx}{\sqrt{R}} + (a-bp+cp^2)\int \frac{dx}{(x+p)\sqrt{R}}.$

2. $\int \frac{dx}{(x+p)(x+q)\sqrt{R}} = \frac{1}{q-p}\int \frac{dx}{(x+p)\sqrt{R}} + \frac{1}{p-q}\int \frac{dx}{(x+q)\sqrt{R}}.$

3. $\int \frac{\sqrt{R}\,dx}{(x+p)(x+q)} = \frac{1}{q-p}\int \frac{\sqrt{R}dx}{x+p} + \frac{1}{p-q}\int \frac{\sqrt{R}dx}{x+q}.$

4. $\int \frac{(x+p)\sqrt{R}\,dx}{x+q} = \int \sqrt{R}\,dx + (p-q)\int \frac{\sqrt{R}\,dx}{x+q}.$

5. $\int \frac{(rx+s)\,dx}{(x+p)(x+q)\sqrt{R}} = \frac{s-pr}{q-p}\int \frac{dx}{(x+p)\sqrt{R}} + \frac{s-qr}{p-q}\int \frac{dx}{(x+q)\sqrt{R}}.$

2.283 $\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(p+R)^n\sqrt{R}} = \frac{A}{c}\int \frac{du}{(p+u^2)^n} + \frac{2Bc-Ab}{2c}\int \frac{(1-cv^2)^{n-1}\,dv}{\left[p+a-\frac{b^2}{4c}-cpv^2\right]^n},$

где $u = \sqrt{R}$ и $v = \frac{b+2cx}{2c\sqrt{R}}$.

2.284 $\int \frac{Ax+B}{(p+R)\sqrt{R}}dx = \frac{A}{c}I_1 + \frac{2Bc-Ab}{\sqrt{c^2 p\,[b^2-4(a+p)c]}}I_2,$

где

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{p}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{R}{p}} \qquad [p > 0];$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-p}}\ln\frac{\sqrt{-p}-\sqrt{R}}{\sqrt{-p}+\sqrt{R}} \qquad [p < 0].$$

$$I_2 = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{p}{b^2-4(a+p)c}}\,\frac{b+2cx}{\sqrt{R}} \qquad [p\{b^2-4(a+p)c\}>0,\ p<0];$$

$$= -\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{p}{b^2-4(a+p)c}}\,\frac{b+2cx}{\sqrt{R}} \qquad [p\{b^2-4(a+p)c\}>0,\ p>0];$$

$$= \frac{1}{2i}\ln\frac{\sqrt{4(a+p)c-b^2}\,\sqrt{\;}+\sqrt{p}\,(b+2cx)}{\sqrt{4(a+p)c-b^2}\,\sqrt{R}-\sqrt{p}\,(b+2cx)} \qquad [p\{b^2-4(a+p)c\}<0,\ p>0];$$

$$= \frac{1}{2i}\ln\frac{\sqrt{b^2-4(a+p)c}\,\sqrt{R}-\sqrt{-p}\,(b+2cx)}{\sqrt{b^2-4(a+p)c}\,\sqrt{R}+\sqrt{-p}\,(b+2cx)} \qquad [p\{b^2-4(a+p)c\}<0,\ p<0].$$

2.29 Интегралы, приводящиеся к эллиптическим и псевдоэллиптическим

2.290 Интегралы $\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right)dx$, где $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени, путем алгебраических преобразований сводятся к сумме интегралов, выражающихся через элементарные функции, и эллиптических интегралов (см. 8.11). Так как подстановки, преобразующие данный интеграл в эллиптический интеграл в нормальный лежандровой форме, различны для различных промежутков интегрирования, то соответствующие формулы даны в разделе определенных интегралов (см. 3.13, 3.17).

2.291 К интегралам вида $\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx$ приводятся некоторые интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[k]{P_n(x)}\right)dx$, где $k \geqslant 2$, а $P_n(x)$ — многочлен, степень которого выше 4. Ниже даются примеры такого приведения.

1. $$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^6}} = -\int\frac{dz}{\sqrt{3+3z^2+z^4}} \qquad \left[x^2 = \frac{1}{1+z^2}\right].$$

2. $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2+cx^4+dx^6}} = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{az+bz^2+cz^3+dz^4}} \qquad [x^2 = z].$$

3. $$\int(a+2bx+cx^2+gx^3)^{\pm\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}\int\frac{z^2A^{\pm\frac{1}{3}}dz}{B}$$

$$\left[a+2bx+cx^2 = z^3,\ A = g\left(\frac{-b+\sqrt{b^2+(z^3-a)c}}{c}\right)^3+z^3,\right.$$

$$\left.B = \sqrt{b^2+(z^3-a)c}\right].$$

4. $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+cx^4+bx^5+ax^6}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(z+1)p}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{\sqrt{(z-1)p}} \qquad \left[x = z+\sqrt{z^2-1}\right];$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d}{\sqrt{(z+1)p}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{\sqrt{(z-1)p}} \qquad \left[x = z-\sqrt{z^2-1}\right],$$

где

$$p = 2a(4z^3-3z)+2b(2z^2-1)+2cz+d.$$

5. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2+cx^4+bx^6+ax^8}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{a+by+cy^2+by^3+ay^4}} \quad [x=\sqrt{y}],$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{(z+1)p}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{(z-1)p}} \quad [y=z+\sqrt{z^2-1}];$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{(z+1)p}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{(z-1)p}} \quad [y=z-\sqrt{z^2-1}],$$

где $p=2a(2z^2-1)+2bz+c$.

6. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^4+cx^8}} = \frac{1}{2}\sqrt[8]{\frac{a}{c}}\int \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{a+b_1t^2+at^4}} \quad \left[x=\sqrt[8]{\frac{a}{c}}\sqrt{t}\right];$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt[8]{\frac{a}{c}}\left\{\int \frac{dz}{\sqrt{(z+1)p}} - \int \frac{dz}{\sqrt{(z-1)p}}\right\} \quad [t=z+\sqrt{z^2-1}];$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt[8]{\frac{a}{c}}\left\{\int \frac{dz}{\sqrt{(z+1)p}} + \int \frac{dz}{\sqrt{(z-1)p}}\right\} \quad [t=z-\sqrt{z^2-1}],$$

где $p=2a(2z^2-1)+b_1$; $b_1=b\sqrt{\frac{a}{c}}$.

7. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{a+bx^2+cx^4}} = 2\int \frac{z^2dz}{\sqrt{A+Bz^4}}$$
$$[a+bx^2+cx^4=z^4, \qquad A=b^2-4ac, \qquad B=4c].$$

8. $$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{a+2bx^2+cx^4}} = \int \frac{\sqrt{b^2-a(c-z^4)}+b}{(c-z^4)\sqrt{b^2-a(c-z^4)}}\,z^2\,dz =$$
$$= \int R_1(z^4)\,z^2\,dz + \int \frac{R_2(z^4)\,z^2\,dz}{\sqrt{b^2-a(c-z^4)}},$$

где $R_1(z^4)$ и $R_2(z^4)$ — рациональные функции от z^4; $a+2bx^2+cx^4=x^4z^4$.

2.292 В некоторых случаях интегралы $\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx$, где $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени, могут быть выражены при помощи элементарных функций. Такие интегралы называются *псевдоэллиптическими*.

Так, если имеют место соотношения:

$$f_1(x) = -f_1\left(\frac{1}{k^2x}\right), \quad f_2(x) = -f_2\left(\frac{1-k^2x}{k^2(1-x)}\right), \quad f_3(x) = -f_3\left(\frac{1-x}{1-k^2x}\right),$$

то

1. $$\int \frac{f_1(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} = \int R_1(z)\,dz \quad \left[zx=\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}\right];$$

2. $$\int \frac{f_2(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} = \int R_2(z)\,dz \quad \left[z=\frac{\sqrt{x(1-k^2x)}}{\sqrt{1-x}}\right];$$

3. $$\int \frac{f_3(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} = \int R_3(z)\,dz \quad \left[z=\frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{1-k^2x}}\right],$$

где $R_1(z)$, $R_2(z)$, $R_3(z)$ — рациональные функции от z.

2.3 ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

2.31 Формы, содержащие e^{ax}

2.311 $\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$.

2.312 a^x в подынтегральных функциях следует заменить через $e^{x\ln a} = a^x$.

2.313

1. $\int \frac{dx}{a+be^{mx}} = \frac{1}{am}[mx - \ln(a+be^{mx})]$. П (410)

2. $\int \frac{dx}{1+e^x} = \ln\frac{e^x}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x)$. П (409)

2.314 $\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}} = \frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$ $[ab>0]$; П (411)

$$= \frac{1}{2m\sqrt{-ab}}\ln\frac{b+e^{mx}\sqrt{-ab}}{b-e^{mx}\sqrt{-ab}} \qquad [ab<0].$$

2.315 $\int \frac{dx}{\sqrt{a+be^{mx}}} = \frac{1}{m\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a+be^{mx}}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^{mx}}+\sqrt{a}}$ $[a>0]$;

$$= \frac{2}{m\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a+be^{mx}}}{\sqrt{-a}} \qquad [a<0].$$

2.32 Показательная и рациональные функции от x

2.321

1. $\int x^m e^{ax}\,dx = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a}\int x^{m-1}e^{ax}\,dx$.

2. $\int x^n e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x^n}{a} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{a^{k+1}}x^{n-k}\right)$.

2.322

1. $\int xe^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)$.

2. $\int x^2e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$.

3. $\int x^3e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4}\right)$.

2.323 $\int P_m(x)e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{P^{(k)}(x)}{a^k}$,

где $P_m(x)$ — многочлен относительно x степени m, $P^{(k)}(x)$ — k-я производная по x от $P_m(x)$.

2.324

1. $\int \frac{e^{ax}\,dx}{x^m} = \frac{1}{m-1}\left[-\frac{e^{ax}}{x^{m-1}} + a\int\frac{e^{ax}\,dx}{x^{m-1}}\right]$.

2. $\int \frac{e^{ax}}{x^n}dx = -e^{ax}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a^{k-1}}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)x^{n-k}} + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{Ei}(ax)$.

2.325

1. $\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \mathrm{Ei}\,(ax).$

2. $\int \frac{e^{ax}}{x^2}\,dx = -\frac{e^{ax}}{x} + a\,\mathrm{Ei}\,(ax).$

3. $\int \frac{e^{ax}}{x^3}\,dx = -\frac{e^{ax}}{2x^2} - \frac{ae^{ax}}{2x} + \frac{a^2}{2}\,\mathrm{Ei}\,(ax).$

2.326 $\int \frac{xe^{ax}\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}.$

2.4 ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

2.41—2.43 Степени $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$

2.411

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^q x\,dx &= \frac{\operatorname{sh}^{p+1} x \operatorname{ch}^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q}\int \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^{q-2} x\,dx;\\
&= \frac{\operatorname{sh}^{p-1} x \operatorname{ch}^{q+1} x}{p+q} - \frac{p-1}{p+q}\int \operatorname{sh}^{p-2} x \operatorname{ch}^{q} x\,dx;\\
&= \frac{\operatorname{sh}^{p-1} x \operatorname{ch}^{q+1} x}{q+1} - \frac{p-1}{q+1}\int \operatorname{sh}^{p-2} x \operatorname{ch}^{q+2} x\,dx;\\
&= \frac{\operatorname{sh}^{p+1} x \operatorname{ch}^{q-1} x}{p+1} - \frac{q-1}{p+1}\int \operatorname{sh}^{p+2} x \operatorname{ch}^{q-2} x\,dx;\\
&= \frac{\operatorname{sh}^{p+1} x \operatorname{ch}^{q+1} x}{p+1} - \frac{p+q+2}{p+1}\int \operatorname{sh}^{p+2} x \operatorname{ch}^{q} x\,dx;\\
&= -\frac{\operatorname{sh}^{p+1} x \operatorname{ch}^{q+1} x}{q+1} + \frac{p+q+2}{q+1}\int \operatorname{sh}^{p} x \operatorname{ch}^{q+2} x\,dx.\end{aligned}$$

2.412

1. $$\int \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^{2n} x\,dx = \frac{\operatorname{sh}^{p+1} x}{2n+p}\left\{\operatorname{ch}^{2n-1} x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)}{(2n+p-2)(2n+p-4)\ldots(2n+p-2k)} \operatorname{ch}^{2n-2k-1} x\right\} + \frac{(2n-1)!!}{(2n+p)(2n+p-2)\ldots(p+2)}\int \operatorname{sh}^p x\,dx.$$

Эта формула применима при любом действительном p, за исключением следующих отрицательных четных чисел. $-2, -4, \ldots, -2n$. При p натуральном и $n=0$ имеем:

2. $$\int \operatorname{sh}^{2m} x\,dx = (-1)^m \binom{2m}{m}\frac{x}{2^{2m}} + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{2m}{k}\frac{\operatorname{sh}(2m-2k)x}{2m-2k}.$$ Т (543)

3. $$\int \operatorname{sh}^{2m+1} x\,dx = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{2m+1}{k}\frac{\operatorname{ch}(2m-2k+1)x}{2m-2k+1};$$ Т (544)

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{\operatorname{ch}^{2k+1} x}{2k+1}.$$ ГХI [351](5)

4. $$\int \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^{2n+1} x\,dx = \frac{\operatorname{sh}^{p+1} x}{2n+p+1}\left\{\operatorname{ch}^{2n} x + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k n(n-1)\dots(n-k+1)\operatorname{ch}^{2n-2k} x}{(2n+p-1)(2n+p-3)\dots(2n+p-2k+1)}\right\}.$$

Эта формула применима при любом действительном p, за исключением следующих отрицательных чисел: $-1,\ -3,\ \dots,\ -(2n+1)$.

2.413

1. $$\int \operatorname{ch}^p x \operatorname{sh}^{2n} x\,dx = \frac{\operatorname{ch}^{p+1} x}{2n+p}\left\{\operatorname{sh}^{2n-1} x + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+1)\operatorname{sh}^{2n-2k-1} x}{(2n+p-2)(2n+p-4)\dots(2n+p-2k)}\right\} + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+p)(2n+p-2)\dots(p+2)}\int \operatorname{ch}^p x\,dx.$$

Эта формула применима при любом действительном p, за исключением следующих отрицательных четных чисел: $-2,\ -4,\ \dots,\ -2n$. При p натуральном и $n=0$ имеем:

2. $$\int \operatorname{ch}^{2m} x\,dx = \binom{2m}{m}\frac{x}{2^{2m}} + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m}{k}\frac{\operatorname{sh}(2m-2k)x}{2m-2k}.$$ Т (541)

3. $$\int \operatorname{ch}^{2m+1} x\,dx = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{k}\frac{\operatorname{sh}(2m-2k+1)x}{2m-2k+1};$$ Т (542)

$$= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{\operatorname{sh}^{2k+1} x}{2k+1}.$$ ГХI [351] (8)

4. $$\int \operatorname{ch}^p x \operatorname{sh}^{2n+1} x\,dx = \frac{\operatorname{ch}^{p+1} x}{2n+p+1}\left\{\operatorname{sh}^{2n} x + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{2^k n(n-1)\dots(n-k+1)\operatorname{sh}^{2n-2k} x}{(2n+p-1)(2n+p-3)\dots(2n+p-2k+1)}\right\}.$$

Эта формула применима при любом действительном p, за исключением следующих отрицательных чисел: $-1,\ -3,\ \dots,\ -(2n+1)$.

2.414

1. $$\int \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{ch} ax.$$

2. $$\int \operatorname{sh}^2 ax\,dx = \frac{1}{4a}\operatorname{sh} 2ax - \frac{x}{2}.$$

3. $$\int \operatorname{sh}^3 x\,dx = -\frac{3}{4}\operatorname{ch} x + \frac{1}{12}\operatorname{ch} 3x = \frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x.$$

4. $$\int \operatorname{sh}^4 x\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4x = \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x + \frac{1}{4}\operatorname{sh}^3 x\operatorname{ch} x.$$

5. $$\int \operatorname{sh}^5 x\,dx = \frac{5}{8}\operatorname{ch} x - \frac{5}{48}\operatorname{ch} 3x + \frac{1}{80}\operatorname{ch} 5x;$$

$$= \frac{4}{5}\operatorname{ch} x + \frac{1}{5}\operatorname{sh}^4 x\operatorname{ch} x - \frac{4}{15}\operatorname{ch}^3 x.$$

6. $\int \operatorname{sh}^6 x\,dx = -\frac{5}{16}x + \frac{15}{64}\operatorname{sh} 2x - \frac{3}{64}\operatorname{sh} 4x + \frac{1}{192}\operatorname{sh} 6x;$

$= -\frac{5}{16}x + \frac{1}{6}\operatorname{sh}^5 x \operatorname{ch} x - \frac{5}{24}\operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x + \frac{5}{16}\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$

7. $\int \operatorname{sh}^7 x\,dx = -\frac{35}{64}\operatorname{ch} x + \frac{7}{64}\operatorname{ch} 3x - \frac{7}{320}\operatorname{ch} 5x + \frac{1}{448}\operatorname{ch} 7x;$

$= -\frac{24}{35}\operatorname{ch} x + \frac{8}{35}\operatorname{ch}^3 x - \frac{6}{35}\operatorname{ch} x \operatorname{sh}^4 x + \frac{1}{7}\operatorname{ch} x \operatorname{sh}^6 x.$

8. $\int \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sh} ax.$

9. $\int \operatorname{ch}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\operatorname{sh} 2ax.$

10. $\int \operatorname{ch}^3 x\,dx = \frac{3}{4}\operatorname{sh} x + \frac{1}{12}\operatorname{sh} 3x = \operatorname{sh} x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x.$

11. $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4x = \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \frac{1}{4}\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x.$

12. $\int \operatorname{ch}^5 x\,dx = \frac{5}{8}\operatorname{sh} x + \frac{5}{48}\operatorname{sh} 3x + \frac{1}{80}\operatorname{sh} 5x;$

$= \frac{4}{5}\operatorname{sh} x + \frac{1}{5}\operatorname{ch}^4 x \operatorname{sh} x + \frac{4}{15}\operatorname{sh}^3 x.$

13. $\int \operatorname{ch}^6 x\,dx = \frac{5}{16}x + \frac{15}{64}\operatorname{sh} 2x + \frac{3}{64}\operatorname{sh} 4x + \frac{1}{192}\operatorname{sh} 6x;$

$= \frac{5}{16}x + \frac{5}{16}\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \frac{5}{24}\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x + \frac{1}{6}\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^5 x.$

14. $\int \operatorname{ch}^7 x\,dx = \frac{35}{64}\operatorname{sh} x + \frac{7}{64}\operatorname{sh} 3x + \frac{7}{320}\operatorname{sh} 5x + \frac{1}{448}\operatorname{sh} 7x;$

$= \frac{24}{35}\operatorname{sh} x + \frac{8}{35}\operatorname{sh}^3 x + \frac{6}{35}\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^4 x + \frac{1}{7}\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^6 x.$

2.415

1. $\int \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} bx\,dx = \frac{\operatorname{ch}(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\operatorname{ch}(a-b)x}{2(a-b)}.$

2. $\int \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{4a}\operatorname{ch} 2ax.$

3. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x.$

4. $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sh}^4 x.$

5. $\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch} x\,dx = \frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x.$

6. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x.$

7. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\,dx = -\frac{x}{8} + \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4x.$

8. $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{1}{5}\left(\operatorname{sh}^2 x - \frac{2}{3}\right)\operatorname{ch}^3 x.$

9. $\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\operatorname{sh} 2x - \frac{1}{64}\operatorname{sh} 4x + \frac{1}{192}\operatorname{sh} 6x.$

10. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x\, dx = \frac{1}{4} \operatorname{ch}^4 x.$

11. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x\, dx = \frac{1}{5}\left(\operatorname{ch}^2 x + \frac{2}{3}\right) \operatorname{sh}^3 x.$

12. $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^3 x\, dx = -\frac{3}{64} \operatorname{ch} 2x + \frac{1}{192} \operatorname{ch} 6x = \frac{1}{48} \operatorname{ch}^3 2x - \frac{1}{16} \operatorname{ch} 2x;$

$$= \frac{\operatorname{sh}^6 x}{6} + \frac{\operatorname{sh}^4 x}{4} = \frac{\operatorname{ch}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{ch}^4 x}{4}.$$

13. $\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^3 x\, dx = \frac{1}{7} \operatorname{sh}^3 x \left(\operatorname{ch}^4 x - \frac{3}{5} \operatorname{ch}^2 x - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{7}\left(\operatorname{ch}^2 x + \frac{2}{5}\right) \operatorname{sh}^5 x.$

14. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^4 x\, dx = \frac{1}{5} \operatorname{ch}^5 x.$

15. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^4 x\, dx = -\frac{x}{16} - \frac{1}{64} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{64} \operatorname{sh} 4x + \frac{1}{192} \operatorname{sh} 6x.$

16. $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^4 x\, dx = \frac{1}{7} \operatorname{ch}^3 x \left(\operatorname{sh}^4 x + \frac{3}{5} \operatorname{sh}^2 x - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{7}\left(\operatorname{sh}^2 x - \frac{2}{5}\right) \operatorname{ch}^5 x.$

17. $\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^4 x\, dx = \frac{3x}{128} - \frac{1}{128} \operatorname{sh} 4x + \frac{1}{1024} \operatorname{sh} 8x.$

2.416

1. $$\int \frac{\operatorname{sh}^p x}{\operatorname{ch}^{2n} x}\, dx = \frac{\operatorname{sh}^{p+1}}{2n-1} \left\{ \operatorname{sech}^{2n-1} x + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-p-2)(2n-p-4)\ldots(2n-p-2k)}{(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2k-1)} \operatorname{sech}^{2n-2k-1} x \right\} +$$
$$+ \frac{(2n-p-2)(2n-p-4)\ldots(-p+2)(-p)}{(2n-1)!!} \int \operatorname{sh}^p x\, dx.$$

Эта формула применима при любом действительном p. $\int \operatorname{sh}^p x\, dx$ при p натуральном см. 2.412 2. и 2.412 3. При $n=0$ и p целом и отрицательном для этого интеграла имеем:

2. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{2m} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{2m-1} \left\{ -\operatorname{cosech}^{2m-1} x + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \cdot \frac{2^k (m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{(2m-3)(2m-5)\ldots(2m-2k-1)} \operatorname{cosech}^{2m-2k-1} x \right\}.$$

3. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{2m+1} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{2m} \left\{ -\operatorname{cosech}^{2m} x + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \cdot \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots(2m-2k+1)}{2^k (m-1)(m-2)\ldots(m-k)} \operatorname{cosech}^{2m-2k} x \right\} +$$
$$+ (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \ln \operatorname{th} \frac{x}{2}.$$

2.417

1. $$\int \frac{\operatorname{sh}^p x}{\operatorname{ch}^{2n+1} x}\,dx = \frac{\operatorname{sh}^{p+1} x}{2n}\Big\{\operatorname{sech}^{2n} x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-p-1)(2n-p-3)\dots(2n-p-2k+1)}{2^k (n-1)(n-2)\dots(n-k)} \operatorname{sech}^{2n-2k} x\Big\} + \frac{(2n-p-1)(2n-p-3)\dots(3-p)(1-p)}{2^n n!} \int \frac{\operatorname{sh}^p x}{\operatorname{ch} x}\,dx.$$

Эта формула применима при любом действительном p. При $n=0$ и p целом имеем:

2. $$\int \frac{\operatorname{sh}^{2m+1} x}{\operatorname{ch} x}\,dx = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{m+k}}{2k} \operatorname{sh}^{2k} x + (-1)^m \ln \operatorname{ch} x;$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{m+k}}{2k} \binom{m}{k} \operatorname{ch}^{2k} x + (-1)^m \ln \operatorname{ch} x \quad [m \geqslant 1].$$

3. $$\int \frac{\operatorname{sh}^{2m} x}{\operatorname{ch} x}\,dx = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{m+k}}{2k-1} \operatorname{sh}^{2k-1} x + (-1)^m \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) \quad [m \geqslant 1].$$

4. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{2m+1} x \operatorname{ch} x} = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k \operatorname{cosech}^{2m-2k+2} x}{2m-2k+2} + (-1)^m \ln \operatorname{th} x.$$

5. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{2m} x \operatorname{ch} x} = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k \operatorname{cosech}^{2m-2k+1} x}{2m-2k+1} + (-1)^m \operatorname{arctg} \operatorname{sh} x.$$

2.418

1. $$\int \frac{\operatorname{ch}^p x}{\operatorname{sh}^{2n} x}\,dx = -\frac{\operatorname{ch}^{p+1} x}{2n-1}\Big\{\operatorname{cosech}^{2n-1} x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k (2n-p-2)(2n-p-4)\dots(2n-p-2k)}{(2n-3)(2n-5)\dots(2n-2k-1)} \operatorname{cosech}^{2n-2k-1} x\Big\} + \frac{(-1)^n (2n-p-2)(2n-p-4)\dots(-p+2)(-p)}{(2n-1)!!} \int \operatorname{ch}^p x\,dx.$$

Эта формула применима при любом действительном p. $\int \operatorname{ch}^p x\,dx$ при p натуральном см. **2.411** 2. и **2.411** 3. При p целом и отрицательном для этого интеграла имеем:

2. $$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{2m} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{2m-1}\Big\{\operatorname{sech}^{2m-1} x + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2^k (m-1)(m-2)\dots(m-k)}{(2m-3)(2m-5)\dots(2m-2k-1)} \operatorname{sech}^{2m-2k-1} x\Big\}.$$

3. $$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{2m+1} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{2m}\Big\{\operatorname{sech}^{2m} x + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(2m-1)(2m-3)\dots(2m-2k+1)}{2^k (m-1)(m-2)\dots(m-k)} \operatorname{sech}^{2m-2k} x\Big\} + \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \operatorname{arctg} \operatorname{sh} x.$$

2.419

1. $$\int \frac{\operatorname{ch}^p x}{\operatorname{sh}^{2n+1} x} dx = -\frac{\operatorname{ch}^{p+1} x}{2n} \left\{ \operatorname{cosech}^{2n} x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k (2n-p-1)(2n-p-3) \ldots (2n-p-2k+1)}{2^k (n-1)(n-2) \ldots (n-k)} \operatorname{cosech}^{2n-2k} x \right\} + \frac{(-1)^n (2n-p-1)(2n-p-3) \ldots (3-p)(1-p)}{2^n n!} \int \frac{\operatorname{ch}^p x}{\operatorname{sh} x} dx.$$

Эта формула применима при любом действительном p. При $n=0$ и p целом имеем: 184

2. $$\int \frac{\operatorname{ch}^{2m} x}{\operatorname{sh} x} dx = \sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{ch}^{2k-1} x}{2k-1} + \ln \operatorname{th} \frac{x}{2}.$$

3. $$\int \frac{\operatorname{ch}^{2m+1} x}{\operatorname{sh} x} dx = \sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{ch}^{2k} x}{2k} + \ln \operatorname{sh} x; = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \frac{\operatorname{sh}^{2k} x}{2k} + \ln \operatorname{sh} x.$$

4. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{2m} x} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{sech}^{2m-2k+1} x}{2m-2k+1} + \ln \operatorname{th} \frac{x}{2}.$$

5. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{2m+1} x} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{sech}^{2m-2k+2} x}{2m-2k+2} + \ln \operatorname{th} x.$$

2.421

1. $$\int \frac{\operatorname{sh}^{2n+1} x}{\operatorname{ch}^m x} dx = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{m-1}{2}}}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \frac{\operatorname{ch}^{2k-m+1} x}{2k-m+1} + s(-1)^{n+\frac{m-1}{2}} \binom{n}{\frac{m-1}{2}} \ln \operatorname{ch} x.$$

2. $$\int \frac{\operatorname{ch}^{2n+1} x}{\operatorname{sh}^m x} dx = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{m-1}{2}}}^{n} \binom{n}{k} \frac{\operatorname{sh}^{2k-m+1} x}{2k-m+1} + s \binom{n}{\frac{m-1}{2}} \ln \operatorname{sh} x.$$

[В формулах 2.421 1. и 2.421 2. $s=1$ при m нечетном и $m < 2n+1$; в остальных случаях $s=0$.] ГХI [351] (11 и 13)

2.422

1. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{2m} x \operatorname{ch}^{2n} x} = \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2m-2k-1} \binom{m+n-1}{k} \operatorname{th}^{2k-2m+1} x.$$

2. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{2m+1} x \operatorname{ch}^{2n+1} x} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{m+n} \frac{(-1)^{k+1}}{2m-2k} \binom{m+n}{k} \operatorname{th}^{2k-2m} x + (-1)^m \binom{m+n}{m} \ln \operatorname{th} x.$$ ГХI [351] (15)

2.423

1. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln \operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}$.

2. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$.

3. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x} = -\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{th} \frac{x}{2}$.

4. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^4 x} = -\frac{\operatorname{ch} x}{3\operatorname{sh}^3 x} + \frac{2}{3} \operatorname{cth} x = -\frac{1}{3} \operatorname{cth}^3 x + \operatorname{cth} x$.

5. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^5 x} = -\frac{\operatorname{ch} x}{4\operatorname{sh}^4 x} + \frac{3}{8} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} + \frac{3}{8} \ln \operatorname{th} \frac{x}{2}$.

6. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^6 x} = -\frac{\operatorname{ch} x}{5\operatorname{sh}^5 x} + \frac{4}{15} \operatorname{cth}^3 x - \frac{4}{5} \operatorname{cth} x;$

$= -\frac{1}{5} \operatorname{cth}^5 x + \frac{2}{3} \operatorname{cth}^3 x - \operatorname{cth} x$.

7. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^7 x} = -\frac{\operatorname{ch} x}{6\operatorname{sh}^2 x} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^4 x} - \frac{5}{4\operatorname{sh}^2 x} + \frac{15}{8} \right) - \frac{5}{16} \ln \operatorname{th} \frac{x}{2}$.

8. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^8 x} = \operatorname{cth} x - \operatorname{cth}^3 x + \frac{3}{5} \operatorname{cth}^5 x - \frac{1}{7} \operatorname{cth}^7 x$.

9. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x) = 2 \operatorname{arctg} (e^x);$

$= \arcsin (\operatorname{th} x);$

$= \operatorname{gd} x$.

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$.

11. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x} = \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x)$.

12. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^4 x} = \frac{\operatorname{sh} x}{3\operatorname{ch}^3 x} + \frac{2}{3} \operatorname{th} x;$

$= -\frac{1}{3} \operatorname{th}^3 x + \operatorname{th} x$.

13. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^5 x} = \frac{\operatorname{sh} x}{4\operatorname{ch}^4 x} + \frac{3}{8} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x)$.

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^6 x} = \frac{\operatorname{sh} x}{5\operatorname{ch}^5 x} - \frac{4}{15} \operatorname{th}^3 x + \frac{4}{5} \operatorname{th} x;$

$= \frac{1}{5} \operatorname{th}^5 x - \frac{2}{3} \operatorname{th}^3 x + \operatorname{th} x$.

15. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^7 x} = \frac{\operatorname{sh} x}{6\operatorname{ch}^6 x} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^4 x} + \frac{5}{4\operatorname{ch}^2 x} + \frac{15}{8} \right) + \frac{5}{16} \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x)$.

16. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^8 x} = -\frac{1}{7} \operatorname{th}^7 x + \frac{3}{5} \operatorname{th}^5 x - \operatorname{th}^3 x + \operatorname{th} x$.

17. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} dx = \ln \operatorname{ch} x$.

18. $\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x} dx = \operatorname{sh} x - \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x)$.

19. $\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch} x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2 x - \ln \operatorname{ch} x;$

$= \frac{1}{2} \operatorname{ch}^2 x - \ln \operatorname{ch} x$.

20. $\int \frac{\operatorname{sh}^4 x}{\operatorname{ch} x}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x - \operatorname{sh} x + \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x).$

21. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = -\frac{1}{\operatorname{ch} x}.$

22. $\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = x - \operatorname{th} x.$

23. $\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{ch} x + \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$

24. $\int \frac{\operatorname{sh}^4 x}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \operatorname{th} x.$

25. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x}\,dx = -\frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x};$

$= \frac{1}{2}\operatorname{th}^2 x.$

26. $\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^3 x}\,dx = -\frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x).$

27. $\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^3 x}\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{th}^2 x + \ln \operatorname{ch} x;$

$= \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x} + \ln \operatorname{ch} x.$

28. $\int \frac{\operatorname{sh}^4 x}{\operatorname{ch}^3 x}\,dx = \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch} x} + \operatorname{sh} x - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x).$

29. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^4 x}\,dx = -\frac{1}{3\operatorname{ch}^3 x}.$

30. $\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^4 x}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x.$

31. $\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^4 x}\,dx = -\frac{1}{\operatorname{ch} x} + \frac{1}{3\operatorname{ch}^3 x}.$

32. $\int \frac{\operatorname{sh}^4 x}{\operatorname{ch}^4 x}\,dx = -\frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x - \operatorname{th} x + x.$

33. $\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\,dx = \ln \operatorname{sh} x.$

34. $\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh} x}\,dx = \operatorname{ch} x + \ln \operatorname{th}\frac{x}{2}.$

35. $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh} x}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{ch}^2 x + \ln \operatorname{sh} x.$

36. $\int \frac{\operatorname{ch}^4 x}{\operatorname{sh} x}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x + \operatorname{ch} x + \ln \operatorname{th}\frac{x}{2}.$

37. $\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\frac{1}{\operatorname{sh} x}.$

38. $\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = x - \operatorname{cth} x.$

39. $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = \operatorname{sh} x - \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$

40. $\int \frac{\operatorname{ch}^4 x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x - \operatorname{cth} x.$

41. $\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^3 x}\,dx = -\frac{1}{2\operatorname{sh}^2 x};$

$= -\frac{1}{2}\operatorname{cth}^2 x.$

42. $\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^3 x}\,dx = -\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} + \ln \operatorname{th}\frac{x}{2}$.

43. $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh}^3 x}\,dx = -\frac{1}{2\operatorname{sh}^2 x} + \ln \operatorname{sh} x;$

$= -\frac{1}{2}\operatorname{cth}^2 r + \ln \operatorname{sh} x.$

44. $\int \frac{\operatorname{ch}^4 x}{\operatorname{sh}^3 x}\,dx = -\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} + \operatorname{ch} x + \frac{3}{2}\ln \operatorname{th}\frac{x}{2}$.

45. $\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^4 x}\,dx = -\frac{1}{3\operatorname{sh}^2 x}$.

46. $\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^4 x}\,dx = -\frac{1}{3}\operatorname{cth}^3 x.$

47. $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh}^4 x}\,dx = -\frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{3\operatorname{sh}^3 x}$.

48. $\int \frac{\operatorname{ch}^4 x}{\operatorname{sh}^4 x}\,dx = -\frac{1}{3}\operatorname{cth}^3 x - \operatorname{cth} x + x.$

49. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x} = \ln \operatorname{th} x.$

50. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} + \ln \operatorname{th}\frac{x}{2}$.

51. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x} = \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x} + \ln \operatorname{th} x;$

$= -\frac{1}{2}\operatorname{th}^2 x + \ln \operatorname{th} x.$

52. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^4 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} + \frac{1}{3\operatorname{ch}^3 x} + \ln \operatorname{th}\frac{x}{2}$.

53. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x} = -\frac{1}{\operatorname{sh} x} - \operatorname{arctg} \operatorname{sh} x.$

54. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x} = -2\operatorname{cth} 2x.$

55. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x} = -\frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} \operatorname{sh} x.$

56. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^4 x} = \frac{1}{3\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x} - \frac{8}{3}\operatorname{cth} 2x.$

57. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x} = -\frac{1}{2\operatorname{sh}^2 x} - \ln \operatorname{th} x;$

$= -\frac{1}{2}\operatorname{cth}^2 x + \ln \operatorname{cth} x.$

58. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{ch} x} - \frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} - \frac{3}{2}\ln \operatorname{th}\frac{x}{2}$.

59. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^3 x} = -\frac{2\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{sh}^2 2x} - 2\ln \operatorname{th} x;$

$= \frac{1}{2}\operatorname{th}^2 x - \frac{1}{2}\operatorname{cth}^2 x - 2\ln \operatorname{th} x.$

60. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^4 x} = -\frac{2}{\operatorname{ch} x} - \frac{1}{3\operatorname{ch}^2 x} - \frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} - \frac{5}{2}\ln \operatorname{th}\frac{x}{2}$.

61. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{3\operatorname{sh}^3 x} + \operatorname{arctg} \operatorname{sh} x,$

62. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^2 x} = -\frac{1}{3\operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x} + \frac{8}{3}\operatorname{cth} 2x.$

63. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^3 x} = \frac{2}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{3\operatorname{sh}^3 x} + \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\operatorname{sh} x.$

64. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^4 x} = 8\operatorname{cth} 2x - \frac{8}{3}\operatorname{cth}^3 2x.$

2.424

1. $\displaystyle\int \operatorname{th}^p x\,dx = -\frac{\operatorname{th}^{p-1} x}{p-1} + \int \operatorname{th}^{p-2} x\,dx \qquad [p \neq 1].$

2. $\displaystyle\int \operatorname{th}^{2n+1} x\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}\binom{n}{k}\frac{1}{\operatorname{ch}^{2k} x} + \ln\operatorname{ch} x;$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{th}^{2n-2k+2} x}{2n-2k+2} + \ln\operatorname{ch} x.$$

3. $\displaystyle\int \operatorname{th}^{2n} x\,dx = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{th}^{2n-2k+1} x}{2n-2k+1} + x.$ ГХ I [351] (12)

4. $\displaystyle\int \operatorname{cth}^p x\,dx = -\frac{\operatorname{cth}^{p-1} x}{p-1} + \int \operatorname{cth}^{p-2} x\,dx \qquad [p \neq 1].$

5. $\displaystyle\int \operatorname{cth}^{2n+1} x\,dx = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n}\binom{n}{k}\frac{1}{\operatorname{sh}^{2k} x} + \ln\operatorname{sh} x;$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{cth}^{2n-2k+2} x}{2n-2k+2} + \ln\operatorname{sh} x.$$

6. $\displaystyle\int \operatorname{cth}^{2n} x\,dx = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{cth}^{2n-2k+1} x}{2n-2k+1} + x.$ ГХ I [351] (14)

Формулы со степенями $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$, равными $n = 1, 2, 3, 4$, см. 2.423 17., 2.423 22., 2.423 27., 2.423 32 , 2.423 33., 2.423 38., 2.423 43., 2.423 48..

Степени гиперболических функций и гиперболические функции от линейных функций аргумента

2.425

1. $\displaystyle\int \operatorname{sh}(ax+b)\operatorname{sh}(cx+d)\,dx = \frac{1}{2(a+c)}\operatorname{sh}[(a+c)x+b+d] -$

$\displaystyle - \frac{1}{2(a-c)}\operatorname{sh}[(a-c)x+b-d] \qquad [a^2 \neq c^2].$ ГХ I [352] (2a)

2. $\displaystyle\int \operatorname{sh}(ax+b)\operatorname{ch}(cx+d)\,dx = \frac{1}{2(a+c)}\operatorname{ch}[(a+c)x+b+d] +$

$\displaystyle + \frac{1}{2(a-c)}\operatorname{ch}[(a-c)x+b-d] \qquad [a^2 \neq c^2].$ ГХ I [352] (2c)

3. $\displaystyle\int \operatorname{ch}(ax+b)\operatorname{ch}(cx+d)\,dx = \frac{1}{2(a+c)}\operatorname{sh}[(a+c)x+b+d] +$

$\displaystyle + \frac{1}{2(a-c)}\operatorname{sh}[(a-c)x+b-d] \qquad [a^2 \neq c^2].$ ГХ I [352] (2b)

При $a = c$.

4. $\int \operatorname{sh}(ax+b)\operatorname{sh}(ax+d)\,dx = -\frac{x}{2}\operatorname{ch}(b-d) + \frac{1}{4a}\operatorname{sh}(2ax+b+d)$. ГХI [352] (3a)

5. $\int \operatorname{sh}(ax+b)\operatorname{ch}(ax+d)\,dx = \frac{x}{2}\operatorname{sh}(b-d) + \frac{1}{4a}\operatorname{ch}(2ax+b+d)$. ГХI [352] (3c)

6. $\int \operatorname{ch}(ax+b)\operatorname{ch}(ax+d)\,dx = \frac{x}{2}\operatorname{ch}(b-d) + \frac{1}{4a}\operatorname{sh}(2ax+b+d)$. ГХI [352] (3b)

2.426

1. $$\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx \operatorname{sh} cx\,dx = \frac{\operatorname{ch}(a+b+c)x}{4(a+b+c)} - \frac{\operatorname{ch}(-a+b+c)x}{4(-a+b+c)} - \frac{\operatorname{ch}(a-b+c)x}{4(a-b+c)} - \frac{\operatorname{ch}(a+b-c)x}{4(a+b-c)}.$$ ГХI [352] (4a)

2. $$\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} cx\,dx = \frac{\operatorname{sh}(a+b+c)x}{4(a+b+c)} - \frac{\operatorname{sh}(-a+b+c)x}{4(-a+b+c)} - \frac{\operatorname{sh}(a-b+c)x}{4(a-b+c)} + \frac{\operatorname{sh}(a+b-c)x}{4(a+b-c)}.$$ ГХI [352] (4b)

3. $$\int \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} bx \operatorname{ch} cx\,dx = \frac{\operatorname{ch}(a+b+c)x}{4(a+b+c)} - \frac{\operatorname{ch}(-a+b+c)x}{4(-a+b+c)} + \frac{\operatorname{ch}(a-b+c)x}{4(a-b+c)} + \frac{\operatorname{ch}(a+b-c)x}{4(a+b-c)}.$$ ГХI [352] (4c)

4. $$\int \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx \operatorname{ch} cx\,dx = \frac{\operatorname{sh}(a+b+c)x}{4(a+b+c)} + \frac{\operatorname{sh}(-a+b+c)x}{4(-a+b+c)} + \frac{\operatorname{sh}(a-b+c)x}{4(a-b+c)} + \frac{\operatorname{sh}(a+b-c)x}{4(a+b-c)}.$$ ГХI [352] (4d)

2.427

1. $$\int \operatorname{sh}^p x \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{1}{p+a}\left\{\operatorname{sh}^p x \operatorname{ch} ax - p\int \operatorname{sh}^{p-1} x \operatorname{ch}(a-1)x\,dx\right\}.$$

2. $$\int \operatorname{sh}^p x \operatorname{sh}(2n+1)x\,dx = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}+n\right)} \times \left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+n-2k\right)}{2^{2k+1}\Gamma(p-2k+1)}\operatorname{sh}^{p-2k} x \operatorname{ch}(2n-2k+1)x - \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}+n-2k\right)}{2^{2k+2}\Gamma(p-2k)}\operatorname{sh}^{p-2k-1} x \operatorname{sh}(2n-2k)x\right] + \frac{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}-n\right)}{2^{2n}\Gamma(p+1-2n)}\int \operatorname{sh}^{p-2n} x \operatorname{sh} x\,dx\right\}$$

[p не равно целому отрицательному числу].

3. $$\int \operatorname{sh}^p x \operatorname{sh} 2nx\, dx = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n+1\right)} \times \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n-2k\right)}{2^{2k+1}\Gamma(p-2k+1)} \operatorname{sh}^{p-2k} x \operatorname{ch}(2n-2k)x - \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n-2k-1\right)}{2^{2k+2}\Gamma(p-2k)} \operatorname{sh}^{p-2k-1} x \operatorname{sh}(2n-2k-1)x\right]$$

[p не равно целому отрицательному числу]. ГХI [352] (5) и

2.428

1. $$\int \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch} ax\, dx = \frac{1}{p+a}\left\{\operatorname{sh}^p x \operatorname{sh} ax - p\int \operatorname{sh}^{p-1} x \operatorname{sh}(a-1)x\, dx\right\}.$$

2. $$\int \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}(2n+1)x\, dx = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}+n\right)} \times \left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+n-2k\right)}{2^{2k+1}\Gamma(p-2k+1)} \operatorname{sh}^{p-2k} x \operatorname{sh}(2n-2k+1)x - \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}+n-2k\right)}{2^{2k+2}\Gamma(p-2k)} \operatorname{sh}^{p-2k-1} x \operatorname{ch}(2n-2k)x\right] + \frac{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}-n\right)}{2^{2n}\Gamma(p+1-2n)}\int \operatorname{sh}^{p-2n} x \operatorname{ch} x\, dx\right\}$$

[p не равно целому отрицательному числу].

3. $$\int \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch} 2nx\, dx = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n+1\right)} \times \left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n-2k\right)}{2^{2k+1}\Gamma(p-2k+1)} \operatorname{sh}^{p-2k} x \operatorname{sh}(2n-2k)x - \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n-2k-1\right)}{2^{2k+2}\Gamma(p-2k)} \operatorname{sh}^{p-2k-1} x \operatorname{ch}(2n-2k-1)x\right] + \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}-n+1\right)}{2^{2n}\Gamma(p+1-2n)}\int \operatorname{sh}^{p-2n} x\, dx\right\}$$

[p не равно целому отрицательному числу]. ГХI [352] (6) и

2.429

1. $$\int \operatorname{ch}^p x \operatorname{sh} ax\, dx = \frac{1}{p+a}\left\{\operatorname{ch}^p x \operatorname{ch} ax + p\int \operatorname{ch}^{p-1} x \operatorname{sh}(a-1)x\, dx\right\}.$$

2. $$\int \operatorname{ch}^p x \operatorname{sh}(2n+1)x\, dx = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}+n\right)}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+n-k\right)}{2^{k+1}\Gamma(p-k+1)} \times \operatorname{ch}^{p-k} x \operatorname{ch}(2n-k+1)x + \frac{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}\right)}{2^n\Gamma(p-n+1)}\int \operatorname{ch}^{p-n} x \operatorname{sh}(n+1)x\, dx\right\}$$

[p не равно целому отрицательному числу].

3. $$\int \operatorname{ch}^p x \operatorname{sh} 2nx\,dx = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n+1\right)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n-k\right)}{2^{k+1}\Gamma(p-k+1)} \times \right.$$
$$\left. \times \operatorname{ch}^{p-k} x \operatorname{ch}(2n-k)x + \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{2^n\Gamma(p-n+1)} \int \operatorname{ch}^{p-n} x \operatorname{sh} nx\,dx \right\}$$

[p не равно целому отрицательному числу]. ГХI [352] (7) *и*

2.431

1. $$\int \operatorname{ch}^p x \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{p+a}\left\{\operatorname{ch}^p x \operatorname{sh} ax + p\int \operatorname{ch}^{p-1} x \operatorname{ch}(a-1)x\,dx\right\}.$$

2. $$\int \operatorname{ch}^p x \operatorname{ch}(2n+1)x\,dx = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}+n\right)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+n-k\right)}{2^{k+1}\Gamma(p-k+1)} \times \right.$$
$$\left. \times \operatorname{ch}^{p-k} x \operatorname{sh}(2n-k+1)x + \frac{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}\right)}{2^n\Gamma(p-n+1)} \int \operatorname{ch}^{p-n} x \operatorname{ch}(n+1)x\,dx \right\}$$

[p не равно целому отрицательному числу].

3. $$\int \operatorname{ch}^p x \operatorname{ch} 2nx\,dx = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n+1\right)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n-k\right)}{2^{k+1}\Gamma(p-k+1)} \times \right.$$
$$\left. \times \operatorname{ch}^{p-k} x \operatorname{sh}(2n-k)x + \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{2^n\Gamma(p-n+1)} \int \operatorname{ch}^{p-n} x \operatorname{ch} nx\,dx \right\}$$

[p не равно целому отрицательному числу]. ГХI [352] (8) *и*

2.432

1. $$\int \operatorname{sh}(n+1)x \operatorname{sh}^{n-1} x\,dx = \frac{1}{n}\operatorname{sh}^n x \operatorname{sh} nx.$$

2. $$\int \operatorname{sh}(n+1)x \operatorname{ch}^{n-1} x\,dx = \frac{1}{n}\operatorname{ch}^n x \operatorname{ch} nx.$$

3. $$\int \operatorname{ch}(n+1)x \operatorname{sh}^{n-1} x\,dx = \frac{1}{n}\operatorname{sh}^n x \operatorname{ch} nx.$$

4. $$\int \operatorname{ch}(n+1)x \operatorname{ch}^{n-1} x\,dx = \frac{1}{n}\operatorname{ch}^n x \operatorname{sh} nx.$$

2.433

1. $$\int \frac{\operatorname{sh}(2n+1)x}{\operatorname{sh} x}\,dx = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{sh}(2n-2k)x}{2n-2k} + x.$$

2. $$\int \frac{\operatorname{sh} 2nx}{\operatorname{sh} x}\,dx = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{sh}(2n-2k-1)x}{2n-2k-1}.$$ ГХI [352] (5d)

3. $$\int \frac{\operatorname{ch}(2n+1)x}{\operatorname{sh} x}\,dx = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{ch}(2n-2k)x}{2n-2k} + \ln \operatorname{sh} x.$$

4. $\int \frac{\operatorname{ch} 2nx}{\operatorname{sh} x} dx = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{ch}(2n-2k-1)x}{2n-2k-1} + \ln \operatorname{th} \frac{x}{2}$. ГХI [352] (6d)

5. $\int \frac{\operatorname{sh}(2n+1)x}{\operatorname{ch} x} dx = 2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\operatorname{ch}(2n-2k)x}{2n-2k} + (-1)^n \ln \operatorname{ch} x$.

6. $\int \frac{\operatorname{sh} 2nx}{\operatorname{ch} x} dx = 2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\operatorname{ch}(2n-2k-1)x}{2n-2k-1}$. ГХI [352] (7d)

7. $\int \frac{\operatorname{ch}(2n+1)x}{\operatorname{ch} x} dx = 2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\operatorname{sh}(2n-2k)x}{2n-2k} + (-1)^n x$.

8. $\int \frac{\operatorname{ch} 2nx}{\operatorname{ch} x} dx = 2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\operatorname{sh}(2n-2k-1)x}{2n-2k-1} + (-1)^n \arcsin(\operatorname{th} x)$.

ГХI [352] (8d)

9. $\int \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{sh}^n x} dx = -\frac{2}{(n-2)\operatorname{sh}^{n-2} x}$.

При $n=2$:

10. $\int \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = 2 \ln \operatorname{sh} x$.

11. $\int \frac{\operatorname{sh} 2x\, dx}{\operatorname{ch}^n x} = \frac{2}{(2-n)\operatorname{ch}^{n-2} x}$.

При $n=2$:

12. $\int \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch}^2 x} dx = 2 \ln \operatorname{ch} x$.

13. $\int \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{sh} x} dx = 2 \operatorname{ch} x + \ln \operatorname{th} \frac{x}{2}$.

14. $\int \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + 2x$.

15. $\int \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{sh}^3 x} dx = -\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} + \frac{3}{2} \ln \operatorname{th} \frac{x}{2}$.

16. $\int \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch} x} dx = 2 \operatorname{sh} x - \arcsin(\operatorname{th} x)$.

17. $\int \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch}^2 x} dx = -\operatorname{th} x + 2x$.

18. $\int \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch}^3 x} dx = -\frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{2} \arcsin(\operatorname{th} x)$.

19. $\int \frac{\operatorname{sh} 3x}{\operatorname{sh} x} dx = x + \operatorname{sh} 2x$.

20. $\int \frac{\operatorname{sh} 3x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = 3 \ln \operatorname{th} \frac{x}{2} + 4 \operatorname{ch} x$.

21. $\int \frac{\operatorname{sh} 3x}{\operatorname{sh}^3 x} dx = -3 \operatorname{cth} x + 4x$.

22. $\int \frac{\operatorname{sh} 3x}{\operatorname{ch}^n x} dx = \frac{4}{(3-n)\operatorname{ch}^{n-3} x} - \frac{1}{(1-n)\operatorname{ch}^{n-1} x}$.

При $n=1$ и $n=3$:

23. $\int \frac{\operatorname{sh} 3x}{\operatorname{ch} x} dx = 2\operatorname{sh}^2 x - \ln \operatorname{ch} x.$

24. $\int \frac{\operatorname{sh} 3x}{\operatorname{ch}^3 x} dx = \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x} + 4\ln \operatorname{ch} x.$

25. $\int \frac{\operatorname{ch} 3x}{\operatorname{sh}^n x} dx = \frac{4}{(3-n)\operatorname{sh}^{n-3} x} + \frac{1}{(1-n)\operatorname{sh}^{n-1} x}.$

При $n=1$ и $n=3$:

26. $\int \frac{\operatorname{ch} 3x}{\operatorname{sh} x} dx = 2\operatorname{sh}^2 x + \ln \operatorname{sh} x.$

27. $\int \frac{\operatorname{ch} 3x}{\operatorname{sh}^3 x} dx = -\frac{1}{2\operatorname{sh}^3 x} + 4\ln \operatorname{sh} x.$

28. $\int \frac{\operatorname{ch} 3x}{\operatorname{ch} x} dx = \operatorname{sh} 2x - x.$

29. $\int \frac{\operatorname{ch} 3x}{\operatorname{ch}^2 x} dx = 4\operatorname{sh} x - 3\arcsin(\operatorname{th} x).$

30. $\int \frac{\operatorname{ch} 3x}{\operatorname{ch}^3 x} dx = 4x - 3\operatorname{th} x.$

2.44—2.45 Рациональные функции от гиперболических функций

2.441

1. $$\int \frac{A+B\operatorname{sh} x}{(a+b\operatorname{sh} x)^n} dx = \frac{aB-bA}{(n-1)(a^2+b^2)} \cdot \frac{\operatorname{ch} x}{(a+b\operatorname{sh} x)^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)} \int \frac{(n-1)(aA+bB)+(n-2)(aB-bA)\operatorname{sh} x}{(a+b\operatorname{sh} x)^{n-1}} dx.$$

При $n=1$:

2. $$\int \frac{A+B\operatorname{sh} x}{a+b\operatorname{sh} x} dx = \frac{B}{b} x - \frac{aB-bA}{b} \int \frac{dx}{a+b\operatorname{sh} x} \quad \text{(см. 2.441 3.)}.$$

3. $$\int \frac{dx}{a+b\operatorname{sh} x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \frac{a\operatorname{th}\frac{x}{2} - b + \sqrt{a^2+b^2}}{a\operatorname{th}\frac{x}{2} - b - \sqrt{a^2+b^2}};$$
$$= \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{Arth} \frac{a\operatorname{th}\frac{x}{2} - b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

2.442

1. $$\int \frac{A+B\operatorname{ch} x}{(a+b\operatorname{sh} x)^n} dx = -\frac{B}{(n-1)b(a+b\operatorname{sh} x)^{n-1}} + A\int \frac{dx}{(a+b\operatorname{sh} x)^n}.$$

При $n=1$:

2. $$\int \frac{A+B\operatorname{ch} x}{a+b\operatorname{sh} x} dx = \frac{B}{b} \ln(a+b\operatorname{sh} x) + A\int \frac{dx}{a+b\operatorname{sh} x} \quad \text{(см. 2.441 3.)}$$

2.443

1. $$\int \frac{A+B\operatorname{ch} x}{(a+b\operatorname{ch} x)^n} dx = \frac{aB-bA}{(n-1)(a^2-b^2)} \cdot \frac{\operatorname{sh} x}{(a+b\operatorname{ch} x)^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)} \int \frac{(n-1)(aA-bB)+(n-2)(aB-bA)\operatorname{ch} x}{(a+b\operatorname{ch} x)^{n-1}} dx.$$

При $n=1$:

2. $\int \frac{A+B\operatorname{ch}x}{a+b\operatorname{ch}x}\,dx = \frac{B}{b}x - \frac{aB-bA}{b}\int \frac{dx}{a+b\operatorname{ch}x}$ (см. 2.443 3.).

3. $$\int \frac{dx}{a+b\operatorname{ch}x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\arcsin\frac{b+a\operatorname{ch}x}{a+b\operatorname{ch}x} \quad [b^2>a^2,\ x<0];$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\arcsin\frac{b+a\operatorname{ch}x}{a+b\operatorname{ch}x} \quad [b^2>a^2,\ x>0];$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{th}\frac{x}{2}}{a+b-\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{th}\frac{x}{2}} \quad [a^2>b^2].$$

2.444

1. $$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}a+\operatorname{ch}x} = \operatorname{cosech}a\left[\ln\operatorname{ch}\frac{x+a}{2} - \ln\operatorname{ch}\frac{x-a}{2}\right];$$

$$= 2\operatorname{cosech}a\operatorname{Arth}\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\operatorname{th}\frac{a}{2}\right).$$

2. $$\int \frac{dx}{\cos a+\operatorname{ch}x} = 2\operatorname{cosec}a\operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}\right).$$

2.445

1. $$\int \frac{A+B\operatorname{sh}x}{(a+b\operatorname{ch}x)^n}\,dx = -\frac{B}{(n-1)b(a+b\operatorname{ch}x)^{n-1}} + A\int \frac{dx}{(a+b\operatorname{ch}x)^n}.$$

При $n=1$:

2. $\int \frac{A+B\operatorname{sh}x}{a+b\operatorname{ch}x}\,dx = \frac{B}{b}\ln(a+b\operatorname{ch}x) + A\int \frac{dx}{a+b\operatorname{ch}x}$ (см. 2.443 3.).

При вычислении определенных интегралов с помощью формул пп. 2.441 — 2.443 и 2.445 нельзя переходить через точки, в которых подынтегральная функция обращается в бесконечность, т. е. через точки

$$x = \operatorname{Arsh}\left(-\frac{a}{b}\right)$$

в формулах 2.441, 2.442 и через точки

$$x = \operatorname{Arch}\left(-\frac{a}{b}\right)$$

в формулах 2.443, 2.445. Формулы 2.443 при $a^2=b^2$ неприменимы. В этих случаях вместо них можно применить следующие формулы:

2.446

1. $$\int \frac{A+B\operatorname{ch}x}{(\varepsilon+\operatorname{ch}x)^n}\,dx = \frac{B\operatorname{sh}x}{(1-n)(\varepsilon+\operatorname{ch}x)^n} +$$

$$+\left(\varepsilon A+\frac{n}{n-1}B\right)\frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}\operatorname{sh}x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2n-2k-3)!!}{(n-k-1)!}\cdot\frac{\varepsilon^k}{(\varepsilon+\operatorname{ch}x)^{n-k}} \quad [\varepsilon=\pm1,\ n>1].$$

При $n=1$:

2. $$\int \frac{A+B\operatorname{ch}x}{\varepsilon+\operatorname{ch}x}\,dx = Bx + (\varepsilon A - B)\frac{\operatorname{ch}x-\varepsilon}{\operatorname{sh}x} \quad [\varepsilon=\pm1].$$

2.447

1. $$\int \frac{\operatorname{sh} x\,dx}{a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x} = \frac{a \ln \operatorname{ch}\left(x + \operatorname{Arth}\frac{b}{a}\right) - bx}{a^2 - b^2} \qquad [a > |b|];$$
$$= \frac{bx - a \ln \operatorname{sh}\left(x + \operatorname{Arth}\frac{a}{b}\right)}{b^2 - a^2} \qquad [b > |a|].$$ МфК 215 (и)

При $a = b = 1$:

2. $$\int \frac{\operatorname{sh} x\,dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} e^{-2x}.$$

При $a = -b = 1$:

3. $$\int \frac{\operatorname{sh} x\,dx}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} e^{2x}.$$ МфК 215

2.448

1. $$\int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x} = \frac{ax - b \ln \operatorname{ch}\left(x + \operatorname{Arth}\frac{b}{a}\right)}{a^2 - b^2} \qquad [a > |b|];$$
$$= \frac{-ax + b \ln \operatorname{sh}\left(x + \operatorname{Arth}\frac{a}{b}\right)}{b^2 - a^2} \qquad [b > |a|].$$

При $a = b = 1$:

2. $$\int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} e^{-2x}.$$

При $a = -b = 1$:

3. $$\int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} e^{2x}.$$ МфК 214 и 215

2.449

1. $$\int \frac{dx}{(a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x)^n} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)^n}} \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^n\left(x + \operatorname{Arth}\frac{b}{a}\right)} \qquad [a > |b|];$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(b^2 - a^2)^n}} \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^n\left(x + \operatorname{Arth}\frac{a}{b}\right)} \qquad [b > |a|].$$

При $n = 1$:

2. $$\int \frac{dx}{a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg}\left|\operatorname{sh}\left(x + \operatorname{Arth}\frac{b}{a}\right)\right| \qquad [a > |b|];$$
$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln\left|\operatorname{th}\frac{x + \operatorname{Arth}\frac{a}{b}}{2}\right| \qquad [b > |a|].$$

При $a = b = 1$:

3. $$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} = -e^{-x} = \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x.$$

При $a = -b = 1$:

4. $$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} = e^{x} = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x.$$ МфК 214

2.451

1. $$\int \frac{A+B\operatorname{ch}x+C\operatorname{sh}x}{(a+b\operatorname{ch}x+c\operatorname{sh}x)^n}\,dx = \frac{Bc-Cb+(Ac-Ca)\operatorname{ch}x+(Ab-Ba)\operatorname{sh}x}{(1-n)(a^2-b^2+c^2)(a+b\operatorname{ch}x+c\operatorname{sh}x)^{n-1}}+$$
$$+\frac{1}{(n-1)(a^2-b^2+c^2)}\times$$
$$\times\int\frac{(n-1)(Aa-Bb+Cc)-(n-2)(Ab-Ba)\operatorname{ch}x-(n-2)(Ac-Ca)\operatorname{sh}x}{(a+b\operatorname{ch}x+c\operatorname{sh}x)^{n-1}}\,dx$$
$[a^2+c^2\neq b^2]$;
$$=\frac{Bc-Cb-Ca\operatorname{ch}x-Ba\operatorname{sh}x}{(n-1)a(a+b\operatorname{ch}x+c\operatorname{sh}x)^n}+$$
$$+\left[\frac{A}{a}+\frac{n(Bb-Cc)}{(n-1)a^2}\right](c\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x)\frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2n-2k-3)!!}{(n-k-1)!\,a^k}\,\frac{1}{(a+b\operatorname{ch}x+c\operatorname{sh}x)^{n-k}}\qquad [a^2+c^2=b^2].$$

2. $$\int\frac{A+B\operatorname{ch}x+C\operatorname{sh}x}{a+b\operatorname{ch}x+c\operatorname{sh}x}\,dx=\frac{Cb-Bc}{b^2-c^2}\ln(a+b\operatorname{ch}x+c\operatorname{sh}x)+$$
$$+\frac{Bb-Cc}{b^2-c^2}x+\left(A-a\frac{Bb-Cc}{b^2-c^2}\right)\int\frac{dx}{a+b\operatorname{ch}x+c\operatorname{sh}x}\qquad [b^2\neq c^2]$$ (см. 2.451 4).

3. $$\int\frac{A+B\operatorname{ch}x+C\operatorname{sh}x}{a+b\operatorname{ch}x\pm b\operatorname{sh}x}\,dx=\frac{C\mp B}{2a}(\operatorname{ch}x\mp\operatorname{sh}x)+\left[\frac{A}{a}-\frac{(B\mp C)b}{2a^2}\right]x+$$
$$+\left[\frac{C\pm B}{2b}\pm\frac{A}{a}-\frac{(C\mp B)b}{2a^2}\right]\ln(a+b\operatorname{ch}x\pm b\operatorname{sh}x)\qquad [ab\neq 0].$$

4. $$\int\frac{dx}{a+b\operatorname{ch}x+c\operatorname{sh}x}=\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{(b-a)\operatorname{th}\frac{x}{2}+c}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}$$
$[b^2>a^2+c^2$ и $a\neq b]$;
$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2+c^2}}\ln\frac{(a-b)\operatorname{th}\frac{x}{2}-c+\sqrt{a^2-b^2+c^2}}{(a-b)\operatorname{th}\frac{x}{2}-c-\sqrt{a^2-b^2+c^2}}$$
$[b^2<a^2+c^2$ и $a\neq b]$;
$$=\frac{1}{c}\ln\left(a+c\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)\qquad [a=b,\ c\neq 0];$$
$$=\frac{2}{(a-b)\operatorname{th}\frac{x}{2}+c}\qquad [b^2=a^2+c^2].$$
ГХI [351] (18)

2.452

1. $$\int\frac{A+B\operatorname{ch}x+C\operatorname{sh}x}{(a_1+b_1\operatorname{ch}x+c_1\operatorname{sh}x)(a_2+b_2\operatorname{ch}x+c_2\operatorname{sh}x)}\,dx=A_0\ln\frac{a_1+b_1\operatorname{ch}x+c_1\operatorname{sh}x}{a_2+b_2\operatorname{ch}x+c_2\operatorname{sh}x}+$$
$$+A_1\int\frac{dx}{a_1+b_1\operatorname{ch}x+c_1\operatorname{sh}x}+A_2\int\frac{dx}{a_2+b_2\operatorname{ch}x+c_2\operatorname{sh}x},$$

где

$$A_0=\frac{\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\A&B&C\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix}^2-\begin{vmatrix}c_1&a_1\\c_2&a_2\end{vmatrix}^2},\qquad A_1=\frac{\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\\begin{vmatrix}b_1&c_1\\B&C\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}c_1&a_1\\C&A\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_1&b_1\\A&B\end{vmatrix}\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix}^2-\begin{vmatrix}c_1&a_1\\c_2&a_2\end{vmatrix}^2},$$

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \begin{vmatrix} C & B \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} C & A \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} B & A \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2},$$

$$\left[\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 \neq \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 \right].$$ ГХI [351] (19)

2. $$\int \frac{A \operatorname{ch}^2 x + 2B \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + C \operatorname{sh}^2 x}{a \operatorname{ch}^2 x + 2b \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + c \operatorname{sh}^2 x} dx =$$
$$= \frac{1}{4b^2 - (a+c)^2} \{[4Bb - (A+C)(a+c)] x +$$
$$+ [(A+C) b - B(a+c)] \ln (a \operatorname{ch}^2 x + 2b \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + c \operatorname{sh}^2 x) +$$
$$+ [2(A-C) b^2 + 2Bb(a-c) + (Ca - Ac)(a+c)] f(x)\},$$

где

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - ac}} \ln \frac{c \operatorname{th} x + b - \sqrt{b^2 - ac}}{c \operatorname{th} x + b + \sqrt{b^2 - ac}} \qquad [b^2 > ac];$$
$$= \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{c \operatorname{th} x + b}{\sqrt{ac - b^2}} \qquad [b^2 < ac];$$
$$= -\frac{1}{c \operatorname{th} x + b} \qquad [b^2 = ac].$$

ГХI[351](24)

2.453

1. $$\int \frac{(A + B \operatorname{sh} x)\, dx}{\operatorname{sh} x (a + b \operatorname{sh} x)} = \frac{1}{a} \left[A \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + (aB - bA) \int \frac{dx}{a + b \operatorname{sh} x} \right]$$

(см. 2.441 3.).

2. $$\int \frac{(A + B \operatorname{sh} x)\, dx}{\operatorname{sh} x (a + b \operatorname{ch} x)} = \frac{A}{a^2 - b^2} \left(a \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + b \ln \left| \frac{a + b \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right| \right) +$$
$$+ B \int \frac{dx}{a + b \operatorname{ch} x}$$ (см. 2.443 3.).

При $a^2 = b^2 (= 1)$:

3. $$\int \frac{(A + B \operatorname{sh} x)\, dx}{\operatorname{sh} x (1 + \operatorname{ch} x)} = \frac{A}{2} \left(\ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{th}^2 \frac{x}{2} \right) + B \operatorname{th} \frac{x}{2}.$$

4. $$\int \frac{(A + B \operatorname{sh} x)\, dx}{\operatorname{sh} x (1 - \operatorname{ch} x)} = \frac{A}{2} \left(-\ln \left| \operatorname{cth} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{2} \operatorname{cth}^2 \frac{x}{2} \right) + B \operatorname{cth} \frac{x}{2}.$$

2.454

1. $$\int \frac{(A + B \operatorname{sh} x)\, dx}{\operatorname{ch} x (a + b \operatorname{sh} x)} = \frac{1}{a^2 + b^2} \left[(Aa + Bb) \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x) + \right.$$
$$\left. + (Ab - Ba) \ln \left| \frac{a + b \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right| \right].$$

2. $$\int \frac{(A + B \operatorname{ch} x)\, dx}{\operatorname{sh} x (a + b \operatorname{sh} x)} = \frac{1}{a} \left(A \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + B \ln \left| \frac{\operatorname{sh} x}{a + b \operatorname{sh} x} \right| - Ab \int \frac{dx}{a + b \operatorname{sh} x} \right)$$

(см. 2.441 3.).

2.455

1. $$\int \frac{(A + B \operatorname{ch} x)\, dx}{\operatorname{sh} x (a + b \operatorname{ch} x)} = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[(Aa + Bb) \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + \right.$$
$$\left. + (Ab - Ba) \ln \left| \frac{a + b \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right| \right].$$

При $a^2 = b^2 (= 1)$:

2. $\int \frac{(A+B \operatorname{ch} x)\,dx}{\operatorname{sh} x\,(1+\operatorname{ch} x)} = \frac{A+B}{2} \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| - \frac{A-B}{4} \operatorname{th}^2\frac{x}{2}$.

3. $\int \frac{(A+B \operatorname{ch} x)\,dx}{\operatorname{sh} x\,(1-\operatorname{ch} x)} = \frac{A+B}{4} \operatorname{cth}^2\frac{x}{2} - \frac{A-B}{2} \ln \operatorname{cth}\frac{x}{2}$.

2.456 $\int \frac{(A+B \operatorname{ch} x)\,dx}{\operatorname{ch} x\,(a+b \operatorname{sh} x)} = \frac{A}{a^2+b^2} \left[a \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + \right.$

$\left. + b \ln\left|\frac{a+b \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right| \right] + B \int \frac{dx}{a+b \operatorname{sh} x}$ (см. 2.441 3.).

2.457

$$\int \frac{(A+B \operatorname{ch} x)\,dx}{\operatorname{ch} x\,(a+b \operatorname{ch} x)} = \frac{1}{a} \left[A \operatorname{arctg} \operatorname{sh} x - (Ab - Ba) \int \frac{dx}{a+b \operatorname{ch} x} \right]$$

(см. 2.443 3.).

2.458

1. $\int \frac{dx}{a+b \operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{a(b-a)}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}-1} \operatorname{th} x\right)$ $\left[\frac{b}{a} > 1\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{a(a-b)}} \operatorname{Arth}\left(\sqrt{1-\frac{b}{a}} \operatorname{th} x\right)$

$\left[0 < \frac{b}{a} < 1 \text{ или } \frac{b}{a} < 0 \text{ и } \operatorname{sh}^2 x < -\frac{a}{b}\right]$;

$= \frac{1}{\sqrt{a(a-b)}} \operatorname{Arcth}\left(\sqrt{1-\frac{b}{a}} \operatorname{th} x\right)$ $\left[\frac{b}{a} < 0 \text{ и } \operatorname{sh}^2 x > -\frac{a}{b}\right]$.

МфК 195

2. $\int \frac{dx}{a+b \operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{-a(a+b)}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{-\left(1+\frac{b}{a}\right)} \operatorname{cth} x\right)$ $\left[\frac{b}{a} < -1\right]$;

$= \frac{1}{\sqrt{a(a+b)}} \operatorname{Arth}\left(\sqrt{1+\frac{b}{a}} \operatorname{cth} x\right)$

$\left[-1 < \frac{b}{a} < 0 \text{ и } \operatorname{ch}^2 x > -\frac{a}{b}\right]$;

$= \frac{1}{\sqrt{a(a+b)}} \operatorname{Arcth}\left(\sqrt{1+\frac{b}{a}} \operatorname{cth} x\right)$

$\left[\frac{b}{a} > 0 \text{ или } -1 < \frac{b}{a} < 0 \text{ и } \operatorname{ch}^2 x < -\frac{a}{b}\right]$. МфК 202

При $a^2 = b^2 = 1$:

3. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{th} x$.

4. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arth}(\sqrt{2} \operatorname{th} x)$ $[\operatorname{sh}^2 x < 1]$;

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arcth}(\sqrt{2} \operatorname{th} x)$ $[\operatorname{sh}^2 x > 1]$.

5. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arcth}(\sqrt{2} \operatorname{cth} x)$.

6. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{cth} x$.

2.459

1. $\int \frac{dx}{(a+b \operatorname{sh}^2 x)^2} = \frac{1}{2a(b-a)} \left[\frac{b \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{a+b \operatorname{sh}^2 x} + (b-2a) \int \frac{dx}{a+b \operatorname{sh}^2 x} \right]$

(см. 2.458 1.). МфК 196

2. $$\int\frac{dx}{(a+b\,\mathrm{ch}^2 x)^2}=\frac{1}{2a(a+b)}\left[-\frac{b\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x}{a+b\,\mathrm{ch}^2 x}+\right.$$
$$\left.+(2a+b)\int\frac{dx}{a+b\,\mathrm{ch}^2 x}\right] \quad \text{(см. 2.458 2.).} \quad \text{МфК 203}$$

3. $$\int\frac{dx}{(a+b\,\mathrm{sh}^2 x)^3}=\frac{1}{8pa^3}\left[\left(3-\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p^4}\right)\mathrm{arctg}\,(p\,\mathrm{th}\,x)+\right.$$
$$\left.+\left(3-\frac{2}{p^2}-\frac{3}{p^4}\right)\frac{p\,\mathrm{th}\,x}{1+p^2\,\mathrm{th}^2 x}+\left(1+\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p^2}\,\mathrm{th}^2 x\right)\frac{2p\,\mathrm{th}\,x}{(1+p^2\,\mathrm{th}^2 x)^2}\right]$$
$$\left[p^2=\frac{b}{a}-1>0\right];$$
$$=\frac{1}{8qa^3}\left[\left(3+\frac{2}{q^2}+\frac{3}{q^4}\right)\mathrm{Arth}\,(q\,\mathrm{th}\,x)+\right.$$
$$\left.+\left(3+\frac{2}{q^2}-\frac{3}{q^4}\right)\frac{q\,\mathrm{th}\,x}{1-q^2\,\mathrm{th}^2 x}+\left(1-\frac{2}{q^2}+\frac{1}{q^2}\,\mathrm{th}^2 x\right)\frac{2q\,\mathrm{th}\,x}{(1-q^2\,\mathrm{th}^2 x)^2}\right]$$
$$\left[q^2=1-\frac{b}{a}>0\right]. \quad \text{МфК196}$$

4. $$\int\frac{dx}{(a+b\,\mathrm{ch}^2 x)^3}=\frac{1}{8pa^3}\left[\left(3-\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p^4}\right)\mathrm{arctg}\,(p\,\mathrm{cth}\,x)+\right.$$
$$\left.+\left(3-\frac{2}{p^2}-\frac{3}{p^4}\right)\frac{p\,\mathrm{cth}\,x}{1+p^2\,\mathrm{cth}^2 x}+\left(1+\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p^2}\,\mathrm{cth}^2 x\right)\frac{2p\,\mathrm{cth}\,x}{(1+p^2\,\mathrm{cth}^2 x)^2}\right]$$
$$\left[p^2=-1-\frac{b}{a}>0\right];$$
$$=\frac{1}{8qa^3}\left[\left(3+\frac{2}{q^2}+\frac{3}{q^4}\right)\varphi(x)\,^{*)}+\right.$$
$$\left.+\left(3+\frac{2}{q^2}-\frac{3}{q^4}\right)\frac{q\,\mathrm{cth}\,x}{1-q^2\,\mathrm{cth}^2 x}+\left(1-\frac{2}{q^2}+\frac{1}{q^2}\,\mathrm{cth}^2 x\right)\frac{2q\,\mathrm{cth}\,x}{(1-q^2\,\mathrm{cth}^2 x)^2}\right]$$
$$\left[q^2=1+\frac{b}{a}>0\right].$$

2.46 Алгебраические функции от гиперболических функций

2.461

1. $$\int\sqrt{\mathrm{th}\,x}\,dx=\mathrm{Arth}\sqrt{\mathrm{th}\,x}-\mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{th}\,x}. \quad \text{МфК221}$$

2. $$\int\sqrt{\mathrm{cth}\,x}\,dx=\mathrm{Arcth}\sqrt{\mathrm{cth}\,x}-\mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{cth}\,x}. \quad \text{МфК222}$$

2.462

1. $$\int\frac{\mathrm{sh}\,x\,dx}{\sqrt{a^2+\mathrm{sh}^2 x}}=\mathrm{Arsh}\frac{\mathrm{ch}\,x}{\sqrt{a^2-1}}=\ln\left(\mathrm{ch}\,x+\sqrt{a^2+\mathrm{sh}^2 x}\right) \quad [a^2>1];$$
$$=\mathrm{Arch}\frac{\mathrm{ch}\,x}{\sqrt{1-a^2}}=\ln\left(\mathrm{ch}\,x+\sqrt{a^2+\mathrm{sh}^2 x}\right) \quad [a^2<1];$$
$$=\ln\mathrm{ch}\,x \quad [a^2=1].$$

2. $$\int\frac{\mathrm{sh}\,x\,dx}{\sqrt{a^2-\mathrm{sh}^2 x}}=\arcsin\frac{\mathrm{ch}\,x}{\sqrt{a^2+1}} \quad [\mathrm{sh}^2 x<a^2].$$

3. $$\int\frac{\mathrm{sh}\,x\,dx}{\sqrt{\mathrm{sh}^2 x-a^2}}=\mathrm{Arch}\frac{\mathrm{ch}\,x}{\sqrt{a^2+1}}=\ln\left(\mathrm{ch}\,x+\sqrt{\mathrm{sh}^2 x-a^2}\right) \quad [\mathrm{sh}^2 x>a^2].$$

МфК199

---

*) Если $\frac{b}{a}<0$ и $\mathrm{ch}^2 x>-\frac{a}{b}$, то $\varphi(x)=\mathrm{Arth}\,(q\,\mathrm{cth}\,x)$. Если же $\frac{b}{a}<0$, но $\mathrm{ch}^2 x<-\frac{a}{b}$, или, если $\frac{b}{a}>0$, то $\varphi(x)=\mathrm{Arcth}\,(q\,\mathrm{cth}\,x)$. МфК203

4. $\int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\sqrt{a^2+\operatorname{sh}^2 x}} = \operatorname{Arsh}\frac{\operatorname{sh} x}{a} = \ln\left(\operatorname{sh} x + \sqrt{a^2+\operatorname{sh}^2 x}\right).$

5. $\int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\sqrt{a^2-\operatorname{sh}^2 x}} = \arcsin\frac{\operatorname{sh} x}{a} \qquad [\operatorname{sh}^2 x < a^2].$

6. $\int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x-a^2}} = \operatorname{Arch}\frac{\operatorname{sh} x}{a} = \ln\left(\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x-a^2}\right) \qquad [\operatorname{sh}^2 x > a^2].$

7. $\int \frac{\operatorname{sh} x\,dx}{\sqrt{a^2+\operatorname{ch}^2 x}} = \operatorname{Arsh}\frac{\operatorname{ch} x}{a} = \ln\left(\operatorname{ch} x + \sqrt{a^2+\operatorname{ch}^2 x}\right).$

8. $\int \frac{\operatorname{sh} x\,dx}{\sqrt{a^2-\operatorname{ch}^2 x}} = \arcsin\frac{\operatorname{ch} x}{a} \qquad [\operatorname{ch}^2 x < a^2].$

9. $\int \frac{\operatorname{sh} x\,dx}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x-a^2}} = \operatorname{Arch}\frac{\operatorname{ch} x}{a} = \ln\left(\operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch}^2 x-a^2}\right) \qquad [\operatorname{ch}^2 x > a^2].$

МфК215—216

10. $\int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\sqrt{a^2+\operatorname{ch}^2 x}} = \operatorname{Arsh}\frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{a^2+1}} = \ln\left(\operatorname{sh} x + \sqrt{a^2+\operatorname{ch}^2 x}\right).$

11. $\int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\sqrt{a^2-\operatorname{ch}^2 x}} = \arcsin\frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{a^2-1}} \qquad [\operatorname{ch}^2 x < a^2].$

12. $\int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x-a^2}} = \operatorname{Arch}\frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{a^2-1}} \qquad [a^2 > 1];$

$= \ln \operatorname{sh} x \qquad [a^2 = 1].$ МфК206

13. $\int \frac{\operatorname{cth} x\,dx}{\sqrt{a+b\operatorname{sh} x}} = 2\sqrt{a}\operatorname{Arcth}\sqrt{1+\frac{b}{a}\operatorname{sh} x} \qquad [b\operatorname{sh} x > 0,\ a > 0];$

$= 2\sqrt{a}\operatorname{Arth}\sqrt{1+\frac{b}{a}\operatorname{sh} x} \qquad [b\operatorname{sh} x < 0,\ a > 0];$

$= 2\sqrt{-a}\operatorname{Arth}\sqrt{-\left(1+\frac{b}{a}\operatorname{sh} x\right)} \qquad a < 0.$

14. $\int \frac{\operatorname{th} x\,dx}{\sqrt{a+b\operatorname{ch} x}} = 2\sqrt{a}\operatorname{Arcth}\sqrt{1+\frac{b}{a}\operatorname{ch} x} \qquad [b\operatorname{ch} x > 0,\ a > 0];$

$= 2\sqrt{a}\operatorname{Arth}\sqrt{1+\frac{b}{a}\operatorname{ch} x} \qquad [b\operatorname{ch} x < 0,\ a > 0];$

$= 2\sqrt{-a}\operatorname{Arth}\sqrt{-\left(1+\frac{b}{a}\operatorname{ch} x\right)} \qquad [a<0].$ МфК 220, 221

2.463

1. $\int \frac{\operatorname{sh} x\sqrt{a+b\operatorname{ch} x}}{p+q\operatorname{ch} x}\,dx = 2\sqrt{\frac{aq-bp}{q}}\operatorname{Arcth}\sqrt{\frac{q(a+b\operatorname{ch} x)}{aq-bp}}$

$\left[b\operatorname{ch} x > 0,\ \frac{aq-bp}{q} > 0\right];$

$= 2\sqrt{\frac{aq-bp}{q}}\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{q(a+b\operatorname{ch} x)}{aq-bp}}$

$\left[b\operatorname{ch} x < 0,\ \frac{aq-bp}{q} > 0\right];$

$= 2\sqrt{\frac{bp-aq}{q}}\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{q(a+b\operatorname{ch} x)}{bp-aq}}$

$\left[\frac{aq-bp}{q} < 0\right].$ МфК 220

2. $\int \frac{\operatorname{ch} x\sqrt{a+b\operatorname{sh} x}}{p+q\operatorname{sh} x}\,dx = 2\sqrt{\frac{aq-bp}{q}}\operatorname{Arcth}\sqrt{\frac{q(a+b\operatorname{sh} x)}{aq-bp}}$

$\left[b\operatorname{sh} x > 0,\ \frac{aq-bp}{q} > 0\right];$

$$= 2\sqrt{\frac{aq-bp}{q}}\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{q(a+b\operatorname{sh}x)}{aq-bp}} \quad \left[b\operatorname{sh}x<0,\ \frac{aq-bp}{q}>0\right];$$

$$= 2\sqrt{\frac{bp-aq}{q}}\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{q(a+b\operatorname{sh}x)}{bp-aq}} \quad \left[\frac{aq-bp}{q}<0\right]. \qquad \text{МфК 221}$$

2.464

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2+k'^2\operatorname{ch}^2 x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+k'^2\operatorname{sh}^2 x}} = F(\arcsin(\operatorname{th} x),\ k) \quad [x>0].$$ БФ (295.00) БФ (295.10)

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x-k^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x+k'^2}} = F\left(\arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right),\ k\right) \quad [x>0].$$ БФ (295.40) БФ (295.30)

3. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k'^2\operatorname{ch}^2 x}} = F\left(\arcsin\left(\frac{\operatorname{th} x}{k}\right),\ k\right)\left[0<x<\operatorname{Arch}\frac{1}{k'}\right].$$ БФ (295.20)

В 2.464 4.— **2.464** 8. положено $\alpha = \arccos\frac{1-\operatorname{sh}2ax}{1+\operatorname{sh}2ax}$, $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $[ax>0]$:

4. $$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sh}2ax}} = \frac{1}{2a}F(\alpha,\ r).$$ БФ (296.50)

5. $$\int \sqrt{\operatorname{sh}2ax}\,dx = \frac{1}{2a}[F(\alpha,\ r)-2E(\alpha,\ r)] + \frac{1}{a}\frac{\sqrt{\operatorname{sh}2ax\,(1+\operatorname{sh}^2 2ax)}}{1+\operatorname{sh}2ax}.$$ БФ (296.53)

6. $$\int \frac{\operatorname{ch}^2 2ax\,dx}{(1+\operatorname{sh}2ax)^2\sqrt{\operatorname{sh}2ax}} = \frac{1}{2a}E(\alpha,\ r).$$ БФ (296.51)

7. $$\int \frac{(1-\operatorname{sh}2ax)^2\,dx}{(1+\operatorname{sh}2ax)^2\sqrt{\operatorname{sh}2ax}} = \frac{1}{2a}[2E(\alpha,\ r)-F(\alpha,\ r)].$$ БФ (296.55)

8. $$\int \frac{\sqrt{\operatorname{sh}2ax}\,dx}{(1+\operatorname{sh}2ax)^2} = \frac{1}{4a}[F(\alpha,\ r)-E(\alpha,\ r)].$$ БФ (296.54)

В 2.464 9. — **2.464** 15. положено $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{\operatorname{ch}2ax-1}{\operatorname{ch}2ax}}$, $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $[x\neq 0]$:

9. $$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ch}2ax}} = \frac{1}{a\sqrt{2}}F(\alpha,\ r).$$ БФ (296.00)

10. $$\int \sqrt{\operatorname{ch}2ax}\,dx = \frac{1}{a\sqrt{2}}[F(\alpha,\ r)-2E(\alpha,\ r)] + \frac{\operatorname{sh}2ax}{a\sqrt{\operatorname{ch}2ax}}.$$ БФ (296.03)

11. $$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ch}^3 2ax}} = \frac{1}{a\sqrt{2}}[2E(\alpha,\ r)-F(\alpha,\ r)].$$ БФ (296.04)

12. $$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ch}^5 2ax}} = \frac{1}{3\sqrt{2}a}F(\alpha,\ r) + \frac{\operatorname{th}2ax}{3a\sqrt{\operatorname{ch}2ax}}.$$ БФ (296.04)

13. $$\int \frac{\operatorname{sh}^2 2ax\,dx}{\sqrt{\operatorname{ch}2ax}} = -\frac{\sqrt{2}}{3a}F(\alpha,\ r) + \frac{1}{3a}\operatorname{sh}2ax\sqrt{\operatorname{ch}2ax}.$$ БФ (296.07)

14. $$\int \frac{\operatorname{th}^2 2ax\,dx}{\sqrt{\operatorname{ch}2ax}} = \frac{\sqrt{2}}{3a}F(\alpha,\ r) - \frac{\operatorname{th}2ax}{3a\sqrt{\operatorname{ch}2ax}}.$$ БФ (296.05)

15. $$\int \frac{\sqrt{\operatorname{ch}2ax}\,dx}{p^2+(1-p^2)\operatorname{ch}2ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\Pi(\alpha,\ p^2,\ r).$$ БФ (296.02)

В 2.464 16. — 2.464 20. положено $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{a^2+b^2} - a - b \operatorname{sh} x}{\sqrt{a^2+b^2} + a + b \operatorname{sh} x}$, $r = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{a^2+b^2}}}$ $\left[a > 0,\ b > 0,\ x > -\operatorname{Arsh}\frac{a}{b}\right]$:

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+b \operatorname{sh} x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^2+b^2}} F(\alpha, r).$ БФ (298.00)

17. $\int \sqrt{a+b \operatorname{sh} x}\, dx = \sqrt[4]{a^2+b^2}\,[F(\alpha, r) - 2E(\alpha, r)] + \frac{2b \operatorname{ch} x \sqrt{a+b \operatorname{sh} x}}{\sqrt{a^2+b^2} + a + b \operatorname{sh} x}.$ БФ (298.02)

18. $\int \frac{\sqrt{a+b \operatorname{sh} x}}{\operatorname{ch}^2 x}\, dx = \sqrt[4]{a^2+b^2}\, E(\alpha, r) - \frac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{2\sqrt[4]{a^2+b^2}} F(\alpha, r) - \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2} - a - b \operatorname{sh} x}{\sqrt{a^2+b^2} + a + b \operatorname{sh} x} \cdot \frac{\sqrt{a+b \operatorname{sh} x}}{\operatorname{ch} x}.$ БФ (298.03)

19. $\int \frac{\operatorname{ch}^2 x\, dx}{[\sqrt{a^2+b^2} + a + b \operatorname{sh} x]^2 \sqrt{a+b \operatorname{sh} x}} = \frac{1}{b^2 \sqrt[4]{a^2+b^2}} E(\alpha, r).$ БФ (298.01)

20. $\int \frac{\sqrt{a+b \operatorname{sh} x}\, dx}{[\sqrt{a^2+b^2} - a - b \operatorname{sh} x]^2} = -\frac{1}{\sqrt[4]{a^2+b^2}\,(\sqrt{a^2+b^2} - a)} E(\alpha, r) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2} - a} \cdot \frac{\operatorname{ch} x \sqrt{a+b \operatorname{sh} x}}{a^2+b^2-(a+b \operatorname{sh} x)^2}.$ БФ (298.04)

В 2.464 21. — 2.464 31. положено $\alpha = \arcsin\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)$, $r = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ $[0 < b < a,\ x > 0]$:

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+b \operatorname{ch} x}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}} F(\alpha, r).$ БФ (297.25)

22. $\int \sqrt{a+b \operatorname{ch} x}\, dx = 2\sqrt{a+b}\,[F(\alpha, r) - E(\alpha, r)] + 2 \operatorname{th}\frac{x}{2} \sqrt{a+b \operatorname{ch} x}.$ БФ (297.29)

23. $\int \frac{\operatorname{ch} x\, dx}{\sqrt{a+b \operatorname{ch} x}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}} F(\alpha, r) - \frac{2\sqrt{a+b}}{b} E(\alpha, r) + \frac{2}{b} \operatorname{th}\frac{x}{2} \sqrt{a+b \operatorname{ch} x}.$ БФ (297.33)

24. $\int \frac{\operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{\sqrt{a+b \operatorname{ch} x}}\, dx = \frac{2\sqrt{a+b}}{a-b}\,[F(\alpha, r) - E(\alpha, r)].$ БФ (297.28)

25. $\int \frac{\operatorname{th}^4 \frac{x}{2}}{\sqrt{a+b \operatorname{ch} x}}\, dx = \frac{2\sqrt{a+b}}{3(a-b)^2}\,[(3a+b) F(\alpha, r) - 4aE(\alpha, r)] + \frac{2}{3(a-b)} \frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2} \sqrt{a+b \operatorname{ch} x}}{\operatorname{ch}^3 \frac{x}{2}}.$ БФ (297.28)

26. $\int \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\sqrt{a+b \operatorname{ch} x}}\, dx = \frac{2}{b}\left[\operatorname{th}\frac{x}{2} \sqrt{a+b \operatorname{ch} x} - \sqrt{a+b}\, E(\alpha, r)\right].$ БФ (297 31)

27. $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{ch} x-1)^2}{\sqrt{a+b\operatorname{ch} x}}\,dx = \frac{4\sqrt{a+b}}{3b^2}[(a+3b)E(\alpha, r) - bF(\alpha, r)] +$
$\displaystyle + \frac{4}{3b^2}\left[b\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} - (a+3b)\right]\operatorname{th}\frac{x}{2}\sqrt{a+b\operatorname{ch} x}.$ БФ (297.31)

28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+b\operatorname{ch} x}}{\operatorname{ch} x+1}\,dx = \sqrt{a+b}\,E(\alpha, r).$ БФ (297.26)

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\operatorname{ch} x+1)\sqrt{a+b\operatorname{ch} x}} = \frac{\sqrt{a+b}}{a-b}E(\alpha, r) - \frac{2b}{a-b)\sqrt{a+b}}F(\alpha, r).$
БФ (297.30)

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\operatorname{ch} x+1)^2\sqrt{a+b\operatorname{ch} x}} = \frac{1}{3(a-b)^2\sqrt{a+b}}[b(5b-a)F(\alpha, r) +$
$\displaystyle + (a-3b)(a+b)E(\alpha, r)] + \frac{1}{6(a-b)}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}\sqrt{a+b\operatorname{ch} x}.$ БФ (297.30)

31. $\displaystyle\int \frac{(1+\operatorname{ch} x)\,dx}{[1+p^2+(1-p^2)\operatorname{ch} x]\sqrt{a+b\operatorname{ch} x}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}}\Pi(\alpha, p^2, r).$ БФ (297.27)

В 2.464 32. — 2.464 40. положено $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{a-b\operatorname{ch} x}{a-b}}$, $r = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ $\left[0 < b < a,\ 0 < x < \operatorname{Arch}\frac{a}{b}\right]$:

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a-b\operatorname{ch} x}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}}F(\alpha, r).$ БФ (297.50)

33. $\displaystyle\int \sqrt{a-b\operatorname{ch} x}\,dx = 2\sqrt{a+b}[F(\alpha, r) - E(\alpha, r)].$ БФ (297.54)

34. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\sqrt{a-b\operatorname{ch} x}} = \frac{2\sqrt{a+b}}{b}E(\alpha, r) - \frac{2}{\sqrt{a+b}}F(\alpha, r).$ БФ (297.56)

35. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ch}^2 x\,dx}{\sqrt{a-b\operatorname{ch} x}} = \frac{2(b-2a)}{3b\sqrt{a+b}}F(\alpha, r) + \frac{4a\sqrt{a+b}}{3b^2}E(\alpha, r) +$
$\displaystyle + \frac{2}{3b}\operatorname{sh} x\sqrt{a-b\operatorname{ch} x}.$ БФ (297.56)

36. $\displaystyle\int \frac{(1+\operatorname{ch} x)\,dx}{\sqrt{a-b\operatorname{ch} x}} = \frac{2\sqrt{a+b}}{b}E(\alpha, r).$ БФ (297.51)

37. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x\sqrt{a-b\operatorname{ch} x}} = \frac{2b}{a\sqrt{a+b}}\Pi\left(\alpha, \frac{a-b}{a}, r\right).$ БФ (297.57)

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\operatorname{ch} x)\sqrt{a-b\operatorname{ch} x}} = \frac{1}{\sqrt{a+b}}E(\alpha, r) - \frac{1}{a+b}\operatorname{th}\frac{x}{2}\sqrt{a-b\operatorname{ch} x}.$
БФ (297.58)

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\operatorname{ch} x)^2\sqrt{a-b\operatorname{ch} x}} = \frac{1}{3\sqrt{(a+b)^3}}[(a+3b)E(\alpha, r) - bF(\alpha, r)] -$
$\displaystyle - \frac{1}{3(a+b)^2}\,\frac{\operatorname{th}\frac{x}{2}\sqrt{a-b\operatorname{ch} x}}{\operatorname{ch} x+1}[2a+4b+(a+3b)\operatorname{ch} x].$ БФ (297.58)

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a-b-ap^2+bp^2\operatorname{ch} x)\sqrt{a-b\operatorname{ch} x}} = \frac{2}{(a-b)\sqrt{a+b}}\Pi(\alpha, p^2, r).$
БФ (297,52)

В 2.464 41. — 2.464 47. положено $\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{b(\operatorname{ch} x - 1)}{b \operatorname{ch} x - a}}$, $r = \sqrt{\frac{a+b}{2b}}$ $[0 < a < b,\ x > 0]$:

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{b \operatorname{ch} x - a}} = \sqrt{\frac{2}{b}} F(\alpha, r)$. БФ (297.00)

42. $\int \sqrt{b \operatorname{ch} x - a}\, dx = (b-a)\sqrt{\frac{2}{b}} F(\alpha, r) - 2\sqrt{2b}\, E(\alpha, r) + \frac{2b \operatorname{sh} x}{\sqrt{b \operatorname{ch} x - a}}$. БФ (297.05)

43. $\int \frac{dx}{\sqrt{(b \operatorname{ch} x - a)^3}} = \frac{1}{b^2 - a^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{b}} [2bE(\alpha, r) - (b-a) F(\alpha, r)]$. БФ (297.06)

44. $\int \frac{dx}{\sqrt{(b \operatorname{ch} x - a)^5}} = \frac{1}{3(b^2 - a^2)^2} \sqrt{\frac{2}{b}} [(b - 3a)(b - a) F(\alpha, r) + 8abE(\alpha, r)] + \frac{2b}{3(b^2 - a^2)} \cdot \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{(b \operatorname{ch} x - a)^3}}$. БФ (297.06)

45. $\int \frac{\operatorname{ch} x\, dx}{\sqrt{b \operatorname{ch} x - a}} = \sqrt{\frac{2}{b}} [F(\alpha, r) - 2E(\alpha, r)] + \frac{2 \operatorname{sh} x}{\sqrt{b \operatorname{ch} x - a}}$. БФ (297.03)

46. $\int \frac{(\operatorname{ch} x + 1)\, dx}{\sqrt{(b \operatorname{ch} x - a)^3}} = \frac{2}{b-a} \sqrt{\frac{2}{b}} E(\alpha, r)$. БФ (297.01)

47. $\int \frac{\sqrt{b \operatorname{ch} x - a}\, dx}{p^2 b - a + b(1 - p^2) \operatorname{ch} x} = \sqrt{\frac{2}{b}} \Pi(\alpha, p^2, r)$. БФ (297.02)

В 2.464 48. — 2.464 55. положено $\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{b \operatorname{ch} x - a}{b(\operatorname{ch} x - 1)}}$, $r = \sqrt{\frac{2b}{a+b}}$ $\left[0 < b < a,\ x > \operatorname{Arch} \frac{a}{b}\right]$:

48. $\int \frac{dx}{\sqrt{b \operatorname{ch} x - a}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}} F(\alpha, r)$. БФ (297.75)

49. $\int \sqrt{b \operatorname{ch} x - a}\, dx = -2\sqrt{a+b}\, E(\alpha, r) + 2 \operatorname{cth} \frac{x}{2} \sqrt{b \operatorname{ch} x - a}$. БФ (297.79)

50. $\int \frac{\operatorname{cth}^2 \frac{x}{2}\, dx}{\sqrt{b \operatorname{ch} x - a}} = \frac{2\sqrt{a+b}}{a-b} E(\alpha, r)$. БФ (297.76)

51. $\int \frac{\sqrt{b \operatorname{ch} x - a}}{\operatorname{ch} x - 1} dx = \sqrt{a+b}\, [F(\alpha, r) - E(\alpha, r)]$. БФ (297.77)

52. $\int \frac{dx}{(\operatorname{ch} x - 1)\sqrt{b \operatorname{ch} x - a}} = \frac{\sqrt{a+b}}{a-b} E(\alpha, r) - \frac{1}{\sqrt{a+b}} F(\alpha, r)$. БФ (297.78)

53. $\int \frac{dx}{(\operatorname{ch} x - 1)^2 \sqrt{b \operatorname{ch} x - a}} = \frac{1}{3(a-b)^2 \sqrt{a+b}} [(a - 2b)(a - b) F(\alpha, r) + (3a - b)(a + b) E(\alpha, r)] + \frac{a+b}{6b(a-b)} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{2}}{\operatorname{sh}^3 \frac{x}{2}} \sqrt{b \operatorname{ch} x - a}$. БФ (297.78)

54. $\int \frac{dx}{(\operatorname{ch} x + 1)\sqrt{b \operatorname{ch} x - a}} = \frac{1}{\sqrt{a+b}} [F(\alpha, r) - E(\alpha, r)] + \frac{2\sqrt{b \operatorname{ch} x - a}}{(a+b) \operatorname{sh} x}$. БФ (297.80)

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\operatorname{ch} x+1)^2 \sqrt{b \operatorname{ch} x-a}} = \frac{1}{3\sqrt{(a+b)^3}} [(a+2b) F(\alpha, r) -$

$\displaystyle - (a+3b) E(\alpha, r)] + \frac{\sqrt{b \operatorname{ch} x - a}}{3(a+b) \operatorname{sh} x} \left(2 \frac{a+3b}{a+b} - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2} \right).$ БФ (297.80)

В 2.464 56. — 2.464 60 положено $\alpha = \arccos \dfrac{\sqrt[4]{b^2-a^2}}{\sqrt{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x}}$, $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[0 < a < b, \quad -\operatorname{Arsh} \dfrac{a}{\sqrt{b^2-a^2}} < x \right]$:

56. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x}} = \sqrt[4]{\frac{4}{b^2-a^2}}\, F(\alpha, r).$ БФ (299.00)

57. $\displaystyle\int \sqrt{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x}\, dx = \sqrt[4]{4(b^2-a^2)}\, [F(\alpha, r) - 2E(\alpha, r)] +$

$\displaystyle + \frac{2(a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x)}{\sqrt{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x}}.$ БФ (299.02)

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x)^3}} = \sqrt[4]{\frac{4}{(b^2-a^2)^3}}\, [2E(\alpha, r) - F(\alpha, r)].$ БФ (299.03)

59. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x)^5}} = \frac{1}{3} \sqrt[4]{\frac{4}{(b^2-a^2)^5}}\, F(\alpha, r) +$

$\displaystyle + \frac{2}{3(b^2-a^2)} \cdot \frac{a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x}{\sqrt{(a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x)^3}}.$ БФ (299.03)

60. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{b^2-a^2} + a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x)\, dx}{\sqrt{(a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x)^3}} = 2 \sqrt[4]{\frac{4}{b^2-a^2}}\, E(\alpha, r).$ БФ (299.01)

2.47 Гиперболические функции и степенная функция

2.471

1. $\displaystyle\int x^r \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^q x\, dx = \frac{1}{(p+q)^2} \Big[(p+q) x^r \operatorname{sh}^{p+1} x \operatorname{ch}^{q-1} x -$

$\displaystyle - r x^{r-1} \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^q x + r(r+1) \int x^{r-2} \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^q x\, dx +$

$\displaystyle + rp \int x^{r-1} \operatorname{sh}^{p-1} x \operatorname{ch}^{q-1} x\, dx + (q-1)(p+q) \int x^r \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^{q-2} x\, dx \Big];$

$\displaystyle = \frac{1}{(p+q)^2} \Big[(p+q) x^r \operatorname{sh}^{p-1} x \operatorname{ch}^{q+1} x -$

$\displaystyle - r x^{r-1} \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^q x + r(r-1) \int x^{r-2} \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^q x\, dx -$

$\displaystyle - rq \int x^{r-1} \operatorname{sh}^{p-1} x \operatorname{ch}^{q-1} x\, dx - (p-1)(p+q) \int x^r \operatorname{sh}^{p-2} x \operatorname{ch}^q x\, dx \Big].$ ГХI [353] (1)

2. $\displaystyle\int x^n \operatorname{sh}^{2m} x\, dx = (-1)^m \binom{2m}{m} \frac{x^{n+1}}{2^{2m}(n+1)} +$

$\displaystyle + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{2m}{k} \int x^n \operatorname{ch}(2m-2k) x\, dx.$

3. $\displaystyle\int x^n \operatorname{sh}^{2m+1} x\, dx = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{2m+1}{k} \int x^n \operatorname{sh}(2m-2k+1) x\, dx.$

4. $$\int x^n \operatorname{ch}^{2m} x\,dx = \binom{2m}{m} \frac{x^{n+1}}{2^{2m}(n+1)} + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{k} \int x^n \operatorname{ch}(2m-2k)\,x\,dx.$$

5. $$\int x^n \operatorname{ch}^{2m+1} x\,dx = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k} \int x^n \operatorname{ch}(2m-2k+1)\,x\,dx.$$

2.472

1. $$\int x^n \operatorname{sh} x\,dx = x^n \operatorname{ch} x - n \int x^{n-1} \operatorname{ch} x\,dx = x^n \operatorname{ch} x - nx^{n-1} \operatorname{sh} x + n(n-1) \int x^{n-2} \operatorname{sh} x\,dx.$$

2. $$\int x^n \operatorname{ch} x\,dx = x^n \operatorname{sh} x - n \int x^{n-1} \operatorname{sh} x\,dx = x^n \operatorname{sh} x - nx^{n-1} \operatorname{ch} x + n(n-1) \int x^{n-2} \operatorname{ch} x\,dx.$$

3. $$\int x^{2n} \operatorname{sh} x\,dx = (2n)! \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \operatorname{ch} x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \operatorname{sh} x \right\}.$$

4. $$\int x^{2n+1} \operatorname{sh} x\,dx = (2n+1)! \sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \operatorname{ch} x - \frac{x^{2k}}{(2k)!} \operatorname{sh} x \right\}.$$

5. $$\int x^{2n} \operatorname{ch} x\,dx = (2n)! \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \operatorname{sh} x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \operatorname{ch} x \right\}.$$

6. $$\int x^{2n+1} \operatorname{ch} x\,dx = (2n+1)! \sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \operatorname{sh} x - \frac{x^{2k}}{(2k)!} \operatorname{ch} x \right\}.$$

7. $$\int x \operatorname{sh} x\,dx = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$$

8. $$\int x^2 \operatorname{sh} x\,dx = (x^2+2) \operatorname{ch} x - 2x \operatorname{sh} x.$$

9. $$\int x \operatorname{ch} x\,dx = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x.$$

10. $$\int x^2 \operatorname{ch} x\,dx = (x^2+2) \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x.$$

2.473 Обозначение $z_1 = a + bx$

1. $$\int z_1 \operatorname{sh} kx\,dx = \frac{1}{k} z_1 \operatorname{ch} kx - \frac{b}{k^2} \operatorname{sh} kx.$$

2. $$\int z_1 \operatorname{ch} kx\,dx = \frac{1}{k} z_1 \operatorname{sh} kx - \frac{b}{k^2} \operatorname{ch} kx.$$

3. $$\int z_1^2 \operatorname{sh} kx\,dx = \frac{1}{k} \left(z_1^2 + \frac{2b^2}{k^2} \right) \operatorname{ch} kx - \frac{2bz_1}{k^2} \operatorname{sh} kx.$$

4. $$\int z_1^2 \operatorname{ch} kx\,dx = \frac{1}{k} \left(z_1^2 + \frac{2b^2}{k^2} \right) \operatorname{sh} kx - \frac{2bz_1}{k^2} \operatorname{ch} kx.$$

5. $$\int z_1^3 \operatorname{sh} kx\,dx = \frac{z_1}{k} \left(z_1^2 + \frac{6b^2}{k^2} \right) \operatorname{ch} kx - \frac{3b}{k^2} \left(z_1^2 + \frac{2b^2}{k^2} \right) \operatorname{sh} kx.$$

6. $\int z_1^3 \operatorname{ch} kx\,dx = \frac{z_1}{k}\left(z_1^2 + \frac{6b^2}{k^2}\right)\operatorname{sh} kx - \frac{3b}{k^2}\left(z_1^2 + \frac{2b^2}{k^2}\right)\operatorname{ch} kx.$

7. $\int z_1^4 \operatorname{sh} kx\,dx = \frac{1}{k}\left(z_1^4 + \frac{12b^2}{k^2} z_1^2 + \frac{24b^4}{k^4}\right)\operatorname{ch} kx - \frac{4bz_1}{k^2}\left(z_1^2 + \frac{6b^2}{k^2}\right)\operatorname{sh} kx.$

8. $\int z_1^4 \operatorname{ch} kx\,dx = \frac{1}{k}\left(z_1^4 + \frac{12b^2}{k^2} z_1^2 + \frac{24b^4}{k^4}\right)\operatorname{sh} kx - \frac{4bz_1}{k^2}\left(z_1^2 + \frac{6b^2}{k^2}\right)\operatorname{ch} kx.$

9. $\int z_1^5 \operatorname{sh} kx\,dx = \frac{z_1}{k}\left(z_1^4 + \frac{20b^2}{k^2} z_1^2 + 120\frac{b^4}{k^4}\right)\operatorname{ch} kx -$

$$- \frac{5b}{k^2}\left(z_1^4 + 12\frac{b^2}{k^2} z_1^2 + 24\frac{b^4}{k^4}\right)\operatorname{sh} kx.$$

10. $\int z_1^5 \operatorname{ch} kx\,dx = \frac{z_1}{k}\left(z_1^4 + 20\frac{b^2}{k^2} z_1^2 + 120\frac{b^4}{k^4}\right)\operatorname{sh} kx -$

$$- \frac{5b}{k^2}\left(z_1^4 + 12\frac{b^2}{k^2} z_1^2 + 24\frac{b^4}{k^4}\right)\operatorname{ch} kx.$$

11. $\int z_1^6 \operatorname{sh} kx\,dx = \frac{1}{k}\left(z_1^6 + 30\frac{b^2}{k^2} z_1^4 + 360\frac{b^4}{k^4} z_1^2 + 720\frac{b^6}{k^6}\right)\operatorname{ch} kx -$

$$- \frac{6bz_1}{k^2}\left(z_1^4 + 20\frac{b^2}{k^2} z_1^2 + 120\frac{b^4}{k^4}\right)\operatorname{sh} kx.$$

12. $\int z_1^6 \operatorname{ch} kx\,dx = \frac{1}{k}\left(z_1^6 + 30\frac{b^2}{k^2} z_1^4 + 360\frac{b^4}{k^4} z_1^2 + 720\frac{b^6}{k^6}\right)\operatorname{sh} kx -$

$$- \frac{6bz_1}{k^2}\left(z_1^4 + 20\frac{b^2}{k^2} z_1 + 120\frac{b^4}{k^4}\right)\operatorname{ch} kx.$$

2.474

1. $\int x^n \operatorname{sh}^2 x\,dx = -\frac{x^{n+1}}{2(n+1)} +$

$$+\frac{n!}{4}\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\left\{\frac{x^{n-2k}}{2^{2k}(n-2k)!}\operatorname{sh} 2x - \frac{x^{n-2k-1}}{2^{2k+1}(n-2k-1)!}\operatorname{ch} 2x\right\}.$$ ГХ I [353] (2b)

2. $\int x^n \operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{x^{n+1}}{2(n+1)} +$

$$+\frac{n!}{4}\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\left\{\frac{x^{n-2k}}{2^{2k}(n-2k)!}\operatorname{sh} 2x - \frac{x^{n-2k-1}}{2^{2k+1}(n-2k-1)!}\operatorname{ch} 2x\right\}.$$ ГХ I [353] (3e)

3. $\int x\operatorname{sh}^2 x\,dx = \frac{1}{4}x\operatorname{sh} 2x - \frac{1}{8}\operatorname{ch} 2x - \frac{x^2}{4}.$

4. $\int x^2\operatorname{sh}^2 x\,dx = \frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\operatorname{sh} 2x - \frac{x}{4}\operatorname{ch} 2x - \frac{x^3}{6}.$ МФ К257

5. $\int x\operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{x}{4}\operatorname{sh} 2x - \frac{1}{8}\operatorname{ch} 2x + \frac{x^2}{4}.$

6. $\int x^2\operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\operatorname{sh} 2x - \frac{x}{4}\operatorname{ch} 2x + \frac{x^3}{6}.$ МФ К261

7. $\int x^n \operatorname{sh}^3 x\,dx = \frac{n!}{4}\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\left\{\frac{x^{n-2k}}{(n-2k)!}\left(\frac{\operatorname{ch} 3x}{3^{2k+1}} - 3\operatorname{ch} x\right) -\right.$

$$\left. - \frac{x^{n-2k-1}}{(n-2k-1)!}\left(\frac{\operatorname{sh} 3x}{3^{2k+2}} - 3\operatorname{sh} x\right)\right\}.$$ ГХ I [353] (2f)

8. $$\int x^n \operatorname{ch}^3 x\,dx = \frac{n!}{4}\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\left\{\frac{x^{n-2k}}{(n-2k)!}\left(\frac{\operatorname{sh}3x}{3^{2k+1}}+3\operatorname{sh}x\right)-\frac{x^{n-2k-1}}{(n-2k-1)!}\left(\frac{\operatorname{ch}3x}{3^{2k+2}}+3\operatorname{ch}x\right)\right\}.$$ ГХ I [353] (3f)

9. $$\int x\operatorname{sh}^3 x\,dx = \frac{3}{4}\operatorname{sh}x-\frac{1}{36}\operatorname{sh}3x-\frac{3}{4}x\operatorname{ch}x-\frac{x}{12}\operatorname{ch}3x.$$

10. $$\int x^2\operatorname{sh}^3 x\,dx = -\left(\frac{3x^2}{4}+\frac{3}{2}\right)\operatorname{ch}x+\left(\frac{x^2}{12}+\frac{1}{54}\right)\operatorname{ch}3x+\frac{3x}{2}\operatorname{sh}x-\frac{x}{18}\operatorname{sh}3x.$$ МФ К257

11. $$\int x\operatorname{ch}^3 x\,dx = -\frac{3}{4}\operatorname{ch}x-\frac{1}{36}\operatorname{ch}3x+\frac{3}{4}x\operatorname{sh}x+\frac{x}{12}\operatorname{sh}3x.$$

12. $$\int x^2\operatorname{ch}^3 x\,dx = \left(\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}\right)\operatorname{sh}x+\left(\frac{x^2}{12}+\frac{1}{54}\right)\operatorname{sh}3x-\frac{3}{2}x\operatorname{ch}x-\frac{x}{18}\operatorname{ch}3x.$$ МФ К262

2.475

1. $$\int\frac{\operatorname{sh}^q x}{x^p}dx = -\frac{(p-2)\operatorname{sh}^q x+qx\operatorname{sh}^{q-1}x\operatorname{ch}x}{(p-1)(p-2)x^{p-1}}+\frac{q(q-1)}{(p-1)(p-2)}\int\frac{\operatorname{sh}^{q-2}x}{x^{p-2}}dx+\frac{q^2}{(p-1)(p-2)}\int\frac{\operatorname{sh}^q x}{x^{p-2}}dx\quad [p>2].$$ ГХ I [353] (6a)

2. $$\int\frac{\operatorname{ch}^q x}{x^p}dx = -\frac{(p-2)\operatorname{ch}^q x+qx\operatorname{ch}^{q-1}x\operatorname{sh}x}{(p-1)(p-2)x^{p-1}}-\frac{q(q-1)}{(p-1)(p-2)}\int\frac{\operatorname{ch}^{q-2}x}{x^{p-2}}dx+\frac{q^2}{(p-1)(p-2)}\int\frac{\operatorname{ch}^q x}{x^{p-2}}dx\quad [p>2].$$ ГХ I [353] (7a)

3. $$\int\frac{\operatorname{sh}x}{x^{2n}}dx = -\frac{1}{x(2n-1)!}\left\{\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(2k+1)!}{x^{2k+1}}\operatorname{ch}x+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!}{x^{2k}}\operatorname{sh}x\right\}+\frac{1}{(2n-1)!}\operatorname{chi}(x).$$ ГХ I [353] (6b)

4. $$\int\frac{\operatorname{sh}x}{x^{2n+1}}dx = -\frac{1}{x(2n)!}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!}{x^{2k}}\operatorname{ch}x+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k+1)!}{x^{2k+1}}\operatorname{sh}x\right\}+\frac{1}{(2n)!}\operatorname{shi}(x).$$ ГХ I [353] (6b)

5. $$\int\frac{\operatorname{ch}x}{x^{2n}}dx = -\frac{1}{x(2n-1)!}\left\{\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(2k+1)!}{x^{2k+1}}\operatorname{sh}x+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!}{x^{2k}}\operatorname{ch}x\right\}+\frac{1}{(2n-1)!}\operatorname{shi}(x).$$ ГХ I [353] (7b)

6. $$\int\frac{\operatorname{ch}x}{x^{2n+1}}dx = -\frac{1}{(2n)!\,x}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!}{x^{2k}}\operatorname{sh}x+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k+1)!}{x^{2k+1}}\operatorname{ch}x\right\}+\frac{1}{(2n)!}\operatorname{chi}(x).$$ ГХ I [353] (7b)

7. $\int \frac{\operatorname{sh}^{2m} x}{x}\,dx = \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{2m}{k} \operatorname{chi}(2m-2k)x +$

$+ \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \ln x.$ ГХI [353] (6c)

8 $\int \frac{\operatorname{sh}^{2m+1} x}{x}\,dx = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{2m+1}{k} \operatorname{shi}(2m-2k+1)x.$

ГХI [353] (6d)

9. $\int \frac{\operatorname{ch}^{2m} x}{x}\,dx = \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{k} \operatorname{chi}(2m-2k)x +$

$+ \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \ln x.$ ГХI [353] (7c)

10. $\int \frac{\operatorname{ch}^{2m+1} x}{x}\,dx = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k} \operatorname{chi}(2m-2k+1)x.$ ГХI [353] (7c)

11. $\int \frac{\operatorname{sh}^{2m} x}{x^2}\,dx = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}x} \binom{2m}{m} +$

$+ \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+1} \binom{2m}{k} \left\{ \frac{\operatorname{ch}(2m-2k)x}{x} - (2m-2k)\operatorname{shi}(2m-2k)x \right\}.$

12. $\int \frac{\operatorname{sh}^{2m+1} x}{x^2}\,dx = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k+1} \binom{2m+1}{k} \times$

$\times \left\{ \frac{\operatorname{sh}(2m-2k+1)x}{x} - (2m-2k+1)\operatorname{chi}(2m-2k+1)x \right\}.$

13 $\int \frac{\operatorname{ch}^{2m} x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{2^{2m}x} \binom{2m}{m} -$

$- \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{k} \left\{ \frac{\operatorname{ch}(2m-2k)x}{x} - (2m-2k)\operatorname{shi}(2m-2k)x \right\}.$

14. $\int \frac{\operatorname{ch}^{2m+1} x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k} \times$

$\times \left\{ \frac{\operatorname{ch}(2m-2k+1)x}{x} - (2m-2k+1)\operatorname{shi}(2m-2k+1)x \right\}$

2.476

1. $\int \frac{\operatorname{sh} kx}{a+bx}\,dx = \frac{1}{b}\left[\operatorname{ch}\frac{ka}{b}\operatorname{shi}(u) - \operatorname{sh}\frac{ka}{b}\operatorname{chi}(u) \right];$

$= \frac{1}{2b}\left[\exp\left(-\frac{ka}{b}\right)\operatorname{Ei}(u) - \exp\left(\frac{ka}{b}\right)\operatorname{Ei}(-u) \right]$

$\left[u = \frac{k}{b}(a+bx) \right].$

2. $\int \frac{\operatorname{ch} kx}{a+bx}\,dx = \frac{1}{b}\left[\operatorname{ch}\frac{ka}{b}\operatorname{chi}(u) - \operatorname{sh}\frac{ka}{b}\operatorname{shi}(u) \right];$

$= \frac{1}{2b}\left[\exp\left(-\frac{ka}{b}\right)\operatorname{Ei}(u) + \exp\left(\frac{ka}{b}\right)\operatorname{Ei}(-u) \right]$

$\left[u = \frac{k}{b}(a+bx) \right].$

3. $\int \frac{\operatorname{sh} kx}{(a+bx)^2} dx = -\frac{1}{b} \cdot \frac{\operatorname{sh} kx}{a+bx} + \frac{k}{b} \int \frac{\operatorname{ch} kx}{a+bx} dx$ (см. 2.476 2.).

4. $\int \frac{\operatorname{ch} kx}{(a+bx)^2} dx = -\frac{1}{b} \cdot \frac{\operatorname{ch} kx}{a+bx} + \frac{k}{b} \int \frac{\operatorname{sh} kx}{a+bx} dx$ (см. 2.476 1.).

5. $\int \frac{\operatorname{sh} kx}{(a+bx)^3} dx = -\frac{\operatorname{sh} kx}{2b(a+bx)^2} - \frac{k \operatorname{ch} kx}{2b^2(a+bx)} + \frac{k^2}{2b^2} \int \frac{\operatorname{sh} kx}{a+bx} dx$ (см. 2.476 1.).

6. $\int \frac{\operatorname{ch} kx}{(a+bx)^3} dx = -\frac{\operatorname{ch} kx}{2b(a+bx)^2} - \frac{k \operatorname{sh} kx}{2b^2(a+bx)} + \frac{k^2}{2b^2} \int \frac{\operatorname{ch} kx}{a+bx} dx$ (см. 2.476 2.).

7. $\int \frac{\operatorname{sh} kx}{(a+bx)^4} dx = -\frac{\operatorname{sh} kx}{3b(a+bx)^3} - \frac{k \operatorname{ch} kx}{6b^2(a+bx)^2} - \frac{k^2 \operatorname{sh} kx}{6b^3(a+bx)} + \frac{k^3}{6b^3} \int \frac{\operatorname{ch} kx}{a+bx} dx$ (см. 2.476 2.).

8. $\int \frac{\operatorname{ch} kx}{(a+bx)^4} dx = -\frac{\operatorname{ch} kx}{3b(a+bx)^3} - \frac{k \operatorname{sh} kx}{6b^2(a+bx)^2} - \frac{k^2 \operatorname{ch} kx}{6b^3(a+bx)} + \frac{k^3}{6b^3} \int \frac{\operatorname{sh} kx}{a+bx} dx$ (см. 2.476 1.).

9. $\int \frac{\operatorname{sh} kx}{(a+bx)^5} dx = -\frac{\operatorname{sh} kx}{4b(a+bx)^4} - \frac{k \operatorname{ch} kx}{12b^2(a+bx)^3} - \frac{k^2 \operatorname{sh} kx}{24b^3(a+bx)^2} - \frac{k^3 \operatorname{ch} kx}{24b^4(a+bx)} + \frac{k^4}{24b^4} \int \frac{\operatorname{sh} kx}{a+bx} dx$ (см. 2.476 1.).

10. $\int \frac{\operatorname{ch} kx}{(a+bx)^5} dx = -\frac{\operatorname{ch} kx}{4b(a+bx)^4} - \frac{k \operatorname{sh} kx}{12b^2(a+bx)^3} - \frac{k^2 \operatorname{ch} kx}{24b^3(a+bx)^2} - \frac{k^3 \operatorname{sh} kx}{24b^4(a+bx)} + \frac{k^4}{24b^4} \int \frac{\operatorname{ch} kx}{a+bx} dx$ (см. 2.476 2.).

11. $\int \frac{\operatorname{sh} kx}{(a+bx)^6} dx = -\frac{\operatorname{sh} kx}{5b(a+bx)^5} - \frac{k \operatorname{ch} kx}{20b^2(a+bx)^4} - \frac{k^2 \operatorname{sh} kx}{60b^3(a+bx)^3} - \frac{k^3 \operatorname{ch} kx}{120b^4(a+bx)^2} - \frac{k^4 \operatorname{sh} kx}{120b^5(a+bx)} + \frac{k^5}{120b^5} \int \frac{\operatorname{ch} kx}{a+bx} dx$ (см. 2.476 2.).

12. $\int \frac{\operatorname{ch} kx}{(a+bx)^6} dx = -\frac{\operatorname{ch} kx}{5b(a+bx)^5} - \frac{k \operatorname{sh} kx}{20b^2(a+bx)^4} - \frac{k^2 \operatorname{ch} kx}{60b^3(a+bx)^3} - \frac{k^3 \operatorname{sh} kx}{120b^4(a+bx)^2} - \frac{k^4 \operatorname{ch} kx}{120b^5(a+bx)} + \frac{k^5}{120b^5} \int \frac{\operatorname{sh} kx}{a+bx} dx$ (см. 2.476 1.).

2.477

1. $\int \frac{x^p\,dx}{\operatorname{sh}^q x} = \frac{-px^{p-1} \operatorname{sh} x - (q-2) x^p \operatorname{ch} x}{(q-1)(q-2) \operatorname{sh}^{q-1} x} + \frac{p(p-1)}{(q-1)(q-2)} \int \frac{x^{p-2}}{\operatorname{sh}^{q-2} x} dx - \frac{q-2}{q-1} \int \frac{x^p\,dx}{\operatorname{sh}^{q-2} x}$ $[q > 2]$. ГХ I [353] (8a)

2. $\int \frac{x^p\,dx}{\operatorname{ch}^q x} = \frac{px^{p-1} \operatorname{ch} x + (q-2) x^p \operatorname{sh} x}{(q-1)(q-2) \operatorname{ch}^{q-1} x} - \frac{p(p-1)}{(q-1)(q-2)} \int \frac{x^{p-2}\,dx}{\operatorname{ch}^{q-2} x} + \frac{q-2}{q-1} \int \frac{x^p\,dx}{\operatorname{ch}^{q-2} x}$ $[q > 2]$. ГХ I [353] (10a)

3. $\int \frac{x^n}{\operatorname{sh} x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2-2^{2k}) B_{2k}}{(n+2k)(2k)!} x^{n+2k}$ $[|x| < \pi,\ n > 0]$. ГХ I [353] (8b)

4. $$\int \frac{x^n}{\operatorname{ch} x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k} x^{n+2k+1}}{(n+2k+1)(2k)!} \qquad \left[|x| < \frac{\pi}{2},\ n \geqslant 0\right].$$ ГХ I [353] (10b)

5. $$\int \frac{dx}{x^n \operatorname{sh} x} = -[1 + (-1)^n] \frac{2^{n-1}-1}{n!} B_n \ln x + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{n}{2}}}^{\infty} \frac{2-2^{2k}}{(2k-n)(2k)!} B_{2k} x^{2k-n} \qquad [|x| < \pi, n \geqslant 1].$$ ГХ I [353] (9b)

6. $$\int \frac{dx}{x^n \operatorname{ch} x} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{n-1}{2}}}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k-n+1)(2k)!} x^{2k-n+1} + \frac{1}{2}[1 - (-1)^{n-1}] + \frac{E_{n-1}}{(n-1)!} \ln x \qquad \left[|x| < \frac{\pi}{2}\right].$$ ГХ I [353] (11b)

7. $$\int \frac{x^n}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -x^n \operatorname{cth} x + n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(n+2k-1)(2k)!} x^{n+2k-1} \qquad [n > 1,\quad |x| < \pi].$$ ГХ I [353] (8c)

8. $$\int \frac{x^n}{\operatorname{ch}^2 x} dx = x^n \operatorname{th} x - n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1) B_{2k}}{(n+2k-1)(2k)!} x^{n+2k-1} \qquad \left[n > 1,\quad |x| < \frac{\pi}{2}\right].$$ ГХ I [353] (10c)

9. $$\int \frac{dx}{x^n \operatorname{sh}^2 x} = -\frac{\operatorname{cth} x}{x^n} - [1 - (-1)^n] \frac{2^n n}{(n+1)!} B_{n+1} \ln x - \frac{n}{x^{n+1}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{n+1}{2}}}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k-n-1)(2k)!} (2x)^{2k} \qquad [|x| < \pi].$$ ГХ I [353] (9c)

10. $$\int \frac{dx}{x^n \operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{th} x}{x^n} + [1 - (-1)^n] \frac{2^n (2^{n+1}-1) n}{(n+1)!} B_{n+1} \ln x + \frac{n}{x^{n+1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \frac{n+1}{2}}} \frac{(2^{2k}-1) B_{2k}}{(2k-n-1)(2k)!} (2x)^{2k} \qquad \left[|x| < \frac{\pi}{2}\right].$$ ГХ I [353] (11c)

11. $$\int \frac{x}{\operatorname{sh}^{2n} x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots(2n-2k+2)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)} \times \left\{\frac{x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^{2n-2k+1} x} + \frac{1}{(2n-2k)\operatorname{sh}^{2n-2k} x}\right\} + (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \int \frac{x\, dx}{\operatorname{sh}^2 x}$$ (см. 2.477 17.). ГХ I [353] (8e)

12. $$\int \frac{x}{\operatorname{sh}^{2n-1} x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2k+1)}{(2n-2)(2n-4)\ldots(2n-2k)} \times \left\{\frac{x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^{2n-2k} x} + \frac{1}{(2n-2k-1)\operatorname{sh}^{2n-2k-1} x}\right\} + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \int \frac{x\, dx}{\operatorname{sh} x}$$ (см. 2.477 15.). ГХ I [353] (8e)

13. $$\int \frac{x}{\operatorname{ch}^{2n} x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-2)(2n-4)\dots(2n-2k+2)}{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+1)} \times$$
$$\times \left\{\frac{x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{2n-2k+1} x} + \frac{1}{(2n-2k)\operatorname{ch}^{2n-2k} x}\right\} + \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x}$$
(см. 2.477 18.). ГХI [353] (10e)

14. $$\int \frac{x}{\operatorname{ch}^{2n-1} x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-3)(2n-5)\dots(2n-2k+1)}{(2n-2)(2n-4)\dots(2n-2k)} \times$$
$$\times \left\{\frac{x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{2n-2k} x} + \frac{1}{(2n-2k-1)\operatorname{ch}^{2n-2k-1} x}\right\} + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch} x}$$
(см. 2.477 16.). ГХI [353] (10e)

15. $$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sh} x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2-2^{2k}}{(2k+1)(2k)!} B_{2k} x^{2k+1} \qquad |x| < \pi.$$ ГХI [353] (8b) и

16. $$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch} x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k} x^{2k+2}}{(2k+2)(2k)!} \qquad |x| < \frac{\pi}{2}.$$ ГХI [353] (10b) и

17. $$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -x \operatorname{cth} x + \ln \operatorname{sh} x.$$ МФК 257

18. $$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x} = x \operatorname{th} x - \ln \operatorname{ch} x.$$ МФК 262

19. $$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sh}^3 x} = -\frac{x \operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{2\operatorname{sh} x} - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sh} x}$$ (см. 2.477 15.). МФК 257

20. $$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^3 x} = \frac{x \operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{2\operatorname{ch} x} + \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch} x}$$ (см. 2.477 16.). МФК 262

21. $$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sh}^4 x} = -\frac{x \operatorname{ch} x}{3\operatorname{sh}^3 x} - \frac{1}{6\operatorname{sh}^2 x} + \frac{2}{3} x \operatorname{cth} x - \frac{2}{3}\ln \operatorname{sh} x.$$ МФК 258

22. $$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^4 x} = \frac{x \operatorname{sh} x}{3\operatorname{ch}^3 x} + \frac{1}{6\operatorname{ch}^2 x} + \frac{2}{3} x \operatorname{th} x - \frac{2}{3}\ln \operatorname{ch} x.$$ МФК 262

23. $$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sh}^5 x} = -\frac{x \operatorname{ch} x}{4\operatorname{sh}^4 x} - \frac{1}{12\operatorname{sh}^3 x} + \frac{3x \operatorname{ch} x}{8\operatorname{sh}^2 x} + \frac{3}{8\operatorname{sh} x} + \frac{3}{8}\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sh} x}$$ (см. 2.477 15.). МФК 258

24. $$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^5 x} = \frac{x \operatorname{sh} x}{4\operatorname{ch}^4 x} + \frac{1}{12\operatorname{ch}^3 x} + \frac{3x \operatorname{sh} x}{8\operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{8\operatorname{ch} x} + \frac{3}{8}\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch} x}$$ (см. 2.477 16.). МФК 262

2.478

1. $$\int \frac{x^n \operatorname{ch} x\,dx}{(a+b\operatorname{sh} x)^m} = -\frac{x^n}{(m-1)b(a+b\operatorname{sh} x)^{m-1}} + \frac{n}{(m-1)b}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{(a+b\operatorname{sh} x)^{m-1}} \qquad [m \neq 1].$$ МФК 263 и

2. $$\int \frac{x^n \operatorname{sh} x\,dx}{(a+b\operatorname{ch} x)^m} = -\frac{x^n}{(m-1)b(a+b\operatorname{ch} x)^{m-1}} + \frac{n}{(m-1)b}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{(a+b\operatorname{ch} x)^{m-1}} \qquad [m \neq 1].$$ МФК 263

3. $$\int \frac{x\,dx}{1+\operatorname{ch} x} = x \operatorname{th}\frac{x}{2} - 2\ln \operatorname{ch}\frac{x}{2}.$$

4. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1-\operatorname{ch} x} = x \operatorname{cth}\frac{x}{2} - 2\ln \operatorname{sh}\frac{x}{2}.$

5. $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{sh} x\,dx}{(1+\operatorname{ch} x)^2} = -\frac{x}{1+\operatorname{ch} x} + \operatorname{th}\frac{x}{2}.$

6. $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{sh} x\,dx}{(1-\operatorname{ch} x)^2} = \frac{x}{1-\operatorname{ch} x} - \operatorname{cth}\frac{x}{2}.$ МфК 262—264

7. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch} 2x - \cos 2t} = \frac{1}{2\sin 2t}\left[L(u+t) - L(u-t) - 2L(t)\right]$

$[u = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x \operatorname{ctg} t),\ t \neq \pm n\pi].$ ЛоIII402

8. $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{ch} x\,dx}{\operatorname{ch} 2x - \cos 2t} = \frac{1}{2\sin t}\left[L\left(\frac{u+t}{2}\right) - L\left(\frac{u-t}{2}\right) + \right.$

$\displaystyle\left. + L\left(\pi - \frac{v+t}{2}\right) + L\left(\frac{v-t}{2}\right) - 2L\left(\frac{t}{2}\right) - 2L\left(\frac{\pi-t}{2}\right)\right]$

$\left[u = 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right),\quad v = 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{cth}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right),\ t \neq \pm n\pi\right].$ ЛоIII403

2.479

1. $\displaystyle\int x^p \frac{\operatorname{sh}^{2m} x}{\operatorname{ch}^n x}\,dx = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k}\binom{m}{k}\int \frac{x^p\,dx}{\operatorname{ch}^{n-2k} x}$ (см. 2.477 2.).

2. $\displaystyle\int x^p \frac{\operatorname{sh}^{2m+1} x}{\operatorname{ch}^n x}\,dx = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k}\binom{m}{k}\int x^p \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{n-2k} x}\,dx$

$[n > 1]$ (см. 2.479 3.)

3. $\displaystyle\int x^p \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^n x}\,dx = -\frac{x^p}{(n-1)\operatorname{ch}^{n-1} x} + \frac{p}{n-1}\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\operatorname{ch}^{n-1} x}$

$[n > 1]$ (см. 2.477 2.). ГХI [353] (12)

4. $\displaystyle\int x^p \frac{\operatorname{ch}^{2m} x}{\operatorname{sh}^n x}\,dx = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\int \frac{x^p\,dx}{\operatorname{sh}^{n-2k} x}$ (см. 2.477 1.).

5. $\displaystyle\int x^p \frac{\operatorname{ch}^{2m+1} x}{\operatorname{sh}^n x}\,dx = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\int \frac{x^p \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^{n-2k} x}\,dx$ (см. 2.479 6.).

6. $\displaystyle\int x^p \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^n x}\,dx = -\frac{x^p}{(n-1)\operatorname{sh}^{n-1} x} + \frac{p}{n-1}\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\operatorname{sh}^{n-1} x}$

$[n > 1]$ (см. 2.477 1.). ГХI [353] (13c)

7. $\displaystyle\int x^p \operatorname{th} x\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k+p)(2k)!}x^{p+2k}$ $\left[p \geqslant -1,\ |x| < \frac{\pi}{2}\right].$

ГХI [353] (12d)

8. $\displaystyle\int x^p \operatorname{cth} x\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}B_{2k}}{(p+2k)(2k)!}x^{p+2k}$ $[p \geqslant +1,\ |x| < \pi].$

ГХI [353] (13d)

9. $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = \ln \operatorname{th}\frac{x}{2} - \frac{x}{\operatorname{sh} x}.$

10. $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = -\frac{x}{\operatorname{ch} x} + \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x).$ МфК 263

2.48 Гиперболические функции, показательная и степенная функции

2.481

1. $\int e^{ax}\operatorname{sh}(bx+c)\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2-b^2}[a\operatorname{sh}(bx+c)-b\operatorname{ch}(bx+c)]$ $\quad[a^2\neq b^2]$.

2. $\int e^{ax}\operatorname{ch}(bx+c)\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2-b^2}[a\operatorname{ch}(bx+c)-b\operatorname{sh}(bx+c)]$ $\quad[a^2\neq b^2]$.

При $a^2=b^2$:

3. $\int e^{ax}\operatorname{sh}(ax+c)\,dx=-\frac{1}{2}xe^{-c}+\frac{1}{4a}e^{2ax+c}$.

4. $\int e^{-ax}\operatorname{sh}(ax+c)\,dx=\frac{1}{2}xe^{c}+\frac{1}{4a}e^{-(2ax+c)}$.

5. $\int e^{ax}\operatorname{ch}(ax+c)\,dx=\frac{1}{2}xe^{-c}+\frac{1}{4a}e^{2ax+c}$.

6. $\int e^{-ax}\operatorname{ch}(ax+c)\,dx=\frac{1}{2}xe^{c}-\frac{1}{4a}e^{-(2ax+c)}$. МФК 275—277

2.482

1. $\int x^p e^{ax}\operatorname{sh}bx\,dx=\frac{1}{2}\left\{\int x^p e^{(a+b)x}\,dx-\right.$
$\left.-\int x^p e^{(a-b)x}\,dx\right\}$ $\quad[a^2\neq b^2]$ (см. 2.321).

2. $\int x^p e^{ax}\operatorname{ch}bx\,dx=\frac{1}{2}\left\{\int x^p e^{(a+b)x}\,dx+\right.$
$\left.+\int x^p e^{(a-b)x}\,dx\right\}$, $\quad[a^2\neq b^2]$ (см. 2.321).

При $a^2=b^2$:

3. $\int x^p e^{ax}\operatorname{sh}ax\,dx=\frac{1}{2}\int x^p e^{2ax}\,dx-\frac{x^{p+1}}{2(p+1)}$ (см. 2.321).

4. $\int x^p e^{-ax}\operatorname{sh}ax\,dx=\frac{x^{p+1}}{2(p+1)}-\frac{1}{2}\int x^p e^{-2ax}\,dx$ (см. 2.321).

5. $\int x^p e^{ax}\operatorname{ch}ax\,dx=\frac{x^{p+1}}{2(p+1)}+\frac{1}{2}\int x^p e^{2ax}\,dx$ (см. 2.321).

МФК 276, 278

2.483

1. $\int xe^{ax}\operatorname{sh}bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2-b^2}\left[\left(ax-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\operatorname{sh}bx-\right.$
$\left.-\left(bx-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)\operatorname{ch}bx\right]$ $\quad[a^2\neq b^2]$.

2. $\int xe^{ax}\operatorname{ch}bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2-b^2}\left[\left(ax-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\operatorname{ch}bx-\right.$
$\left.-\left(bx-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)\operatorname{sh}bx\right]$ $\quad[a^2\neq b^2]$.

3. $\int x^2e^{ax}\operatorname{sh}bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2-b^2}\left\{\left[ax^2-\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}x+\frac{2a(a^2+3b^2)}{(a^2-b^2)^2}\right]\operatorname{sh}bx-\right.$
$\left.-\left[bx^2-\frac{4ab}{a^2-b^2}x+\frac{2b(3a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2}\right]\operatorname{ch}x\right\}$ $\quad[a^2\neq b^2]$.

4. $\int x^2 e^{ax}\operatorname{ch}bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2-b^2}\left\{\left[ax^2-\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}x+\frac{2a(a^2+3b^2)}{(a^2-b^2)^2}\right]\operatorname{ch}bx-\right.$
$\left.-\left[bx^2-\frac{4ab}{a^2-b^2}x+\frac{2b(3a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2}\right]\operatorname{sh}x\right\}$ $\quad[a^2\neq b^2]$.

При $a^2 = b^2$:

5. $\int xe^{ax} \operatorname{sh} ax\, dx = \frac{e^{2ax}}{4a}\left(x - \frac{1}{2a}\right) - \frac{x^2}{4}$.

6. $\int xe^{-ax} \operatorname{sh} ax\, dx = \frac{e^{-2ax}}{4a}\left(x + \frac{1}{2a}\right) + \frac{x^2}{4}$. МфК 276, 278

7. $\int xe^{ax} \operatorname{ch} ax\, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{e^{2ax}}{4a}\left(x - \frac{1}{2a}\right)$.

8. $\int xe^{-ax} \operatorname{ch} ax\, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{e^{-2ax}}{4a}\left(x + \frac{1}{2a}\right)$.

9. $\int x^2e^{ax} \operatorname{sh} ax\, dx = \frac{e^{2ax}}{4a}\left(x^2 - \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\right) - \frac{x^3}{6}$.

10. $\int x^2 e^{-ax} \operatorname{sh} ax\, dx = \frac{e^{-2ax}}{4a}\left(x^2 + \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\right) + \frac{x^3}{6}$.

11. $\int x^2 e^{ax} \operatorname{ch} ax\, dx = \frac{x^3}{6} + \frac{e^{2ax}}{4a}\left(x^2 - \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\right)$.

2.484

1. $\int e^{ax} \operatorname{sh} bx \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\{\operatorname{Ei}[(a+b)x] - \operatorname{Ei}[(a-b)x]\}$ $[a^2 \neq b^2]$.

2. $\int e^{ax} \operatorname{ch} bx \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\{\operatorname{Ei}[(a+b)x] + \operatorname{Ei}[(a-b)x]\}$ $[a^2 \neq b^2]$.

3. $\int e^{ax} \operatorname{sh} bx \frac{dx}{x^2} = -\frac{e^{ax} \operatorname{sh} bx}{2x} + \frac{1}{2}\{(a+b)\operatorname{Ei}[(a+b)x] - (a-b)\operatorname{Ei}[(a-b)x]\}$ $[a^2 \neq b^2]$.

4. $\int e^{ax} \operatorname{ch} bx \frac{dx}{x^2} = -\frac{e^{ax} \operatorname{ch} bx}{2x} + \frac{1}{2}\{(a+b)\operatorname{Ei}[(a+b)x] + (a-b)\operatorname{Ei}[(a-b)x]\}$ $[a^2 \neq b^2]$.

При $a^2 = b^2$:

5. $\int e^{ax} \operatorname{sh} ax \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}[\operatorname{Ei}(2ax) - \ln x]$.

6. $\int e^{-ax} \operatorname{sh} ax \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}[\ln x - \operatorname{Ei}(-2ax)]$.

7. $\int e^{ax} \operatorname{ch} ax \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}[\ln x + \operatorname{Ei}(2ax)]$.

8. $\int e^{ax} \operatorname{sh} ax \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2x}(e^{2ax} - 1) + a\operatorname{Ei}(2ax)$.

9. $\int e^{-ax} \operatorname{sh} ax \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2x}(1 - e^{-2ax}) + a\operatorname{Ei}(-2ax)$.

10. $\int e^{ax} \operatorname{ch} ax \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2x}(e^{2ax} + 1) + a\operatorname{Ei}(2ax)$. МфК 276—278

2.5 — 2.6 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

2.50 Введение

2.501 Интегралы $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ могут быть всегда приведены к интегралам от рациональных функций при помощи подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

2.502 Если при этом функции $R(\sin x, \cos x)$ удовлетворяют соотношению

$$R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x),$$

то выгодно применить подстановку $t = \cos x$.

2.503 Если эта функция удовлетворяет соотношению

$$R(\sin x,\ \cos x) = -R(\sin x,\ -\cos x),$$

то выгодно применить подстановку $t = \sin x$.

2.504 Если эта функция удовлетворяет соотношению

$$R(\sin x,\ \cos x) = R(-\sin x,\ -\cos x),$$

то выгодно применить подстановку $t = \operatorname{tg} x$.

2.51 — 2.52 Степени тригонометрических функций

2.510

$$\begin{aligned}\int \sin^p x \cos^q x\, dx &= -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{q+1} + \frac{p-1}{q+1}\int \sin^{p-2} x \cos^{q+2} x\, dx;\\
&= -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} + \frac{p-1}{p+q}\int \sin^{p-2} x \cos^{q} x\, dx;\\
&= \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q+1} x}{p+1} + \frac{p+q+2}{p+1}\int \sin^{p+2} x \cos^{q} x\, dx;\\
&= \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+1} + \frac{q-1}{p+1}\int \sin^{p+2} x \cos^{q-2} x\, dx;\\
&= \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q}\int \sin^{p} x \cos^{q-2} x\, dx;\\
&= -\frac{\sin^{p+1} x \cos^{q+1} x}{q+1} + \frac{p+q+2}{q+1}\int \sin^{p} x \cos^{q+2} x\, dx;\\
&= \frac{\sin^{p-1} x \cos^{q-1} x}{p+q}\left\{\sin^2 x - \frac{q-1}{p+q-2}\right\} +\\
&\quad + \frac{(p-1)(q-1)}{(p+q)(p+q-2)}\int \sin^{p-2} x \cos^{q-2} x\, dx.\end{aligned}$$

Ф II 89, Т 214

2.511

1. $$\int \sin^p x \cos^{2n} x\, dx = \frac{\sin^{p+1} x}{2n+p}\left\{\cos^{2n-1} x + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+1)\cos^{2n-2k-1} x}{(2n+p-2)(2n+p-4)\dots(2n+p-2k)}\right\} + \frac{(2n-1)!!}{(2n+p)(2n+p-2)\dots(p+2)}\int \sin^p x\, dx.$$

Эта формула применима при любом действительном p, за исключением следующих отрицательных четных чисел: $-2, -4, \dots, -2n$. При p натуральном и $n = 0$ имеем:

2. $$\int \sin^{2l} x\, dx = -\frac{\cos x}{2l}\left\{\sin^{2l-1} x + \sum_{k=1}^{l-1}\frac{(2l-1)(2l-3)\dots(2l-2k+1)}{2^k (l-1)(l-2)\dots(l-k)}\sin^{2l-2k-1} x\right\} + \frac{(2l-1)!!}{2^l\, l!}\, x$$

(см. также 2.513 1.). Т (232)

3. $$\int \sin^{2l+1} x\, dx = -\frac{\cos x}{2l+1}\left\{\sin^{2l} x + \sum_{k=0}^{l-1}\frac{2^{k+1}\, l(l-1)\dots(l-k)}{(2l-1)(2l-3)\dots(2l-2k-1)}\sin^{2l-2k-2} x\right\}$$

(см. также 2.513 2.). Т (233)

4. $$\int \sin^p x \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{\sin^{p+1} x}{2n+p+1}\left\{\cos^{2n}x + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k n(n-1)\dots(n-k+1)\cos^{2n-2k} x}{(2n+p-1)(2n+p-3)\dots(2n+p-2k+1)}\right\}.$$

Эта формула применима при любом действительном p, за исключением отрицательных нечетных чисел: -1, -3, $\dots$, $-(2n+1)$.

2.512

1. $$\int \cos^p x \sin^{2n} x\,dx = -\frac{\cos^{p+1} x}{2n+p}\left\{\sin^{2n-1} x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+1)\sin^{2n-2k-1} x}{(2n+p-2)(2n+p-4)\dots(2n+p-2k)}\right\} + \frac{(2n-1)!!}{(2n+p)(2n+p-2)\dots(p+2)}\int \cos^p x\,dx.$$

Эта формула применима при любом действительном p, за исключением следующих отрицательных четных чисел. -2, -4, $\dots$, $-2n$. При p натуральном и $n=0$ имеем:

2. $$\int \cos^{2l} x\,dx = \frac{\sin x}{2l}\left\{\cos^{2l-1} x + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(2l-1)(2l-3)\dots(2l-2k+1)}{2^k(l-1)(l-2)\dots(l-k)}\cos^{2l-2k-1} x\right\} + \frac{(2l-1)!!}{2^l\,l!}x$$

(см. также 2.513 3.). Т (230)

3. $$\int \cos^{2l+1} x\,dx = \frac{\sin x}{2l+1}\left\{\cos^{2l}x + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{2^{k+1}l(l-1)\dots(l-k)}{(2l-1)(2l-3)\dots(2l-2k-1)}\cos^{2l-2k-2} x\right\}$$

(см. также 2.513 4.). Т (231)

4. $$\int \cos^p x \sin^{2n+1} x\,dx = -\frac{\cos^{p+1} x}{2n+p+1}\left\{\sin^{2n} x + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k n(n-1)\dots(n-k+1)\sin^{2n-2k} x}{(2n+p-1)(2n+p-3)\dots(2n+p-2k+1)}\right\}.$$

Эта формула применима при любом действительном p, за исключением следующих отрицательных чисел: -1, -3, $\dots$, $-(2n+1)$.

2.513

1. $$\int \sin^{2n} x\,dx = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}\frac{\sin(2n-2k)x}{2n-2k}$$

(см. также 2.511 2.). Т (226)

2. $$\int \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{1}{2^{2n}}(-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{k}\frac{\cos(2n+1-2k)x}{2n+1-2k}$$

(см. также 2.511 3.). Т (227)

3. $$\int \cos^{2n} x\,dx = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x + \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\frac{\sin(2n-2k)x}{2n-2k}$$

(см. также 2.512 2.). Т (224)

4. $$\int \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\frac{\sin(2n-2k+1)x}{2n-2k+1}$$

(см. также 2.512 3.). Т (225)

5. $$\int \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x.$$

6. $$\int \sin^3 x\,dx = \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x.$$

7. $$\int \sin^4 x\,dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} = -\frac{3}{8}\sin x\cos x - \frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{8}x.$$

8. $$\int \sin^5 x\,dx = -\frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{48}\cos 3x - \frac{1}{80}\cos 5x = -\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x + \frac{4}{15}\cos^3 x - \frac{4}{5}\cos x.$$

9. $$\int \sin^6 x\,dx = \frac{5}{16}x - \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{192}\sin 6x = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x - \frac{5}{16}\sin x\cos x + \frac{5}{16}x.$$

10. $$\int \sin^7 x\,dx = -\frac{35}{64}\cos x + \frac{7}{64}\cos 3x - \frac{7}{320}\cos 5x + \frac{1}{448}\cos 7x = -\frac{1}{7}\sin^6 x\cos x - \frac{6}{35}\sin^4 x\cos x + \frac{8}{35}\cos^3 x - \frac{24}{35}\cos x.$$

11. $$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x.$$

12. $$\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x.$$

13. $$\int \cos^4 x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x = \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{1}{4}\sin x\cos^3 x.$$

14. $$\int \cos^5 x\,dx = \frac{5}{8}\sin x + \frac{5}{48}\sin 3x + \frac{1}{80}\sin 5x = \frac{4}{5}\sin x - \frac{4}{15}\sin^3 x + \frac{1}{5}\cos^4 x\sin x.$$

15. $$\int \cos^6 x\,dx = \frac{5}{16}x + \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{192}\sin 6x = \frac{5}{16}x + \frac{5}{16}\sin x\cos x + \frac{5}{24}\sin x\cos^3 x + \frac{1}{6}\sin x\cos^5 x.$$

16. $$\int \cos^7 x\,dx = \frac{35}{64}\sin x + \frac{7}{64}\sin 3x + \frac{7}{320}\sin 5x + \frac{1}{448}\sin 7x = \frac{24}{35}\sin x - \frac{8}{35}\sin^3 x + \frac{6}{35}\sin x\cos^4 x + \frac{1}{7}\sin x\cos^6 x.$$

17. $\int \sin x \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\right\} = -\frac{\cos^3 x}{3}.$

18. $\int \sin x \cos^3 x \, dx = -\frac{\cos^4 x}{4}.$

19. $\int \sin x \cos^4 x \, dx = -\frac{\cos^5 x}{5}.$

20. $\int \sin^2 x \cos x \, dx = -\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}\sin 3x - \sin x\right\} = \frac{\sin^3 x}{3}.$

21. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{4}\sin 4x - x\right\}.$

22. $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = -\frac{1}{16}\left\{\frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x - 2\sin x\right\} =$

$$= \frac{\sin^3 x}{5}\left(\cos^2 x + \frac{2}{3}\right) = \frac{\sin^3 x}{5}\left(\frac{5}{3} - \sin^2 x\right).$$

23. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \frac{x}{16} + \frac{1}{64}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{192}\sin 6x.$

24. $\int \sin^3 x \cos x \, dx = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\cos 4x - \cos 2x\right) = \frac{\sin^4 x}{4}.$

25. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{3}\cos 3x - 2\cos x\right) =$

$$= \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x.$$

26. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\cos 6x - \frac{3}{2}\cos 2x\right).$

27. $\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx = \frac{1}{7}\cos^3 x\left(-\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\sin^2 x + \sin^4 x\right).$

28. $\int \sin^4 x \cos x \, dx = \frac{\sin^5 x}{5}.$

29. $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{192}\sin 6x.$

30. $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \frac{1}{7}\sin^3 x\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\cos^2 x - \cos^4 x\right).$

31. $\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx = \frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\sin 4x + \frac{1}{1024}\sin 8x.$

2.514 $$\int \frac{\sin^p x}{\cos^{2n} x}\,dx = \frac{\sin^{p+1} x}{2n-1}\left\{\sec^{2n-1} x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-p-2)(2n-p-4)\ldots(2n-p-2k)}{(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2k-1)}\sec^{2n-2k-1} x\right\} + \frac{(2n-p-2)(2n-p-4)\ldots(-p+2)(-p)}{(2n-1)!!}\int \sin^p x\,dx.$$

Эта формула применима при любом действительном p. $\int \sin^p x\,dx$ при p натуральном см. 2.511 2., 3. и 2.513 1., 2. При $n=0$ и p целом отрицательном для этого интеграла имеем:

2.515

1. $$\int \frac{dx}{\sin^{2l} x} = -\frac{\cos x}{2l-1}\left\{\operatorname{cosec}^{2l-1} x + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{2^k (l-1)(l-2)\ldots(l-k)}{(2l-3)(2l-5)\ldots(2l-2k-1)} \operatorname{cosec}^{2l-2k-1} x\right\}. \qquad \text{T (242)}$$

2. $$\int \frac{dx}{\sin^{2l+1} x} = -\frac{\cos x}{2l}\left\{\operatorname{cosec}^{2l} x + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(2l-1)(2l-3)\ldots(2l-2k+1)}{2^k (l-1)(l-2)\ldots(l-k)} \operatorname{cosec}^{2l-2k} x\right\} + \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \qquad \text{T (243)}$$

2.516

1. $$\int \frac{\sin^p x\, dx}{\cos^{2n+1} x} = \frac{\sin^{p+1}}{2n}\left\{\sec^{2n} x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-p-1)(2n-p-3)\ldots(2n-p-2k+1)}{2^k (n-1)(n-2)\ldots(n-k)} \sec^{2n-2k} x\right\} + \frac{(2n-p-1)(2n-p-3)\ldots(3-p)(1-p)}{2^n n!} \int \frac{\sin^p x}{\cos x}\, dx.$$

Эта формула применима при любом действительном p. При $n=0$ и p натуральном имеем:

2. $$\int \frac{\sin^{2l+1} x\, dx}{\cos x} = -\sum_{k=1}^{l} \frac{\sin^{2k} x}{2k} - \ln \cos x.$$

3. $$\int \frac{\sin^{2l} x\, dx}{\cos x} = -\sum_{k=1}^{l} \frac{\sin^{2k-1} x}{2k-1} + \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

2.517

1. $$\int \frac{dx}{\sin^{2m+1} x \cos x} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2m-2k+2)\sin^{2m-2k+2} x} + \ln \operatorname{tg} x.$$

2. $$\int \frac{dx}{\sin^{2m} x \cos x} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2m-2k+1)\sin^{2m-2k+1} x} + \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

2.518

1. $$\int \frac{\sin^p x}{\cos^2 x}\, dx = \frac{\sin^{p-1} x}{\cos x} - (p-1)\int \sin^{p-2} x\, dx.$$

2. $$\int \frac{\cos^p x\, dx}{\sin^{2n} x} = -\frac{\cos^{p+1} x}{2n-1}\left\{\operatorname{cosec}^{2n-1} x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-p-2)(2n-p-4)\ldots(2n-p-2k)}{(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2k-1)} \operatorname{cosec}^{2n-2k-1} x\right\} + \frac{(2n-p-2)(2n-p-4)\ldots(2-p)(-p)}{(2n-1)!!} \int \cos^p x\, dx.$$

Эта формула применима при любом действительном p. $\int \cos^p x\,dx$: при p натуральном см. **2.512** 2., 3. и **2.513** 3., 4. При $n=0$ и p целом отрицательном для этого интеграла имеем:

2.519

1. $$\int \frac{dx}{\cos^{2l} x} = \frac{\sin x}{2l-1}\left\{\sec^{2l-1} x + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{2^k (l-1)(l-2)\ldots(l-k)}{(2l-3)(2l-5)\ldots(2l-2k-1)} \sec^{2l-2k-1} x\right\}. \qquad \text{Т (240)}$$

2. $$\int \frac{dx}{\cos^{2l+1} x} = \frac{\sin x}{2l}\left\{\sec^{2l} x + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(2l-1)(2l-2)\ldots(2l-2k+1)}{2^k (l-1)(l-2)\ldots(l-k)} \sec^{2l-2k} x\right\} + \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right). \qquad \text{Т (241)}$$

2.521

1. $$\int \frac{\cos^p x\,dx}{\sin^{2n+1} x} = -\frac{\cos^{p+1} x}{2n}\left\{\operatorname{cosec}^{2n} x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-p-1)(2n-p-3)\ldots(2n-p-2k+1)}{2^k (n-1)(n-2)\ldots(n-k)} \operatorname{cosec}^{2n-2k} x\right\} + \frac{(2n-p-1)(2n-p-3)\ldots(3-p)(1-p)}{2^n\cdot n!}\int \frac{\cos^p x}{\sin x}\,dx.$$

Эта формула применима при любом действительном p. При $n=0$ и p натуральном имеем:

2. $$\int \frac{\cos^{2l+1} x\,dx}{\sin x} = \sum_{k=1}^{l} \frac{\cos^{2k} x}{2k} + \ln\sin x.$$

3. $$\int \frac{\cos^{2l} x\,dx}{\sin x} = \sum_{k=1}^{l} \frac{\cos^{2k-1} x}{2k-1} + \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

2.522

1. $$\int \frac{dx}{\sin x \cos^{2m+1} x} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2m-2k+2)\cos^{2m-2k+2} x} + \ln\operatorname{tg} x.$$

2. $$\int \frac{dx}{\sin x \cos^{2m} x} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2m-2k+1)\cos^{2m-2k+1} x} + \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}. \qquad \text{ГХ [331] (15)}$$

2.523 $$\int \frac{\cos^m x}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{\cos^{m-1} x}{\sin x} - (m-1)\int \cos^{m-2} x\,dx.$$

2.524

1. $$\int \frac{\sin^{2n+1} x}{\cos^m x}\,dx = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq\frac{m-1}{2}}}^{n} (-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{\cos^{2k-m+1} x}{2k-m+1} + s(-1)^{\frac{m+1}{2}}\binom{n}{\frac{m-1}{2}}\ln\cos x.$$ ГХ I [331] (11d)

2. $$\int \frac{\cos^{2n+1} x}{\sin^m x}\,dx = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq\frac{m-1}{2}}}^{n} (-1)^{k}\binom{n}{k}\frac{\sin^{2k-m+1} x}{2k-m+1} + s(-1)^{\frac{m-1}{2}}\binom{n}{\frac{m-1}{2}}\ln\sin x.$$

[В формулах 2.524 1., 2.524 2. $s=1$ **при** m **нечетном** и $m<2n+1$; в остальных случаях $s=0$.] ГХ I [331] (13d)

2.525

1. $$\int \frac{dx}{\sin^{2m} x\cos^{2n} x} = \sum_{k=0}^{m+n-1}\binom{m+n-1}{k}\frac{\operatorname{tg}^{2k-2m+1} x}{2k-2m+1}.$$ Т (267)

2. $$\int \frac{dx}{\sin^{2m+1} x\cos^{2n+1} x} = \sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}\frac{\operatorname{tg}^{2k-2m} x}{2k-2m} + \binom{m+n}{m}\ln\operatorname{tg} x.$$

Т (268), ГХ I [331] (15f)

2.526

1. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

2. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$$

3. $$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

4. $$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} - \frac{2}{3}\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x.$$

5. $$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3}{8}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

6. $$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\frac{\cos x}{5\sin^5 x} - \frac{4}{15}\operatorname{ctg}^3 x - \frac{4}{5}\operatorname{ctg} x;$$
$$= -\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x - \frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x.$$

7. $$\int \frac{dx}{\sin^7 x} = -\frac{\cos x}{6\sin^2 x}\left(\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{5}{4\sin^2 x} + \frac{15}{8}\right) + \frac{5}{16}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

8. $$\int \frac{dx}{\sin^8 x} = -\left(\frac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x + \frac{3}{5}\operatorname{ctg}^5 x + \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x\right).$$

9. $$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \ln\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$

11. $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$

12. $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3}\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x.$

13. $\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{8}\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{3}{8}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$

14. $\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \frac{\sin x}{5\cos^5 x} + \frac{4}{15}\operatorname{tg}^3 x + \frac{4}{5}\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x.$

15. $\int \frac{dx}{\cos^7 x} = \frac{\sin x}{6\cos^6 x} + \frac{5\sin x}{24\cos^4 x} + \frac{5\sin x}{16\cos^2 x} + \frac{5}{16}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$

16. $\int \frac{dx}{\cos^8 x} = \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + \frac{3}{5}\operatorname{tg}^5 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x.$

17. $\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln \cos x.$

18. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx = -\sin x + \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$

19. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,dx = -\frac{\sin^2 x}{2} - \ln \cos x = \frac{1}{2}\cos^2 x - \ln \cos x.$

20. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\,dx = -\frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x + \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$

21. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}.$

22. $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x - x.$

23. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^2 x} = \cos x + \frac{1}{\cos x}.$

24. $\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\sin x \cos x - \frac{3}{2}x.$

25. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x.$

26. $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$

27. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln \cos x.$

28. $\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \sin x - \frac{3}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$

29. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3\cos^3 x}.$

30. $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x.$

31. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^4 x} = -\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x}.$

32. $\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x.$

33. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \ln \sin x.$

34. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x} = \cos x + \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

35. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{2} + \ln \sin x.$

36. $\int \frac{\cos^4 x\,dx}{\sin x} = \frac{1}{3}\cos^3 x + \cos x + \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$

37. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\sin x}.$

38. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x - x.$

39. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx = -\sin x - \frac{1}{\sin x}.$

40. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{2}\sin x \cos x - \frac{3}{2}x.$

41. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{1}{2\sin^2 x}.$

42. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

43. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{1}{2\sin^2 x} - \ln \sin x.$

44. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \cos x - \frac{3}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

45. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx = -\frac{1}{3\sin^3 x}.$

46. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x.$

47. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x}.$

48. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\,dx = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x.$

49. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x.$

50. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

51. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln \operatorname{tg} x.$

52. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

53. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \operatorname{cosec} x.$

54. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2\operatorname{ctg} 2x.$

55. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x} = \left(\frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{\sin x} + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$

56. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \frac{1}{3\sin x \cos^3 x} - \frac{8}{3}\operatorname{ctg} 2x.$

57. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = -\frac{1}{2\sin^2 x} + \ln \operatorname{tg} x.$

58. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

59. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} = -\frac{2\cos 2x}{\sin^2 2x} + 2\ln \operatorname{tg} x.$

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x} = \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{5}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

61. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos x} = -\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$

62. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = -\frac{1}{3\cos x \sin^3 x} - \frac{8}{3} \operatorname{ctg} 2x.$

63. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^3 x} = -\frac{2}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{5}{2} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$

64. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = -8 \operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3} \operatorname{ctg}^3 2x.$

2.527

1. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^p x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{p-1} x}{p-1} - \int \operatorname{tg}^{p-2} x\, dx \quad [p \neq 1].$

2. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^{2n+1} x\, dx = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \frac{1}{2k\cos^{2k} x} - (-1)^n \ln \cos x =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \operatorname{tg}^{2n-2k+2} x}{2n-2k+2} - (-1)^n \ln \cos x.$$

3. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^{2n} x\, dx = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\operatorname{tg}^{2n-2k+1} x}{2n-2k+1} + (-1)^n x.$ ГХI [331] (12)

4. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^p x\, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{p-1} x}{p-1} - \int \operatorname{ctg}^{p-2} x\, dx \quad [p \neq 1].$

5. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^{2n+1} x\, dx = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{2k \sin^{2k} x} + (-1)^n \ln \sin x =$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\operatorname{ctg}^{2n-2k+2} x}{2n-2k+2} + (-1)^n \ln \sin x.$$

6. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^{2n} x\, dx = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\operatorname{ctg}^{2n-2k+1} x}{2n-2k+1} + (-1)^n x.$ ГХI [331] (14)

Формулы частного характера для $p = 1, 2, 3, 4$ см. 2.526 17., 2.526 33., 2.526 22., 2.526 38., 2.526 27., 2.526 43., 2.526 32., 2.526 48..

2.53—2.54 Синусы и косинусы кратных дуг, линейных и более сложных функций аргумента

2.531

1. $\displaystyle\int \sin(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b).$

2. $\displaystyle\int \cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b).$

2.532

1. $\displaystyle\int \sin(ax+b) \sin(cx+d)\, dx = \frac{\sin[(a-c)x+b-d]}{2(a-c)} -$

$$- \frac{\sin[(a+c)x+b+d]}{2(a+c)} \quad [a^2 \neq c^2].$$

2. $$\int \sin(ax+b)\cos(cx+d)\,dx = -\frac{\cos[(a-c)x+b-d]}{2(a-c)} - \frac{\cos[(a+c)x+b+d]}{2(a+c)} \quad [a^2 \neq c^2].$$

3. $$\int \cos(ax+b)\cos(cx+d)\,dx = \frac{\sin[(a-c)x+b-d]}{2(a-c)} + \frac{\sin[(a+c)x+b+d]}{2(a+c)} \quad [a^2 \neq c^2].$$

При $c=a$:

4. $$\int \sin(ax+b)\sin(ax+d)\,dx = \frac{x}{2}\cos(b-d) - \frac{\sin(2ax+b+d)}{4a}.$$

5. $$\int \sin(ax+b)\cos(ax+d)\,dx = \frac{x}{2}\sin(b-d) - \frac{\cos(2ax+b+d)}{4a}.$$

6. $$\int \cos(ax+b)\cos(ax+d)\,dx = \frac{x}{2}\cos(b-d) + \frac{\sin(2ax+b+d)}{4a}.$$

ГХI [332] (3)

2.533

1. $$\int \sin ax \cos bx\,dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} \quad [a^2 \neq b^2].$$

2. $$\int \sin ax \sin bx \sin cx\,dx = -\frac{1}{4}\left\{\frac{\cos(a-b+c)x}{a-b+c} + \frac{\cos(b+c-a)x}{b+c-a} + \frac{\cos(a+b-c)x}{a+b-c} - \frac{\cos(a+b+c)x}{a+b+c}\right\}.$$ П (376)

3. $$\int \sin ax \cos bx \cos cx\,dx = -\frac{1}{4}\left\{\frac{\cos(a+b+c)x}{a+b+c} - \frac{\cos(b+c-a)x}{b+c-a} + \frac{\cos(a+b-c)x}{a+b-c} + \frac{\cos(a+c-b)x}{a+c-b}\right\}.$$ П (378)

4. $$\int \cos ax \sin bx \sin cx\,dx = \frac{1}{4}\left\{\frac{\sin(a+b-c)x}{a+b-c} + \frac{\sin(a+c-b)x}{a+c-b} - \frac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c} - \frac{\sin(b+c-a)x}{b+c-a}\right\}.$$ П (379)

5. $$\int \cos ax \cos bx \cos cx\,dx = \frac{1}{4}\left\{\frac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c} + \frac{\sin(b+c-a)x}{b+c-a} + \frac{\sin(a+c-b)x}{a+c-b} + \frac{\sin(a+b-c)x}{a+b-c}\right\}.$$ П (377)

2.534

1. $$\int \frac{\cos px + i\sin px}{\sin nx}\,dx = -2\int \frac{z^{p+n-1}}{1-z^{2n}}\,dz$$ П (374)

2. $$\int \frac{\cos px + i\sin px}{\cos nx}\,dx = -2i\int \frac{z^{p+n-1}}{1+z^{2n}}\,dz$$ П (373)

$[z = \cos x + i\sin x]$.

2.535

1. $$\int \sin^p x \sin ax\,dx = \frac{1}{p+a}\left\{-\sin^p x\cos ax + p\int \sin^{p-1}x\cos(a-1)x\,dx\right\}.$$

ГХI [332] (5a)

2. $\int \sin^p x \sin(2n+1)x\,dx = (2n+1)\Big\{\int \sin^{p+1} x\,dx +$

$$+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{[(2n+1)^2-1^2][(2n+1)^2-3^2]\dots[(2n+1)^2-(2k-1)^2]}{(2k+1)!}\int \sin^{2k+p+1} x\,dx\Big\};$$

Т (299)

$$=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}+n\right)}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(-1)^{k-1}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+n-2k\right)}{2^{2k+1}\Gamma(p-2k+1)}\sin^{p-2k} x\cos(2n-2k+1)x+\right.\right.$$

$$\left.+(-1)^k\frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}+n-2k\right)}{2^{2k+2}\Gamma(p-2k)}\sin^{p-2k-1} x\sin(2n-2k)x\right]+$$

$$\left.+\frac{(-1)^n\Gamma\left(\frac{p+3}{2}-n\right)}{2^{2n}\Gamma(p-2n+1)}\int \sin^{p-2n+1} x\,dx\right\}.$$

ГХI [332] (5c)

3. $\int \sin^p x\sin 2nx\,dx = 2n\Big\{\frac{\sin^{p+2} x}{p+2}+$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{(4n^2-2^2)(4n^2-4^2)\dots[4n^2-(2k)^2]}{(2k+1)!(2k+p+2)}\sin^{2k+p+2} x\Big\};$$ Т (303)

$$=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n+1\right)}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}\Gamma\left(\frac{p}{2}+n-2k\right)}{2^{2k+1}\Gamma(p-2k+1)}\sin^{p-2k} x\cos(2n-2k)x-\right.$$

$$\left.-\frac{(-1)^k\Gamma\left(\frac{p}{2}+n-2k-1\right)}{2^{2k+2}\Gamma(p-2k)}\sin^{p-2k-1} x\sin(2n-2k-1)x\right\};$$

[p не равно $-2, -4, \dots, -2n$]. ГХI [332] (5c)

2.536

1. $$\int \sin^p x\cos ax\,dx = \frac{1}{p+a}\left\{\sin^p x\sin ax - p\int \sin^{p-1} x\sin(a-1)x\,dx\right\}.$$

ГХI [332] (6a)

2. $\int \sin^p x\cos(2n+1)x\,dx = \frac{\sin^{p+1} x}{p+1}+$

$$+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{[(2n+1)^2-1^2][(2n+1)^2-3^2]\dots[(2n+1)^2-(2k-1)^2]}{(2k)!(2k+p+1)}\sin^{2k+p+1} x;$$ Т (301)

$$=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}+n\right)}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(-1)^k\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+n-2k\right)}{2^{2k+1}\Gamma(p-2k+1)}\sin^{p-2k} x\sin(2n-2k+1)x+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^k\Gamma\left(\frac{p-1}{2}+n-2k\right)}{2^{2k+2}\Gamma(p-2k)}\sin^{p-2k-1} x\cos(2n-2k)x\right]+$$

$$\left.+\frac{(-1)^n\Gamma\left(\frac{p+3}{2}-n\right)}{2^{2n}\Gamma(p-2n+1)}\int \sin^{p-2n} x\cos x\,dx\right\};$$

[p не равно $-3, -5, \dots, -(2n+1)$]. ГХI [332] (6c)

3. $$\int \sin^p x \cos 2nx\,dx = \int \sin^p x\,dx + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{4n^2\cdot(4n^2-2^2)\ldots[4n^2-(2k-2)^2]}{(2k)!} \int \sin^{2k+p} x\,dx;$$ Т (300)

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n+1\right)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{p}{2}+n-2k\right)}{2^{2k+1}\Gamma(p-2k+1)} \sin^{p-2k} x \sin(2n-2k)x + \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{p}{2}+n-2k-1\right)}{2^{2k+2}\Gamma(p-2k)} \sin^{p-2k-1} x \cos(2n-2k-1)x \right] + \frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{p}{2}-n+1\right)}{2^{2n}\Gamma(p-2n+1)} \int \sin^{p-2n} x\,dx \right\}.$$ ГХI [332] (6c)

2.537

1. $$\int \cos^p x \sin ax\,dx = \frac{1}{p+a} \left\{ -\cos^p x \cos ax + p \int \cos^{p-1} x \sin(a-1)x\,dx \right\}.$$ ГХI [332] (7a)

2. $$\int \cos^p x \sin(2n+1)x\,dx = (-1)^{n+1} \left\{ \frac{\cos^{p+1} x}{p+1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{[(2n+1)^2-1^2]\,[(2n+1)^2-3^2]\ldots[(2n+1)^2-(2k-1)^2]}{(2k)!\,(2k+p+1)} \cos^{2k+p+1} x \right\};$$ Т (295)

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}+n\right)} \left\{ -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+n-k\right)}{2^{k+1}\Gamma(p-k+1)} \cos^{p-k} x \cos(2n-k+1)x + \frac{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}\right)}{2^n\Gamma(p-n+1)} \int \cos^{p-n} x \sin(n+1)x\,dx \right\};$$

[p не равно $-3, -5, \ldots, -(2n+1)$]. ГХI [332] (7b)и

3. $$\int \cos^p x \sin 2nx\,dx = (-1)^n \left\{ \frac{\cos^{p+2} x}{p+2} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{(4n^2-2^2)(4n^2-4^2)\ldots[4n^2-(2k)^2]}{(2k+1)!\,(2k+p+2)} \cos^{2k+p+2} x \right\};$$ Т (297)

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n+1\right)} \left\{ -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n-k\right)}{2^{k+1}\Gamma(p-k+1)} \cos^{p-k} x \cos(2n-k)x + \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{2^n\Gamma(p-n+1)} \int \cos^{p-n} x \sin nx\,dx \right\};$$

[p не равно $-2, -4, \ldots, -2n$]. ГХI [332] (7b) и

2.538

1. $$\int \cos^p x \cos ax\,dx = \frac{1}{p+a} \left\{ \cos^p x \sin ax + p \int \cos^{p-1} x \cos(a-1)x\,dx \right\}.$$ ГХI [332] (8a)

2. $$\int \cos^p x \cos(2n+1)x\,dx = (-1)^n (2n+1) \left\{ \int \cos^{p+1} x\,dx + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{[(2n+1)^2-1^2][(2n+1)^2-3^2]\dots[(2n+1)^2-(2k-1)^2]}{(2k+1)!} \int \cos^{2k+p+1} x\,dx \right\};$$ Т (293)

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}+n\right)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+n-k\right)}{2^{k+1}\Gamma(p-k+1)} \cos^{p-k} x \sin(2n-k+1)x + \frac{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}\right)}{2^n\Gamma(p-n+1)} \int \cos^{p-n} x \cos(n+1)x\,dx \right\}.$$ ГХI [332] (8b)u

3. $$\int \cos^p x \cos 2nx\,dx = (-1)^n \left\{ \int \cos^p x\,dx + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{4n^2[4n^2-2^2]\dots[4n^2-(2k-2)^2]}{(2k)!} \int \cos^{2k+p} x\,dx \right\};$$ Т (294)

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n+1\right)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n-k\right)}{2^{k+1}\Gamma(p-k+1)} \cos^{p-k} x \sin(2n-k)x + \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{2^n\Gamma(p-n+1)} \int \cos^{p-n} x \cos nx\,dx \right\}.$$ ГХI [332] (8b)u

2.539

1. $$\int \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 2kx}{2k} + x.$$

2. $$\int \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$ ГХI [332] (5e)

3. $$\int \frac{\cos(2n+1)x}{\sin x}\,dx = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos 2kx}{2k} + \ln\sin x.$$

4. $$\int \frac{\cos 2nx}{\sin x}\,dx = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2k-1)x}{2k-1} + \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$ ГХI [332] (6e)

5. $$\int \frac{\sin(2n+1)x}{\cos x}\,dx = 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k+1} \frac{\cos 2kx}{2k} + (-1)^{n+1}\ln\cos x.$$

6. $$\int \frac{\sin 2nx}{\cos x}\,dx = 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k+1} \frac{\cos(2k-1)x}{2k-1}.$$ ГХI [332] (7d)

7. $$\int \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx = 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{\sin 2kx}{2k} + (-1)^n x.$$

8. $$\int \frac{\cos 2nx}{\cos x}\,dx = 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + (-1)^n \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$ ГХI [332] (8d)

2.541

1. $\int \sin(n+1)x \sin^{n-1} x\,dx = \frac{1}{n}\sin^n x \sin nx.$ БХ [71] (1)и

2. $\int \sin(n+1)x \cos^{n-1} x\,dx = -\frac{1}{n}\cos^n x \cos nx.$ БХ [71] (2)и

3. $\int \cos(n+1)x \sin^{n-1} x\,dx = \frac{1}{n}\sin^n x \cos nx.$ БХ [71] (3)и

4. $\int \cos(n+1)x \cos^{n-1} x\,dx = \frac{1}{n}\cos^n x \sin nx.$ БХ [71] (4)и

5. $\int \sin\left[(n+1)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] \sin^{n-1} x\,dx = \frac{1}{n}\sin^n x \cos n\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$ БХ [71] (5)и

6. $\int \cos\left[(n+1)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] \sin^{n-1} x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^n x \sin n\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$ БХ [71] (6)и

2.542

1. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^n x}\,dx = -\frac{2}{(n-2)\sin^{n-2} x}.$

При $n=2$:

2. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}\,dx = 2\ln\sin x.$

2.543

1. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^n x} = \frac{2}{(n-2)\cos^{n-2} x}.$

При $n=2$:

2. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}\,dx = -2\ln\cos x.$

2.544

1. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin x} = 2\cos x + \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

2. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x - 2x.$

3. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

4. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos x} = 2\sin x - \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$

5. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^2 x} = 2x - \operatorname{tg} x.$

6. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^3 x} = -\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{3}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$

7. $\int \frac{\sin 3x\,dx}{\sin x} = x + \sin 2x.$

8. $\int \frac{\sin 3x}{\sin^2 x}\,dx = 3\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 4\cos x.$

9. $\int \frac{\sin 3x}{\sin^3 x}\,dx = -3\operatorname{ctg} x - 4x.$

2.545

1. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^n x}\,dx = \frac{4}{(n-3)\cos^{n-3} x} - \frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} x}.$

При $n=1$ и $n=3$:

2. $\int \frac{\sin 3x}{\cos x}\,dx = 2\sin^2 x + \ln\cos x.$

3. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^3 x}\,dx = -\frac{1}{2\cos^2 x} - 4\ln\cos x.$

2.546

1. $\int \frac{\cos 3x}{\sin^n x}\,dx = \frac{4}{(n-3)\sin^{n-3} x} - \frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x}.$

При $n=1$ и $n=3$:

2. $\int \frac{\cos 3x}{\sin x}\,dx = -2\sin^2 x + \ln\sin x.$

3. $\int \frac{\cos 3x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{1}{2\sin^2 x} - 4\ln\sin x.$

2.547

1. $\int \frac{\sin nx}{\cos^p x}\,dx = 2\int \frac{\sin(n-1)x\,dx}{\cos^{p-1} x} - \int \frac{\sin(n-2)x\,dx}{\cos^p x}.$

2. $\int \frac{\cos 3x}{\cos x}\,dx = \sin 2x - x.$

3. $\int \frac{\cos 3x}{\cos^2 x}\,dx = 4\sin x - 3\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$

4. $\int \frac{\cos 3x}{\cos^3 x}\,dx = 4x - 3\operatorname{tg} x.$

2.548

1. $\int \frac{\sin^m x\,dx}{\sin(2n+1)x} =$

$$= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{n+k}\cos^m\left[\frac{2k+1}{2(2n+1)}\pi\right]\ln\frac{\sin\left[\frac{(k-n)\pi}{2(2n+1)} + \frac{x}{2}\right]}{\sin\left[\frac{k+n+1}{2(2n+1)}\pi - \frac{x}{2}\right]}$$

[m — натуральное число $\leqslant 2n$]. Т (378)

2. $\int \frac{\sin^{2m} x\,dx}{\sin 2nx} = \frac{(-1)^n}{2n}\left\{\ln\cos x + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\cos^{2m}\frac{k\pi}{2n}\ln\left(\cos^2 x - \sin^2\frac{k\pi}{2n}\right)\right\}$

[m — натуральное число $\leqslant n$]. Т (379)

3. $\int \frac{\sin^{2m+1} x}{\sin 2nx}\,dx = \frac{(-1)^n}{2n}\left\{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \right.$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\cos^{2m+1}\frac{k\pi}{2n}\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{n+k}{4n}\pi - \frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{n-k}{4n}\pi - \frac{x}{2}\right)\right]\right\}$$

[m — натуральное число $< n$]. Т (380)

4. $\int \frac{\sin^{2m} x\,dx}{\cos(2n+1)x} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\left\{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \right.$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos^{2m}\frac{k\pi}{2n+1}\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{2n+2k+1}{4(2n+1)}\pi - \frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{2n-2k+1}{4(2n+1)}\pi - \frac{x}{2}\right)\right]\right\}$$

[m — натуральное число $\leqslant n$]. Т (381)

5. $$\int \frac{\sin^{2m+1} x\,dx}{\cos(2n+1)x} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\left\{\ln\cos x + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos^{2m+1}\frac{k\pi}{2n+1} \ln\left(\cos^2 x - \sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right\}$$

[m — натуральное число $\leqslant n$]. Т (382)и

6. $$\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos 2nx} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{n+k}\cos^m\left[\frac{2k+1}{4n}\pi\right] \ln \frac{\sin\left[\frac{2k-2n+1}{8n}\pi+\frac{x}{2}\right]}{\sin\left[\frac{2k+2n+1}{8n}\pi-\frac{x}{2}\right]}$$

[m — натуральное число $< 2n$]. Т (377)

7. $$\int \frac{\cos^{2m+1} x\,dx}{\sin(2n+1)x} = \frac{1}{2n+1}\left\{\ln\sin x + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos^{2m+1}\frac{k\pi}{2n+1} \ln\left(\sin^2 x - \sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right\}$$

[m — натуральное число $\leqslant n$]. Т (376)

8. $$\int \frac{\cos^{2m} x\,dx}{\sin(2n+1)x} = \frac{1}{2n+1}\left\{\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos^{2m}\frac{k\pi}{2n+1} \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{4n+2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{k\pi}{4n+2}\right)\right]\right\}$$

[m — натуральное число $\leqslant n$]. Т (375)

9. $$\int \frac{\cos^{2m+1} x}{\sin 2nx}\,dx = \frac{1}{2n}\left\{\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cos^{2m+1}\frac{k\pi}{2n} \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{4n}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{k\pi}{4n}\right)\right]\right\}$$

[m — натуральное число $< n$]. Т (374)

10. $$\int \frac{\cos^{2m} x}{\sin 2nx}\,dx = \frac{1}{2n}\left\{\ln\sin x + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cos^{2m}\frac{k\pi}{2n} \ln\left(\sin^2 x - \sin^2\frac{k\pi}{2n}\right)\right\}$$

[m — натуральное число $\leqslant n$]. Т (373)

11. $$\int \frac{\cos^m x}{\cos nx}\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^m\frac{2k+1}{2n}\pi \ln \frac{\sin\left[\frac{2k+1}{4n}\pi+\frac{x}{2}\right]}{\sin\left[\frac{2k+1}{4n}\pi-\frac{x}{2}\right]}$$

[m — натуральное число $\leqslant n$]. Т (372)

2.549

1. $$\int \sin x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,S(x).$$

2. $$\int \cos x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,C(x).$$

3. $$\int \sin(ax^2+2bx+c)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\cos\frac{ac-b^2}{a}\,S\left(\frac{ax+b}{\sqrt{a}}\right)+\sin\frac{ac-b^2}{a}\,C\left(\frac{ax+b}{\sqrt{a}}\right)\right\}.$$

4. $$\int \cos(ax^2+2bx+c)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\cos\frac{ac-b^2}{a}\,C\left(\frac{ax+b}{\sqrt{a}}\right)-\sin\frac{ac-b^2}{a}\,S\left(\frac{ax+b}{\sqrt{a}}\right)\right\}.$$

5. $$\int \sin\ln x\,dx = \frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x).$$ П (444)

6. $$\int \cos\ln x\,dx = \frac{x}{2}(\sin\ln x+\cos\ln x).$$ П (445)

2.55—2.56 Рациональные функции от синуса и косинуса

2.551

1. $$\int \frac{A+B\sin x}{(a+b\sin x)^n}\,dx = \frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)}\left[\frac{(Ab-aB)\cos x}{(a+b\sin x)^{n-1}}+\int\frac{(Aa-Bb)(n-1)+(aB-bA)(n-2)\sin x}{(a+b\sin x)^{n-1}}\,dx\right].$$ Т (358) и

При $n=1$:

2. $$\int \frac{A+B\sin x}{a+b\sin x}\,dx = \frac{B}{b}x+\frac{Ab-aB}{b}\int\frac{dx}{a+b\sin x}$$ (см. 2.551 3.). Т (342)

3. $$\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} \qquad [a^2>b^2];$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}} \qquad [a^2<b^2].$$

2.552

1. $$\int \frac{A+B\cos x}{(a+b\sin x)^n}\,dx = -\frac{B}{(n-1)b(a+b\sin x)^{n-1}}+A\int\frac{dx}{(a+b\sin x)^n}$$ (см. 2.552 3.). Т (361)

При $n=1$:

2. $$\int \frac{A+B\cos x}{a+b\sin x}\,dx = \frac{B}{b}\ln(a+b\sin x)+A\int\frac{dx}{a+b\sin x}$$ (см. 2.551 3.). Т (344)

3. $$\int \frac{dx}{(a+b\sin x)^n} = \frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)}\left\{\frac{b\cos x}{(a+b\sin x)^{n-1}}+\int\frac{(n-1)a-(n-2)b\sin x}{(a+b\sin x)^{n-1}}\,dx\right\}$$ (см. 2.551 1.). Т (359)

2.553

1. $$\int \frac{A+B\sin x}{(a+b\cos x)^n}\,dx = \frac{B}{(n-1)b(a+b\cos x)^{n-1}}+A\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$$ (см. 2.554 3.). Т (355)

При $n=1$:

2. $$\int \frac{A+B\sin x}{a+b\cos x}\,dx = -\frac{B}{b}\ln(a+b\cos x) + A\int\frac{dx}{a+b\cos x}$$ (см. 2.553 3.). Т (343)

3. $$\int\frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{a+b} \quad [a^2>b^2];$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+a+b}{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-a-b} \quad [a^2<b^2].$$ Ф II 93, 94; Т (305)

2.554

1. $$\int\frac{A+B\cos x}{(a+b\cos x)^n}\,dx = \frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)}\left[\frac{(aB-Ab)\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + \int\frac{(Aa-bB)(n-1)+(n-2)(aB-bA)\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}\,dx\right].$$ Т (353)

При $n=1$:

2. $$\int\frac{A+B\cos x}{a+b\cos x}\,dx = \frac{B}{b}x + \frac{Ab-aB}{b}\int\frac{dx}{a+b\cos x}$$ (см. 2.553 3.). Т (341)

3. $$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n} = -\frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)}\left\{\frac{b\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} - \int\frac{(n-1)a-(n-2)b\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}\,dx\right\}$$ (см. 2.554 1.). Т (354)

При интегрировании функций в пп. 2.551 3. и 2.553 3 нельзя переходить через точки, в которых подынтегральная функция обращается в бесконечность, т. е. через точки $x=\arcsin\left(-\frac{a}{b}\right)$ в формуле 2.551 3. и через точки $x=\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$ в формуле 2.553 3.

2.555 Формулы 2.551 3 и 2.553 3 при $a^2=b^2$ неприменимы. В этих случаях вместо них можно применять следующие формулы:

1. $$\int\frac{A+B\sin x}{(1\pm\sin x)^n}\,dx = -\frac{1}{2^{n-1}}\left\{2B\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\frac{\operatorname{tg}^{2k+1}\left(\frac{\pi}{4}\mp\frac{x}{2}\right)}{2k+1} \pm (A\mp B)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{\operatorname{tg}^{2k+1}\left(\frac{\pi}{4}\mp\frac{x}{2}\right)}{2k+1}\right\}.$$ Т (361)и

2. $$\int\frac{A+B\cos x}{(1\pm\cos x)^n}\,dx = \frac{1}{2^{n-1}}\left\{2B\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\frac{\operatorname{tg}^{2k+1}\left[\frac{\pi}{4}\mp\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]}{2k+1} \pm (A\mp B)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{\operatorname{tg}^{2k+1}\left[\frac{\pi}{4}\mp\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]}{2k+1}\right\}.$$ Т (356)

При $n=1$:

3. $$\int\frac{A+B\sin x}{1\pm\sin x}\,dx = \pm Bx + (A\mp B)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\mp\frac{x}{2}\right).$$ Т (250)

4. $\int \frac{A+B\cos x}{1\pm\cos x}\,dx = \pm Bx \pm (A \mp B)\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4} \mp \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right]$. Т (248)

2.556

1. $\int \frac{(1-a^2)\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+a}{1-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) \quad [0<a<1,\ |x|<\pi]$. Ф II 93

2. $\int \frac{(1-a\cos x)\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+a}{1-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) \quad [0<a<1,\ |x|<\pi]$. Ф II 93

2.557

1. $\int \frac{dx}{(a\cos x+b\sin x)^n} = \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)^n}} \int \frac{dx}{\sin^n\left(x+\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)}$ (см. 2.515). МфК 173 и

2. $\int \frac{\sin x\,dx}{a\cos x+b\sin x} = \frac{ax - b\ln\sin\left(x+\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)}{a^2+b^2}$.

3. $\int \frac{\cos x\,dx}{a\cos x+b\sin x} = \frac{ax + b\ln\sin\left(x+\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)}{a^2+b^2}$. МфК 174 и

4. $\int \frac{dx}{a\cos x+b\sin x} = \frac{\ln\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\left(x+\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)\right]}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

5. $\int \frac{dx}{(a\cos x+b\sin x)^2} = -\frac{\operatorname{ctg}\left(x+\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)}{a^2+b^2} =$

$= -\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x+b\cos x}$. МфК 174 и

2.558

1. $\int \frac{A+B\cos x+C\sin x}{(a+b\cos x+c\sin x)^n}\,dx = \frac{(Bc-Cb)+(Ac-Ca)\cos x-(Ab-Ba)\sin x}{(n-1)(a^2-b^2-c^2)(a+b\cos x+c\sin x)^{n-1}} +$

$+ \frac{1}{(n-1)(a^2-b^2-c^2)} \int \frac{(n-1)(Aa-Bb-Cc)-(n-2)[(Ab-Ba)\cos x-(Ac-Ca)\sin x]}{(a+b\cos x+c\sin x)^{n-1}}\,dx$

$[n \neq 1, \quad a^2 \neq b^2+c^2]$;

$= \frac{Cb-Bc+Ca\cos x-Ba\sin x}{(n-1)a(a+b\cos x+c\sin x)^n} + \left(\frac{A}{a} + \frac{n(Bb+Cc)}{(n-1)a^2}\right)(-c\cos x+b\sin x) \times$

$\times \frac{(n-1)!}{(2n-1)!!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-2k-3)!!}{(n-k-1)!\,a^k}\cdot\frac{1}{(a+b\cos x+c\sin x)^{n-k}} \quad [n \neq 1, \quad a^2 = b^2+c^2]$.

При $n=1$:

2. $\int \frac{A+B\cos x+C\sin x}{a+b\cos x+c\sin x}\,dx = \frac{Bc-Cb}{b^2+c^2}\ln(a+b\cos x+c\sin x) + \frac{Bb+Cc}{b^2+c^2}x +$

$+ \left(A - \frac{Bb+Cc}{b^2+c^2}a\right)\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$ (см. 2.558 4.). ГХI [331] (18)

3. $\int \frac{dx}{(a+b\cos x+c\sin x)^n} = \int \frac{d(x-\alpha)}{[a+r\cos(x-\alpha)]^n}$,

где $b=r\cos\alpha, \quad c=r\sin\alpha$ (см. 2.554 3.).

4. $\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}=$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} \quad [a^2>b^2+c^2]; \qquad \text{Т (253), Ф II 94}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}\ln\frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c-\sqrt{b^2+c^2-a^2}}{(a-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c+\sqrt{b^2+c^2-a^2}} \quad [a^2<b^2+c^2]; \quad \text{Т (253) } u$$

$$=\frac{1}{c}\ln\left(a+c\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) \qquad [a=b];$$

$$=\frac{-2}{c+(a-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \qquad [a^2=b^2+c^2]. \qquad \text{Т (253) } u$$

2.559

1. $\int \frac{dx}{[a(1+\cos x)+c\sin x]^2}=\frac{1}{c^3}\left[\frac{c(a\sin x-c\cos x)}{a(1+\cos x)+c\sin x}-a\ln\left(a+c\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right].$

2. $\int \frac{A+B\cos x+C\sin x}{(a_1+b_1\cos x+c_1\sin x)(a_2+b_2\cos x+c_2\sin x)}dx=$

$$=A_0\ln\frac{a_1+b_1\cos x+c_1\sin x}{a_2+b_2\cos x+c_2\sin x}+A_1\int\frac{dx}{a_1+b_1\cos x+c_1\sin x}+$$

$$+A_2\int\frac{dx}{a_2+b_2\cos x+c_2\sin x},$$

где

$$A_0=\frac{\begin{vmatrix} A & B & C\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2-\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}^2}, \qquad A_1=\frac{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} B & C\\ b_1 & c_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A & C\\ a_1 & c_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} B & A\\ b_1 & a_1\end{vmatrix}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2-\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}^2},$$

$$A_2=\frac{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} C & B\\ c_2 & b_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} C & A\\ c_2 & a_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A & B\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2-\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}^2};$$

$$\left[\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix}^2\neq\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}^2\right] \qquad \text{(см. 2.558 4.).} \qquad \text{ГХІ [331] (19)}$$

3. $\int \frac{A\cos^2 x+2B\sin x\cos x+C\sin^2 x}{a\cos^2 x+2b\sin x\cos x+c\sin^2 x}dx=$

$$=\frac{1}{4b^2+(a-c)^2}\{[4Bb+(A-C)(a-c)]x+[(A-C)b-B(a-c)]\times$$

$$\times\ln(a\cos^2 x+2b\sin x\cos x+c\sin^2 x)+$$

$$+[2(A+C)b^2-2Bb(a+c)+(aC-Ac)(a-c)]f(x)\},$$

где

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}}\ln\frac{c\operatorname{tg}x+b-\sqrt{b^2-ac}}{c\operatorname{tg}x+b+\sqrt{b^2-ac}}\qquad [b^2>ac];$$

$$=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{c\operatorname{tg}x+b}{\sqrt{ac-b^2}}\qquad [b^2<ac];$$

$$=-\frac{1}{c\operatorname{tg}x+b}\qquad [b^2=ac].$$ ГХI 331 (24)

2.561

1. $\int\frac{(A+B\sin x)\,dx}{\sin x\,(a+b\sin x)}=\frac{A}{a}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{Ba-Ab}{a}\int\frac{dx}{a+b\sin x}$ (см. 2.551 3.). Т (348)

2. $\int\frac{(A+B\sin x)\,dx}{\sin x\,(a+b\cos x)}=\frac{A}{a^2-b^2}\left\{a\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b\ln\frac{a+b\cos x}{\sin x}\right\}+$
$+B\int\frac{dx}{a+b\cos x}$ (см. 2.553 3.). Т (349)

При $a^2=b^2\,(=1)$:

3. $\int\frac{(A+B\sin x)\,dx}{\sin x\,(1+\cos x)}=\frac{A}{2}\left\{\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{1+\cos x}\right\}+B\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

4. $\int\frac{(A+B\sin x)\,dx}{\sin x\,(1-\cos x)}=\frac{A}{2}\left\{\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{1-\cos x}\right\}-B\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

5. $\int\frac{(A+B\sin x)\,dx}{\cos x\,(a+b\sin x)}=\frac{1}{a^2-b^2}\left\{(Aa-Bb)\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\right.$
$\left.-(Ab-aB)\ln\frac{a+b\sin x}{\cos x}\right\}$. Т (346)

При $a^2=b^2\,(=1)$:

6. $\int\frac{(A+B\sin x)\,dx}{\cos x\,(1\pm\sin x)}=\frac{A\pm B}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\mp\frac{A\mp B}{2\,(1\pm\sin x)}$.

7. $\int\frac{(A+B\sin x)\,dx}{\cos x\,(a+b\cos x)}=\frac{A}{a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+\frac{B}{a}\ln\frac{a+b\cos x}{\cos x}-$
$-\frac{Ab}{a}\int\frac{dx}{a+b\cos x}$ (см. 2.553 3.). Т (351)и

8. $\int\frac{(A+B\cos x)\,dx}{\sin x\,(a+b\sin x)}=\frac{A}{a}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{B}{a}\ln\frac{a+b\sin x}{\sin x}-$
$-\frac{Ab}{a}\int\frac{dx}{a+b\sin x}$ (см. 2.551 3.). Т (352)

9. $\int\frac{(A+B\cos x)\,dx}{\sin x\,(a+b\cos x)}=\frac{1}{a^2-b^2}\left\{(Aa-Bb)\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\right.$
$\left.+(Ab-Ba)\ln\frac{a+b\cos x}{\sin x}\right\}$. Т (345)

При $a^2=b^2\,(=1)$:

10. $\int\frac{(A+B\cos x)\,dx}{\sin x\,(1\pm\cos x)}=\pm\frac{A\mp B}{2\,(1\pm\cos x)}+\frac{A\pm B}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

11. $\int\frac{(A+B\cos x)\,dx}{\cos x\,(a+b\sin x)}=\frac{A}{a^2-b^2}\left\{a\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\right.$
$\left.-b\ln\frac{a+b\sin x}{\cos x}\right\}+B\int\frac{dx}{a+b\sin x}$ (см. 2.551 3.) Т (350)

При $a^2 = b^2 (= 1)$:

12. $$\int \frac{(A + B\sin x)\,dx}{\cos x\,(1 \pm \sin x)} = \frac{A \pm B}{2} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \mp \frac{A \mp B}{2(1 \pm \sin x)}.$$

13. $$\int \frac{(A + B\cos x)\,dx}{\cos x\,(a + b\cos x)} = \frac{A}{a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + \frac{Ba - Ab}{a} \int \frac{dx}{a + b\cos x}$$

(см. 2.553 3.). Т (347)

2.562

1. $$\int \frac{dx}{a + b\sin^2 x} = \frac{\operatorname{sign} a}{\sqrt{a(a+b)}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a+b}{a}} \operatorname{tg} x\right) \quad \left[\frac{b}{a} > -1\right];$$

$$= \frac{\operatorname{sign} a}{\sqrt{-a(a+b)}} \operatorname{Arth}\left(\sqrt{-\frac{a+b}{a}} \operatorname{tg} x\right)$$

$$\left[\frac{b}{a} < -1,\ \sin^2 x < -\frac{a}{b}\right];$$

$$= \frac{\operatorname{sign} a}{\sqrt{-a(a+b)}} \operatorname{Arcth}\left(\sqrt{-\frac{a+b}{a}} \operatorname{tg} x\right)$$

$$\left[\frac{b}{a} < -1,\ \sin^2 x > -\frac{a}{b}\right].$$ МФК 155

2. $$\int \frac{dx}{a + b\cos^2 x} = \frac{-\operatorname{sign} a}{\sqrt{a(a+b)}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a+b}{a}} \operatorname{ctg} x\right) \quad \left[\frac{b}{a} > -1\right];$$

$$= \frac{-\operatorname{sign} a}{\sqrt{-a(a+b)}} \operatorname{Arth}\left(\sqrt{-\frac{a+b}{a}} \operatorname{ctg} x\right)$$

$$\left[\frac{b}{a} < -1,\quad \cos^2 x < -\frac{a}{b}\right];$$

$$= \frac{-\operatorname{sign} a}{\sqrt{-a(a+b)}} \operatorname{Arcth}\left(\sqrt{-\frac{a+b}{a}} \operatorname{ctg} x\right)$$

$$\left[\frac{b}{a} < -1,\ \cos^2 x > -\frac{a}{b}\right].$$ МФК 162

3 $$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x).$$

4 $$\int \frac{dx}{1 - \sin^2 x} = \operatorname{tg} x.$$

5. $$\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{ctg} x).$$

6. $$\int \frac{dx}{1 - \cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$$

2.563

1. $$\int \frac{dx}{(a + b\sin^2 x)^2} = \frac{1}{2a(a+b)} \left[(2a + b) \int \frac{dx}{a + b\sin^2 x} + \right.$$

$$\left. + \frac{b \sin x \cos x}{a + b\sin^2 x}\right]$$ (см. 2.562 1.). МФК 155

2. $$\int \frac{dx}{(a + b\cos^2 x)^2} = \frac{1}{2a(a+b)} \left[(2a + b) \int \frac{dx}{a + b\cos^2 x} - \right.$$

$$\left. - \frac{b \sin x \cos x}{a + b\cos^2 x}\right]$$ (см. 2.562 2.). МФК 163

3. $$\int \frac{dx}{(a+b\sin^2 x)^3} = \frac{1}{8pa^3}\left[\left(3+\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p^4}\right)\operatorname{arctg}(p\operatorname{tg}x)+\right.$$
$$\left.+\left(3+\frac{2}{p^2}-\frac{3}{p^4}\right)\frac{p\operatorname{tg}x}{1+p^2\operatorname{tg}^2 x}+\left(1-\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p^2}\operatorname{tg}^2 x\right)\frac{2p\operatorname{tg}x}{(1+p^2\operatorname{tg}^2 x)^2}\right]$$
$$\left[p^2=1+\frac{b}{a}>0\right];$$
$$=\frac{1}{8qa^3}\left[\left(3-\frac{2}{q^2}+\frac{3}{q^4}\right)\operatorname{Arth}(q\operatorname{tg}x)+\right.$$
$$\left.+\left(3-\frac{2}{q^2}-\frac{3}{q^4}\right)\frac{q\operatorname{tg}x}{1-q^2\operatorname{tg}^2 x}+\left(1+\frac{2}{q^2}+\frac{1}{q^2}\operatorname{tg}^2 x\right)\frac{2q\operatorname{tg}x}{(1-q^2\operatorname{tg}^2 x)^2}\right]$$
$\Big[q^2=-1-\frac{b}{a}>0,\quad \sin^2 x<-\frac{a}{b};$ при $\sin^2 x>-\frac{a}{b}$ следует

$\operatorname{Arth}(q\operatorname{tg}x)$ заменить на $\operatorname{Arcth}(q\operatorname{tg}x)\Big]$. МФК 156

4. $$\int \frac{dx}{(a+b\cos^2 x)^3} = -\frac{1}{8pa^3}\left[\left(3+\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p^4}\right)\operatorname{arctg}(p\operatorname{ctg}x)+\right.$$
$$\left.+\left(3+\frac{2}{p^2}-\frac{3}{p^4}\right)\frac{p\operatorname{ctg}x}{1+p^2\operatorname{ctg}^2 x}+\left(1-\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p^2}\operatorname{ctg}^2 x\right)\frac{2p\operatorname{ctg}x}{(1+p^2\operatorname{ctg}^2 x)^2}\right]$$
$$\left[p^2=1+\frac{b}{a}>0\right];$$
$$=-\frac{1}{8qa^3}\left[\left(3-\frac{2}{q^2}+\frac{3}{q^4}\right)\operatorname{Arth}(q\operatorname{ctg}x)+\right.$$
$$\left.+\left(3-\frac{2}{q^2}-\frac{3}{q^4}\right)\frac{q\operatorname{ctg}x}{1-q^2\operatorname{ctg}^2 x}+\left(1+\frac{2}{q^2}+\frac{1}{q^2}\operatorname{ctg}^2 x\right)\frac{2q\operatorname{ctg}x}{(1-q^2\operatorname{ctg}^2 x)^2}\right]$$
$\Big[q^2=-1-\frac{b}{a}>0,\quad \cos^2 x<-\frac{a}{b},$ при $\cos^2 x>-\frac{a}{b}$ следует

$\operatorname{Arth}(q\operatorname{ctg}x)$ заменить на $\operatorname{Arcth}(q\operatorname{ctg}x)\Big]$. МФК 163 *и*

2.564

1. $$\int \frac{\operatorname{tg}x\,dx}{1+m^2\operatorname{tg}^2 x}=\frac{\ln(\cos^2 x+m^2\sin^2 x)}{2(m^2-1)}.$$ Ла 210 (10)

2. $$\int \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}x}\,dx=\sin 2\alpha\ln\sin(x+\alpha)-x\cos 2\alpha.$$ Ла 210 (11) *и*

3. $$\int \frac{\operatorname{tg}x\,dx}{a+b\operatorname{tg}x}=\frac{1}{a^2+b^2}\{bx-a\ln(a\cos x+b\sin x)\}.$$ П (335)

4. $$\int \frac{dx}{a+b\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{a-b}\left[x-\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tg}x\right)\right].$$ П (334)

2.57 Формы, содержащие $\sqrt{a\pm b\sin x}$, $\sqrt{a\pm b\cos x}$ или приводящиеся к этому виду

Обозначения: $\alpha=\arcsin\sqrt{\frac{1-\sin x}{2}}$, $\beta=\arcsin\sqrt{\frac{b(1-\sin x)}{a+b}}$,

$\gamma=\arcsin\sqrt{\frac{b(1-\cos x)}{a+b}}$, $\delta=\arcsin\sqrt{\frac{(a+b)(1-\cos x)}{2(a-b\cos x)}}$, $r=\sqrt{\frac{2b}{a+b}}$.

2.571

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+b\sin x}}=\frac{-2}{\sqrt{a+b}}F(\alpha, r)\quad \left[a>b>0,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right];$$
$$=-\sqrt{\frac{2}{b}}F\left(\beta,\frac{1}{r}\right)\quad \left[0<|a|<b,\ -\arcsin\frac{a}{b}<x<\frac{\pi}{2}\right].$$
БФ (288.00 и 288.50)

2. $$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{a+b\sin x}} = \frac{2a}{b\sqrt{a+b}} F(\alpha, r) - \frac{2\sqrt{a+b}}{b} E(\alpha, r)$$

$$\left[a > b > 0,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right];$$ БФ (288.03)

$$= \sqrt{\frac{2}{b}} \left\{F\left(\beta, \frac{1}{r}\right) - 2E\left(\beta, \frac{1}{r}\right)\right\}$$

$$\left[0 < |a| < b,\ -\arcsin\frac{a}{b} < x < \frac{\pi}{2}\right].$$ БФ (288.54)

3. $$\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{a+b\sin x}} = \frac{4a\sqrt{a+b}}{3b^2} E(\alpha, r) - \frac{2(2a^2+b^2)}{3b^2\sqrt{a+b}} F(\alpha, r) -$$

$$-\frac{2}{3b}\cos x\sqrt{a+b\sin x} \qquad \left[a > b > 0,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right];$$

$$= \sqrt{\frac{2}{b}} \left\{\frac{4a}{3b} E\left(\beta, \frac{1}{r}\right) - \frac{2a+b}{3b} F\left(\beta, \frac{1}{r}\right)\right\} - \frac{2}{3b}\cos x\sqrt{a+b\sin x}$$

$$\left[0 < |a| < b,\ -\arcsin\frac{a}{b} < x < \frac{\pi}{2}\right].$$ БФ (288.03 и 288.54)

4. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+b\cos x}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}} F\left(\frac{x}{2}, r\right) \qquad [a > b > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi];$$

БФ (289.00)

$$= \sqrt{\frac{2}{b}} F\left(\gamma, \frac{1}{r}\right)$$

$$\left[b \geqslant |a| > 0,\ 0 \leqslant x < \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)\right].$$ БФ (290.00)

5. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a-b\cos x}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}} F(\delta, r) \qquad [a > b > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi].$$

БФ (291.00)

6. $$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{a+b\cos x}} = \frac{2}{b\sqrt{a+b}} \left\{(a+b)E\left(\frac{x}{2}, r\right) - aF\left(\frac{x}{2}, r\right)\right\}$$

$$[a > b > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi];$$ БФ (289.03)

$$= \sqrt{\frac{2}{b}} \left\{2E\left(\gamma, \frac{1}{r}\right) - F\left(\gamma, \frac{1}{r}\right)\right\}$$

$$\left[b > |a| > 0,\ 0 \leqslant x < \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)\right].$$ БФ (290.04)

7. $$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{a-b\cos x}} = \frac{2}{b\sqrt{a+b}} \{(b-a)\Pi(\delta, r^2, r) + aF(\delta, r)\}$$

$$[a > b > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi].$$ БФ (291.03)

8. $$\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sqrt{a+b\cos x}} = \frac{2}{3b^2\sqrt{a+b}} \left\{(2a^2+b^2)F\left(\frac{x}{2}, r\right) -\right.$$

$$\left.-2a(a+b)E\left(\frac{x}{2}, r\right)\right\} + \frac{2}{3b}\sin x\sqrt{a+b\cos x}$$

$$[a > b > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi];$$ БФ (289.03)

$$= \frac{1}{3b}\sqrt{\frac{2}{b}} \left\{(2a+b)F\left(\gamma, \frac{1}{r}\right) - 4aE\left(\gamma, \frac{1}{r}\right)\right\} +$$

$$+\frac{2}{3b}\sin x\sqrt{a+b\cos x} \qquad \left[b \geqslant |a| > 0,\ 0 \leqslant x < \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)\right].$$ БФ (290.04)

9. $$\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sqrt{a-b\cos x}} = \frac{2}{3b^2\sqrt{a+b}} \left\{(2a^2+b^2)F(\delta, r) - 2a(a+b)E(\delta, r)\right\} +$$

$$+\frac{2}{3b}\sin x \frac{a+b\cos x}{\sqrt{a-b\cos x}} \qquad [a > b > 0,\ 0 \leqslant x < \pi].$$ БФ (291.04) и

2.572

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x\,dx}{\sqrt{a+b\sin x}} = \frac{1}{\sqrt{a+b}} F(\alpha, r) + \frac{a}{(a-b)\sqrt{a+b}} E(\alpha, r) -$$
$$- \frac{b-a\sin x}{(a^2-b^2)\cos x}\sqrt{a+b\sin x} \quad \left[0<b<a, \ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right];$$
$$= \sqrt{\frac{2}{b}}\left\{\frac{2a+b}{2(a+b)}F\left(\beta, \frac{1}{r}\right) + \frac{ab}{a^2-b^2}E\left(\beta, \frac{1}{r}\right)\right\} -$$
$$- \frac{b-a\sin x}{(a^2-b^2)\cos x}\sqrt{a+b\sin x} \quad \left[0<|a|<b, \ -\arcsin\frac{a}{b}<x<\frac{\pi}{2}\right].$$

БФ (288.08 и 288.58)

2.573

1. $$\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{a+b\sin x}} = \frac{2}{a-b}\left\{\sqrt{a+b}\,E(\alpha, r) -\right.$$
$$\left.-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sqrt{a+b\sin x}\right\} \quad \left[0<b<a, \ -\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right].$$ БФ (288.07)

2. $$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,\frac{dx}{\sqrt{a+b\cos x}} = \frac{2}{a-b}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sqrt{a+b\cos x} -$$
$$- \frac{2\sqrt{a+b}}{a-b}E\left(\frac{x}{2}, r\right) \quad [a>b>0, \ 0\leqslant x<\pi].$$ БФ (289.07)

2.574

1. $$\int \frac{dx}{(2-p^2+p^2\sin x)\sqrt{a+b\sin x}} = -\frac{1}{a+b}\Pi(\alpha, p^2, r)$$
$$\left[0<b<a, \ -\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right].$$ БФ (288.02)

2. $$\int \frac{dx}{(a+b-p^2b+p^2b\sin x)\sqrt{a+b\sin x}} = -\frac{1}{a+b}\sqrt{\frac{2}{b}}\,\Pi\left(\beta, p^2, \frac{1}{r}\right)$$
$$\left[0<|a|<b, \ -\arcsin\frac{a}{b}<x<\frac{\pi}{2}\right].$$ БФ (288.52)

3. $$\int \frac{dx}{(2-p^2+p^2\cos x)\sqrt{a+b\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{a+b}}\Pi\left(\frac{x}{2}, p^2, r\right)$$
$$[a>b>0, \ 0\leqslant x<\pi].$$ БФ (289.02)

4. $$\int \frac{dx}{(a+b-p^2b+p^2b\cos x)\sqrt{a+b\cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{(a+b)\sqrt{b}}\Pi\left(\gamma, p^2, \frac{1}{r}\right)$$
$$\left[b\geqslant|a|>0, \ 0\leqslant x<\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)\right].$$ БФ (290.02)

2.575

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+b\sin x)^3}} = \frac{2b\cos x}{(a^2-b^2)\sqrt{a+b\sin x}} - \frac{2}{(a-b)\sqrt{a+b}}E(\alpha, r)$$
$$\left[0<b<a, \ -\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right];$$ БФ (288.05)
$$= \sqrt{\frac{2}{b}}\left\{\frac{2b}{b^2-a^2}E\left(\beta, \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{a+b}F\left(\beta, \frac{1}{r}\right)\right\} +$$
$$+ \frac{2b}{b^2-a^2}\cdot\frac{\cos x}{\sqrt{a+b\sin x}} \quad \left[0<|a|<b, \ -\arcsin\frac{a}{b}<x<\frac{\pi}{2}\right].$$ БФ (288.56)

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+b\sin x)^5}} = \frac{2}{3(a^2-b^2)^2\sqrt{a+b}}\left\{(a^2-b^2)F(\alpha, r) - 4a(a+b)E(\alpha, r)\right\} + \frac{2b(5a^2-b^2+4ab\sin x)}{3(a^2-b^2)^2\sqrt{(a+b\sin x)^3}}\cos x$$

$\left[0 < b < a, \ -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right]$; БФ (288.05)

$$= -\frac{1}{3(a^2-b^2)^2}\sqrt{\frac{2}{b}}\left\{(3a-b)(a-b)F\left(\beta, \frac{1}{r}\right) + 8abE\left(\beta, \frac{1}{r}\right)\right\} + \frac{2b[a^2-b^2+4a(a+b\sin x)]}{3(a^2-b^2)^2\sqrt{(a+b\sin x)^3}}\cos x$$

$\left[0 < |a| < b, \ -\arcsin\frac{a}{b} < x < \frac{\pi}{2}\right]$. БФ (288.56)

3. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+b\cos x)^3}} = \frac{2}{(a-b)\sqrt{a+b}}E\left(\frac{x}{2}, r\right) - \frac{2b}{a^2-b^2}\cdot\frac{\sin x}{\sqrt{a+b\cos x}}$$

$[a > b > 0, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi]$; БФ (289.05)

$$= \frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{\frac{2}{b}}\left\{(a-b)F\left(\gamma, \frac{1}{r}\right) + 2bE\left(\gamma, \frac{1}{r}\right)\right\} + \frac{2b}{b^2-a^2}\cdot\frac{\sin x}{\sqrt{a+b\cos x}}$$

$\left[b \geqslant |a| > 0, \ 0 \leqslant x < \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)\right]$. БФ (290.06)

4. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(a-b\cos x)^3}} = \frac{2}{(a-b)\sqrt{a+b}}E(\delta, r) \qquad [a>b>0, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi].$$

БФ (291.01)

5. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+b\cos x)^5}} = \frac{2\sqrt{a+b}}{3(a^2-b^2)^2}\left\{4aE\left(\frac{x}{2}, r\right) - (a-b)F\left(\frac{x}{2}, r\right)\right\} - \frac{2b}{3(a^2-b^2)^2}\cdot\frac{5a^2-b^2+4ab\cos x}{\sqrt{(a+b\cos x)^3}}\sin x$$

$[a > b > 0, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi]$; БФ (289.05)

$$= \frac{1}{3(a^2-b^2)^2}\sqrt{\frac{2}{b}}\left\{(a-b)(3a-b)F\left(\gamma, \frac{1}{r}\right) + 8abE\left(\gamma, \frac{1}{r}\right)\right\} + \frac{2b(5a^2-b^2+4ab\cos x)\sin x}{3(a^3-b^2)^2\sqrt{(a+b\cos x)^3}}$$

$\left[b \geqslant |a| > 0, \ 0 \leqslant x < \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)\right]$. БФ (290.06)

2.576

1. $$\int \sqrt{a+b\cos x}\,dx = 2\sqrt{a+b}\,E\left(\frac{x}{2}, r\right) \quad [a > b > 0, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi];$$

БФ (289.01)

$$= \sqrt{\frac{2}{b}}\left\{(a-b)F\left(\gamma, \frac{1}{r}\right) + 2bE\left(\gamma, \frac{1}{r}\right)\right\}$$

$\left[b \geqslant |a| > 0, \ 0 \leqslant x < \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)\right]$. БФ (290.03)

2. $$\int \sqrt{a-b\cos x}\,dx = 2\sqrt{a+b}\,E(\delta, r) - \frac{2b\sin x}{\sqrt{a-b\cos x}}$$

$[a > b > 0, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi]$. БФ (291.05)

2.577 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a-b\cos x}{1+p\cos x}}\,dx = \frac{2(a-b)}{(1+p)\sqrt{a+b}}\,\Pi\left(\delta, \frac{2ap}{(a+b)(1+p)}, r\right)$

$[a > b > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ p \neq -1].$ БФ (291.02)

2.578 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt{a+b\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\arccos\left(\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{b}}\cos x\right) \quad [b > a,\ b > 0].$ П (333)

2.58—2.62 Интегралы, приводящиеся к эллиптическим и псевдоэллиптическим

2.580

1. $\displaystyle\int \frac{d\varphi}{\sqrt{a+b\cos\varphi+c\sin\varphi}} = 2\int \frac{d\psi}{\sqrt{a-p+2p\cos^2\psi}}$

$\left[\varphi = 2\psi+\alpha,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{b},\ p = \sqrt{b^2+c^2}\right].$

2. $\displaystyle\int \frac{d\varphi}{\sqrt{a+b\cos\varphi+c\sin\varphi+d\cos^2\varphi+e\sin\varphi\cos\varphi+f\sin^2\varphi}} =$

$\displaystyle = 2\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$

$\left[\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = x,\ A = a+b+d,\ B = 2c+2e,\ C = 2a-2d+4f,\right.$

$\left. D = 2c-2e,\ E = a-b+d\right].$

Формы, содержащие $\sqrt{1-k^2\sin^2 x}$

Обозначения: $\Delta = \sqrt{1-k^2\sin^2 x}$, $k' = \sqrt{1-k^2}$

2.581

1. $\displaystyle\int \sin^m x\cos^n x\,\Delta^r\,dx =$

$\displaystyle = \frac{1}{(m+n+r)k^2}\left\{\sin^{m-3} x\cos^{n+1} x\,\Delta^{r+2} + [m+n-2(m+r-1)k^2]\times\right.$

$\displaystyle\left.\times\int \sin^{m-2} x\cos^n x\,\Delta^r\,dx - (m-3)\int \sin^{m-4} x\cos^n x\,\Delta^r\,dx\right\} =$

$\displaystyle = \frac{1}{(m+n+r)k^2}\left\{\sin^{m+1} x\cos^{n-3} x\,\Delta^{r+2} + [(n+r-1)k^2-(m+n-2)k'^2]\times\right.$

$\displaystyle\left.\times\int \sin^m x\cos^{n-2} x\,\Delta^r\,dx + (n-3)k'^2\int \sin^m x\cos^{n-4} x\,\Delta^r\,dx\right\}$

$[m+n+r \neq 0]$

При $r = -3$ и $r = -5$:

2. $\displaystyle\int \frac{\sin^m x\cos^n x}{\Delta^3}\,dx = \frac{\sin^{m-1} x\cos^{n-1} x}{k^2\Delta} -$

$\displaystyle -\frac{m-1}{k^2}\int \frac{\sin^{m-2} x\cos^n x}{\Delta}\,dx + \frac{n-1}{k^2}\int \frac{\sin^m x\cos^{n-2} x}{\Delta}\,dx.$

3. $\displaystyle\int \frac{\sin^m x\cos^n x}{\Delta^5}\,dx = \frac{\sin^{m-1} x\cos^{n-1} x}{3k^2\Delta^3} -$

$\displaystyle -\frac{m-1}{3k^2}\int \frac{\sin^{m-2} x\cos^n x}{\Delta^3}\,dx + \frac{n-1}{3k^2}\int \frac{\sin^m x\cos^{n-2} x}{\Delta^3}\,dx.$

При $m=1$ или $n=1$:

4. $$\int \sin x \cos^n x\Delta^r\,dx = -\frac{\cos^{n-1} x\Delta^{r+2}}{(n+r+1)k^2} - \frac{(n-1)k'^2}{(n+r+1)k^2}\int \cos^{n-2} x \sin x \Delta^r\,dx.$$

5. $$\int \sin^m x \cos x\,\Delta^r\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x\Delta^{r+2}}{(m+r+1)k^2} + \frac{m-1}{(m+r+1)k^2}\int \sin^{m-2} x \cos x\,\Delta^r\,dx.$$

При $m=3$ или $n=3$:

6. $$\int \sin^3 x \cos^n x\Delta^r\,dx = \frac{(n+r+1)k^2\cos^2 x - [(r+2)k^2+n+1]}{(n+r+1)(n+r+3)k^4}\cos^{n-1} x\Delta^{r+2} - \frac{[(r+2)k^2+n+1](n-1)k'^2}{(n+r+1)(n+r+3)k^4}\int \cos^{n-2} x \sin x\,\Delta^r\,dx.$$

7. $$\int \sin^m x \cos^3 x\,\Delta^r\,dx = \frac{(m+r+1)k^2\sin^2 x - [(r+2)k^2 - (m+1)k'^2]}{(m+r+1)(m+r+3)k^4}\times \sin^{m-1} x\Delta^{r+2} + \frac{[(r+2)k^2-(m+1)k'^2](m-1)}{(m+r+1)(m+r+3)k^4}\int \sin^{m-2} x \cos x\Delta^r\,dx.$$

2.582

1. $$\int \Delta^n\,dx = \frac{n-1}{n}(2-k^2)\int \Delta^{n-2}\,dx - \frac{n-2}{n}(1-k^2)\int \Delta^{n-4}\,dx + \frac{k^2}{n}\sin x\cos x\cdot\Delta^{n-2}.$$ Ла 316 (1)и

2. $$\int \frac{dx}{\Delta^{n+1}} = -\frac{k^2\sin x\cos x}{(n-1)k'^2\Delta^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\,\frac{2-k^2}{k'^2}\int \frac{dx}{\Delta^{n-1}} - \frac{n-3}{n-1}\,\frac{1}{k'^2}\int \frac{dx}{\Delta^{n-3}}.$$ Ла 317 (8)и

3. $$\int \frac{\sin^n x}{\Delta}\,dx = \frac{\sin^{n-3} x}{(n-1)k^2}\cos x\cdot\Delta + \frac{n-2}{n-1}\,\frac{1+k^2}{k^2}\int \frac{\sin^{n-2} x}{\Delta}\,dx - \frac{n-3}{(n-1)k^2}\int \frac{\sin^{n-4} x}{\Delta}\,dx.$$ Ла 316 (1)и

4. $$\int \frac{\cos^n x}{\Delta}\,dx = \frac{\cos^{n-3} x}{(n-1)k^2}\sin x\cdot\Delta + \frac{n-2}{n-1}\,\frac{2k^2-1}{k^2}\int \frac{\cos^{n-2} x}{\Delta}\,dx + \frac{n-3}{n-1}\,\frac{k'^2}{k^2}\int \frac{\cos^{n-4} x}{\Delta}\,dx.$$ Ла 316 (2)и

5. $$\int \frac{\operatorname{tg}^n x}{\Delta}\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-3} x}{(n-1)k'^2}\,\frac{\Delta}{\cos^2 x} - \frac{(n-2)(2-k^2)}{(n-1)k'^2}\int \frac{\operatorname{tg}^{n-2} x}{\Delta}\,dx - \frac{n-3}{(n-1)k'^2}\int \frac{\operatorname{tg}^{n-4} x}{\Delta}\,dx.$$ Ла 317 (3)

6. $$\int \frac{\operatorname{ctg}^n x}{\Delta}\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1}\,\frac{\Delta}{\cos^2 x} - \frac{n-2}{n-1}(2-k^2)\int \frac{\operatorname{ctg}^{n-2} x}{\Delta}\,dx - \frac{n-3}{n-1}k'^2\int \frac{\operatorname{ctg}^{n-4} x}{\Delta}\,dx.$$ Ла 317 (6)

2.583

1. $$\int \Delta\,dx = E(x, k).$$

2. $$\int \Delta\sin x\,dx = -\frac{\Delta\cos x}{2} - \frac{k'^2}{2k}\ln(k\cos x + \Delta).$$

3. $$\int \Delta\cos x\,dx = \frac{\Delta\sin x}{2} + \frac{1}{2k}\arcsin(k\sin x).$$

4. $$\int \Delta\sin^2 x\,dx = -\frac{\Delta}{3}\sin x\cos x + \frac{k'^2}{3k^2}F(x, k) + \frac{2k^2-1}{3k^2}E(x, k).$$

5. $\int \Delta \sin x \cos x\, dx = -\frac{\Delta^3}{3k^2}$.

6. $\int \Delta \cos^2 x\, dx = \frac{\Delta}{3}\sin x \cos x - \frac{k'^2}{3k^2}F(x, k) + \frac{k^2+1}{3k^2}E(x, k)$.

7. $\int \Delta \sin^3 x\, dx = -\frac{2k^2\sin^2 x + 3k^2 - 1}{8k^2}\Delta \cos x + \frac{3k^4 - 2k^2 - 1}{8k^3}\ln(k\cos x + \Delta)$.

8. $\int \Delta \sin^2 x \cos x\, dx = \frac{2k^2\sin^2 x - 1}{8k^2}\Delta \sin x + \frac{1}{8k^3}\arcsin(k\sin x)$.

9. $\int \Delta \sin x \cos^2 x\, dx = -\frac{2k^2\cos^2 x + k'^2}{8k^2}\Delta \cos x + \frac{k'^4}{8k^3}\ln(k\cos x + \Delta)$.

10. $\int \Delta \cos^3 x\, dx = \frac{2k^2\cos^2 x + 2k^2 + 1}{8k^2}\Delta \sin x + \frac{4k^2 - 1}{8k^3}\arcsin(k\sin x)$.

11. $\int \Delta \sin^4 x\, dx = -\frac{3k^2\sin^2 x + 4k^2 - 1}{15k^2}\Delta \sin x \cos x +$
$$+\frac{2(2k^4 - k^2 - 1)}{15k^4}F(x, k) + \frac{8k^4 - 3k^2 - 2}{15k^4}E(x, k).$$

12. $\int \Delta \sin^3 x \cos x\, dx = \frac{3k^4\sin^4 x - k^2\sin^2 x - 2}{15k^4}\Delta$.

13. $\int \Delta \sin^2 x \cos^2 x\, dx = -\frac{3k^2\cos^2 x - 2k^2 + 1}{15k^2}\Delta \sin x \cos x -$
$$-\frac{k'^2(1 + k'^2)}{15k^4}F(x, k) + \frac{2(k^4 - k^2 + 1)}{15k^4}E(x, k).$$

14. $\int \Delta \sin x \cos^3 x\, dx = -\frac{3k^4\sin^4 x - k^2(5k^2 + 1)\sin^2 x + 5k^2 - 2}{15k^4}\Delta$.

15. $\int \Delta \cos^4 x\, dx = \frac{3k^2\cos^2 x + 3k^2 + 1}{15k^2}\Delta \sin x \cos x +$
$$+\frac{2k'^2(k'^2 - 2k^2)}{15k^4}F(x, k) + \frac{3k^4 + 7k^2 - 2}{15k^4}E(x, k).$$

16. $\int \Delta \sin^5 x\, dx = -\frac{8k^4\sin^4 x - 2k^2(5k^2 - 1)\sin^2 x - 15k^4 + 4k^2 + 3}{48k^4}\Delta \cos x +$
$$+\frac{5k^6 - 3k^4 - k^2 - 1}{16k^5}\ln(k\cos x + \Delta).$$

17. $\int \Delta \sin^4 x \cos x\, dx = \frac{8k^4\sin^4 x - 2k^2\sin^2 x - 3}{48k^4}\Delta \sin x +$
$$+\frac{1}{16k^5}\arcsin(k\sin x).$$

18. $\int \Delta \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \frac{8k^4\sin^4 x - 2k^2(k^2 + 1)\sin^2 x - 3k^4 + 2k^2 - 3}{48k^4}\Delta \cos x +$
$$+\frac{k'^4(k^2 + 1)}{16k^5}\ln(k\cos x + \Delta).$$

19. $\int \Delta \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \frac{-8k^4\sin^4 x + 2k^2(6k^2 + 1)\sin^2 x - 6k^2 + 3}{48k^4}\Delta \sin x +$
$$+\frac{2k^2 - 1}{16k^5}\arcsin(k\sin x).$$

20. $\int \Delta \sin x \cos^4 x\, dx = \frac{-8k^4\sin^4 x + 2k^2(7k^2 + 1)\sin^2 x - 3k^4 - 8k^2 + 3}{48k^4}\Delta \cos x -$
$$-\frac{k'^6}{16k^5}\ln(k\cos x + \Delta).$$

21. $$\int \Delta \cos^5 x\,dx = \frac{8k^4 \sin^4 x - 2k^2(12k^2+1)\sin^2 x + 24k^4 + 12k^2 - 3}{48k^4}\Delta \sin x + \frac{8k^4 - 4k^2 + 1}{16k^5}\arcsin(k \sin x).$$

22. $$\int \Delta^3\,dx = \frac{2}{3}(1+k'^2)E(x, k) - \frac{k'^2}{3}F(x, k) + \frac{k^2}{3}\Delta \sin x \cos x.$$

23. $$\int \Delta^3 \sin x\,dx = \frac{2k^2 \sin^2 x + 3k^2 - 5}{8}\Delta \cos x - \frac{3k'^4}{8k}\ln(k\cos x + \Delta).$$

24. $$\int \Delta^3 \cos x\,dx = \frac{-2k^2 \sin^2 x + 5}{8}\Delta \sin x + \frac{3}{8k}\arcsin(k \sin x).$$

25. $$\int \Delta^3 \sin^2 x\,dx = \frac{3k^2 \sin^2 x + 4k^2 - 6}{15}\Delta \sin x \cos x + \frac{k'^2(3-4k^2)}{15k^2}F(x, k) - \frac{8k^4 - 13k^2 + 3}{15k^2}E(x, k).$$

26. $$\int \Delta^3 \sin x \cos x\,dx = -\frac{\Delta^5}{5k^2}.$$

27. $$\int \Delta^3 \cos^2 x\,dx = \frac{-3k^2 \sin^2 x + k^2 + 6}{15}\Delta \sin x \cos x - \frac{k'^2(k^2+3)}{15k^2}F(x, k) - \frac{2k^4 - 7k^2 - 3}{15k^2}E(x, k).$$

28. $$\int \Delta^3 \sin^3 x\,dx = \frac{8k^4 \sin^4 x + 2k^2(5k^2-7)\sin^2 x + 15k^4 - 22k^2 + 3}{48k^2}\Delta \cos x - \frac{5k^6 - 9k^4 + 3k^2 + 1}{16k^3}\ln(k\cos x + \Delta).$$

29. $$\int \Delta^3 \sin^2 x \cos x\,dx = \frac{-8k^4 \sin^4 x + 14k^2 \sin^2 x - 3}{48k^2}\Delta \sin x + \frac{1}{16k^3}\arcsin(k \sin x).$$

30. $$\int \Delta^3 \sin x \cos^2 x\,dx = \frac{-8k^4 \sin^4 x + 2k^2(k^2+7)\sin^2 x + 3k^4 - 8k^2 - 3}{48k^2} \times \Delta \cos x + \frac{k'^6}{16k^3}\ln(k\cos x + \Delta).$$

31. $$\int \Delta^3 \cos^3 x\,dx = \frac{8k^4 \sin^4 x - 2k^2(6k^2+7)\sin^2 x + 30k^2 + 3}{48k^2}\Delta \sin x + \frac{6k^2 - 1}{16k^3}\arcsin(k \sin x).$$

32. $$\int \frac{\Delta\,dx}{\sin x} = -\frac{1}{2}\ln\frac{\Delta + \cos x}{\Delta - \cos x} + k\ln(k\cos x + \Delta).$$

33. $$\int \frac{\Delta\,dx}{\cos x} = \frac{k'}{2}\ln\frac{\Delta + k'\sin x}{\Delta - k'\sin x} + k\arcsin(k \sin x).$$

34. $$\int \frac{\Delta\,dx}{\sin^2 x} = k'^2 F(x, k) - E(x, k) - \Delta \operatorname{ctg} x.$$

35. $$\int \frac{\Delta\,dx}{\sin x \cos x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\Delta}{1+\Delta} + \frac{k'}{2}\ln\frac{\Delta + k'}{\Delta - k'}.$$

36. $$\int \frac{\Delta\,dx}{\cos^2 x} = F(x, k) - E(x, k) + \Delta \operatorname{tg} x.$$

37. $$\int \frac{\sin x}{\cos x}\Delta\,dx = \int \Delta \operatorname{tg} x\,dx = -\Delta + \frac{k'}{2}\ln\frac{\Delta + k'}{\Delta - k'}.$$

38. $\int \frac{\cos x}{\sin x} \Delta\, dx = \int \Delta \operatorname{ctg} x\, dx = \Delta + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\Delta}{1+\Delta}.$

39. $\int \frac{\Delta\, dx}{\sin^3 x} = -\frac{\Delta \cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{k'^2}{4} \ln \frac{\Delta + \cos x}{\Delta - \cos x}.$

40. $\int \frac{\Delta\, dx}{\sin^2 x \cos x} = \frac{-\Delta}{\sin x} - \frac{1+k^2}{2k'} \ln \frac{\Delta - k' \sin x}{\Delta + k' \sin x}.$

41. $\int \frac{\Delta\, dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{\Delta}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \frac{\Delta + \cos x}{\Delta - \cos x}.$

42. $\int \frac{\Delta\, dx}{\cos^3 x} = \frac{\Delta \sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{4k'} \ln \frac{\Delta + k' \sin x}{\Delta - k' \sin x}.$

43. $\int \frac{\Delta \sin x\, dx}{\cos^2 x} = \frac{\Delta}{\cos x} - k \ln (k \cos x + \Delta).$

44. $\int \frac{\Delta \cos x\, dx}{\sin^2 x} = -\frac{\Delta}{\sin x} - k \arcsin (k \sin x).$

45. $\int \frac{\Delta \sin^2 x\, dx}{\cos x} = -\frac{\Delta \sin x}{2} + \frac{2k^2-1}{2k} \arcsin (k \sin x) + \frac{k'}{2} \ln \frac{\Delta + k' \sin x}{\Delta - k' \sin x}.$

46. $\int \frac{\Delta \cos^2 x\, dx}{\sin x} = \frac{\Delta \cos x}{2} + \frac{k^2+1}{2k} \ln (k \cos x + \Delta) + \frac{1}{2} \ln \frac{\Delta + \cos x}{\Delta - \cos x}.$

47. $\int \frac{\Delta\, dx}{\sin^4 x} = \frac{1}{3} \{ -\Delta \operatorname{ctg}^3 x + (k^2-3) \Delta \operatorname{ctg} x + 2k'^2 F(x, k) + (k^2-2) E(x, k) \}.$

48. $\int \frac{\Delta\, dx}{\sin^3 x \cos x} = -\frac{\Delta}{2 \sin^2 x} + \frac{k'}{2} \ln \frac{\Delta + k'}{\Delta - k'} + \frac{k^2-2}{4} \ln \frac{1+\Delta}{1-\Delta}.$

49. $\int \frac{\Delta\, dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \left(\frac{1}{k'^2} \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x \right) \Delta + 2F(x, k) - \frac{1+k'^2}{k'^2} E(x, k).$

50. $\int \frac{\Delta\, dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{\Delta}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\Delta}{1-\Delta} + \frac{2-k^2}{4k'} \ln \frac{\Delta + k'}{\Delta - k'}.$

51. $\int \frac{\Delta\, dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3k'^2} \{ [k'^2 \operatorname{tg}^3 x - (2k^2-3) \operatorname{tg} x] \Delta + 2k'^2 F(x, k) +$

$+ (k^2-2) E(x, k) \}.$

52. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \Delta\, dx = \frac{\Delta}{2 \cos^2 x} + \frac{k^2}{4k'} \ln \frac{\Delta + k'}{\Delta - k'}.$

53. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} \Delta\, dx = -\frac{\Delta}{2 \sin^2 x} + \frac{k^2}{4} \ln \frac{1+\Delta}{1-\Delta}.$

54. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \Delta\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \Delta\, dx = \Delta \operatorname{tg} x + F(x, k) - 2E(x, k).$

55. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \Delta\, dx = \int \operatorname{ctg}^2 x\, \Delta\, dx = -\Delta \operatorname{ctg} x + k'^2 F(x, k) - 2E(x, k).$

56. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} \Delta\, dx = -\frac{k^2 \sin^2 x + 3k^2 - 1}{3k^2} \Delta + \frac{k'}{2} \ln \frac{\Delta + k'}{\Delta - k'}.$

57. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} \Delta\, dx = -\frac{k^2 \sin^2 x - 3k^2 - 1}{3k^2} \Delta + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\Delta}{1+\Delta}.$

58. $\int \frac{\Delta\, dx}{\sin^5 x} = \frac{(k^2-3) \sin^2 x + 2}{8 \sin^4 x} \cos x\, \Delta + \frac{k'^2 (k^2+3)}{16} \ln \frac{\Delta + \cos x}{\Delta - \cos x}.$

59. $\int \frac{\Delta\, dx}{\sin^4 x \cos x} = -\frac{(3-k^2) \sin^2 x + 1}{3 \sin^3 x} \Delta - \frac{k'}{2} \ln \frac{\Delta - k' \sin x}{\Delta + k' \sin x}.$

60. $\int \frac{\Delta\, dx}{\sin^3 x \cos^2 x} = \frac{3 \sin^2 x - 1}{2 \sin^2 x \cos x} \Delta + \frac{k^2-3}{4} \ln \frac{\Delta - \cos x}{\Delta + \cos x}.$

61. $\int \frac{\Delta\, dx}{\sin^2 x \cos^3 x} = \frac{3 \sin^2 x - 2}{2 \sin x \cos^2 x} \Delta - \frac{2k^2-3}{4k'} \ln \frac{\Delta + k' \sin x}{\Delta - k' \sin x}.$

62. $\int \frac{\Delta\, dx}{\sin x \cos^4 x} = \frac{(2k^2-3)\sin^2 x - 3k^2+4}{3k'^2 \cos^3 x}\Delta + \frac{1}{2}\ln\frac{\Delta+\cos x}{\Delta-\cos x}$.

63. $\int \frac{\Delta\, dx}{\cos^5 x} = \frac{(2k^2-3)\sin^2 x - 4k^2+5}{8k'^2\cos^4 x}\sin x\,\Delta - \frac{4k^2-3}{16k'^3}\ln\frac{\Delta+k'\sin x}{\Delta-k'\sin x}$.

64. $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}\Delta\, dx = \frac{-(2k^2+1)k^2\sin^2 x + 3k^4 - k^2 + 1}{3k'^2\cos^3 x}\Delta$.

65. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\Delta\, dx = -\frac{\Delta^3}{3\sin^3 x}$.

66. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\Delta\, dx = \frac{\sin x}{2\cos^2 x}\Delta + \frac{2k^2-1}{4k'}\ln\frac{\Delta+k'\sin x}{\Delta-k'\sin x} - k\arcsin(k\sin x)$.

67. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\Delta\, dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x}\Delta - \frac{k^2+1}{4}\ln\frac{\Delta+\cos x}{\Delta-\cos x} - k\ln(k\cos x + \Delta)$.

68. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\Delta\, dx = -\frac{\sin^2 x - 3}{2\cos x}\Delta - \frac{3k^2-1}{2k}\ln(k\cos x + \Delta)$.

69. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\Delta\, dx = -\frac{\sin^2 x + 2}{2\sin x}\Delta - \frac{2k^2+1}{2k}\arcsin(k\sin x)$.

70. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\Delta\, dx = -\frac{2k^2\sin^2 x + 4k^2 - 1}{8k^2}\sin x\Delta +$

$$+\frac{8k^4-4k^2-1}{8k^3}\arcsin(k\sin x) + \frac{k'}{2}\ln\frac{\Delta+k'\sin x}{\Delta-k'\sin x}.$$

71. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}\Delta\, dx = \frac{-2k^2\sin^2 x + 5k^2 + 1}{8k^2}\cos x\Delta +$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{\Delta+\cos x}{\Delta-\cos x} + \frac{3k^4+6k^2-1}{8k^3}\ln(k\cos x + \Delta).$$

2.584

1. $\int \frac{dx}{\Delta} = F(x, k)$.

2. $\int \frac{\sin x\, dx}{\Delta} = \frac{1}{2k}\ln\frac{\Delta - k\cos x}{\Delta + k\cos x} = -\frac{1}{k}\ln(k\cos x + \Delta)$.

3. $\int \frac{\cos x\, dx}{\Delta} = \frac{1}{k}\arcsin(k\sin x) = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{k\sin x}{\Delta}$.

4. $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}F(x, k) - \frac{1}{k^2}E(x, k)$.

5. $\int \frac{\sin x\cos x\, dx}{\Delta} = -\frac{\Delta}{k^2}$.

6. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\Delta} = \frac{1}{k^2}E(x, k) - \frac{k'^2}{k^2}F(x, k)$.

7. $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\Delta} = \frac{\cos x\,\Delta}{2k^2} - \frac{1+k^2}{2k^3}\ln(k\cos x + \Delta)$.

8. $\int \frac{\sin^2 x\cos x\, dx}{\Delta} = -\frac{\sin x\,\Delta}{2k^2} + \frac{\arcsin(k\sin x)}{2k^3}$.

9. $\int \frac{\sin x\cos^2 x\, dx}{\Delta} = -\frac{\cos x\,\Delta}{2k^2} + \frac{k'^2}{2k^3}\ln(k\cos x + \Delta)$.

10. $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\Delta} = \frac{\sin x\,\Delta}{2k^2} + \frac{2k^2-1}{2k^3}\arcsin(k\sin x)$.

11. $\int \frac{\sin^4 x\, dx}{\Delta} = \frac{\sin x\cos x\,\Delta}{3k^2} + \frac{2+k^2}{3k^4}F(x, k) - \frac{2(1+k^2)}{3k^4}E(x, k)$.

12. $\int \frac{\sin^3 x\cos x\, dx}{\Delta} = -\frac{1}{3k^4}(2 + k^2\sin^2 x)\Delta$,

13. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x\,dx}{\Delta} = -\frac{\sin x \cos x\,\Delta}{3k^2} + \frac{2-k^2}{3k^4} E(x, k) + \frac{2k^2-2}{3k^4} F(x, k).$

14. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos^3 x\,dx}{\Delta} = -\frac{1}{3k^4}(k^2 \cos^2 x - 2k'^2)\,\Delta.$

15. $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x\,dx}{\Delta} = \frac{\sin x \cos x\,\Delta}{3k^2} + \frac{4k^2-2}{3k^4} E(x, k) + \frac{3k^4-5k^2+2}{3k^4} F(x, k).$

16. $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\Delta} = \frac{2k^2 \sin^2 x + 3k^2 + 3}{8k^4} \cos x\,\Delta - \frac{3+2k^2+3k^4}{8k^5} \ln(k \cos x + \Delta).$

17. $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x \cos x\,dx}{\Delta} = -\frac{2k^2 \sin^2 x + 3}{8k^4} \sin x\,\Delta + \frac{3}{8k^5} \arcsin(k \sin x).$

18. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x \cos^2 x\,dx}{\Delta} = \frac{2k^2 \cos^2 x - k^2 - 3}{8k^4} \cos x\,\Delta - \frac{k^4+2k^2-3}{8k^5} \ln(k \cos x + \Delta).$

19. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos^3 x\,dx}{\Delta} = -\frac{2k^2 \cos^2 x + 2k^2 - 3}{8k^4} \sin x\,\Delta + \frac{4k^2-3}{8k^5} \arcsin(k \sin x).$

20. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos^4 x\,dx}{\Delta} = \frac{3-5k^2+2k^2 \sin^2 x}{8k^4} \cos x\,\Delta -$

$$-\frac{3k^4-6k^2+3}{8k^5} \ln(k \cos x + \Delta).$$

21. $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x\,dx}{\Delta} = \frac{2k^2 \cos^2 x + 6k^2 - 3}{8k^4} \sin x\,\Delta + \frac{8k^4-8k^2+3}{8k^5} \arcsin(k \sin x).$

22. $\displaystyle\int \frac{\sin^6 x\,dx}{\Delta} = \frac{3k^2 \sin^2 x + 4k^2 + 4}{15k^4} \sin x \cos x\,\Delta +$

$$+\frac{4k^4+3k^2+8}{15k^6} F(x, k) - \frac{8k^4+7k^2+8}{15k^6} E(x, k).$$

23. $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x \cos x\,dx}{\Delta} = -\frac{3k^4 \sin^4 x + 4k^2 \sin^2 x + 8}{15k^6}\,\Delta.$

24. $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x \cos^2 x\,dx}{\Delta} = \frac{3k^2 \cos^2 x - 2k^2 - 4}{15k^4} \sin x \cos x\,\Delta +$

$$+\frac{k^4+7k^2-8}{15k^6} F(x, k) - \frac{2k^4+3k^2-8}{15k^6} E(x, k).$$

25. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x \cos^3 x\,dx}{\Delta} = \frac{3k^4 \sin^4 x - (5k^4-4k^2) \sin^2 x - 10k^2 + 8}{15k^6}\,\Delta.$

26. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos^4 x\,dx}{\Delta} = -\frac{3k^2 \cos^2 x + 3k^2 - 4}{15k^4} \sin x \cos x\,\Delta +$

$$+\frac{9k^4-17k^2+8}{15k^6} F(x, k) - \frac{3k^4-13k^2+8}{15k^6} E(x, k).$$

27. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos^5 x\,dx}{\Delta} = \frac{-3k^4 \cos^4 x + 4k^2 k'^2 \cos^2 x - 8k^4 + 16k^2 - 8}{15k^6}\,\Delta.$

28. $\displaystyle\int \frac{\cos^6 x\,dx}{\Delta} = \frac{3k^2 \cos^2 x + 8k^2 - 4}{15k^4} \sin x \cos x\,\Delta +$

$$+\frac{15k^6-34k^4+27k^2-8}{15k^6} F(x, k) + \frac{23k^4-23k^2+8}{15k^6} E(x, k).$$

29. $\displaystyle\int \frac{\sin^7 x\,dx}{\Delta} = \frac{8k^4 \sin^4 x + 10k^2(k^2+1) \sin^2 x + 15k^4 + 14k^2 + 15}{48k^6} \cos x\,\Delta -$

$$-\frac{(5k^4-2k^2+5)(k^2+1)}{16k^7} \ln(k \cos x + \Delta).$$

30. $\displaystyle\int \frac{\sin^6 x \cos x\,dx}{\Delta} = -\frac{8k^4 \sin^4 x + 10k^2 \sin^2 x + 15}{48k^6} \sin x\,\Delta + \frac{5}{16k^7} \arcsin(k \sin x).$

31. $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x\cos^2 x\,dx}{\Delta} = \frac{-8k^4\sin^4 x + 2k^2(k^2-5)\sin^2 x + 3k^4 + 4k^2 - 15}{48k^6}\cos x\,\Delta - \frac{k^6+k^4+3k^2-5}{16k^7}\ln(k\cos x+\Delta).$

32. $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x\cos^3 x\,dx}{\Delta} = \frac{8k^4\sin^4 x - 2k^2(6k^2-5)\sin^2 x - 18k^2 + 15}{48k^6}\sin x\,\Delta + \frac{6k^2-5}{16k^7}\arcsin(k\sin x).$

33. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\cos^4 x\,dx}{\Delta} = \frac{8k^4\sin^4 x - 2k^2(7k^2-5)\sin^2 x + 3k^4 - 22k^2 + 15}{48k^6}\cos x\,\Delta - \frac{k^6+3k^4-9k^2+5}{16k^7}\ln(k\cos x+\Delta).$

34. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\cos^5 x\,dx}{\Delta} = \frac{-8k^4\sin^4 x + 2k^2(12k^2-5)\sin^2 x - 24k^4 + 36k^2 - 15}{48k^6}\sin x\,\Delta + \frac{8k^4-12k^2+5}{16k^7}\arcsin(k\sin x).$

35. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos^6 x\,dx}{\Delta} = \frac{-8k^4\sin^4 x + 2k^2(13k^2-5)\sin^2 x - 33k^4 + 40k^2 - 15}{48k^6}\cos x\,\Delta + \frac{5k'^6}{16k^7}\ln(k\cos x+\Delta).$

36. $\displaystyle\int \frac{\cos^7 x\,dx}{\Delta} = \frac{8k^4\sin^4 x - 2k^2(18k^2-5)\sin^2 x + 72k^4 - 54k^2 + 15}{48k^6}\sin x\,\Delta + \frac{16k^6-24k^4+18k^2-5}{16k^7}\arcsin(k\sin x).$

37. $\displaystyle\int \frac{dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k'^2}E(x,k) - \frac{k^2}{k'^2}\frac{\sin x\cos x}{\Delta}.$

38. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\Delta^3} = -\frac{\cos x}{k'^2\Delta}.$

39. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\Delta^3} = \frac{\sin x}{\Delta}.$

40. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k'^2k^2}E(x,k) - \frac{1}{k^2}F(x,k) - \frac{1}{k'^2}\frac{\sin x\cos x}{\Delta}.$

41. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2\Delta}.$

42. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}F(x,k) - \frac{1}{k^2}E(x,k) + \frac{\sin x\cos x}{\Delta}.$

43. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\Delta^3} = -\frac{\cos x}{k^2k'^2\Delta} + \frac{1}{k^3}\ln(k\cos x+\Delta).$

44. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\cos x\,dx}{\Delta^3} = \frac{\sin x}{k^2\Delta} - \frac{1}{k^3}\arcsin(k\sin x).$

45. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos^2 x\,dx}{\Delta^3} = \frac{\cos x}{k^2\Delta} - \frac{1}{k^3}\ln(k\cos x+\Delta).$

46. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\Delta^3} = -\frac{k'^2\sin x}{k^2\Delta} + \frac{1}{k^3}\arcsin(k\sin x).$

47. $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\Delta^3} = \frac{k'^2+1}{k'^2k^4}E(x,k) - \frac{2}{k^4}F(x,k) - \frac{\sin x\cos x}{k^2k'^2\Delta}.$

48. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\cos x\,dx}{\Delta^3} = \frac{2-k^2\sin^2 x}{k^4\Delta}.$

49. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x\,dx}{\Delta^3} = \frac{2-k^2}{k^4} F(x, k) - \frac{2}{k^4} E(x, k) + \frac{\sin x \cos x}{k^2 \Delta}.$

50. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos^3 x\,dx}{\Delta^3} = \frac{k^2 \sin^2 x + k^2 - 2}{k^4 \Delta}.$

51. $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x\,dx}{\Delta^3} = \frac{k'^2+1}{k^4} E(x, k) - \frac{2k'^2}{k^4} F(x, k) - \frac{k'^2 \sin x \cos x}{k^2 \Delta}.$

52. $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\Delta^3} = \frac{k^2 k'^2 \sin^2 x + k^2 - 3}{2k^4 k'^2 \Delta} \cos x + \frac{k^2+3}{2k^5} \ln (k \cos x + \Delta).$

53. $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x \cos x\,dx}{\Delta^3} = \frac{-k^2 \sin^2 x + 3}{2k^4 \Delta} \sin x - \frac{3}{2k^5} \arcsin (k \sin x).$

54. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x \cos^2 x\,dx}{\Delta} = \frac{-k^2 \sin^2 x + 3}{2k^4 \Delta} \cos x + \frac{k^2-3}{2k^5} \ln (k \cos x + \Delta).$

55. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos^3 x\,dx}{\Delta^3} = \frac{k^2 \sin^2 x + 2k^2 - 3}{2k^4 \Delta} \sin x - \frac{2k^2-3}{2k^5} \arcsin (k \sin x).$

56. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos^4 x\,dx}{\Delta^3} = \frac{k^2 \sin^2 x + 2k^2 - 3}{2k^4 \Delta} \cos x + \frac{3k'^2}{2k^5} \ln (k \cos x + \Delta).$

57. $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x\,dx}{\Delta^3} = \frac{-k^2 \sin^2 x + 2k^4 - 4k^2 + 3}{2k^4 \Delta} \sin x + \frac{4k^2-3}{2k^5} \arcsin (k \sin x).$

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{\Delta^5} = \frac{-k^2 \sin x \cos x}{3k'^2 \Delta^3} - \frac{2k^2 (k'^2+1) \sin x \cos x}{3k'^4 \Delta} - \frac{1}{3k'^2} F(x, k) +$

$$+ \frac{2(k'^2+1)}{3k'^4} E(x, k).$$

59. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\Delta^5} = \frac{2k^2 \sin^3 x + k^2 - 3}{3k'^4 \Delta^3} \cos x.$

60. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\Delta^5} = \frac{-2k^2 \sin^2 x + 3}{3\Delta^3} \sin x.$

61. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\Delta^5} = \frac{k^2+1}{3k'^4 k^2} E(x, k) - \frac{1}{3k'^2 k^3} F(x, k) +$

$$+ \frac{k^2 (k^2+1) \sin^2 x - 2}{3k'^4 \Delta^3} \sin x \cos x.$$

62. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x\,dx}{\Delta^5} = \frac{1}{3k^2 \Delta^3}.$

63. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\Delta^5} = \frac{1}{3k^2} F(x, k) + \frac{2k^2-1}{3k^2 k'^2} E(x, k) +$

$$+ \frac{k^2 (2k^2 - 1) \sin^2 x - 3k^2 + 2}{3k'^2 \Delta} \sin x \cos x.$$

64. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\Delta^5}\,dx = \frac{(3k^2-1) \sin^2 x - 2}{3k'^4 \Delta^3} \cos x.$

65. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\Delta^5}\,dx = \frac{\sin^3 x}{3\Delta^3}.$

66. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos^2 x}{\Delta^5}\,dx = -\frac{\cos^3 x}{3k'^2 \Delta^3}.$

67. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\Delta^5} = \frac{-(2k^2+1) \sin^2 x + 3}{3\Delta^3} \sin x.$

68. $\displaystyle\int \frac{dx}{\Delta \sin x} = -\frac{1}{2} \ln \frac{\Delta + \cos x}{\Delta - \cos x}.$

69. $\displaystyle\int \frac{dx}{\Delta \cos x} = -\frac{1}{2k'} \ln \frac{\Delta - k' \sin x}{\Delta + k' \sin x}.$

70. $\int \frac{dx}{\Delta \sin^2 x} = \int \frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{\Delta} dx = F(x, k) - E(x, k) - \Delta \operatorname{ctg} x.$

71. $\int \frac{dx}{\Delta \sin x \cos x} = \int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\Delta}{1+\Delta} + \frac{1}{2k'} \ln \frac{\Delta + k'}{\Delta - k'}.$

72. $\int \frac{dx}{\Delta \cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \frac{dx}{\Delta} = F(x, k) - \frac{1}{k'^2} E(x, k) + \frac{1}{k'^2} \Delta \operatorname{tg} x.$

73. $\int \frac{\sin x}{\cos x} \frac{dx}{\Delta} = \int \operatorname{tg} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k'} \ln \frac{\Delta + k'}{\Delta - k'}.$

74. $\int \frac{\cos x}{\sin x} \frac{dx}{\Delta} = \int \operatorname{ctg} x \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\Delta}{1+\Delta}.$

75. $\int \frac{dx}{\Delta \sin^3 x} = -\frac{\Delta \cos x}{2 \sin^2 x} - \frac{1+k^2}{4} \ln \frac{\Delta + \cos x}{\Delta - \cos x}.$

76. $\int \frac{dx}{\Delta \sin^2 x \cos x} = -\frac{\Delta}{\sin x} - \frac{1}{2k'} \ln \frac{\Delta - k' \sin x}{\Delta + k' \sin x}.$

77. $\int \frac{dx}{\Delta \sin x \cos^2 x} = \frac{\Delta}{k'^2 \cos x} + \frac{1}{2} \ln \frac{\Delta - \cos x}{\Delta + \cos x}.$

78. $\int \frac{dx}{\Delta \cos^3 x} = \frac{\Delta \sin x}{2k'^2 \cos^2 x} + \frac{2k^2 - 1}{4k'^3} \ln \frac{\Delta - k' \sin x}{\Delta + k' \sin x}.$

79. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \frac{dx}{\Delta} = \frac{\Delta}{k'^2 \cos x}.$

80. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \frac{dx}{\Delta} = -\frac{\Delta}{\sin x}.$

81. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2k'} \ln \frac{\Delta + k' \sin x}{\Delta - k' \sin x} - \frac{1}{k} \arcsin (k \sin x).$

82. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} \frac{dx}{\Delta} = \frac{1}{2} \ln \frac{\Delta + \cos x}{\Delta - \cos x} + \frac{1}{k} \ln (k \cos x + \Delta).$

83. $\int \frac{dx}{\Delta \sin^4 x} = \frac{1}{3} \{ -\Delta \operatorname{ctg}^3 x - \Delta (2k^2 + 3) \operatorname{ctg} x + (k^2 + 2) F(x, k) -$
$$- 2(k^2 + 1) E(x, k) \}.$$

84. $\int \frac{dx}{\Delta \sin^3 x \cos x} = \int (\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^3 x) \frac{dx}{\Delta} =$
$$= -\frac{\Delta}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2k'} \ln \frac{\Delta + k'}{\Delta - k'} - \frac{k^2 + 2}{4} \ln \frac{1+\Delta}{1-\Delta}.$$

85. $\int \frac{dx}{\Delta \sin^2 x \cos^2 x} = \int (\operatorname{tg}^2 x + 2 + \operatorname{ctg}^2 x) \frac{dx}{\Delta} =$
$$= \left(\frac{\operatorname{tg} x}{k'^2} - \operatorname{ctg} x \right) \Delta + \frac{k^2 - 2}{k'^2} E(x, k) + 2F(x, k).$$

86. $\int \frac{dx}{\Delta \sin x \cos^3 x} = \int (\operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x) \frac{dx}{\Delta} =$
$$= \frac{\Delta}{2k'^2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\Delta}{1-\Delta} + \frac{2 - 3k^2}{4k'^3} \ln \frac{\Delta + k'}{\Delta - k'}.$$

87. $\int \frac{dx}{\Delta \cos^4 x} = \frac{1}{3k'^2} \Big\{ \Delta \operatorname{tg}^3 x - \frac{5k^2 - 3}{k'^2} \Delta \operatorname{tg} x - (3k^2 - 2) F(x, k) +$
$$+ \frac{2(2k^2 - 1)}{k'^2} E(x, k) \Big\}.$$

88. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \frac{dx}{\Delta} = \int \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \frac{dx}{\Delta} = \frac{\Delta}{2k'^2 \cos^2 x} - \frac{k^2}{4k'^3} \ln \frac{\Delta + k'}{\Delta - k'}.$

89. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} \frac{dx}{\Delta} = -\frac{\Delta}{2 \sin^2 x} - \frac{k^2}{4} \ln \frac{1+\Delta}{1-\Delta}.$

90. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{dx}{\Delta} = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\Delta} dx = \frac{\Delta}{k'^2}\operatorname{tg} x - \frac{1}{k'^2} E(x, k).$

91. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\frac{dx}{\Delta} = \int \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\Delta} dx = -\Delta \operatorname{ctg} x - E(x, k).$

92. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\frac{dx}{\Delta} = \frac{\Delta}{k^2} + \frac{1}{2k'}\ln\frac{\Delta + k'}{\Delta - k'}.$

93. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\frac{dx}{\Delta} = \frac{\Delta}{k^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\Delta}{1-\Delta}.$

94. $\int \frac{dx}{\Delta \sin^5 x} = -\frac{[3(1+k^2)\sin^2 x + 2]}{8\sin^4 x}\Delta \cos x + \frac{3k^4 + 2k^2 + 3}{16}\ln\frac{\Delta + \cos x}{\Delta - \cos x}.$

95. $\int \frac{dx}{\Delta \sin^4 x \cos x} = -\frac{(3+2k^2)\sin^2 x + 1}{3\sin^3 x}\Delta - \frac{1}{2k'}\ln\frac{\Delta - k'\sin x}{\Delta + k'\sin x}.$

96. $\int \frac{dx}{\Delta \sin^3 x \cos^2 x} = \frac{(3-k^2)\sin^2 x - k'^2}{2k'^2 \sin^2 x \cos x}\Delta + \frac{k^2+3}{4}\ln\frac{\Delta - \cos x}{\Delta + \cos x}.$

97. $\int \frac{dx}{\Delta \sin^3 x \cos^3 x} = \frac{(3-2k^2)\sin^2 x - 2k'^2}{2k'^2 \sin x \cos^2 x}\Delta - \frac{4k^2-3}{4k'^3}\ln\frac{\Delta + k'\sin x}{\Delta - k'\sin x}.$

98. $\int \frac{dx}{\Delta \sin x \cos^4 x} = \frac{(5k^2-3)\sin^2 x - 6k^2 + 4}{3k'^4 \cos^3 x}\Delta - \frac{1}{2}\ln\frac{\Delta + \cos x}{\Delta - \cos x}.$

99. $\int \frac{dx}{\Delta \cos^5 x} = \frac{3(2k^2-1)\sin^2 x - 8k^2 + 5}{8k'^4 \cos^4 x}\Delta \sin x +$
$$+ \frac{8k^4 - 8k^2 + 3}{16k'^5}\ln\frac{\Delta + k'\sin x}{\Delta - k'\sin x}.$$

100. $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}\frac{dx}{\Delta} = -\frac{2k^2\cos^2 x - k'^2}{3k'^4 \cos^3 x}\Delta.$

101. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\frac{dx}{\Delta} = -\frac{2k^2\sin^2 x + 1}{3\sin^3 x}\Delta.$

102. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\frac{dx}{\Delta} = \frac{\Delta \sin x}{2k'^2\cos^2 x} - \frac{1}{4k'^3}\ln\frac{\Delta + k'\sin x}{\Delta - k'\sin x}.$

103. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\frac{dx}{\Delta} = -\frac{\Delta \cos x}{2\sin^2 x} + \frac{k'^2}{4}\ln\frac{\Delta + \cos x}{\Delta - \cos x}.$

104. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\frac{dx}{\Delta} = \frac{\Delta}{k'^2 \cos x} + \frac{1}{k}\ln(k\cos x + \Delta).$

105. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\frac{dx}{\Delta} = \frac{-\Delta}{\sin x} - \frac{1}{k}\arcsin(k\sin x).$

106. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\frac{dx}{\Delta} = \frac{\Delta \sin x}{2k^2} + \frac{1}{2k'}\ln\frac{\Delta + k'\sin x}{\Delta - k'\sin x} - \frac{2k^2+1}{2k^3}\arcsin(k\sin x).$

107. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}\frac{dx}{\Delta} = \frac{\Delta \cos x}{2k^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\Delta + \cos x}{\Delta - \cos x} + \frac{3k^2-1}{2k^3}\ln(k\cos x + \Delta).$

2.585

1. $\int \frac{(a+\sin x)^{p+2}\,dx}{\Delta} = \frac{1}{(p+2)k^3}\Big[(a+\sin x)^p \cos x\,\Delta +$
$$+ 2(2p+3)ak^2\int \frac{(a+\sin x)^{p+2}\,dx}{\Delta} + (p+1)(1+k^2-6a^2k^2)\int \frac{(a+\sin x)^{p+1}\,dx}{\Delta} -$$
$$- a(2p+1)(1+k^2-2a^2k^2)\int \frac{(a+\sin x)^p\,dx}{\Delta} -$$
$$- p(1-a^2)(1-a^2k^2)\int \frac{(a+\sin x)^{p-1}\,dx}{\Delta}\Big]$$
$$\left[p \neq -2, \quad a \neq \pm 1, \quad a \neq \pm \frac{1}{k}\right].$$

При $p=n$ натуральном этот интеграл может быть сведен к следующим трем интегралам:

2. $$\int \frac{a+\sin x}{\Delta}\,dx = aF(x,\,k)+\frac{1}{2k}\ln\frac{\Delta-k\cos x}{\Delta+k\cos x}.$$

3. $$\int \frac{(a+\sin x)^2}{\Delta}\,dx = \frac{1+k^2a^2}{k^2}F(x,\,k)-\frac{1}{k^2}E(x,\,k)+\frac{a}{k}\ln\frac{\Delta-k\cos x}{\Delta+k\cos x}.$$

4. $$\int \frac{dx}{(a+\sin x)\,\Delta} = \frac{1}{a}\Pi\left(x,\,-\frac{1}{a^2},\,k\right)-\int\frac{\sin x\,dx}{(a^2-\sin^2 x)\,\Delta},$$

где

5. $$\int \frac{\sin x\,dx}{(a^2-\sin^2 x)\,\Delta} = \frac{-1}{2\sqrt{(1-a^2)(1-a^2k^2)}}\ln\frac{\sqrt{1-a^2}\,\Delta-\sqrt{1-k^2a^2}\cos x}{\sqrt{1-a^2}\,\Delta+\sqrt{1-k^2a^2}\cos x}.$$

2.586

1. $$\int \frac{dx}{(a+\sin x)^n\,\Delta} = \frac{1}{(n-1)(1-a^2)(1-a^2k^2)}\left[-\frac{\cos x\,\Delta}{(a+\sin x)^{n-1}}-\right.$$
$$-(2n-3)(1+k^2-2a^2k^2)\,a\int\frac{dx}{(a+\sin x)^{n-1}\,\Delta}-$$
$$-(n-2)(6a^2k^2-k^2-1)\int\frac{dx}{(a+\sin x)^{n-2}\,\Delta}-$$
$$\left.-(10-4n)\,ak^2\int\frac{dx}{(a+\sin x)^{n-3}\,\Delta}-(n-3)\,k^2\int\frac{dx}{(a+\sin x)^{n-4}\,\Delta}\right]$$
$$\left[n\neq 1,\quad a\neq\pm 1,\quad a\neq\pm\frac{1}{k}\right].$$

Этот интеграл сводится к интегралам:

2. $$\int \frac{dx}{(a+\sin x)^2\,\Delta} = \frac{1}{(1-a^2)(1-a^2k^2)}\left[-\frac{\cos x\,\Delta}{a+\sin x}-\right.$$
$$-a(1+k^2-2a^2k^2)\int\frac{dx}{(a+\sin x)\,\Delta}-2ak^2\int\frac{(a+\sin x)\,dx}{\Delta}+$$
$$\left.+k^2\int\frac{(a+\sin x)^2\,dx}{\Delta}\right]\quad \text{(см. 2.585 2., 3. 4.).}$$

3. $$\int \frac{dx}{(a+\sin x)^3\,\Delta} = \frac{1}{2(1-a^2)(1-a^2k^2)}\left[-\frac{\cos x\,\Delta}{(a+\sin x)^2}-\right.$$
$$\left.-3a(1+k^2-2a^2k^2)\int\frac{dx}{(a+\sin x)^2\,\Delta}-(6a^2k^2-k^2-1)\int\frac{dx}{(a+\sin x)\,\Delta}+2ak^2F(x,k)\right]$$

(см. 2.585 4. и 2.586 2.).

Для $a=\pm 1$ имеем:

4. $$\int \frac{dx}{(1\pm\sin x)^n\,\Delta} = \frac{1}{(2n-1)\,k'^2}\left[\mp\frac{\cos x\,\Delta}{(1\pm\sin x)^n}+\right.$$
$$+(n-1)(1-5k^2)\int\frac{dx}{(1\pm\sin x)^{n-1}\,\Delta}+2(2n-3)\,k^2\int\frac{dx}{(1\pm\sin x)^{n-2}\,\Delta}-$$
$$\left.-(n-2)\,k^2\int\frac{dx}{(1\pm\sin x)^{n-3}\,\Delta}\right].\quad \text{ГХI [241] (6a)}$$

Этот интеграл сводится к интегралам:

5. $$\int \frac{dx}{(1\pm\sin x)\,\Delta} = \frac{\mp\cos x\Delta}{k'^2(1\pm\sin x)}+F(x,\,k)-\frac{1}{k'^2}E(x,\,k).\quad \text{ГХI [241] (6c)}$$

6. $$\int \frac{dx}{(1\pm\sin x)^2\,\Delta} = \frac{1}{3k'^4}\left[\mp\frac{k'^2\cos x\,\Delta}{(1\pm\sin x)^3}\mp\frac{(1-5k^2)\cos x\,\Delta}{1\pm\sin x}+\right.$$
$$\left.+(1-3k^2)\,k'^2F(x,\,k)-(1-5k^2)\,E(x,\,k)\right].\quad \text{ГХI [241] (6b)}$$

Для $a = \pm \frac{1}{k}$ имеем:

7. $$\int \frac{dx}{(1 \pm k \sin x)^n \Delta} = \frac{1}{(2n-1) k'^2} \left[\pm \frac{k \cos x \Delta}{(1 \pm k \sin x)^n} + \right.$$
$$+ (n-1)(5-k^2) \int \frac{dx}{(1 \pm k \sin x)^{n-1} \Delta} - 2(2n-3) \int \frac{dx}{(1 \pm k \sin x)^{n-2} \Delta} +$$
$$\left. + (n-2) \int \frac{dx}{(1 \pm k \sin x)^{n-3} \Delta} \right].$$ ГХI [241] (7a)

Этот интеграл сводится к интегралам:

8. $$\int \frac{dx}{(1 \pm k \sin x) \Delta} = \pm \frac{k \cos x \Delta}{k'^2 (1 \pm \sin x)} + \frac{1}{k'^2} E(x, k).$$ ГХI [241] (7b)

9. $$\int \frac{dx}{(1 \pm k \sin x)^2 \Delta} = \frac{1}{3k'^4} \left[\pm \frac{kk'^2 \cos x \Delta}{(1 \pm k \sin x)^2} \pm \frac{k(5-k^2) \cos x \Delta}{1 \pm k \sin x} - \right.$$
$$\left. - 2k'^2 F(x, k) + (5-k^2) E(x, k) \right].$$ ГХI [241] (7c)

2.587

1. $$\int \frac{(b+\cos x)^{p+3} dx}{\Delta} =$$
$$= \frac{1}{(p+2) k^2} \left[(b + \cos x)^p \sin x \Delta + 2(2p+3) bk^2 \int \frac{(b+\cos x)^{p+2} dx}{\Delta} - \right.$$
$$- (p+1)(k'^2 - k^2 + 6b^2k^2) \int \frac{(b+\cos x)^{p+1} dx}{\Delta} +$$
$$+ (2p+1) b (k'^2 - k^2 + b^2k^2) \int \frac{(b+\cos x)^p dx}{\Delta} +$$
$$\left. + p(1-b^2)(k'^2 + k^2b^2) \int \frac{(b+\cos x)^{p-1} dx}{\Delta} \right]$$
$$\left[p \neq -2, \quad b \neq \pm 1, \quad b \neq \frac{ik'}{k} \right].$$

При $p = n$ натуральном этот интеграл может быть сведен к следующим трем интегралам:

2. $$\int \frac{b+\cos x}{\Delta} dx = bF(x, k) + \frac{1}{k} \arcsin(k \sin x).$$

3. $$\int \frac{(b+\cos x)^2}{\Delta} dx = \frac{b^2k^2 - k'^2}{k^2} F(x, k) + \frac{1}{k^2} E(x, k) + \frac{2b}{k} \arcsin(k \sin x).$$

4. $$\int \frac{dx}{(b+\cos x) \Delta} = \frac{b}{b^2-1} \Pi\left(x, \frac{b}{b^2-1}, k\right) + \int \frac{\cos x \, dx}{(1-b^2-\sin^2 x) \Delta},$$

где

5. $$\int \frac{\cos x \, dx}{(1-b^2-\sin^2 x) \Delta} = \frac{1}{2\sqrt{(1-b^2)(k'^2+k^2b^2)}} \ln \frac{\sqrt{1-b^2} \Delta + k \sqrt{k'^2 + k^2b^2} \sin x}{\sqrt{1-b^2} \Delta - k \sqrt{k'^2 + k^2b^2} \sin x}.$$

2.588

1. $$\int \frac{dx}{(b+\cos x)^n \Delta} = \frac{1}{(n-1)(1-b^2)(k'^2+b^2k^2)} \left[\frac{\sin x \Delta}{(b+\cos x)^{n-1}} - \right.$$
$$- (2n-3)(1-2k^2+2b^2k^2) b \int \frac{dx}{(b+\cos x)^{n-1} \Delta} -$$
$$- (n-2)(2k^2-1-6b^2k^2) \int \frac{dx}{(b+\cos x)^{n-2} \Delta} -$$
$$\left. - (4n-10) bk^2 \int \frac{dx}{(b+\cos x)^{n-3} \Delta} + (n-3) k^2 \int \frac{dx}{(b+\cos x)^{n-4} \Delta} \right]$$
$$\left[n \neq 1, \quad b \neq \pm 1, \quad b \neq \pm \frac{ik'}{k} \right].$$

Этот интеграл сводится к следующим интегралам:

2. $$\int \frac{dx}{(b+\cos x)^2 \Delta} = \frac{1}{(1-b^2)(k'^2+b^2k^2)} \left[\frac{\sin x\,\Delta}{b+\cos x} - (1-2k^2+2b^2k^2)\, b \int \frac{dx}{(b+\cos x)\,\Delta} + 2bk^2 \int \frac{b+\cos x}{\Delta}\, dx - k^2 \int \frac{(b+\cos x)^2}{\Delta}\, dx \right]$$ (см. 2.587 2., 3., 4.).

3. $$\int \frac{dx}{(b+\cos x)^3 \Delta} = \frac{1}{2(1-b^2)(k'^2+b^2k^2)} \left[\frac{\sin x\,\Delta}{(b+\cos x)^2} - 3b(1-2k^2+2k^2b^2) \int \frac{dx}{(b+\cos x)^2 \Delta} - (2k^2-1-6b^2k^2) \int \frac{dx}{(b+\cos x)\,\Delta} - 2bk^2 F(x,k) \right]$$ (см. 2.588 2. и 2.587 4.).

2.589

1. $$\int \frac{(c+\operatorname{tg} x)^{p+3}\, dx}{\Delta} = \frac{1}{(p+2)\,k'^2} \left[\frac{(c+\operatorname{tg} x)^p\, \Delta}{\cos^2 x} + 2(2n+3)\, ck'^2 \int \frac{(c+\operatorname{tg} x)^{p+2}\, dx}{\Delta} - (p+1)(1+k'^2+6c^2k'^2) \int \frac{(c+\operatorname{tg} x)^{p+1}\, dx}{\Delta} + (2p+1)\, c\,(1+k'^2+2c^2k'^2) \int \frac{(c+\operatorname{tg} x)^p\, dx}{\Delta} - p(1+c^2)(1+k'^2c^2) \int \frac{(c+\operatorname{tg} x)^{p-1}\, dx}{\Delta} \right] \quad [p \neq -2].$$

При $p=n$ натуральном этот интеграл может быть сведен к следующим трем интегралам:

2. $$\int \frac{c+\operatorname{tg} x}{\Delta}\, dx = cF(x,k) + \frac{1}{2k'} \ln \frac{\Delta+k'}{\Delta-k'}.$$

3. $$\int \frac{(c+\operatorname{tg} x)^2}{\Delta}\, dx = \frac{1}{k'^2} \operatorname{tg} x\, \Delta + c^2 F(x,k) - \frac{1}{k'^2} E(x,k) + \frac{c}{k'} \ln \frac{\Delta+k'}{\Delta-k'}.$$

4. $$\int \frac{dx}{(c+\operatorname{tg} x)\,\Delta} = \frac{c}{1+c^2} F(x,k) + \frac{1}{c(1+c^2)} \Pi\left(x, -\frac{1+c^2}{c^2}, k\right) - \int \frac{\sin x \cos x\, dx}{[c^2-(1+c^2)\sin^2 x]\,\Delta},$$

где

5. $$\int \frac{\sin x \cos x\, dx}{[c^2-(1+c^2)\sin^2 x]\,\Delta} = \frac{1}{2\sqrt{(1+c^2)(1+c^2k'^2)}} \ln \frac{\sqrt{1+c^2k'^2}+\sqrt{1+c^2}\,\Delta}{\sqrt{1+c^2k'^2}-\sqrt{1+c^2}\,\Delta}.$$

2.591

1. $$\int \frac{dx}{(c+\operatorname{tg} x)^n \Delta} = \frac{1}{(n-1)(1+c^2)(1+k'^2c^2)} \left[-\frac{\Delta}{(c+\operatorname{tg} x)^{n-1} \cos^2 x} + (2n-3)\, c\,(1+k'^2+2c^2k'^2) \int \frac{dx}{(c+\operatorname{tg} x)^{n-1} \Delta} - (n-2)(1+k'^2+6c^2k'^2) \int \frac{dx}{(c+\operatorname{tg} x)^{n-2} \Delta} + (4n-10)\, ck'^2 \int \frac{dx}{(c+\operatorname{tg} x)^{n-3} \Delta} - (n-3)\, k'^2 \int \frac{dx}{(c+\operatorname{tg} x)^{n-4} \Delta} \right].$$

Этот интеграл сводится к интегралам:

2. $$\int \frac{dx}{(c+\operatorname{tg} x)^2 \Delta} = \frac{1}{(1+c^2)(1+k'^2c^2)} \left[\frac{-\Delta}{(c+\operatorname{tg} x)\cos^2 x} + \right.$$
$$\left. + c(1+k'^2+2c^2k'^2)\int \frac{dx}{(c+\operatorname{tg} x)\Delta} - 2ck'^2 \int \frac{c+\operatorname{tg} x}{\Delta} dx + k'^2 \int \frac{(c+\operatorname{tg} x)^2}{\Delta} dx \right]$$
(см. 2.589 2., 3., 4.).

3. $$\int \frac{dx}{(c+\operatorname{tg} x)^3 \Delta} = \frac{1}{2(1+c^2)(1+k'^2c^2)} \left[\frac{-\Delta}{(c+\operatorname{tg} x)^2 \cos^2 x} + \right.$$
$$+ 3c(1+k'^2+2c^2k'^2)\int \frac{dx}{(c+\operatorname{tg} x)^2 \Delta} -$$
$$\left. -(1+k'^2+6c^2k'^2)\int \frac{dx}{(c+\operatorname{tg} x)\Delta} + 2ck'^2 F(x, k) \right]$$
(см. 2.591 2. и 2.589 4.).

2.592

1. $P_n = \int \frac{(a+\sin^2 x)^n}{\Delta} dx.$

Рекуррентная формула
$$P_{n+2} = \frac{1}{(2n+3)k^2} \{(a+\sin^2 x)^n \sin x \cos x \Delta + (2n+2)(1+k^2+3ak^2) P_{n+1} -$$
$$- (2n+1)[1+2a(1+k^2)+3a^2k^2] P_n + 2na(1+a)(1+k^2a) P_{n-1}\}$$
сводит этот интеграл при n целом к интегралам

2. P_1 см. 2.584 1. и 2.584 4.

3. P_0 см. 2.584 1.

4. $P_{-1} = \int \frac{dx}{(a+\sin^2 x)\Delta} = \frac{1}{a} \Pi\left(x, \frac{1}{a}, k\right).$

При $a=0$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \Delta}$ см. 2.584 70. Ж37 (124) и

6. $T_n = \int \frac{dx}{(h+g\sin^2 x)^n \Delta}$

вычисляется при помощи рекуррентной формулы:
$$T_{n-3} = \frac{1}{(2n-5)k^2} \left\{ \frac{-g^2 \sin x \cos x \Delta}{(h+g\sin^2 x)^{n-1}} + 2(n-2)[g(1+k^2)+3hk^2] T_{n-2} - \right.$$
$$\left. -(2n-3)[g^2+2hg(1+k^2)+3h^2k^2] T_{n-1} + 2(n-1)h(g+h)(g+hk^2) T_n \right\}.$$

2.593

1. $Q_n = \int \frac{(b+\cos^2 x)^n}{\Delta} dx.$

Рекуррентная формула
$$Q_{n+2} = \frac{1}{(2n+3)k^2} \left\{ (b+\cos^2 x)^n \sin x \cos x \Delta - (2n+2)(1-2k^2-3bk^2) Q_{n+1} + \right.$$
$$\left. + (2n+1)[k'^2+2b(k'^2-k^2)-3b^2k^2] Q_n - 2nb(1-b)(k'^2-k^2b) Q_{n-1} \right\}$$
сводит этот интеграл при n целом к интегралам:

2. Q_1 см. 2.584 1. и 2.584 6.

3. Q_0 см. 2.584 1.

4. $Q_{-1} = \int \frac{dx}{(b+\cos^2 x)\Delta} = \frac{1}{b+1} \Pi\left(x, -\frac{1}{b+1}, k\right).$

При $b=0$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\,\Delta}$ см. 2.584 72. Ж 37 (123)

2.594

1. $R_n = \int \frac{(c+\operatorname{tg}^2 x)^n\,dx}{\Delta}$.

Рекуррентная формула

$$R_{n+2} = \frac{1}{(2n+3)\,k'^2}\left\{\frac{(c+\operatorname{tg}^2 x)^n \operatorname{tg} x\,\Delta}{\cos^2 x} - (2n+2)(1+k'^2-3ck'^2)\,R_{n+1} + \right.$$
$$\left. + (2n+1)\left[1-2c(1+k'^2)+3c^2k'^2\right]R_n + 2nc(1-c)(1-k'^2c)\,R_{n-1}\right\}$$

сводит этот интеграл при n целом к интегралам:

2. R_1 см. 2.584 1. и 2.584 90.

3. R_0 см. 2.584 1.

4. $R_{-1} = \int \frac{dx}{(c+\operatorname{tg}^2 x)\,\Delta} = \frac{1}{c-1} F(x, k) + \frac{1}{c(1-c)} \Pi\left(x, \frac{1-c}{c}, k\right)$.

При $c=0$ см. 2.582 5.

2.595 Интегралы типа $\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{1-p^2\sin^2 x}\right)dx$ при $p^2>1$.

Обозначение: $\alpha = \arcsin(p\sin x)$.

Основные формулы

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} = \frac{1}{p} F\left(\alpha, \frac{1}{p}\right) \quad [p^2>1]$. БФ (283.00)

2. $\int \sqrt{1-p^2\sin^2 x}\,dx = pE\left(\alpha, \frac{1}{p}\right) - \frac{p^2-1}{p} F\left(\alpha, \frac{1}{p}\right) \quad [p^2>1]$. БФ (283.03)

3. $\int \frac{dx}{(1-r^2\sin^2 x)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} = \frac{1}{p} \Pi\left(\alpha, \frac{r^2}{p^2}, \frac{1}{p}\right) \quad [p^2>1]$. БФ (283.02)

Для вычисления интегралов вида $\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{1-p^2\sin^2 x}\right)dx$ при $p^2>1$ можно пользоваться формулами 2.583, 2.584, произведя в них предварительно следующие изменения:

1) k заменить через p; 2) k'^2 через $1-p^2$, 3) $F(x, k)$ через $\frac{1}{p}F\left(\alpha, \frac{1}{p}\right)$, 4) $E(x, k)$ через $pE\left(\alpha, \frac{1}{p}\right) - \frac{p^2-1}{p}F\left(\alpha, \frac{1}{p}\right)$.

Например (см. 2.584 15.):

2.596

1. $$\int \frac{\cos^4 x\,dx}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} = \frac{\sin x\cos x\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}{3p^2} + \frac{4p^2-2}{3p^4}\left[pE\left(\alpha; \frac{1}{p}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{p^2-1}{p} F\left(\alpha, \frac{1}{p}\right)\right] + \frac{2-5p^2+3p^4}{3p^4}\cdot\frac{1}{p}F\left(\alpha, \frac{1}{p}\right) =$$
$$= \frac{\sin x\cos x\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}{3p^2} - \frac{p^2-1}{3p^3} F\left(\alpha, \frac{1}{p}\right) + \frac{4p^2-2}{3p^3} E\left(\alpha, \frac{1}{p}\right) \quad [p^2>1];$$

(см. 2.583 36.):

2. $$\int \frac{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x\sqrt{1-p^2\sin^2 x} + \frac{1}{p}F\left(\alpha, \frac{1}{p}\right) - \left[pE\left(\alpha, \frac{1}{p}\right) - \frac{p^2-1}{p}F\left(\alpha, \frac{1}{p}\right)\right] = p\left[F\left(\alpha, \frac{1}{p}\right) - E\left(\alpha, \frac{1}{p}\right)\right] + \operatorname{tg} x\sqrt{1-p^2\sin^2 x} \quad [p^2 > 1];$$

(см. 2.584 37.):

3. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-p^2\sin^2 x)^3}} = \frac{-1}{p^2-1}\left[pE\left(\alpha, \frac{1}{p}\right) - \frac{p^2-1}{p}F\left(\alpha, \frac{1}{p}\right)\right] - \frac{p^2}{1-p^2}\cdot\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} = \frac{p^2}{p^2-1}\cdot\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} + \frac{1}{p}F\left(\alpha, \frac{1}{p}\right) - \frac{p}{p^2-1}E\left(\alpha, \frac{1}{p}\right) \quad [p^2 > 1].$$

2.597 Интегралы типа $\int R(\sin x, \cos x, \sqrt{1+p^2\sin^2 x})\,dx$.

Обозначение: $\alpha = \arcsin\dfrac{\sqrt{1+p^2}\sin x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}$.

Основные формулы

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}F\left(\alpha, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right).$$ БФ (282.00)

2. $$\int \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\,dx = \sqrt{1+p^2}\,E\left(\alpha, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - p^2\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}.$$ БФ (282.03)

3. $$\int \frac{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}\,dx}{1+(p^2-r^2p^2-r^2)\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\Pi\left(\alpha, r^2, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right).$$ БФ (282.02)

4. $$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} = -\frac{1}{p}\arcsin\left(\frac{p\cos x}{\sqrt{1+p^2}}\right).$$

5. $$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} = \frac{1}{p}\ln\left(p\sin x + \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right).$$

6. $$\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}-\cos x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}+\cos x}.$$

7. $$\int \frac{dx}{\cos x\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} = \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}}\ln\frac{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}+\sqrt{1+p^2}\sin x}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}-\sqrt{1+p^2}\sin x}.$$

8. $$\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} = \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}}\ln\frac{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}+\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}-\sqrt{1+p^2}}.$$

9. $$\int \frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{\sqrt{1+p^2\sin^2 x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}{1+\sqrt{1+p^2\sin^2 x}}.$$

2.598 Для вычисления интегралов вида $\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{1+p^2\sin^2 x}\right)dx$ можно пользоваться формулами: 2.583, 2.584, произведя в них предварительно следующие изменения:

1) k^2 заменить через $-p^2$; 2) k'^2 через $1+p^2$;

3) $F(x, k)$ через $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} F\left(\alpha, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$;

4) $E(x, k)$ через $\sqrt{1+p^2}\, E\left(\alpha, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - p^2 \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}}$;

5) $\frac{1}{k} \ln(k \cos x + \Delta)$ через $\frac{1}{p} \arcsin \frac{p \cos x}{\sqrt{1+p^2}}$;

6) $\frac{1}{k} \arcsin(k \sin x)$ через $\frac{1}{p} \ln\left(p \sin x + \sqrt{1+p^2 \sin^2 x}\right)$.

Например (см. 2.584 90.):

1. $$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x\, dx}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{(1+p^2)} \left[\operatorname{tg} x \sqrt{1+p^2 \sin^2 x} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{1+p^2}\, E\left(\alpha, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) + p^2 \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} \right] =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} E\left(\alpha, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) + \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}};$$

(см. 2.584 37.):

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+p^2 \sin^2 x)^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} E\left(\alpha, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right).$$

2.599 Интегралы типа $\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{a^2 \sin^2 x - 1}\right) dx \quad [a^2 > 1]$

Обозначение: $\alpha = \arcsin \frac{a \cos x}{\sqrt{a^2 - 1}}$.

Основные формулы:

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \sin^2 x - 1}} = -\frac{1}{a} F\left(\alpha, \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right) \quad [a^2 > 1]. \qquad \text{БФ (285.00) и}$$

2. $$\int \sqrt{a^2 \sin^2 x - 1}\, dx = \frac{1}{a} F\left(\alpha, \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right) - aE\left(\alpha, \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right) [a^2 > 1].$$
БФ (285.06) и

3. $$\int \frac{dx}{(1 - r^2 \sin^2 x) \sqrt{a^2 \sin^2 x - 1}} = \frac{1}{a(r^2-1)} \Pi\left(\alpha, \frac{r^2(a^2-1)}{a^2(r^2-1)}, \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)$$
$[a^2 > 1,\ r^2 > 1]$. БФ (285.02) и

4. $$\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{a^2 \sin^2 x - 1}} = -\frac{\alpha}{a} \quad [a^2 > 1].$$

5. $$\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{a^2 \sin^2 x - 1}} = \frac{1}{a} \ln\left(a \sin x + \sqrt{a^2 \sin^2 x - 1}\right) \quad [a^2 > 1].$$

6. $$\int \frac{dx}{\sin x \sqrt{a^2 \sin^2 x - 1}} = -\operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x - 1}} \quad [a^2 > 1].$$

7. $$\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{a^2 \sin^2 x - 1}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \ln \frac{\sqrt{a^2-1} \sin x + \sqrt{a^2 \sin^2 x - 1}}{\sqrt{a^2-1} \sin x - \sqrt{a^2 \sin^2 x - 1}}$$
$[a^2 > 1]$.

8. $\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \ln \frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{a^2\sin^2 x-1}}{\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2\sin^2 x-1}} \quad [a^2>1].$

9. $\int \frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x-1}} = -\arcsin \frac{1}{a\sin x} \quad [a^2>1].$

2.611 Для вычисления интегралов $\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{a^2\sin^2 x-1}\right) dx$ $(a^2>1)$ можно воспользоваться формулами 2.583, 2.584. Для этого надо:

1) В правых частях этих формул произвести замену следующих функций равными им интегралами:

$F(x, k)$	заменить через	$\int \frac{dx}{\Delta}$,
$E(x, k)$	заменить через	$\int \Delta\, dx$,
$-\frac{1}{k}\ln(k\cos x+\Delta)$	заменить через	$\int \frac{\sin x\,dx}{\Delta}$,
$\frac{1}{k}\arcsin(k\sin x)$	заменить через	$\int \frac{\cos x\,dx}{\Delta}$,
$\frac{1}{2}\ln\frac{\Delta-\cos x}{\Delta+\cos x}$	заменить через	$\int \frac{dx}{\Delta\sin x}$,
$\frac{1}{2k'}\ln\frac{\Delta+k'\sin x}{\Delta-k'\sin x}$	заменить через	$\int \frac{dx}{\Delta\cos x}$,
$\frac{1}{2k'}\ln\frac{\Delta+k'}{\Delta-k'}$	заменить через	$\int \frac{\operatorname{tg} x}{\Delta}\,dx$,
$\frac{1}{2}\ln\frac{1-\Delta}{1+\Delta}$	заменить через	$\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\Delta}\,dx$.

2) Затем в обеих частях равенств в этих формулах заменить Δ через $i\sqrt{a^2\sin^2 x-1}$, k через a и k'^2 через $1-a^2$.

3) Умножить обе части полученных равенств на i, в результате чего в обеих частях равенств должны оказаться только действительные функции $(a^2>1)$.

4) Вместо интегралов, стоящих в правых частях равенств, подставить их значения, взятые из формул 2.599.

Примеры:

1. Равенство 2.584 4. переписываем так:

$$\int \frac{\sin^2 x}{i\sqrt{a^2\sin^2 x-1}}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{i\sqrt{a^2\sin^2 x-1}} - \frac{1}{a^2}\int i\sqrt{a^2\sin^2 x-1}\,dx,$$

откуда получаем:

$$\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x-1}} = \frac{1}{a^2}\left\{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x-1}} + \int \sqrt{a^2\sin^2 x-1}\,dx\right\} =$$
$$= -\frac{1}{a}E\left(\alpha, \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right) \quad [a^2>1].$$

2. Равенство 2.584 58. переписываем так:

$$\int \frac{dx}{i^5\sqrt{(a^2\sin^2 x-1)^5}} = -\frac{2a^4(a^2-2)\sin^2 x-(3a^2-5)a^2}{3(1-a^2)^2 i^3\sqrt{(a^2\sin^2 x-1)^3}}\sin x\cos x -$$
$$-\frac{1}{3(1-a^2)}\int \frac{dx}{i\sqrt{a^2\sin^2 x-1}} - \frac{2a^2-4}{3(1-a^2)^2}\int i\sqrt{a^2\sin^2 x-1}\,dx,$$

откуда получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2\sin^2 x-1)^5}} = \frac{2a^4(a^2-2)\sin^2 x-(3a^2-5)a^2}{3(1-a^2)^2\sqrt{(a^2\sin^2 x-1)^3}}\sin x\cos x+\frac{1}{3(1-a^2)^2 a}\times$$
$$\times\left\{(a^2-3)F\left(\alpha, \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)-2a^2(a^2-2)E\left(\alpha, \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)\right\} \quad [a^2>1].$$

3. Равенство 2.584 71. переписываем так:

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x\, i\sqrt{a^2\sin^2 x-1}} = \int \frac{\operatorname{ctg} x\, dx}{i\sqrt{a^2\sin^2 x-1}} + \int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{i\sqrt{a^2\sin^2 x-1}},$$

откуда получаем:

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x\sqrt{a^2\sin^2 x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}\ln\frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{a^2\sin^2 x-1}}{\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a^2\sin^2 x-1}}-$$
$$-\arcsin\frac{1}{a\sin x} \quad [a^2>1].$$

2.612 Интегралы типа $\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{1-k^2\cos^2 x}\right)dx$.

Для нахождения интегралов типа $\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{1-k^2\cos^2 x}\right)dx$ следует сначала сделать подстановку $x=\frac{\pi}{2}-y$, которая дает

$$\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{1-k^2\cos^2 x}\right)dx = -\int R\left(\cos y, \sin y, \sqrt{1-k^2\sin^2 y}\right)dy.$$

Интегралы $\int R\left(\cos y, \sin y, \sqrt{1-k^2\sin^2 y}\right)dy$ находятся по формулам 2.583, 2.584. В результате использования этих формул (предполагается, что исходный интеграл приводится только к интегралам первой и второй лежандровой формы) после замены функций $F(x, k)$ и $E(x, k)$ соответствующими интегралами получится выражение вида

$$-g(\cos y, \sin y)-A\int\frac{dy}{\sqrt{1-k^2\sin^2 y}}-B\int\sqrt{1-k^2\sin^2 y}\,dy.$$

Переходя обратно к переменным x, находим:

$$\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{1-k^2\cos^2 x}\right)dx =$$
$$= -g(\sin x, \cos x)-A\int\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}-B\int\sqrt{1-k^2\cos^2 x}\,dx.$$

Входящие в это выражение интегралы находятся по формулам:

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}} = F\left(\arcsin\frac{\sin x}{\sqrt{1-k^3\cos^3 x}}, k\right).$

2. $\displaystyle\int\sqrt{1-k^2\cos^2 x}\,dx = E\left(\arcsin\frac{\sin x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}, k\right)-\frac{k^2\sin x\cos x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}.$

2.613 Интегралы типа $\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{1-p^2\cos^2 x}\right)dx$ $[p>1]$.

Для нахождения интегралов типа $\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{1-p^2\cos^2 x}\right)dx$ $[p>1]$ поступают так же, как и в 2.612. При этом пользуются формулами:

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-p^2\cos^2 x}} = -\frac{1}{p}F\left(\arcsin(p\cos x), \frac{1}{p}\right) \quad [p>1].$

2. $\int \sqrt{1-p^2\cos^2 x}\,dx = \frac{p^2-1}{p} F\left(\arcsin(p\cos x), \frac{1}{p}\right) - pE\left(\arcsin(p\cos x), \frac{1}{p}\right).$

2.614 Интегралы типа $\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{1+p^2\cos^2 x}\right) dx.$

Для нахождения интегралов типа $\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{1+p^2\cos^2 x}\right) dx$ следует сделать подстановку $x = \frac{\pi}{2} - y$, которая дает

$$\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{1+p^2\cos^2 x}\right) dx = -\int R\left(\cos y, \sin y, \sqrt{1+p^2\sin^2 y}\right) dy.$$

Для вычисления интегралов $-\int R\left(\cos y, \sin y, \sqrt{1+p^2\sin^2 y}\right) dy$ следует пользоваться сказанным в 2.598 и 2.612, а затем, после обратного перехода к переменным x, формулами:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+p^2\cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} F\left(x, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right).$
2. $\int \sqrt{1+p^2\cos^2 x}\,dx = \sqrt{1+p^2}\, E\left(x, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right).$

2.615 Интегралы типа $\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{a^2\cos^2 x - 1}\right) dx$ $[a > 1]$.

Для нахождения интегралов типа $\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{a^2\cos^2 x - 1}\right) dx$ следует сделать подстановку $x = \frac{\pi}{2} - y$, которая дает

$$\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{a^2\cos^2 x - 1}\right) dx = -\int R\left(\cos y, \sin y, \sqrt{a^2\sin^2 y - 1}\right) dy.$$

Для вычисления интегралов $-\int R\left(\cos y, \sin y, \sqrt{a^2\sin^2 y - 1}\right) dy$ следует пользоваться сказанным в 2.611 и затем, после обратного перехода к переменным x, формулами:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x - 1}} = \frac{1}{a} F\left(\arcsin\frac{a\sin x}{\sqrt{a^2-1}}, \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)$ $[a > 1]$.
2. $\int \sqrt{a^2\cos^2 x - 1}\,dx = aE\left(\arcsin\frac{a\sin x}{\sqrt{a^2-1}}, \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right) - \frac{1}{a} F\left(\arcsin\frac{a\sin x}{\sqrt{a^2-1}}, \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)$ $[a > 1]$.

2.616 Интегралы типа $\int R\left(\sin x, \cos x, \sqrt{1-p^2\sin^2 x}, \sqrt{1-q^2\sin^2 x}\right) dx.$

Обозначение: $\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{1-p^2}\sin x}{\sqrt{1-p^2\sin^2 x}}$.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-p^2\sin^2 x)(1-q^2\sin^2 x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} F\left(\alpha, \sqrt{\frac{q^2-p^2}{1-p^2}}\right)$ $\left[0 < p^2 < q^2 < 1,\ 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}\right].$ БФ (284.00)

2. $$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x\, dx}{\sqrt{(1-p^2\sin^2 x)(1-q^2\sin^2 x)}} = \frac{\operatorname{tg} x \sqrt{1-q^2\sin^2 x}}{(1-q^2)\sqrt{1-p^2\sin^2 x}} - \frac{1}{(1-q^2)\sqrt{1-p^2}} E\left(\alpha, \sqrt{\frac{q^2-p^2}{1-p^2}}\right) \quad \left[0<p^2<q^2<1,\ 0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right].$$

БФ (284.07)

3. $$\int \frac{\operatorname{tg}^4 x\, dx}{\sqrt{(1-p^2\sin^2 x)(1-q^2\sin^2 x)}} = \frac{1}{3(1-q^2)^2(1-p^2)^{3/2}} \times \left[2(2-p^2-q^2)E\left(\alpha, \sqrt{\frac{q^2-p^2}{1-p^2}}\right) - (1-q^2)F\left(\alpha, \sqrt{\frac{q^2-p^2}{1-p^2}}\right)\right] + \frac{2p^2+q^2-3+\sin^2 x(4-3p^2-2q^2+p^2q^2)}{3(1-p^2)(1-q^2)^2} \frac{\sin x}{\cos^3 x} \sqrt{\frac{1-q^2\sin^2 x}{1-p^2\sin^2 x}}$$
$$\left[0<p^2<q^2<1,\ 0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right].$$

БФ (284.07)

4. $$\int \frac{\sin^2 x\, dx}{\sqrt{(1-p^2\sin^2 x)(1-q^2\sin^2 x)^3}} = \frac{\sqrt{1-p^2}}{(1-q^2)(q^2-p^2)} E\left(\alpha, \sqrt{\frac{q^2-p^2}{1-p^2}}\right) - \frac{1}{(q^2-p^2)\sqrt{1-p^2}} F\left(\alpha, \sqrt{\frac{q^2-p^2}{1-p^2}}\right) - \frac{\sin x\cos x}{(1-q^2)\sqrt{(1-p^2\sin^2 x)(1-q^2\sin^2 x)}} \quad \left[0<p^2<q^2<1,\ 0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right].$$

БФ (284.06)

5. $$\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sqrt{(1-p^2\sin^2 x)^3(1-q^2\sin^2 x)}} = \frac{\sqrt{1-p^2}}{q^2-p^2} E\left(\alpha, \sqrt{\frac{q^2-p^2}{1-p^2}}\right) - \frac{1-q^2}{(q^2-p^2)\sqrt{1-p^2}} F\left(\alpha, \sqrt{\frac{q^2-p^2}{1-p^2}}\right)$$
$$\left[0<p^2<q^2<1,\ 0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right].$$

БФ (284.05)

6. $$\int \frac{\cos^4 x\, dx}{\sqrt{(1-p^2\sin^2 x)^5(1-q^2\sin^2 x)}} = \frac{(1-p^2)^{3/2}}{3(q^2-p^2)^2}\left[\frac{(2+p^2-3q^2)(1-q^2)}{(1-p^2)^2} F\left(\alpha, \sqrt{\frac{q^2-p^2}{1-p^2}}\right) + 2\frac{2q^2-p^2-1}{1-p^2} E\left(\alpha, \sqrt{\frac{q^2-p^2}{1-p^2}}\right)\right] + \frac{(1-p^2)\sin x\cos x\sqrt{1-q^2\sin^2 x}}{3(q^2-p^2)\sqrt{(1-p^2\sin^2 x)^3}}$$
$$\left[0<p^2<q^2<1,\ 0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right].$$

БФ (284.05)

7. $$\int \frac{dx}{1-p^2\sin^2 x}\sqrt{\frac{1-q^2\sin^2 x}{1-p^2\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} E\left(\alpha, \sqrt{\frac{q^2-p^2}{1-p^2}}\right)$$
$$\left[0<p^2<q^2<1,\ 0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right].$$

БФ (284.01)

8. $$\int \sqrt{\frac{1-p^2\sin^2 x}{(1-q^2\sin^2 x)^3}}\, dx = \frac{\sqrt{1-p^2}}{1-q^2} E\left(\alpha, \sqrt{\frac{q^2-p^2}{1-p^2}}\right) - \frac{q^2-p^2}{1-q^2} \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{(1-p^2\sin^2 x)(1-q^2\sin^2 x)}} \quad \left[0<p^2<q^2<1,\ 0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right].$$

БФ (284.04)

9. $$\int \frac{dx}{1+(p^2r^2-p^2-r^2)\sin^2 x}\sqrt{\frac{1-p^2\sin^2 x}{1-q^2\sin^2 x}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\Pi\left(\alpha, r^2, \sqrt{\frac{q^2-p^2}{1-p^2}}\right) \quad \left[0 < p^2 < q^2 < 1,\ 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}\right].$$
БФ (284.02)

2.617 Обозначение: $\alpha = \arcsin\sqrt{\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}-b\sin x-c\cos x}{2\sqrt{b^2+c^2}}}$,
$$r = \sqrt{\frac{2\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{b^2+c^2}}}.$$

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+b\sin x+c\cos x}} = -\frac{2}{\sqrt{a+\sqrt{b^2+c^2}}}F(\alpha, r)$$
$$\left[0 < \sqrt{b^2+c^2} < a,\ \arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}-\pi \leqslant x < \arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\right];$$ БФ (294.00)
$$= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{b^2+c^2}}F(\alpha, r)$$
$$\left[0 < |a| < \sqrt{b^2+c^2},\ \arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} - \arccos\left(-\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}\right) \leqslant x < \right.$$
$$\left. < \arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\right].$$ БФ (293.00)

2. $$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{a+b\sin x+c\cos x}} = -\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt[4]{(b^2+c^2)^3}}\{2E(\alpha, r)-F(\alpha, r)\} +$$
$$+\frac{2c}{b^2+c^2}\sqrt{a+b\sin x+c\cos x}$$
$$\left[0 < |a| < \sqrt{b^2+c^2},\ \arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} - \arccos\left(-\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}\right) \leqslant \right.$$
$$\left. \leqslant x < \arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\right].$$ БФ (293.05)

3. $$\int \frac{(b\cos x-c\sin x)\,dx}{\sqrt{a+b\sin x+c\cos x}} = 2\sqrt{a+b\sin x+c\cos x}.$$

4. $$\int \frac{\sqrt{b^2+c^2}+b\sin x+c\cos x}{\sqrt{a+b\sin x+c\cos x}}\,dx = -2\sqrt{a+\sqrt{b^2+c^2}}\,E(\alpha, r) +$$
$$+\frac{2(a-\sqrt{b^2+c^2})}{\sqrt{a+\sqrt{b^2+c^2}}}F(\alpha, r) \qquad \left[0 < \sqrt{b^2+c^2} < a,\right.$$
$$\left.\arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}-\pi \leqslant x < \arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\right];$$ БФ (294.04)
$$= -2\sqrt{2}\sqrt[4]{b^2+c^2}E(\alpha, r)$$
$$\left[0 < |a| < \sqrt{b^2+c^2},\ \arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} - \arccos\left(-\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}\right) \leqslant x < \right.$$
$$\left. < \arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\right].$$ БФ (293.01)

5. $\int \sqrt{a + b\sin x + c\cos x}\, dx = -2\sqrt{a + \sqrt{b^2+c^2}}\, E(\alpha, r)$

$\left[0 < \sqrt{b^2+c^2} < a,\ \arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} - \pi \leqslant x < \arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\right];$ БФ (294.01)

$= -2\sqrt{2}\sqrt[4]{b^2+c^2}\, E(\alpha, r) +$

$+ \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{b^2+c^2} - a\right)}{\sqrt[4]{b^2+c^2}} F(\alpha, r) \quad \left[0 < |a| < \sqrt{b^2+c^2},\right.$

$\left.\arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} - \arccos\left(\frac{-a}{\sqrt{b^2+c^2}}\right) \leqslant x < \arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\right].$ БФ (293.03)

2.618 Интегралы типа $\int R\left(\sin ax,\ \cos ax,\ \sqrt{\cos 2ax}\right) dx =$

$$= \frac{1}{a}\int R\left(\sin t,\ \cos t,\ \sqrt{1 - 2\sin^2 t}\right) dt \quad (t = ax).$$

Обозначение $\alpha = \arcsin\left(\sqrt{2}\sin ax\right)$.

Интегралы $\int R\left(\sin ax,\ \cos ax,\ \sqrt{\cos 2ax}\right) dx$ представляют собой частный вид ($p = 2$) интегралов 2.595. Приведем некоторые формулы:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos 2ax}} = \frac{1}{a\sqrt{2}} F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left[0 < ax \leqslant \frac{\pi}{4}\right].$

2. $\int \frac{\cos^2 ax}{\sqrt{\cos 2ax}}\, dx = \frac{1}{a\sqrt{2}} E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left[0 < ax \leqslant \frac{\pi}{4}\right].$

3. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax \sqrt{\cos 2ax}} = \frac{\sqrt{2}}{a} E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\operatorname{tg} x}{a}\sqrt{\cos 2ax} \quad \left[0 < ax \leqslant \frac{\pi}{4}\right].$

4. $\int \frac{dx}{\cos^4 ax \sqrt{\cos 2ax}} = \frac{2\sqrt{2}}{a} E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) -$

$- \frac{\sqrt{2}}{3a} F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{(6\cos^2 ax + 1)\sin ax}{3a\cos^3 ax}\sqrt{\cos 2ax} \quad \left[0 < x \leqslant \frac{\pi}{4}\right].$

5. $\int \frac{\operatorname{tg}^2 ax\, dx}{\sqrt{\cos 2ax}} = \frac{\sqrt{2}}{a} E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{a\sqrt{2}} F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) -$

$- \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax\sqrt{\cos 2ax} \quad \left[0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}\right].$

6. $\int \frac{\operatorname{tg}^4 ax\, dx}{\sqrt{\cos 2ax}} = \frac{1}{3a\sqrt{2}} F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sin ax}{3a\cos^3 ax}\sqrt{\cos 2ax} \quad \left[0 < ax \leqslant \frac{\pi}{4}\right].$

7. $\int \frac{dx}{(1 - 2r^2\sin^2 ax)\sqrt{\cos 2ax}} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \Pi\left(\alpha, r^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left[0 < ax \leqslant \frac{\pi}{4}\right].$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^3 2ax}} = \frac{1}{a\sqrt{2}} F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{a} E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sin 2ax}{a\sqrt{\cos 2ax}}$

$\left[0 < ax \leqslant \frac{\pi}{4}\right].$

9. $\int \frac{\sin^2 ax\, dx}{\sqrt{\cos^3 2ax}} = \frac{\sin 2ax}{2a\sqrt{\cos 2ax}} - \frac{1}{a\sqrt{2}} E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left[0 < ax \leqslant \frac{\pi}{4}\right].$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^5 2ax}} = \frac{1}{3a\sqrt{2}} F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sin 2ax}{3a\sqrt{\cos^3 2ax}} \quad \left[0 < ax \leqslant \frac{\pi}{4}\right].$

11. $\int \sqrt{\cos 2ax}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{a} E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{a\sqrt{2}} F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left[0 < ax \leqslant \frac{\pi}{4}\right]$.

12. $\int \frac{\sqrt{\cos 2ax}}{\cos^2 ax}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{a}\left\{F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} + \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax \sqrt{\cos 2ax} \quad \left[0 < x \leqslant \frac{\pi}{4}\right]$.

2.619

Интегралы типа $\int R(\sin ax, \cos ax, \sqrt{-\cos 2ax})\,dx = \frac{1}{a}\int R(\sin x, \cos x, \sqrt{2\sin^2 x - 1})\,dx$.

Обозначение $\alpha = \arcsin(\sqrt{2}\cos ax)$.

Интегралы $\int R(\sin x, \cos x, \sqrt{2\sin^2 x - 1})\,dx$ представляют собой частный вид ($a = 2$) интегралов 2.599, 2.611.

Приведем некоторые формулы:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{-\cos 2ax}} = -\frac{1}{a\sqrt{2}} F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. $\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sqrt{-\cos 2ax}} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\left[E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$.

3. $\int \frac{\cos^4 ax\,dx}{\sqrt{-\cos 2ax}} = \frac{1}{3a\sqrt{2}}\left[3F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{5}{2}E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] - \frac{1}{12a}\sin 2ax\sqrt{-\cos 2ax}$.

4. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax\sqrt{-\cos 2ax}} = \frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax\sqrt{-\cos 2ax} - \frac{\sqrt{2}}{a}E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5. $\int \frac{dx}{\sin^4 ax\sqrt{-\cos 2ax}} = \frac{2}{3a\sqrt{2}}\left[F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 6E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] + \frac{1}{3a}\frac{\cos ax}{\sin^3 ax}(6\sin^2 ax + 1)\sqrt{-\cos 2ax}$.

6. $\int \frac{\operatorname{ctg}^2 ax\,dx}{\sqrt{-\cos 2ax}} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\left[F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] + \frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax\sqrt{-\cos 2ax}$.

7. $\int \frac{dx}{(1 - 2r^2\cos^2 ax)\sqrt{-\cos 2ax}} = -\frac{1}{a\sqrt{2}}\Pi\left(\alpha, r^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{-\cos^3 2ax}} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\left[F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] + \frac{\sin 2ax}{a\sqrt{-\cos 2ax}}$.

9. $\int \frac{\cos^2 ax\,dx}{\sqrt{-\cos^3 2ax}} = \frac{\sin 2ax}{2a\sqrt{-\cos 2ax}} - \frac{1}{a\sqrt{2}}E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{-\cos^5 2ax}} = -\frac{1}{3a\sqrt{2}}F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sin 2ax}{3a\sqrt{-\cos^3 2ax}}$.

11. $\int \sqrt{-\cos 2ax}\,dx = \frac{1}{a\sqrt{2}}\left[F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$.

Интегралы типа $\int R(\sin ax,\ \cos ax,\ \sqrt{\sin 2ax})\,dx.$

Обозначение: $\alpha=\arcsin\sqrt{\dfrac{2\sin ax}{1+\sin ax+\cos ax}}$.

2.621

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{\sin 2ax}}=\frac{\sqrt{2}}{a}F\left(\alpha,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$ БФ (287.50)

2. $\displaystyle\int\frac{\sin ax\,dx}{\sqrt{\sin 2ax}}=\frac{\sqrt{2}}{a}\left\{\frac{1+i}{2}\Pi\left(\alpha,\ \frac{1+i}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\right.$
$\displaystyle\left.+\frac{1-i}{2}\Pi\left(\alpha,\ \frac{1-i}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)+F\left(\alpha,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2E\left(\alpha,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$ БФ (287.57)

3. $\displaystyle\int\frac{\sin ax\,dx}{(1+\sin ax+\cos ax)\sqrt{\sin 2ax}}=\frac{\sqrt{2}}{a}\left[F\left(\alpha,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)-E\left(\alpha,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right].$
БФ (287.54)

4. $\displaystyle\int\frac{\sin ax\,dx}{(1-\sin ax+\cos ax)\sqrt{\sin 2ax}}=\frac{\sqrt{2}}{a}\left\{\sqrt{\operatorname{tg} ax}-E\left(\alpha,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}\quad\left[ax\neq\frac{\pi}{2}\right].$
БФ (287.55)

5. $\displaystyle\int\frac{(1+\cos ax)\,dx}{(1+\sin ax+\cos ax)\sqrt{\sin 2ax}}=\frac{\sqrt{2}}{a}E\left(\alpha,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$ БФ (287.51)

6 $\displaystyle\int\frac{(1+\cos ax)\,dx}{(1-\sin ax+\cos ax)\sqrt{\sin 2ax}}=$
$\displaystyle=\frac{\sqrt{2}}{a}\left\{F\left(\alpha,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)-E\left(\alpha,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{\operatorname{tg} ax}\right\}\quad\left[ax\neq\frac{\pi}{2}\right].$
БФ (287.56)

7. $\displaystyle\int\frac{(1-\sin ax+\cos ax)\,dx}{(1+\sin ax+\cos ax)\sqrt{\sin 2ax}}=\frac{\sqrt{2}}{a}\left\{2E\left(\alpha,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)-F\left(\alpha,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$
БФ (287.53)

8. $\displaystyle\int\frac{(1+\sin ax+\cos ax)\,dx}{[1+\cos ax+(1-2r^2)\sin ax]\sqrt{\sin 2ax}}=\frac{\sqrt{2}}{a}\Pi\left(\alpha,\ r^2,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$ БФ (287.52)

2.63—2.65 Тригонометрические функции и степенная функция

2.631

1. $\displaystyle\int x^r\sin^p x\cos^q x\,dx=\frac{1}{(p+q)^2}\left[(p+q)x^r\sin^{p+1}x\cos^{q-1}x+\right.$
$\displaystyle+rx^{r-1}\sin^p x\cos^q x-r(r-1)\int x^{r-2}\sin^p x\cos^q x\,dx-$
$\displaystyle\left.-rp\int x^{r-1}\sin^{p-1}x\cos^{q-1}x\,dx+(q-1)(p+q)\int x^r\sin^p x\cos^{q-2}x\,dx\right];$
$\displaystyle=\frac{1}{(p+q)^2}\left[-(p+q)x^r\sin^{p-1}x\cos^{q+1}x+\right.$
$\displaystyle+rx^{r-1}\sin^p x\cos^q x-r(r-1)\int x^{r-2}\sin^p x\cos^q x\,dx+$
$\displaystyle\left.+rq\int x^{r-1}\sin^{p-1}x\cos^{q-1}x\,dx+(p-1)(p+q)\int x^r\sin^{p-2}x\cos^q x\,dx\right].$
ГХI [333] (1)

2. $\int x^m \sin^n x\,dx = \frac{x^{m-1}\sin^{n-1}x}{n^2}\{m\sin x - nx\cos x\} +$

$$+\frac{n-1}{n}\int x^m \sin^{n-2} x\,dx - \frac{m(m-1)}{n^2}\int x^{m-2}\sin^n x\,dx.$$

3. $\int x^m \cos^n x\,dx = \frac{x^{m-1}\cos^{n-1}x}{n^2}\{m\cos x + nx\sin x\} +$

$$+\frac{n-1}{n}\int x^m \cos^{n-2} x\,dx - \frac{m(m-1)}{n^2}\int x^{m-2}\cos^n x\,dx.$$

4. $\int x^n \sin^{2m} x\,dx = \binom{2m}{m}\frac{x^{n+1}}{2^{2m}(n+1)} +$

$$+\frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{2m}{k}\int x^n\cos(2m-2k)x\,dx$$ (см. 2.633 2.). Т 333

5. $\int x^n \sin^{2m+1} x\,dx = \frac{(-1)^m}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{2m+1}{k}\int x^n\sin(2m-2k+1)x\,dx$

(см. 2.633 1.). Т 333

6. $\int x^n \cos^{2m} x\,dx = \binom{2m}{m}\frac{x^{n+1}}{2^{2m}(n+1)} +$

$$+\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m}{k}\int x^n\cos(2m-2k)x\,dx$$ (см. 2.633 2.). Т 333

7. $\int x^n \cos^{2m+1} x\,dx = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{k}\int x^n\cos(2m-2k+1)x\,dx.$

(см. 2.633 2.). Т 333

2.632

1. $\int x^{\mu-1}\sin\beta x\,dx = \frac{i}{2}(i\beta)^{-\mu}\gamma(\mu, i\beta x) - \frac{i}{2}(-i\beta)^{-\mu}\gamma(\mu, -i\beta x)$

$[\operatorname{Re}\mu > -1,\ x > 0]$. ИПI 317 (2)

2. $\int x^{\mu-1}\sin ax\,dx = -\frac{1}{2a^\mu}\left\{\exp\left[\frac{\pi i}{2}(\mu-1)\right]\Gamma(\mu, -iax) +\right.$

$\left.+\exp\left[\frac{\pi i}{2}(1-\mu)\right]\Gamma(\mu, iax)\right\}$ $[\operatorname{Re}\mu < 1,\ a > 0,\ x > 0]$. ИПI 317 (3)

3. $\int x^{\mu-1}\cos\beta x\,dx = \frac{1}{2}\{(i\beta)^{-\mu}\gamma(\mu, i\beta x) + (-i\beta)^{-\mu}\gamma(\mu, -i\beta x)\}$

$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ x > 0]$. ИПI 319 (22)

4. $\int x^{\mu-1}\cos ax\,dx = -\frac{1}{2a^\mu}\left\{\exp\left(i\mu\frac{\pi}{2}\right)\Gamma(\mu, -iax) +\right.$

$\left.+\exp\left(-i\mu\frac{\pi}{2}\right)\Gamma(\mu, iax)\right\}$. ИПI 319 (23)

2.633

1. $\int x^n\sin ax\,dx = -\sum_{k=0}^{n} k!\binom{n}{k}\frac{x^{n-k}}{a^{k+1}}\cos\left(ax + \frac{1}{2}k\pi\right).$ Т (487)

2. $\int x^n \cos ax\,dx = \sum_{k=0}^{n} k! \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}}{a^{k+1}} \sin\left(ax + \frac{1}{2}k\pi\right)$. Т (486)

3. $\int x^{2n} \sin x\,dx = (2n)! \left\{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!} \cos x + \right.$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)!} \sin x\right\}.$$

4. $\int x^{2n+1} \sin x\,dx = (2n+1)! \left\{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!} \cos x + \right.$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!} \sin x\right\}.$$

5. $\int x^{2n} \cos x\,dx = (2n)! \left\{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!} \sin x + \right.$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)!} \cos x\right\}.$$

6. $\int x^{2n+1} \cos x\,dx = (2n+1)! \left\{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!} \sin x + \right.$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!} \cos x\right\}.$$

2.634

1. $\int P_n(x) \sin mx\,dx =$

$$= -\frac{\cos mx}{m} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \frac{P_n^{(2k)}(x)}{m^{2k}} + \frac{\sin mx}{m} \sum_{k=1}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} (-1)^{k-1} \frac{P_n^{(2k-1)}(x)}{m^{2k-1}}.$$

2. $\int P_n(x) \cos mx\,dx =$

$$= \frac{\sin mx}{m} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \frac{P_n^{(2k)}(x)}{m^{2k}} + \frac{\cos mx}{m} \sum_{k=1}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} (-1)^{k-1} \frac{P_n^{(2k-1)}(x)}{m^{2k-1}}.$$

В формулах 2.634 $P_n(x)$ — многочлен n-й степени, $P_n^{(k)}(x)$ — его k-я производная по x.

Обозначение: $z_1 = a + bx$.

2.635

1. $\int z_1 \sin kx\,dx = -\frac{1}{k} z_1 \cos kx + \frac{b}{k^2} \sin kx.$

2. $\int z_1 \cos kx\,dx = \frac{1}{k} z_1 \sin kx + \frac{b}{k^2} \cos kx.$

3. $\displaystyle\int z_1^2 \sin kx\,dx = \frac{1}{k}\left(\frac{2b^2}{k^2} - z_1^2\right)\cos kx + \frac{2bz_1}{k^2}\sin kx.$

4. $\displaystyle\int z_1^2 \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\left(z_1^2 - \frac{2b^2}{k^2}\right)\sin kx + \frac{2bz_1}{k^2}\cos kx.$

5. $\displaystyle\int z_1^3 \sin kx\,dx = \frac{z_1}{k}\left(\frac{6b^2}{k^2} - z_1^2\right)\cos kx + \frac{3b}{k^2}\left(z_1^2 - \frac{2b^2}{k^2}\right)\sin kx.$

6. $\displaystyle\int z_1^3 \cos kx\,dx = \frac{z_1}{k}\left(z_1^2 - \frac{6b^2}{k^2}\right)\sin kx + \frac{3b}{k^2}\left(z_1^2 - \frac{2b^2}{k^2}\right)\cos kx.$

7. $$\int z_1^4 \sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\left(z_1^4 - \frac{12b^2}{k^2}z_1^2 + \frac{24b^4}{k^4}\right)\cos kx + \frac{4bz_1}{k^2}\left(z_1^2 - \frac{6b^2}{k^2}\right)\sin kx.$$

8. $$\int z_1^4 \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\left(z_1^4 - \frac{12b^2}{k^2}z_1^2 + \frac{24b^4}{k^4}\right)\sin kx + \frac{4bz_1}{k^2}\left(z_1^2 - \frac{6b^2}{k^2}\right)\cos kx.$$

9. $$\int z_1^5 \sin kx\,dx = \frac{5b}{k^2}\left(z_1^4 - \frac{12b^2}{k^2}z_1^2 + \frac{24b^4}{k^4}\right)\sin kx - \frac{z_1}{k}\left(z_1^4 - \frac{20b^2}{k^2}z_1^2 + \frac{120b^4}{k^4}\right)\cos kx.$$

10. $$\int z_1^5 \cos kx\,dx = \frac{5b}{k^2}\left(z_1^4 - \frac{12b^2}{k^2}z_1^2 + \frac{24b^4}{k^4}\right)\cos kx + \frac{z_1}{k}\left(z_1^4 - \frac{20b^2}{k^2}z_1^2 + \frac{120b^4}{k^4}\right)\sin kx.$$

11. $$\int z_1^6 \sin kx\,dx = \frac{6bz_1}{k^2}\left(z_1^4 - \frac{20b^2}{k^2}z_1^2 + \frac{120b^4}{k^4}\right)\sin kx - \frac{1}{k}\left(z_1^6 - \frac{30b^2}{k^2}z_1^4 + \frac{360b^4}{k^4}z_1^2 - \frac{720b^6}{k^6}\right)\cos kx.$$

12. $$\int z_1^6 \cos kx\,dx = \frac{6bz_1}{k^2}\left(z_1^4 - \frac{20b^2}{k^2}z_1^2 + \frac{120b^4}{k^4}\right)\cos kx + \frac{1}{k}\left(z_1^6 - \frac{30b^2}{k^2}z_1^4 + \frac{360b^4}{k^4}z_1^2 - \frac{720b^6}{k^6}\right)\sin kx.$$

2.636

1. $$\int x^n \sin^2 x\,dx = \frac{x^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{n!}{4}\left\{\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^{k+1}x^{n-2k}}{2^{2k}(n-2k)!}\sin 2x + \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{(-1)^{k+1}x^{n-2k-1}}{2^{2k+1}(n-2k-1)!}\cos 2x\right\}.$$

ГХI [333] (2e)

2. $$\int x^n \cos^2 x\,dx = \frac{x^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{n!}{4}\left\{\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^{k+1}x^{n-2k}}{2^{2k}(n-2k)!}\sin 2x + \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{(-1)^{k+1}x^{n-2k-1}}{2^{2k+1}(n-2k-1)!}\cos 2x\right\}.$$

ГХI [333] (3e)

3. $\displaystyle\int x\sin^2 x\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x.$

4. $\int x^2 \sin^2 x\,dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\sin 2x.$ МфК 241

5. $\int x \cos^2 x\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x.$

6. $\int x^2 \cos^2 x\,dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\sin 2x.$ МфК 245

2.637

1. $$\int x^n \sin^3 x\,dx = \frac{n!}{4}\left\{\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^k x^{n-2k}}{(n-2k)!}\left(\frac{\cos 3x}{3^{2k+1}} - 3\cos x\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^k \frac{x^{n-2k-1}}{(n-2k-1)!}\left(\frac{\sin 3x}{3^{2k+2}} - 3\sin x\right)\right\}.$$ ГХI [333] (2f)

2. $$\int x^n \cos^3 x\,dx = \frac{n!}{4}\left\{\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^k x^{n-2k}}{(n-2k)!}\left(\frac{\sin 3x}{3^{2k+1}} + 3\sin x\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^k \frac{x^{n-2k-1}}{(n-2k-1)!}\left(\frac{\cos 3x}{3^{2k+2}} + 3\cos x\right)\right\}.$$ ГХI [333] (3f)

3. $\int x \sin^3 x\,dx = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{36}\sin 3x - \frac{3}{4}\cos x + \frac{x}{12}\cos 3x.$

4. $$\int x^2 \sin^3 x\,dx = -\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}\right)\cos x + \left(\frac{x^2}{12} + \frac{1}{54}\right)\cos 3x +$$
$$+ \frac{3}{2}x\sin x - \frac{x}{18}\sin 3x.$$ МфК 241

5. $\int x \cos^3 x\,dx = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{36}\cos 3x + \frac{3}{4}x\sin x + \frac{x}{12}\sin 3x.$

6. $$\int x^2 \cos^3 x\,dx = \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}\right)\sin x + \left(\frac{x^2}{12} - \frac{1}{54}\right)\sin 3x +$$
$$+ \frac{3}{2}x\cos x + \frac{x}{18}\cos 3x.$$ МфК 245, 246

2.638

1. $$\int \frac{\sin^q x}{x^p}\,dx = -\frac{\sin^{q-1} x\,[(p-2)\sin x + q\,x\cos x]}{(p-1)(p-2)\,x^{p-1}} -$$
$$- \frac{q^2}{(p-1)(p-2)}\int \frac{\sin^q x\,dx}{x^{p-2}} + \frac{q(q-1)}{(p-1)(p-2)}\int \frac{\sin^{q-2} x\,dx}{x^{p-2}}$$
$[p \neq 1,\ p \neq 2]$. Т (496)

2. $$\int \frac{\cos^q x}{x^p}\,dx = -\frac{\cos^{q-1} x\,[(p-2)\cos x - q\,x\sin x]}{(p-1)(p-2)\,x^{p-1}} -$$
$$- \frac{q^2}{(p-1)(p-2)}\int \frac{\cos^q x\,dx}{x^{p-2}} + \frac{q(q-1)}{(p-1)(p-2)}\int \frac{\cos^{q-2} x\,dx}{x^{p-2}}$$
$[p \neq 1,\ p \neq 2]$. Т (495)

3. $$\int \frac{\sin x\,dx}{x^p} = -\frac{\sin x}{(p-1)\,x^{p-1}} + \frac{1}{p-1}\int \frac{\cos x\,dx}{x^{p-1}};$$
$$= -\frac{\sin x}{(p-1)\,x^{p-1}} - \frac{\cos x}{(p-1)(p-2)\,x^{p-2}} - \frac{1}{(p-1)(p-2)}\int \frac{\sin x\,dx}{x^{p-2}}$$
$(n > 2)$. Т (492)

4. $$\int \frac{\cos x\,dx}{x^p} = -\frac{\cos x}{(p-1)x^{p-1}} - \frac{1}{p-1}\int \frac{\sin x\,dx}{x^{p-1}};$$
$$= -\frac{\cos x}{(p-1)x^{p-1}} + \frac{\sin x}{(p-1)(p-2)x^{p-2}} - \frac{1}{(p-1)(p-2)}\int \frac{\cos x\,dx}{x^{p-2}}$$
$(n > 2)$. Т (491)

2.639

1. $$\int \frac{\sin x\,dx}{x^{2n}} = \frac{(-1)^{n+1}}{x(2n-1)!}\left\{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k(2k+1)!}{x^{2k+1}}\cos x + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{x^{2k}}\sin x\right\} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\operatorname{ci}(x).$$ ГХI [333] (6b) *и*

2. $$\int \frac{\sin x}{x^{2n+1}}\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{x(2n)!}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{x^{2k}}\cos x + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}(2k+1)!}{x^{2k+1}}\sin x\right\} + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\operatorname{si}(x).$$ ГХI [333] (6b) *и*

3. $$\int \frac{\cos x}{x^{2n}}\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{x(2n-1)!}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{x^{2k}}\cos x - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k(2k+1)!}{x^{2k+1}}\sin x\right\} + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}\operatorname{si}(x).$$ ГХI [333] (7b)

4. $$\int \frac{\cos x\,dx}{x^{2n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{x(2n)!}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}(2k+1)!}{x^{2k+1}}\cos x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{x^{2k}}\sin x\right\} + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\operatorname{ci}(x).$$ ГХI [333] (7b)

2.641

1. $$\int \frac{\sin kx}{a+bx}\,dx = \frac{1}{b}\left[\cos\frac{ka}{b}\operatorname{si}(u) - \sin\frac{ka}{b}\operatorname{ci}(u)\right] \quad \left[u = \frac{k}{b}(a+bx)\right].$$

2. $$\int \frac{\cos kx}{a+bx}\,dx = \frac{1}{b}\left[\cos\frac{ka}{b}\operatorname{ci}(u) + \sin\frac{ka}{b}\operatorname{si}(u)\right] \quad \left[u = \frac{k}{b}(a+bx)\right].$$

3. $$\int \frac{\sin kx}{(a+bx)^2}\,dx = -\frac{1}{b}\frac{\sin kx}{a+bx} + \frac{k}{b}\int \frac{\cos kx}{a+bx}\,dx$$ (см. 2.641 2.).

4. $$\int \frac{\cos kx}{(a+bx)^2}\,dx = -\frac{1}{b}\frac{\cos kx}{a+bx} - \frac{k}{b}\int \frac{\sin kx}{a+bx}\,dx$$ (см. 2.641 1.).

5. $$\int \frac{\sin kx}{(a+bx)^3}\,dx = -\frac{\sin kx}{2b(a+bx)^2} - \frac{k\cos kx}{2b^2(a+bx)} - \frac{k^2}{2b^2}\int \frac{\sin kx}{a+bx}\,dx$$ (см. 2.641 1.).

6. $$\int \frac{\cos kx}{(a+bx)^3}\,dx = -\frac{\cos kx}{2b(a+bx)^2} + \frac{k\sin kx}{2b^2(a+bx)} - \frac{k^2}{2b^2}\int \frac{\cos kx}{a+bx}\,dx$$ (см. 2.641 2.).

7. $$\int \frac{\sin kx}{(a+bx)^4}\,dx = -\frac{\sin kx}{3b(a+bx)^3} - \frac{k\cos kx}{6b^2(a+bx)^2} + \frac{k^2\sin kx}{6b^3(a+bx)} - \frac{k^3}{6b^3}\int \frac{\cos kx}{a+bx}\,dx$$ (см. 2.641 2.).

8. $$\int \frac{\cos kx}{(a+bx)^4}\,dx = -\frac{\cos kx}{3b(a+bx)^3} + \frac{k\sin kx}{6b^2(a+bx)^2} + \frac{k^2\cos kx}{6b^3(a+bx)} + \frac{k^3}{6b^3}\int \frac{\sin kx}{a+bx}\,dx$$ (см. 2.641 1.).

9. $$\int \frac{\sin kx}{(a+bx)^5}\,dx = -\frac{\sin kx}{4b(a+bx)^4} - \frac{k\cos kx}{12b^2(a+bx)^3} + \frac{k^2\sin kx}{24b^3(a+bx)^2} + \frac{k^3\cos kx}{24b^4(a+bx)} + \frac{k^4}{24b^4}\int \frac{\sin kx}{a+bx}\,dx$$ (см. 2.641 1.).

10. $$\int \frac{\cos kx}{(a+bx)^5}\,dx = -\frac{\cos kx}{4b(a+bx)^4} + \frac{k\sin kx}{12b^2(a+bx)^3} + \frac{k^2\cos kx}{24b^3(a+bx)^2} - \frac{k^3\sin kx}{24b^4(a+bx)} + \frac{k^4}{24b^4}\int \frac{\cos kx}{a+bx}\,dx$$ (см. 2.641 2.).

11. $$\int \frac{\sin kx}{(a+bx)^6}\,dx = -\frac{\sin kx}{5b(a+bx)^5} - \frac{k\cos kx}{20b^2(a+bx)^4} + \frac{k^2\sin kx}{60b^3(a+bx)^3} + \frac{k^3\cos kx}{120b^4(a+bx)^2} - \frac{k^4\sin kx}{120b^5(a+bx)} + \frac{k^5}{120b^5}\int \frac{\cos kx}{a+bx}\,dx$$ (см. 2.641 2.).

12. $$\int \frac{\cos kx}{(a+bx)^6}\,dx = -\frac{\cos kx}{5b(a+bx)^5} + \frac{k\sin kx}{20b^2(a+bx)^4} + \frac{k^2\cos kx}{60b^3(a+bx)^3} - \frac{k^3\sin kx}{120b^4(a+bx)^2} - \frac{k^4\cos kx}{120b^5(a+bx)} - \frac{k^5}{120b^5}\int \frac{\sin kx}{a+bx}\,dx$$ (см. 2.641 1.).

2.642

1. $$\int \frac{\sin^{2m} x}{x}\,dx = \binom{2m}{m}\frac{\ln x}{2^{2m}} + \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{2m}{k}\operatorname{ci}[(2m-2k)x].$$

2. $$\int \frac{\sin^{2m+1} x}{x}\,dx = \frac{(-1)^m}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{2m+1}{k}\operatorname{si}[(2m-2k+1)x].$$

3. $$\int \frac{\cos^{2m} x}{x}\,dx = \binom{2m}{m}\frac{\ln x}{2^{2m}} + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m}{k}\operatorname{ci}[(2m-2k)x].$$

4. $$\int \frac{\cos^{2m+1} x}{x}\,dx = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{k}\operatorname{ci}[(2m-2k+1)x].$$

5. $$\int \frac{\sin^{2m} x}{x^2}\,dx = -\binom{2m}{m}\frac{1}{2^{2m}x} + \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}\binom{2m}{k}\left\{\frac{\cos(2m-2k)x}{x} + (2m-2k)\operatorname{si}[(2m-2k)x]\right\}.$$

6. $$\int \frac{\sin^{2m+1} x}{x^2}\,dx = \frac{(-1)^m}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+1}\binom{2m+1}{k}\times \left\{\frac{\sin(2m-2k+1)x}{x} - (2m-2k+1)\operatorname{ci}[(2m-2k+1)x]\right\}.$$

7. $$\int \frac{\cos^{2m} x}{x^2}\,dx = -\binom{2m}{m}\frac{1}{2^{2m}x} - \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m}{k}\left\{\frac{\cos(2m-2k)x}{x} + (2m-2k)\operatorname{si}[(2m-2k)x]\right\}.$$

8. $$\int \frac{\cos^{2m+1} x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k} \left\{ \frac{\cos(2m-2k+1)x}{x} + (2m-2k+1)\,\mathrm{si}\,[(2m-2k+1)x] \right\}.$$

2.643

1. $$\int \frac{x^p\,dx}{\sin^q x} = -\frac{x^{p-1}[p\sin x + (q-2)x\cos x]}{(q-1)(q-2)\sin^{q-1} x} + \frac{q-2}{q-1}\int \frac{x^p\,dx}{\sin^{q-2} x} + \frac{p(p-1)}{(q-1)(q-2)}\int \frac{x^{p-2}\,dx}{\sin^{q-2} x}.$$

2. $$\int \frac{x^p\,dx}{\cos^q x} = -\frac{x^{p-1}[p\cos x - (q-2)x\sin x]}{(q-1)(q-2)\cos^{q-1} x} + \frac{q-2}{q-1}\int \frac{x^p\,dx}{\cos^{q-2} x} + \frac{p(p-1)}{(q-1)(q-2)}\int \frac{x^{p-2}\,dx}{\cos^{q-2} x}.$$

3. $$\int \frac{x^n}{\sin x}\,dx = \frac{x^n}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2(2^{k-1}-1)}{(n+2k)(2k)!} B_{2k} x^{n+2k}$$
$[|x| < \pi,\ n > 0]$. ГXI [333] (8b)

4. $$\int \frac{dx}{x^n \sin x} = -\frac{1}{nx^n} - [1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2^{n-1}-1}{n!} B_n \ln x - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \frac{n}{2}}}^{\infty} (-1)^k \frac{2(2^{2k-1}-1)}{(2k-n)\cdot(2k)!} B_{2k} x^{2k-n}$$
$[n > 1,\ |x| < \pi]$. ГXI [333] (9b)

5. $$\int \frac{x^n\,dx}{\cos x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|E_{2k}|\,x^{n+2k+1}}{(n+2k+1)(2k)!} \quad \left[|x| < \frac{\pi}{2},\ n > 0\right].$$ ГXI [333] (10b)

6. $$\int \frac{dx}{x^n \cos x} = \frac{1}{2}[1-(-1)^n] \frac{|E_{n-1}|}{(n-1)!} \ln x + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{n-1}{2}}}^{\infty} \frac{|E_{2k}|\,x^{2k-n+1}}{(2k-n+1)\cdot(2k)!}$$
$\left[|x| < \frac{\pi}{2}\right]$. ГXI [333] (11b)

7. $$\int \frac{x^n\,dx}{\sin^2 x} = -x^n \operatorname{ctg} x + \frac{n}{n-1} x^{n-1} + n\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} x^{n+2k-1}}{(n+2k-1)(2k)!} B_{2k}$$
$[|x| < \pi,\ n > 1]$. ГXI [333] (8c)

8. $$\int \frac{dx}{x^n \sin^2 x} = -\frac{\operatorname{ctg} x}{x^n} + \frac{n}{(n+1)x^{n+1}} - [1-(-1)^n](-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2^n n}{(n+1)!} B_{n+1} \ln x - \frac{n}{x^{n+1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \frac{n+1}{2}}}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k-n-1)(2k)!} B_{2k}$$
$[|x| < \pi]$. ГXI [333] (9c)

9. $$\int \frac{x^n\,dx}{\cos^2 x} = x^n \operatorname{tg} x + n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)\,x^{n+2k-1}}{(n+2k-1)\cdot(2k)!} B_{2k}$$
$$\left[n > 1,\ |x| < \frac{\pi}{2}\right].$$ ГХ I [333] 10с

10. $$\int \frac{dx}{x^n \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{x^n} - [1-(-1)^n](-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2^n n}{(n+1)!}(2^{n+1}-1) B_{n+1} \ln x -$$
$$- \frac{n}{x^{n+1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \frac{n+1}{2}}}^{\infty} \frac{(-1)^k (2^{2k}-1)(2x)^{2k}}{(2k-n-1)(2k)!} B_{2k}$$
$$\left[|x| < \frac{\pi}{2}\right].$$ ГХ I [333] (11с)

2.644

1. $$\int \frac{x\,dx}{\sin^{2n} x} =$$
$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-2)(2n-4)\dots(2n-2k+2)}{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+3)} \frac{\sin x + (2n-2k)\,x \cos x}{(2n-2k+1)(2n-2k)\sin^{2n-2k+1} x} +$$
$$+ \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(2n-1)!!}(\ln \sin x - x \operatorname{ctg} x).$$

2. $$\int \frac{x\,dx}{\sin^{2n+1} x} =$$
$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+1)}{2n(2n-2)\dots(2n-2k+2)} \frac{\sin x + (2n-2k-1)\,x \cos x}{(2n-2k)(2n-2k-1)\sin^{2n-2k} x} +$$
$$+ \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \int \frac{x\,dx}{\sin x}$$ (см. 2.644 5.).

3. $$\int \frac{x\,dx}{\cos^{2n} x} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-2)(2n-4)\dots(2n-2k+2)}{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+3)} \frac{(2n-2k)\,x \sin x - \cos x}{(2n-2k+1)(2n-2k)\cos^{2n-2k+1} x} +$$
$$+ \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(2n-1)!!}(x \operatorname{tg} x + \ln \cos x).$$

4. $$\int \frac{x\,dx}{\cos^{2n+1} x} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+1)}{2n(2n-2)\dots(2n-2k+2)} \frac{(2n-2k+1)\,x \sin x - \cos x}{(2n-2k)(2n-2k-1)\cos^{2n-2k} x} +$$
$$+ \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \int \frac{x\,dx}{\cos x}$$ (см. 2.644 6.).

5. $$\int \frac{x\,dx}{\sin x} = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2(2^{2k-1}-1)}{(2k+1)!} B_{2k} x^{2k+1}.$$

6. $$\int \frac{x\,dx}{\cos x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|E_{2k}|\,x^{2k+2}}{(2k+2)(2k)!}.$$

7. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = -x \operatorname{ctg} x + \ln \sin x.$

8. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x + \ln \cos x.$

9. $\int \frac{x\,dx}{\sin^3 x} = -\frac{\sin x + x\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sin x}\,dx$ (см. 2.644 5.).

10. $\int \frac{x\,dx}{\cos^3 x} = \frac{x\sin x - \cos x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{\cos x}$ (см. 2.644 6.).

11. $\int \frac{x\,dx}{\sin^4 x} = -\frac{x\cos x}{3\sin^3 x} - \frac{1}{6\sin^2 x} - \frac{2}{3}x\operatorname{ctg} x + \frac{2}{3}\ln(\sin x).$

12. $\int \frac{x\,dx}{\cos^4 x} = \frac{x\sin x}{3\cos^3 x} - \frac{1}{6\cos^2 x} + \frac{2}{3}x\operatorname{tg} x - \frac{2}{3}\ln(\cos x).$

13. $$\int \frac{x\,dx}{\sin^5 x} = -\frac{x\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{1}{12\sin^3 x} - \frac{3x\cos x}{8\sin^2 x} - \frac{3}{8\sin x} + \frac{3}{8}\int \frac{x\,dx}{\sin x}$$ (см. 2.644 5.).

14. $$\int \frac{x\,dx}{\cos^5 x} = \frac{x\sin x}{4\cos^4 x} - \frac{1}{12\cos^3 x} + \frac{3x\sin x}{8\cos^2 x} - \frac{3}{8\cos x} + \frac{3}{8}\int \frac{x\,dx}{\cos x}$$ (см. 2.644 6.).

2.645

1. $\int x^p \frac{\sin^{2m} x}{\cos^n x}\,dx = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \int \frac{x^p\,dx}{\cos^{n-2k} x}$ (см. 2.643 2.).

2. $\int x^p \frac{\sin^{2m+1} x}{\cos^n x}\,dx = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \int \frac{x^p \sin x}{\cos^{n-2k} x}\,dx$ (см. 2.645 3.).

3. $$\int x^p \frac{\sin x\,dx}{\cos^n x} = \frac{x^p}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{p}{n-1}\int \frac{x^{p-1}}{\cos^{n-1} x}\,dx$$ $[n > 1]$ (см. 2.643 2.). ГХI [333] (12)

4. $\int x^p \frac{\cos^{2m} x}{\sin^n x}\,dx = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \int \frac{x^p\,dx}{\sin^{n-2k} x}$ (см. 2.643 1.).

5. $\int x^p \frac{\cos^{2m+1} x}{\sin^n x}\,dx = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \int \frac{x^p \cos x}{\sin^{n-2k} x}\,dx$ (см. 2.645 6.).

6. $$\int x^p \frac{\cos x}{\sin^n x}\,dx = -\frac{x^p}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{p}{n-1}\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sin^{n-1} x}$$ $[n > 1]$ (см. 2.643 1.). ГХI [333] (13)

7. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{x}{\sin x} + \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

8. $\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{x}{\cos x} - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$

2.646

1. $$\int x^p \operatorname{tg} x\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(p+2k)\cdot(2k)!} B_{2k} x^{p+2k}$$ $\left[p \geqslant -1,\ |x| < \frac{\pi}{2}\right].$ ГХI [333] (12d)

2. $\int x^p \operatorname{ctg} x\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(p+2k)(2k)!} x^{p+2k}$

$[p \geqslant 1,\ |x| < \pi]$. ГХ I [333] (13d)

3. $\int x \operatorname{tg}^2 x\,dx = x \operatorname{tg} x + \ln \cos x - \frac{x^2}{2}$.

4. $\int x \operatorname{ctg}^2 x\,dx = -x \operatorname{ctg} x + \ln \sin x - \frac{x^2}{2}$.

2.647

1. $\int \frac{x^n \cos x\,dx}{(a+b\sin x)^m} = -\frac{x^n}{(m-1)\,b\,(a+b\sin x)^{m-1}} +$

$+\frac{n}{(m-1)\,b} \int \frac{x^{n-1}\,dx}{(a+b\sin x)^{m-1}}$ $[m \neq 1]$. МФК 247

2. $\int \frac{x^n \sin x\,dx}{(a+b\cos x)^m} = \frac{x^n}{(m-1)\,b\,(a+b\cos x)^{m-1}} -$

$-\frac{n}{(m-1)\,b} \int \frac{x^{n-1}\,dx}{(a+b\cos x)^{m-1}}$ $[m \neq 1]$. МФК 247

3. $\int \frac{x\,dx}{1+\sin x} = -x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + 2 \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$. П (329)

4. $\int \frac{x\,dx}{1-\sin x} = x \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + 2 \ln \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$. П (330)

5. $\int \frac{x\,dx}{1+\cos x} = x \operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2 \ln \cos\frac{x}{2}$. П (331)

6. $\int \frac{x\,dx}{1-\cos x} = -x \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + 2 \ln \sin\frac{x}{2}$. П (332)

7. $\int \frac{x \cos x}{(1+\sin x)^2}\,dx = -\frac{x}{1+\sin x} + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

8. $\int \frac{x \cos x}{(1-\sin x)^2}\,dx = \frac{x}{1-\sin x} + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

9. $\int \frac{x \sin x}{(1+\cos x)^2}\,dx = \frac{x}{1+\cos x} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

10. $\int \frac{x \sin x}{(1-\cos x)^2}\,dx = -\frac{x}{1-\cos x} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. МФК 247 (и)

2.648

1. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx = x \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

2. $\int \frac{x-\sin x}{1-\cos x}\,dx = -x \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. ГХ I [333] (16)

2.649 $\int \frac{x^2\,dx}{[(ax-b)\sin x + (a+bx)\cos x]^2} = \frac{x \sin x + \cos x}{b\,[(ax-b)\sin x + (a+bx)\cos x]}$.

ГХ I [333] (17)

2.651 $\int \frac{dx}{[a+(ax+b)\operatorname{tg} x]^2} = \frac{\operatorname{tg} x}{a\,[a+(ax+b)\operatorname{tg} x]}$. ГХ I [333] (18)

2.652 $$\int \frac{x\,dx}{\cos(x+t)\cos(x-t)} = \operatorname{cosec} 2t \left\{ x \ln \frac{\cos(x-t)}{\cos(x+t)} - L(x+t) + L(x-t) \right\}$$
$$\left[t \neq n\pi;\ |x| < \left| \frac{\pi}{2} - |t_0| \right| \right],$$

где t_0 — значение аргумента t, приведенное с помощью аргумента π к промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ло III 288

2.653

1. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{2\pi}\,S\left(\sqrt{x}\right)$ (сравни 2.528 1.).

2. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{2\pi}\,C\left(\sqrt{x}\right)$ (сравни 2.528 2.).

2.654 Обозначение: $\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}$, $k' = \sqrt{1-k^2}$:

1. $\int \frac{x \sin x \cos x}{\Delta}\,dx = -\frac{x\Delta}{k^2} + \frac{1}{k^2} E(x, k)$.

2. $\int \frac{x \sin^3 x \cos x}{\Delta}\,dx = \frac{k'^2}{9k^4} F(x, k) + \frac{2k^2+5}{9k^4} E(x, k) -$
$$- \frac{1}{9k^4} \left[3(3-\Delta^2)\,x + k^2 \sin x \cos x \right] \Delta.$$

3. $\int \frac{x \sin x \cos^3 x}{\Delta}\,dx = -\frac{k'^2}{9k^4} F(x, k) + \frac{7k^2-5}{9k^4} E(x, k) -$
$$- \frac{1}{9k^4} \left[3(\Delta^2 - 3k'^2)\,x - k^2 \sin x \cos x \right] \Delta.$$

4. $\int \frac{x \sin x\,dx}{\Delta^3} = -\frac{x \cos x}{k'^2 \Delta} + \frac{1}{kk'^2} \arcsin(k \sin x)$.

5. $\int \frac{x \cos x\,dx}{\Delta^3} = \frac{x \sin x}{\Delta} + \frac{1}{k} \ln(k \cos x + \Delta)$.

6. $\int \frac{x \sin x \cos x\,dx}{\Delta^3} = \frac{x}{k^2 \Delta} - \frac{1}{k^2} F(x, k)$.

7. $\int \frac{x \sin^3 x \cos x\,dx}{\Delta^3} = x\,\frac{2 - k^2 \sin^2 x}{k^4 \Delta} - \frac{1}{k^4} \left[E(x, k) + F(x, k) \right]$.

8. $\int \frac{x \sin x \cos^3 x\,dx}{\Delta^3} = x\,\frac{k^2 \sin^2 x + k^2 - 2}{k^4 \Delta} + \frac{k'^2}{k^4} F(x, k) + \frac{1}{k^4} E(x, k)$.

Интегралы, содержащие $\sin x^2$ и $\cos x^2$

В интегралах, содержащих $\sin x^2$ и $\cos x^2$, полезно сделать подстановку $x^2 = u$.

2.655

1. $\int x^p \sin x^2\,dx = -\frac{x^{p-1}}{2} \cos x^2 + \frac{p-1}{2} \int x^{p-2} \cos x^2\,dx$.

2. $\int x^p \cos x^2\,dx = \frac{x^{p-1}}{2} \sin x^2 - \frac{p-1}{2} \int x^{p-2} \sin x^2\,dx$.

3. $$\int x^n \sin x^2\,dx = (n-1)!!\left\{\sum_{k=1}^{r}(-1)^k\left[\frac{x^{n-4k+3}\cos x^2}{2^{2k-1}(n-4k+3)!!} - \frac{x^{n-4k+1}\sin x^2}{2^{2k}(n-4k+1)!!}\right] + \frac{(-1)^r}{2^{2r}(n-4r-1)!!}\int x^{n-4r}\sin x^2\,dx\right\}$$
$$\left[r = E\left(\frac{n}{4}\right)\right].$$ ГХI [336] (4а)

4. $$\int x^n \cos x^2\,dx = (n-1)!!\left\{\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\left[\frac{x^{n-4k+3}\sin x^2}{2^{2k-1}(n-4k+3)!!} + \frac{x^{n-4k+1}\cos x^2}{2^{2k}(n-4k+1)!!}\right] + \frac{(-1)^r}{2^{2r}(n-4r-1)!!}\int x^{n-4r}\cos x^2\,dx\right\}$$
$$\left[r = E\left(\frac{n}{4}\right)\right].$$ ГХI [336] (5а)

5. $$\int x\sin x^2\,dx = -\frac{\cos x^2}{2}.$$

6. $$\int x\cos x^2\,dx = \frac{\sin x^2}{2}.$$

7. $$\int x^2\sin x^2\,dx = -\frac{x}{2}\cos x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,C(x).$$

8. $$\int x^2\cos x^2\,dx = \frac{x}{2}\sin x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,S(x).$$

9. $$\int x^3\sin x^2\,dx = -\frac{x^2}{2}\cos x^2 + \frac{1}{2}\sin x^2.$$

10. $$\int x^3\cos x^2\,dx = \frac{x^2}{2}\sin x^2 + \frac{1}{2}\cos x^2.$$

2.66 Тригонометрические функции и показательная функция

2.661 $$\int e^{ax}\sin^p x\cos^q x\,dx =$$
$$= \frac{1}{a^2+(p+q)^2}\left\{e^{ax}\sin^p x\cos^{q-1}x\,[a\cos x + (p+q)\sin x] - pa\int e^{ax}\sin^{p-1}x\cos^{q-1}x\,dx + (q-1)(p+q)\int e^{ax}\sin^p x\cos^{q-2}x\,dx\right\};$$
Т (523)

$$= \frac{1}{a^2+(p+q)^2}\left\{e^{ax}\sin^{p-1}x\cos^q x\,[a\sin x - (p+q)\cos x] + qa\int e^{ax}\sin^{p-1}x\cos^{q-1}x\,dx + (p-1)(p+q)\int e^{ax}\sin^{p-2}x\cos^q x\,dx\right\};$$
Т (524)

$$= \frac{1}{a^2+(p+q)^2}\left\{e^{ax}\sin^{p-1}x\cos^{q-1}x\,[a\sin x\cos x + q\sin^2 x - p\cos^2 x] + q(q-1)\int e^{ax}\sin^p x\cos^{q-2}x\,dx + p(p-1)\int e^{ax}\sin^{p-2}x\cos^q x\,dx\right\};$$ Т (525)

$$= \frac{1}{a^2+(p+q)^2}\left\{e^{ax}\sin^{p-1}x\cos^{q-1}x\,(a\sin x\cos x+q\sin^2 x-p\cos^2 x)+\right.$$
$$+q(q-1)\int e^{ax}\sin^{p-2}x\cos^{q-2}x\,dx-$$
$$\left.-(q-p)(p+q-1)\int e^{ax}\sin^{p-2}x\cos^{q}x\,dx\right\}; \quad \text{Т (526)}$$

$$= \frac{1}{a^2+(p+q)^2}\left\{e^{ax}\sin^{p-1}x\cos^{q-1}x\,(a\sin x\cos x+q\sin^2 x-p\cos^2 x)+\right.$$
$$+p(p-1)\int e^{ax}\sin^{p-2}x\cos^{q-2}x\,dx+$$
$$\left.+(q-p)(p+q-1)\int e^{ax}\sin^{p}x\cos^{q-2}x\,dx\right\}. \quad \text{ГХI [334] (1a)}$$

При $p=m$ и $q=n$ натуральных и четных интеграл $\int e^{ax}\sin^m x\cos^n x\,dx$ сводится с помощью этих формул к интегралу $\int e^{ax}\,dx$; когда же четно только m или только n, то к интегралам вида $\int e^{ax}\cos^n x\,dx$ или, соответственно, $\int e^{ax}\sin^m x\,dx$.

2.662

1. $$\int e^{ax}\sin^n bx\,dx = \frac{1}{a^2+n^2b^2}\left[(a\sin bx-nb\cos bx)\,e^{ax}\sin^{n-1}bx+\right.$$
$$\left.+n(n-1)\,b^2\int e^{ax}\sin^{n-2}bx\,dx\right].$$

2. $$\int e^{ax}\cos^n bx\,dx = \frac{1}{a^2+n^2b^2}\left[(a\cos bx+nb\sin bx)\,e^{ax}\cos^{n-1}bx+\right.$$
$$\left.+n(n-1)\,b^2\int e^{ax}\cos^{n-2}bx\,dx\right].$$

3. $$\int e^{ax}\sin^{2m} bx\,dx=$$
$$=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m)!\,b^{2k}e^{ax}\sin^{2m-2k-1}bx}{(2m-2k)!\,[a^2+(2m)^2b^2]\,[a^2+(2m-2)^2b^2]\dots[a^2+(2m-2k)^2b^2]}\times$$
$$\times[a\sin bx-(2m-2k)\,b\cos bx]+\frac{(2m)!\,b^{2m}e^{ax}}{[a^2+(2m)^2b^2]\,[a^2+(2m-2)^2b^2]\dots[a^2+4b^2]\,a}=$$
$$=\binom{2m}{m}\frac{e^{ax}}{2^{2m}a}+\frac{e^{ax}}{2^{2m-1}}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\binom{2m}{m-k}\frac{1}{a^2+4b^2k^2}(a\cos 2bkx+2bk\sin 2bkx).$$

4. $$\int e^{ax}\sin^{2m+1} bx\,dx=$$
$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{(2m+1)!\,b^{2k}e^{ax}\sin^{2m-2k}bx\,[a\sin bx-(2m-2k+1)\,b\cos bx]}{(2m-2k+1)!\,[a^2+(2m+1)^2b^2]\,[a^2+(2m-1)^2b^2]\dots[a^2+(2m-2k+1)^2b^2]}=$$
$$=\frac{e^{ax}}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{a^2+(2k+1)^2b^2}\binom{2m+1}{m-k}[a\sin(2k+1)\,bx-(2k+1)\,b\cos(2k+1)\,bx].$$

5. $\int e^{ax}\cos^{2m} bx\,dx =$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m)!\,b^{2k}e^{ax}\cos^{2m-2k-1} bx\,[a\cos bx + (2m-2k)\,b\sin bx]}{(2m-2k)!\,[a^2+(2m)^2b^2]\,[a^2+(2m-2)^2b^2]\ldots[a^2+(2m-2k)^2b^2]} +$$

$$+ \frac{(2m)!\,b^{2m}e^{ax}}{[a^2+(2m)^2b^2]\,[a^2+(2m-2)^2b^2]\ldots[a^2+4b^2]\,a} =$$

$$= \binom{2m}{m}\frac{e^{ax}}{2^{2m}a} + \frac{e^{ax}}{2^{2m-1}}\sum_{k=1}^{m}\binom{2m}{m-k}\frac{1}{a^2+4b^2k^2}\,[a\cos 2kbx + 2kb\sin 2kbx].$$

6. $\int e^{ax}\cos^{2m+1} bx\,dx =$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{(2m+1)!\,b^{2k}e^{ax}\cos^{2m-2k} bx\,[a\cos bx + (2m-2k+1)\,b\sin bx]}{(2m-2k+1)!\,[a^2+(2m+1)^2b^2]\,[a^2+(2m-1)^2b^2]\ldots[a^2+(2m-2k+1)^2b^2]} =$$

$$= \frac{e^{ax}}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{m-k}\frac{1}{a^2+(2k+1)^2b^2}\,[a\cos(2k+1)\,bx + (2k+1)\,b\sin(2k+1)\,bx].$$

2.663

1. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \dfrac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}.$

2. $\int e^{ax}\sin^2 bx\,dx = \dfrac{e^{ax}\sin bx\,(a\sin bx - 2b\cos bx)}{4b^2+a^2} + \dfrac{2b^2e^{ax}}{(4b^2+a^2)\,a} =$

$$= \frac{e^{ax}}{2a} - \frac{e^{ax}}{a^2+4b^2}\left(\frac{a}{2}\cos 2bx + b\sin 2bx\right)$$

3. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \dfrac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}.$

4. $\int e^{ax}\cos^2 bx\,dx = \dfrac{e^{ax}\cos bx\,(a\cos bx + 2b\sin bx)}{4b^2+a^2} + \dfrac{2b^2e^{ax}}{(4b^2+a^2)\,a} =$

$$= \frac{e^{ax}}{2a} + \frac{e^{ax}}{a^2+4b^2}\left(\frac{a}{2}\cos 2bx + b\sin 2bx\right).$$

2.664

1. $\int e^{ax}\sin bx\cos cx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{2}\left[\dfrac{a\sin(b+c)\,x - (b+c)\cos(b+c)\,x}{a^2+(b+c)^2} +\right.$

$$\left. + \frac{a\sin(b-c)\,x - (b-c)\cos(b-c)\,x}{a^2+(b-c)^2}\right].$$ ГХI [334] (6b)

2. $\int e^{ax}\sin^2 bx\cos cx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{4}\left[2\,\dfrac{a\cos cx + c\sin cx}{a^2+c^2} -\right.$

$$- \frac{a\cos(2b+c)\,x + (2b+c)\sin(2b+c)\,x}{a^2+(2b+c)^2} -$$

$$\left. - \frac{a\cos(2b-c)\,x + (2b-c)\sin(2b-c)\,x}{a^2+(2b-c)^2}\right].$$ ГХI [334] (6c)

3. $\int e^{ax}\sin bx\cos^2 cx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{4}\left[2\,\dfrac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} +\right.$

$$+ \frac{a\sin(b+2c)\,x - (b+2c)\cos(b+2c)\,x}{a^2+(b+2c)^2} +$$

$$\left. + \frac{a\sin(b-2c)\,x - (b-2c)\cos(b-2c)\,x}{a^2+(b-2c)^2}\right].$$ ГХI [334] (6d)

2.665

1. $$\int \frac{e^{ax}\,dx}{\sin^p bx} = -\frac{e^{ax}[a\sin bx + (p-2)b\cos bx]}{(p-1)(p-2)b^2\sin^{p-1}bx} + \frac{a^2+(p-2)^2b^2}{(p-1)(p-2)b^2}\int \frac{e^{ax}\,dx}{\sin^{p-2}bx}.$$ Т (530) и

2. $$\int \frac{e^{ax}\,dx}{\cos^p bx} = -\frac{e^{ax}[a\cos bx - (p-2)b\sin bx]}{(p-1)(p-2)b^2\cos^{p-1}bx} + \frac{a^2+(p-2)^2b^2}{(p-1)(p-2)b^2}\int \frac{e^{ax}\,dx}{\cos^{p-2}bx}.$$ Т (529) и

Последовательным применением формул 2.665 при p натуральном мы приходим к интегралам вида $\int \frac{e^{ax}\,dx}{\sin bx}$, $\int \frac{e^{ax}\,dx}{\sin^2 bx}$, $\int \frac{e^{ax}\,dx}{\cos bx}$, $\int \frac{e^{ax}\,dx}{\cos^2 bx}$, которые не выражаются с помощью конечной комбинации элементарных функций.

2.666

1. $$\int e^{ax}\operatorname{tg}^p x\,dx = \frac{e^{ax}}{p-1}\operatorname{tg}^{p-1}x - \frac{a}{p-1}\int e^{ax}\operatorname{tg}^{p-1}x\,dx - \int e^{ax}\operatorname{tg}^{p-2}x\,dx.$$ Т (527)

2. $$\int e^{ax}\operatorname{ctg}^p x\,dx = -\frac{e^{ax}\operatorname{ctg}^{p-1}x}{p-1} + \frac{a}{p-1}\int e^{ax}\operatorname{ctg}^{p-1}x\,dx - \int e^{ax}\operatorname{ctg}^{p-2}x\,dx.$$ Т (528)

3. $\int e^{ax}\operatorname{tg} x\,dx = \frac{e^{ax}\operatorname{tg} x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}\,dx}{\cos^2 x}$ (см. примечание к **2.665**).

4. $\int e^{ax}\operatorname{tg}^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{a}(a\operatorname{tg} x - 1) - a\int e^{ax}\operatorname{tg} x\,dx$ (см. **2.666** 3.). Т 355

5. $\int e^{ax}\operatorname{ctg} x\,dx = \frac{e^{ax}\operatorname{ctg} x}{a} + \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}\,dx}{\sin^2 x}$ (см. примечание к **2.665**).

6. $\int e^{ax}\operatorname{ctg}^2 x\,dx = -\frac{e^{ax}}{a}(a\operatorname{ctg} x + 1) + a\int e^{ax}\operatorname{ctg} x\,dx$ (см. **2.666** 5.).

Интегралы типа $\int R(x, e^{ax}, \sin bx, \cos cx)\,dx$

Обозначение: $\sin t = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2.667

1. $$\int x^p e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{x^p e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{p}{a^2+b^2}\int x^{p-1}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)\,dx;$$
$$= \frac{x^p e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+t) - \frac{p}{\sqrt{a^2+b^2}}\int x^{p-1}e^{ax}\sin(bx+t)\,dx.$$

2. $$\int x^p e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{x^p e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) - \frac{p}{a^2+b^2}\int x^{p-1}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)\,dx;$$
$$= \frac{x^p e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx+t) - \frac{p}{\sqrt{a^2+b^2}}\int x^{p-1}e^{ax}\cos(bx+t)\,dx.$$

3. $\int x^n e^{ax} \sin bx\, dx = e^{ax} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1} n!\, x^{n-k+1}}{(n-k+1)!\,(a^2+b^2)^{k/2}} \sin(bx+kt).$

4. $\int x^n e^{ax} \cos bx\, dx = e^{ax} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1} n!\, x^{n-k+1}}{(n-k+1)!\,(a^2+b^2)^{k/2}} \cos(bx+kt).$

5. $$\int xe^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[\left(ax - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\sin bx - \left(bx - \frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\cos bx\right].$$

6. $$\int xe^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[\left(ax - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\cos bx + \left(bx - \frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\sin bx\right].$$

7. $$\int x^2 e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left\{\left[ax^2 - \frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}x + \frac{2a(a^2-3b^2)}{(a^2+b^2)^2}\right]\sin bx - \left[bx^2 - \frac{4ab}{a^2+b^2}x + \frac{2b(3a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}\right]\cos bx\right\}.$$

8. $$\int x^2 e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left\{\left[ax^2 - \frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}x + \frac{2a(a^2-3b^2)}{(a^2+b^2)^2}\right]\cos bx + \left[bx^2 - \frac{4ab}{a^2+b^2}x + \frac{2b(3a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}\right]\sin bx\right\}.$$

ГХI [335], МфК 274—275

2.67 Тригонометрические функции и гиперболические функции

2.671

1. $$\int \operatorname{sh}(ax+b)\sin(cx+d)\,dx = \frac{a}{a^2+c^2}\operatorname{ch}(ax+b)\sin(cx+d) - \frac{c}{a^2+c^2}\operatorname{sh}(ax+b)\cos(cx+d).$$

2. $$\int \operatorname{sh}(ax+b)\cos(cx+d)\,dx = \frac{a}{a^2+c^2}\operatorname{ch}(ax+b)\cos(cx+d) + \frac{c}{a^2+c^2}\operatorname{sh}(ax+b)\sin(cx+d).$$

3. $$\int \operatorname{ch}(ax+b)\sin(cx+d)\,dx = \frac{a}{a^2+c^2}\operatorname{sh}(ax+b)\sin(cx+d) - \frac{c}{a^2+c^2}\operatorname{ch}(ax+b)\cos(cx+d).$$

4. $$\int \operatorname{ch}(ax+b)\cos(cx+d)\,dx = \frac{a}{a^2+c^2}\operatorname{sh}(ax+b)\cos(cx+d) + \frac{c}{a^2+c^2}\operatorname{ch}(ax+b)\sin(cx+d).$$

ГХI [354] (1)

2.672

1. $\int \operatorname{sh} x \sin x\, dx = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x).$

2. $\int \operatorname{sh} x \cos x \, dx = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} x \cos x + \operatorname{sh} x \sin x).$

3. $\int \operatorname{ch} x \sin x \, dx = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} x \sin x - \operatorname{ch} x \cos x).$

4. $\int \operatorname{ch} x \cos x \, dx = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} x \cos x + \operatorname{ch} x \sin x).$

2.673

1. $$\int \operatorname{sh}^{2m} (ax+b) \sin^{2n} (cx+d) \, dx = \frac{(-1)^m}{2^{2m+2n}} \binom{2m}{m} \binom{2n}{n} x +$$
$$+ \frac{(-1)^{m+n}}{2^{2m+2n-1}} \binom{2m}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2n-2k)\,c} \binom{2n}{k} \sin [(2n-2k)(cx+d)] +$$
$$+ \frac{(-1)^n}{2^{2m+2n-2}} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{j+k} \binom{2m}{j} \binom{2n}{k}}{(2m-2j)^2 a^2 + (2n-2k)^2 c^2} \times$$
$$\times \{(2m-2j)\, a \operatorname{sh} [(2m-2j)(ax+b)] \cos [(2n-2k)(cx+d)] +$$
$$+ (2n-2k)\, c \operatorname{ch} [(2m-2j)(ax+b)] \sin [(2n-2k)(cx+d)]\}.$$ ГХ I [354] (3a)

2. $$\int \operatorname{sh}^{2m} (ax+b) \sin^{2n-1} (cx+d) \, dx =$$
$$= \frac{(-1)^{m+n}}{2^{2m+2n-2}} \binom{2m}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2n-2k-1)\,c} \binom{2n-1}{k} \cos [(2n-2k-1)(cx+d)] +$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2m+2n-3}} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{j+k} \binom{2m}{j} \binom{2n-1}{k}}{(2m-2j)^2 a^2 + (2n-2k-1)^2 c^2} \times$$
$$\times \{(2m-2j)\, a \operatorname{sh} [(2m-2j)(ax+b)] \sin [(2n-2k-1)(cx+d)] -$$
$$- (2n-2k-1)\, c \operatorname{ch} [(2m-2j)(ax+b)] \cos [(2n-2k-1)(cx+d)]\}.$$ ГХ I [354] (3b)

3. $$\int \operatorname{sh}^{2m-1} (ax+b) \sin^{2n} (cx+d) \, dx =$$
$$= \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2m+2n-2}} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j \binom{2m-1}{j}}{(2m-2j-1)\,a} \operatorname{ch} [(2m-2j-1)(ax+b)] +$$
$$+ \frac{(-1)^n}{2^{2m+2n-3}} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{j+k} \binom{2m-1}{j} \binom{2n}{k}}{(2m-2j-1)^2 a^2 + (2n-2k)^2 c^2} \times$$
$$\times \{(2m-2j-1)\, a \operatorname{ch} [(2m-2j-1)(ax+b)] \cos [(2n-2k)(cx+d)] +$$
$$+ (2n-2k)\, c \operatorname{sh} [(2m-2j-1)(ax+b)] \sin [(2n-2k)(cx+d)]\}.$$ ГХ I [354] (3c)

4. $$\int \operatorname{sh}^{2m-1} (ax+b) \sin^{2n-1} (cx+d) \, dx =$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2m+2n-4}} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{j+k} \binom{2m-1}{j} \binom{2n-1}{k}}{(2m-2j-1)^2 a^2 + (2n-2k-1)^2 c^2} \times$$
$$\times \{(2m-2j-1)\, a \operatorname{ch} [(2m-2j-1)(ax+b)] \sin [(2n-2k-1)(cx+d)] -$$
$$- (2n-2k-1)\, c \operatorname{sh} [(2m-2j-1)(ax+b)] \cos [(2n-2k-1)(cx+d)]\}.$$

ГХ I [354] (3d)

5. $$\int \operatorname{sh}^{2m}(ax+b)\cos^{2n}(cx+d)\,dx = \frac{(-1)^m}{2^{2m+2n}}\binom{2m}{m}\binom{2n}{n}x +$$
$$+\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2m+2n-1}}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(-1)^j\binom{2m}{j}}{(2m-2j)\,a}\operatorname{sh}[(2m-2j)(ax+b)] +$$
$$+\frac{(-1)^m\binom{2m}{m}}{2^{2m+2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{2n}{k}}{(2n-2k)\,c}\sin[(2n-2k)(cx+d)] +$$
$$+\frac{1}{2^{2m+2n-2}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^j\binom{2m}{j}\binom{2n}{k}}{(2m-2j)^2a^2+(2n-2k)^2c^2}\times$$
$$\times\{(2m-2j)\,a\operatorname{sh}[(2m-2j)(ax+b)]\cos[(2n-2k)(cx+d)] +$$
$$+(2n-2k)\,c\operatorname{ch}[(2m-2j)(ax+b)]\sin[(2n-2k)(cx+d)]\}.$$

ГХI [354] (4a)

6. $$\int \operatorname{sh}^{2m}(ax+b)\cos^{2n-1}(cx+d)\,dx =$$
$$=\frac{(-1)^m\binom{2m}{m}}{2^{2m+2n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{2n-1}{k}}{(2n-2k-1)\,c}\sin[(2n-2k-1)(cx+d)] +$$
$$+\frac{1}{2^{2m+2n-3}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^j\binom{2m}{j}\binom{2n-1}{k}}{(2m-2j)^2a^2+(2n-2k-1)^2c^2}\times$$
$$\times\{(2m-2j)\,a\operatorname{sh}[(2m-2j)(ax+b)]\cos[(2n-2k-1)(cx+d)] +$$
$$+(2n-2k-1)\,c\operatorname{ch}[(2m-2j)(ax+b)]\sin[(2n-2k-1)(cx+d)]\}.$$

ГХI [354] (4a)

7. $$\int \operatorname{sh}^{2m-1}(ax+b)\cos^{2n}(cx+d)\,dx =$$
$$=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2m+2n-2}}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(-1)^j\binom{2m-1}{j}}{(2m-2j-1)\,a}\operatorname{ch}[(2m-2j-1)(ax+b)] +$$
$$+\frac{1}{2^{2m-2n-3}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^j\binom{2m-1}{j}\binom{2n}{k}}{(2m-2j-1)^2a^2+(2n-2k)^2c^2}\times$$
$$\times\{(2m-2j-1)\,a\operatorname{ch}[(2m-2j-1)(ax+b)]\cos[(2n-2k)(cx+d)] +$$
$$+(2n-2k)\,c\operatorname{sh}[(2m-2j-1)(ax+b)]\sin[(2n-2k)(cx+d)]\}.$$

ГХI [354] (4b)

8. $$\int \operatorname{sh}^{2m-1}(ax+b)\cos^{2n-1}(cx+d)\,dx =$$
$$=\frac{1}{2^{2m+2n-4}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^j\binom{2m-1}{j}\binom{2n-1}{k}}{(2m-2j-1)^2a^2+(2n-2k-1)^2c^2}\times$$
$$\times\{(2m-2j-1)\,a\operatorname{ch}[(2m-2j-1)(ax+b)]\cos[(2n-2k-1)(cx+d)] +$$
$$+(2n-2k-1)\,c\operatorname{sh}[(2m-2j-1)(ax+b)]\sin[(2n-2k-1)(cx+d)]\}.$$

ГХI [354] (4b)

9. $$\int \operatorname{ch}^{2m}(ax+b)\sin^{2n}(cx+d)\,dx = \frac{\binom{2m}{m}\binom{2n}{n}}{2^{2m+2n}}x + \frac{(-1)^n\binom{2m}{m}}{2^{2m+2n-1}}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k\binom{2n}{k}}{(2n-2k)c}\sin[(2n-2k)(cx+d)] + \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2m+2n-1}}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\binom{2m}{j}}{(2m-2j)a}\operatorname{sh}[(2m-2j)(ax+b)] + \frac{(-1)^n}{2^{2m+2n-2}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\binom{2m}{j}\binom{2n}{k}}{(2m-2j)^2a^2+(2n-2k)^2c^2}\times$$
$$\times\{(2m-2j)a\operatorname{sh}[(2m-2j)(ax+b)]\cos[(2n-2k)(cx+d)] + (2n-2k)c\operatorname{ch}[(2m-2j)(ax+b)]\sin[(2n-2k)(cx+d)]\}.$$

ГХI [354] (5a)

10. $$\int \operatorname{ch}^{2m-1}(ax+b)\sin^{2n}(cx+d)\,dx = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2m+2n-2}}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\binom{2m-1}{j}}{(2m-2j-1)a}\operatorname{sh}[(2m-2j-1)(ax+b)] + \frac{(-1)^n}{2^{2m+2n-3}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\binom{2m-1}{j}\binom{2n}{k}}{(2m-2j-1)^2a^2+(2n-2k)^2c^2}\times$$
$$\times\{(2m-2j-1)a\operatorname{sh}[(2m-2j-1)(ax+b)]\cos[(2n-2k)(cx+d)] + (2n-2k)c\operatorname{ch}[(2m-2j-1)(ax+b)]\sin[(2n-2k)(cx+d)]\}.$$

ГХI [354] (5a)

11. $$\int \operatorname{ch}^{2m}(ax+b)\sin^{2n-1}(cx+d)\,dx = \frac{(-1)^{n-1}\binom{2m}{m}}{2^{2m+2n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}\binom{2n-1}{k}}{(2n-2k-1)c}\cos[(2n-2k-1)(cx+d)] + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2m+2n-3}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\binom{2m}{j}\binom{2n-1}{k}}{(2m-2j)^2a^2+(2n-2k-1)^2c^2}\times$$
$$\times\{(2m-2j)a\operatorname{sh}[(2m-2j)(ax+b)]\sin[(2n-2k-1)(cx+d)] - (2n-2k-1)c\operatorname{ch}[(2m-2j)(ax+b)]\cos[(2n-2k-1)(cx+d)]\}.$$

ГХI [354] (5b)

12. $$\int \operatorname{ch}^{2m-1}(ax+b)\sin^{2n-1}(cx+d)\,dx = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2m+2n-4}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\binom{2m-1}{j}\binom{2n-1}{k}}{(2m-2j-1)^2a^2+(2n-2k-1)^2c^2}\times$$
$$\times\{(2m-2j-1)a\operatorname{sh}[(2m-2j-1)(ax+b)]\sin[(2n-2k-1)(cx+d)] - (2n-2k-1)c\operatorname{ch}[(2m-2j-1)(ax+b)]\cos[(2n-2k-1)(cx+d)]\}.$$

ГХI [354] (5b)

13. $$\int \operatorname{ch}^{2m}(ax+b)\cos^{2n}(cx+d)\,dx = \frac{\binom{2m}{m}\binom{2n}{n}}{2^{2m+2n}}x + \frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m+2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{2n}{k}}{(2n-2k)c}\sin[(2n-2k)(cx+d)] + \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2m+2n-1}}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\binom{2m}{j}}{(2m-2j)a}\operatorname{sh}[(2m-2j)(ax+b)] + \frac{1}{2^{2m+2n-2}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{2m}{j}\binom{2n}{k}}{(2m-2j)^2a^2+(2n-2k)^2c^2}\times$$
$$\times\{(2m-2j)a\operatorname{sh}[(2m-2j)(ax+b)]\cos[(2n-2k)(cx+d)] + (2n-2k)c\operatorname{ch}[(2m-2j)(ax+b)]\sin[(2n-2k)(cx+d)]\}.$$

ГХI [354] (6)

14. $$\int \operatorname{ch}^{2m-1}(ax+b)\cos^{2n}(cx+d)\,dx = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2m+2n-2}}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\binom{2m-1}{j}}{(2m-2j-1)a}\operatorname{sh}[(2m-2j-1)(ax+b)] + \frac{1}{2^{2m+2n-3}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{2m-1}{j}\binom{2n}{k}}{(2m-2j-1)^2a^2+(2n-2k)^2c^2}\times$$
$$\times\{(2m-2j-1)a\operatorname{sh}[(2m-2j-1)(ax+b)]\cos[(2n-2k)(cx+d)] + (2n-2k)c\operatorname{ch}[(2m-2j-1)(ax+b)]\sin[(2n-2k)(cx+d)]\}.$$

ГХI [354] (6)

15. $$\int \operatorname{ch}^{2m}(ax+b)\cos^{2n-1}(cx+d)\,dx = \frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m+2n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{2n-1}{k}}{(2n-2k-1)c}\sin[(2n-2k-1)(cx+d)] + \frac{1}{2^{2m+2n-3}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{2m}{j}\binom{2n-1}{k}}{(2m-2j)^2a^2+(2n-2k-1)^2c^2}\times$$
$$\times\{(2m-2j)a\operatorname{sh}[(2m-2j)(ax+b)]\cos[(2n-2k-1)(cx+d)] + (2n-2k-1)c\operatorname{ch}[(2m-2j)(ax+b)]\sin[(2n-2k-1)(cx+d)]\}.$$

ГХI [354] (6)

16. $$\int \operatorname{ch}^{2m-1}(ax+b)\cos^{2n-1}(cx+d)\,dx = \frac{1}{2^{2m+2n-4}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{2m-1}{j}\binom{2n-1}{k}}{(2m-2j-1)^2a^2+(2n-2k-1)^2c^2}\times$$
$$\times\{(2m-2j-1)a\operatorname{sh}[(2m-2j-1)(ax+b)]\cos[(2n-2k-1)(cx+d)] + (2n-2k-1)c\operatorname{ch}[(2m-2j-1)(ax+b)]\sin[(2n-2k-1)(cx+d)]\}.$$

ГХI [354] (6)

2.674

1. $$\int e^{ax} \operatorname{sh} bx \sin cx\, dx = \frac{e^{(a+b)x}}{2[(a+b)^2+c^2]}[(a+b)\sin cx - c\cos cx] - \frac{e^{(a-b)x}}{2[(a-b)^2+c^2]}[(a-b)\sin cx - c\cos cx].$$

2. $$\int e^{ax} \operatorname{sh} bx \cos cx\, dx = \frac{e^{(a+b)x}}{2[(a+b)^2+c^2]}[(a+b)\cos cx + c\sin cx] - \frac{e^{(a-b)x}}{2[(a-b)^2+c^2]}[(a-b)\cos cx + c\sin cx].$$

3. $$\int e^{ax} \operatorname{ch} bx \sin cx\, dx = \frac{e^{(a+b)x}}{2[(a+b)^2+c^2]}[(a+b)\sin cx - c\cos cx] + \frac{e^{(a-b)x}}{2[(a-b)^2+c^2]}[(a-b)\sin cx - c\cos cx].$$

4. $$\int e^{ax} \operatorname{ch} bx \cos cx\, dx = \frac{e^{(a+b)x}}{2[(a+b)^2+c^2]}[(a+b)\cos cx + c\sin cx] + \frac{e^{(a-b)x}}{2[(a-b)^2+c^2]}[(a-b)\cos cx + c\sin cx].$$

МфК 379

2.7 ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ; ФУНКЦИИ, ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ

2.71 Логарифмическая функция

2.711 $$\int \ln^m x\, dx = x \ln^m x - m \int \ln^{m-1} x\, dx = \frac{x}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k (m+1) m (m-1) \ldots (m-k+1) \ln^{m-k} x \quad (m > 0).$$ Т (603)

2.72—2.73 Логарифмическая и алгебраическая функции

2.721

1. $$\int x^n \ln^m x\, dx = \frac{x^{n+1} \ln^m x}{n+1} - \frac{m}{n+1} \int x^n \ln^{m-1} x\, dx$$ (см. 2.722).

При $n = -1$

2. $$\int \frac{\ln^m x\, dx}{x} = \frac{\ln^{m+1} x}{m+1}.$$

При $n = -1$ и $m = -1$

3. $$\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x).$$

2.722 $$\int x^n \ln^m x\, dx = \frac{x^{n+1}}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k (m+1) m (m-1) \ldots (m-k+1) \frac{\ln^{m-k} x}{(n+1)^{k+1}}.$$ Т (604)

2.723

1. $$\int x^n \ln x\, dx = x^{n+1} \left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right].$$ Т 375

2. $$\int x^n \ln^2 x\,dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln^2 x}{n+1} - \frac{2\ln x}{(n+1)^2} + \frac{2}{(n+1)^3}\right].$$ Т 375

3. $$\int x^n \ln^3 x\,dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln^3 x}{n+1} - \frac{3\ln^2 x}{(n+1)^2} + \frac{6\ln x}{(n+1)^3} - \frac{6}{(n+1)^4}\right].$$

2.724

1. $$\int \frac{x^n\,dx}{(\ln x)^m} = -\frac{x^{n+1}}{(m-1)(\ln x)^{m-1}} + \frac{n+1}{m-1}\int \frac{x^n\,dx}{(\ln x)^{m-1}}.$$

При $m=1$

2. $$\int \frac{x^n\,dx}{\ln x} = \operatorname{li}(x^{n+1}).$$

2.725

1. $$\int (a+bx)^m \ln x\,dx = \frac{1}{(m+1)b}\left[(a+bx)^{m+1}\ln x - \int \frac{(a+bx)^{m+1}\,dx}{x}\right].$$ Т 374

2. $$\int (a+bx)^m \ln x\,dx = \frac{1}{(m+1)b}\left[(a+bx)^{m+1} - a^{m+1}\right]\ln x - \sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k} a^{m-k} b^k x^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

При $m=-1$ см. 2.727 2.

2.726

1. $$\int (a+bx)\ln x\,dx = \left[\frac{(a+bx)^2}{2b} - \frac{a^2}{2b}\right]\ln x - \left(ax + \frac{1}{4}bx^2\right).$$

2. $$\int (a+bx)^2 \ln x\,dx = \frac{1}{3b}\left[(a+bx)^3 - a^3\right]\ln x - \left(a^2x + \frac{abx^2}{2} + \frac{b^2x^3}{9}\right).$$

3. $$\int (a+bx)^3 \ln x\,dx = \frac{1}{4b}\left[(a+bx)^4 - a^4\right]\ln x - \left(a^3x + \frac{3}{4}a^2bx^2 + \frac{1}{3}ab^2x^3 + \frac{1}{16}b^3x^4\right).$$

2.727

1. $$\int \frac{\ln x\,dx}{(a+bx)^m} = \frac{1}{b(m-1)}\left[-\frac{\ln x}{(a+bx)^{m-1}} + \int \frac{dx}{x(a+bx)^{m-1}}\right].$$ Т 376

При $m=1$

2. $$\int \frac{\ln x\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln x \ln(a+bx) - \frac{1}{b}\int \frac{\ln(a+bx)\,dx}{x}$$ (см. 2.728 2.).

3. $$\int \frac{\ln x\,dx}{(a+bx)^2} = -\frac{\ln x}{b(a+bx)} + \frac{1}{ab}\ln\frac{x}{a+bx}.$$

4. $$\int \frac{\ln x\,dx}{(a+bx)^3} = -\frac{\ln x}{2b(a+bx)^2} + \frac{1}{2ab(a+bx)} + \frac{1}{2a^2b}\ln\frac{x}{a+bx}.$$

5. $$\int \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\left\{(\ln x - 2)\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}\ln\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}\right\} \quad [a>0];$$
$$= \frac{2}{b}\left\{(\ln x - 2)\sqrt{a+bx} + 2\sqrt{-a}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}\right\} \quad [a<0].$$

2.728

1. $$\int x^m \ln(a+bx)\,dx = \frac{1}{m+1}\left[x^{m+1}\ln(a+bx) - b\int \frac{x^{m+1}\,dx}{a+bx}\right].$$

2. $\int \frac{\ln(a+bx)}{x}\,dx$ с помощью конечной комбинации элементарных функций не выражается; см. 1.511 и 0.312.

2.729

1. $$\int x^m \ln(a+bx)\,dx = \frac{1}{m+1}\left[x^{m+1} - \frac{a^{m+1}}{b^{m+1}}\right]\ln(a+bx) + \frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k x^{m-k+2} a^{k-1}}{(m-k+2)\,b^{k-1}}.$$

2. $$\int x\ln(a+bx)\,dx = \frac{1}{2}\left[x^2 - \frac{a^2}{b^2}\right]\ln(a+bx) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{b}\right].$$

3. $$\int x^2\ln(a+bx)\,dx = \frac{1}{3}\left[x^3 - \frac{a^3}{b^3}\right]\ln(a+bx) - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2b} + \frac{a^2x}{b^2}\right].$$

4. $$\int x^3\ln(a+bx)\,dx = \frac{1}{4}\left[x^4 - \frac{a^4}{b^4}\right]\ln(a+bx) - \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{ax^3}{3b} + \frac{a^2x^2}{2b^2} - \frac{a^3x}{b^3}\right].$$

2.731 $$\int x^{2n}\ln(x^2+a^2)\,dx = \frac{1}{2n+1}\left\{x^{2n+1}\ln(x^2+a^2) + (-1)^n 2a^{2n+1}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - 2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{2k+1}a^{2n-2k}x^{2k+1}\right\}.$$

2.732 $$\int x^{2n+1}\ln(x^2+a^2)\,dx = \frac{1}{2n+1}\left\{(x^{2n+2} + (-1)^n a^{2n+2})\ln(x^2+a^2) + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{n-k}}{k}a^{2n-2k+2}x^{2k}\right\}.$$

2.733

1. $$\int \ln(x^2+a^2)\,dx = x\ln(x^2+a^2) - 2x + 2a\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$ Д (623)

2. $$\int x\ln(x^2+a^2)\,dx = \frac{1}{2}[(x^2+a^2)\ln(x^2+a^2) - x^2].$$ Д (623.1)

3. $$\int x^2\ln(x^2+a^2)\,dx = \frac{1}{3}\left[x^3\ln(x^2+a^2) - \frac{2}{3}x^3 + 2a^2x - 2a^3\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right].$$ Д (623.2)

4. $$\int x^3\ln(x^2+a^2)\,dx = \frac{1}{4}\left[(x^4-a^4)\ln(x^2+a^2) - \frac{x^4}{2} + a^2x^2\right].$$ Д (623.3)

5. $$\int x^4\ln(x^2+a^2)\,dx = \frac{1}{5}\left[x^5\ln(x^2+a^2) - \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{3}a^2x^3 - 2a^4x + 2a^5\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right].$$ Д (623.4)

2.734 $$\int x^{2n}\ln|x^2-a^2|\,dx=\frac{1}{2n+1}\left\{x^{2n+1}\ln|x^2-a^2|+a^{2n+1}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|-\right.$$
$$\left.-2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}a^{2n-2k}x^{2k+1}\right\}.$$

2.735 $$\int x^{2n+1}\ln|x^2-a^2|\,dx=\frac{1}{2n+2}\left\{(x^{2n+2}-a^{2n+2})\ln|x^2-a^2|-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}a^{2n-2k+2}x^{2k}\right\}.$$

2.736

1. $\int \ln|x^2-a^2|\,dx=x\ln|x^2-a^2|-2x+a\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|.$ Д (624)

2. $\int x\ln|x^2-a^2|\,dx=\frac{1}{2}\{(x^2-a^2)\ln|x^2-a^2|-x^2\}.$ Д (624.1)

3. $\int x^2\ln|x^2-a^2|\,dx=\frac{1}{3}\left\{x^3\ln|x^2-a^2|-\frac{2}{3}x^3-2a^2x+a^3\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|\right\}.$ Д (624.2)

4. $\int x^3\ln|x^2-a^2|\,dx=\frac{1}{4}\left\{(x^4-a^4)\ln|x^2-a^2|-\frac{x^4}{2}-a^2x^2\right\}.$ Д (624.3)

5. $\int x^4\ln|x^2-a^2|\,dx=\frac{1}{5}\left\{x^5\ln|x^2-a^2|-\frac{2}{5}x^5-\frac{2}{3}a^2x^3-2a^4x+\right.$
$\left.+a^5\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|\right\}.$ Д (624.4)

2.74 Обратные гиперболические функции

2.741

1. $\int \operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\,dx=x\operatorname{Arsh}\frac{x}{a}-\sqrt{x^2+a^2}.$ Д (730)

2. $\int \operatorname{Arch}\frac{x}{a}\,dx=x\operatorname{Arch}\frac{x}{a}-\sqrt{x^2-a^2}$ $\left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a}>0\right]$;
$=x\operatorname{Arch}\frac{x}{a}+\sqrt{x^2-a^2}$ $\left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a}<0\right]$. Д (732)

3. $\int \operatorname{Arth}\frac{x}{a}\,dx=x\operatorname{Arth}\frac{x}{a}+\frac{a}{2}\ln(a^2-x^2).$ Д (734)

4. $\int \operatorname{Arcth}\frac{x}{a}\,dx=x\operatorname{Arcth}\frac{x}{a}+\frac{a}{2}\ln(x^2-a^2).$ Д (736)

2.742

1. $\int x\operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{4}\right)\operatorname{Arsh}\frac{x}{a}-\frac{x}{4}\sqrt{x^2+a^2}.$ Д (730.1)

2. $\int x\operatorname{Arch}\frac{x}{a}\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\operatorname{Arch}\frac{x}{a}-\frac{x}{4}\sqrt{x^2-a^2}$ $\left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a}>0\right]$;
$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\operatorname{Arch}\frac{x}{a}+\frac{x}{4}\sqrt{x^2-a^2}$ $\left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a}<0\right]$. Д (732.1)

2.8 ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

2.81 Арксинус и арккосинус

2.811 $$\int \left(\arcsin\frac{x}{a}\right)^n dx = x \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \binom{n}{2k} \cdot (2k)! \left(\arcsin\frac{x}{a}\right)^{n-2k} + \sqrt{a^2-x^2} \sum_{k=1}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} (-1)^{k-1} \binom{n}{2k-1} \cdot (2k-1)! \left(\arcsin\frac{x}{a}\right)^{n-2k+1}.$$

2.812 $$\int \left(\arccos\frac{x}{a}\right)^n dx = x \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \binom{n}{2k} \cdot (2k)! \left(\arccos\frac{x}{a}\right)^{n-2k} + \sqrt{a^2-x^2} \sum_{k=1}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} (-1)^k \binom{n}{2k-1} \cdot (2k-1)! \left(\arccos\frac{x}{a}\right)^{n-2k+1}.$$

2.813

1. $\int \arcsin\frac{x}{a}\, dx = x \arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2}.$
2. $\int \left(\arcsin\frac{x}{a}\right)^2 dx = x\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)^2 + 2\sqrt{a^2-x^2}\arcsin\frac{x}{a} - 2x.$
3. $\int \left(\arcsin\frac{x}{a}\right)^3 dx = x\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)^3 + 3\sqrt{a^2-x^2}\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)^2 - 6x\arcsin\frac{x}{a} - 6\sqrt{a^2-x^2}.$

2.814

1. $\int \arccos\frac{x}{a}\, dx = x \arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}.$
2. $\int \left(\arccos\frac{x}{a}\right)^2 dx = x\left(\arccos\frac{x}{a}\right)^2 - 2\sqrt{a^2-x^2}\arccos\frac{x}{a} - 2x.$
3. $\int \left(\arccos\frac{x}{a}\right)^3 dx = x\left(\arccos\frac{x}{a}\right)^3 - 3\sqrt{a^2-x^2}\left(\arccos\frac{x}{a}\right)^2 - 6x\arccos\frac{x}{a} + 6\sqrt{a^2-x^2}.$

2.82 Арксеканс и арккосеканс, арктангенс и арккотангенс

2.821

1. $\int \operatorname{arccosec}\frac{x}{a}\, dx = \int \arcsin\frac{a}{x}\, dx =$
$= x\arcsin\frac{a}{x} + a\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) \quad \left[0 < \arcsin\frac{a}{x} < \frac{\pi}{2}\right];$
$= x\arcsin\frac{a}{x} - a\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) \quad \left[-\frac{\pi}{2} < \arcsin\frac{a}{x} < 0\right].$ Д (534)
2. $\int \operatorname{arcsec}\frac{x}{a}\, dx = \int \arccos\frac{a}{x}\, dx =$
$= x\arccos\frac{a}{x} - a\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) \quad \left[0 < \arccos\frac{a}{x} < \frac{\pi}{2}\right];$
$= x\arccos\frac{a}{x} + a\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) \quad \left[-\frac{\pi}{2} < \arccos\frac{a}{x} < 0\right].$ Д (531)

2.822

1. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2).$ Д(525)

2. $\int \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2).$ Д(528)

2.83 Арксинус, арккосинус и алгебраическая функция

2.831 $\int x^n \arcsin\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(см. 2.263 1., 2.264, 2.27).

2.832 $\int x^n \arccos\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\arccos\frac{x}{a} + \frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(см. 2.263 1., 2.264, 2.27).

1. При $n=-1$ эти интегралы $\left(\text{т. е. } \int\frac{\arcsin x}{x}\,dx \text{ и } \int\frac{\arccos x}{x}\,dx\right)$ с помощью конечной комбинации элементарных функций не выражаются.

2. $\int\frac{\arccos x}{x}\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{x} - \int\frac{\arcsin x}{x}\,dx.$

2.833

1. $\int x\arcsin\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}.$

2. $\int x\arccos\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}.$

2.834

1. $\int\frac{1}{x^2}\arcsin\frac{x}{a}\,dx = -\frac{1}{x}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$

2. $\int\frac{1}{x^2}\arccos\frac{x}{a}\,dx = -\frac{1}{x}\arccos\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$

2.835 $\int\frac{\arcsin x}{(a+bx)^2}\,dx = -\frac{\arcsin x}{b(a+bx)} - \frac{2}{b\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(a-b)(1-x)}{(a+b)(1+x)}}$

$[a^2>b^2];$

$= -\frac{\arcsin x}{b(a+bx)} - \frac{1}{b\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{(a+b)(1+x)}+\sqrt{(b-a)(1-x)}}{\sqrt{(a+b)(1+x)}-\sqrt{(b-a)(1-x)}}$ $[a^2<b^2].$

2.836 $\int\frac{x\arcsin x}{(1+cx^2)^2}\,dx = \frac{\arcsin x}{2c(1+cx^2)} + \frac{1}{2c\sqrt{c+1}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{c+1}\,x}{\sqrt{1-x^2}}$ $[c>-1];$

$= -\frac{\arcsin x}{2c(1+cx^2)} + \frac{1}{4c\sqrt{-(c+1)}}\ln\frac{\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{-(c+1)}}{\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{-(c+1)}}$ $[c<-1].$

2.837

1. $\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x.$

2. $\int \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \frac{1}{4} (\arcsin x)^2.$

3. $\int \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} (x^2+2) \sqrt{1-x^2} \arcsin x.$

2.838

1. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln (1-x^2).$

2. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.$

2.84 Арксеканс, арккосеканс и степени x

2.841

1. $\int x \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx = \int x \arccos \frac{a}{x} dx =$

$= \frac{1}{2} \left\{x^2 \arccos \frac{a}{x} - a\sqrt{x^2-a^2}\right\} \left[0 < \arccos \frac{a}{x} < \frac{\pi}{2}\right];$

$= \frac{1}{2} \left\{x^2 \arccos \frac{a}{x} + a\sqrt{x^2-a^2}\right\} \left[\frac{\pi}{2} < \arccos \frac{a}{x} < \pi\right].$ Д (531.1)

2. $\int x^2 \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx = \int x^2 \arccos \frac{a}{x} dx =$

$= \frac{1}{3} \left\{x^3 \arccos \frac{a}{x} - \frac{a}{2} x \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^3}{2} \ln (x+\sqrt{x^2-a^2})\right\}$

$\left[0 < \arccos \frac{a}{x} < \frac{\pi}{2}\right];$

$= \frac{1}{3} \left\{x^3 \arccos \frac{a}{x} + \frac{a}{2} x \sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^3}{2} \ln (x+\sqrt{x^2-a^2})\right\}$

$\left[\frac{\pi}{2} < \arccos \frac{a}{x} < \pi\right].$ Д (531.2)

3. $\int x \operatorname{arccosec} \frac{x}{a} dx = \int x \arcsin \frac{a}{x} dx =$

$= \frac{1}{2} \left\{x^2 \arcsin \frac{a}{x} + a\sqrt{x^2-a^2}\right\} \quad \left[0 < \arcsin \frac{a}{x} < \frac{\pi}{2}\right];$

$= \frac{1}{2} \left\{x^2 \arcsin \frac{a}{x} - a\sqrt{x^2-a^2}\right\} \quad \left[-\frac{\pi}{2} < \arcsin \frac{a}{x} < 0\right].$

Д (534.1)

2.85 Арктангенс, арккотангенс и алгебраическая функция

2.851 $\int x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{a^2+x^2}.$

2.852

1. $\int x^n \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{a^2+x^2}.$

При $n = -1$

$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$ не может быть выражен с помощью конечной комбинации элементарных функций.

2. $\int \frac{\operatorname{arcctg} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln x - \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$

2.853

1. $\int x \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax}{2}.$

2. $\int x \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{ax}{2}.$

2.854 $\int \frac{1}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = -\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2}.$

2.855 $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(\alpha+\beta x)^2}\,dx = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left\{\ln\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\beta-\alpha x}{\alpha+\beta x}\operatorname{arctg} x\right\}.$

2.856

1. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+x^2)\,dx}{1+x^2}.$ Т (689)

2. $\int \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2.$ Т (405)

3. $\int \frac{x^3\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(1+x^2)\operatorname{arctg} x - \int\frac{x\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$

(см. 2.8511.)

4. $\int \frac{x^4\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}\ln(1+x^2) + \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2.$

2.857 $$\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n-2k)!!\,(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n-2k+1)!!}\,\frac{x}{(1+x^2)^{n-k+1}} + \frac{1}{2}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\operatorname{arctg} x\right]\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n-1)!!\,(2n-2k)!!}{(2n)!!\,(2n-2k+1)!!\,(n-k+1)}\,\frac{1}{(1+x^2)^{n-k+1}}.$$

2.858 $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\operatorname{arctg} x + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x.$

2.859 $$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}\,dx = \frac{x\operatorname{arctg} x}{a\sqrt{a+bx^2}} - \frac{1}{a\sqrt{b-a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+bx^2}{b-a}} \quad [a<b];$$
$$= \frac{x\operatorname{arctg} x}{a\sqrt{a+bx^2}} - \frac{1}{2a\sqrt{a-b}}\ln\frac{\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a-b}} \quad [a>b].$$

3.—4. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

3.0 ВВЕДЕНИЕ *)

3.01 Теоремы общего характера

3.011 Пусть $f(x)$ интегрируема **) в наибольшем из промежутков (p, q), (p, r), (r, q). Тогда (независимо от взаимного расположения точек p, q, r) она интегрируема и в двух других промежутках, и имеет место равенство

$$\int_p^q f(x)\,dx = \int_p^r f(x)\,dx + \int_r^q f(x)\,dx. \qquad \text{Ф II 126}$$

3.012 Теорема о среднем значении (первая). Пусть 1) $f(x)$ непрерывна и $g(x)$ интегрируема в промежутке (p, q); 2) $m \leqslant f(x) \leqslant M$; 3) $g(x)$ во всем промежутке (p, q) не меняет знака. Тогда существует хотя бы одна точка ξ $(p \leqslant \xi \leqslant q)$, для которой

$$\int_p^q f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_p^q g(x)\,dx. \qquad \text{Ф II 132}$$

3.013 Вторая теорема о среднем значении. Если в промежутке (p, q) $[p < q]$ $f(x)$ монотонно не возрастает и неотрицательна, а $g(x)$ интегрируема, то существует хотя бы одна точка ξ $[p \leqslant \xi \leqslant q]$, для которой

1. $$\int_p^q f(x)\,g(x)\,dx = f(p)\int_p^{\xi} g(x)\,dx.$$

Если при сохранении остальных условий теоремы 3.013 1. $f(x)$ монотонно не убывает, то

2. $$\int_p^q f(x)\,g(x)\,dx = f(q)\int_{\xi}^q g(x)\,dx \quad [p \leqslant \xi \leqslant q].$$

---

*) Определение определенных и кратных интегралов мы опускаем, так как они широко известны и их можно легко найти в каждом учебнике. Мы приводим здесь только некоторые теоремы общего характера, дающие оценки или приводящие данный интеграл к более простому.

**) Функция $f(x)$ называется *интегрируемой* в промежутке (p, q), если существует $\int_p^q f(x)\,dx$. При этом обычно подразумевают существование интеграла в смысле Римана. Если же речь идет о существовании интеграла в смысле Стилтьеса, Лебега и т. п., то говорят об интегрируемости в смысле Стилтьеса, Лебега и т. п.

Если в промежутке (p, q) $[p<q]$ $f(x)$ монотонна, а $g(x)$ интегрируема, то

3. $$\int_p^q f(x)g(x)\,dx = f(p)\int_p^{\xi} g(x)\,dx + f(q)\int_{\xi}^q g(x)\,dx \quad [p \leqslant \xi \leqslant q],$$

или

4. $$\int_p^q f(x)g(x)\,dx = A\int_p^{\xi} g(x)\,dx + B\int_{\xi}^q g(x)\,dx \quad [p \leqslant \xi \leqslant q],$$

где A и B — два любые числа, удовлетворяющие условиям

$A \geqslant f(p+0)$ и $B \leqslant f(q-0)$ [если f убывает],

$A \leqslant f(p+0)$ и $B \geqslant f(q-0)$ [если f возрастает];

в частности,

5. $$\int_p^q f(x)g(x)\,dx = f(p+0)\int_p^{\xi} g(x)\,dx + f(q-0)\int_{\xi}^q g(x)\,dx.$$ Ф II 138

3.02 Замена переменного в определенном интеграле

3.020 $$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\varphi}^{\psi} f[g(t)]\,g'(t)\,dt; \quad x = g(t).$$

Эта формула действительна при следующих условиях:

1. $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $A \leqslant x \leqslant B$, заключающем в себе старые пределы α и β.
2. Имеют место равенства $\alpha = g(\varphi)$, $\beta = g(\psi)$.
3. $g(t)$ и ее производная $g'(t)$ непрерывны на отрезке $\varphi \leqslant t \leqslant \psi$.
4. При изменении t от φ до ψ $g(t)$ изменяется всегда в одном и том же направлении от $g(\varphi) = \alpha$ до $g(\psi) = \beta$ *).

3.021 Интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ может быть преобразован в другой интеграл с заданными пределами φ и ψ при помощи линейной подстановки

$$x = \frac{\beta-\alpha}{\psi-\varphi}t + \frac{\alpha\psi-\beta\varphi}{\psi-\varphi}:$$

1. $$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{\psi-\varphi}\int_{\varphi}^{\psi} f\left(\frac{\beta-\alpha}{\psi-\varphi}t + \frac{\alpha\psi-\beta\varphi}{\psi-\varphi}\right)dt;$$

в частности, при $\varphi = 0$, $\psi = 1$:

2. $$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = (\beta-\alpha)\int_0^1 f((\beta-\alpha)t+\alpha)\,dt.$$

---

*) В случае, если последнее условие не удовлетворено, отрезок $\varphi \leqslant t \leqslant \psi$ следует разделить на части, в которых это условие удовлетворяется:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\varphi}^{\varphi_1} f[g(t)]\,g'(t)\,dt + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f[g(t)]\,g'(t)\,dt + \ldots + \int_{\varphi_{n-1}}^{\psi} f[g(t)]\,g'(t)\,dt.$$

При $\varphi=0$, $\psi=\infty$:

3. $$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=(\beta-\alpha)\int\limits_{0}^{\infty} f\left(\frac{\alpha+\beta t}{1+t}\right)\frac{dt}{(1+t)^2}.$$

3.022 Имеют место также следующие равенства:

1. $$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)\,dx.$$

2. $$\int\limits_{0}^{\beta} f(x)\,dx=\int\limits_{0}^{\beta} f(\beta-x)\,dx.$$

3. $$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)\,dx.$$

3.03 Формулы общего характера

3.031

1. Пусть $f(x)$ — функция, интегрируемая на отрезке $(-p,\ p)$ и удовлетворяющая на этом отрезке соотношению $f(-x)=f(x)$ (такую функцию называют *четной*); тогда

$$\int\limits_{-p}^{p} f(x)\,dx=2\int\limits_{0}^{p} f(x)\,dx.$$ Ф II 159

2. Пусть $f(x)$ — функция, интегрируемая на отрезке $(-p,\ p)$ и удовлетворяющая на этом отрезке соотношению $f(-x)=-f(x)$ (такую функцию называют *нечетной*); тогда

$$\int\limits_{-p}^{p} f(x)\,dx=0.$$ Ф II 159

3.032

1. $$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx,$$

где $f(x)$ — интегрируемая на отрезке $(0,\ 1)$ функция. Ф II 159

2. $$\int\limits_{0}^{2\pi} f(p\cos x+q\sin x)\,dx=2\int\limits_{0}^{\pi} f\left(\sqrt{p^2+q^2}\cos x\right)dx,$$

где $f(x)$ — интегрируемая на отрезке $\left(-\sqrt{p^2+q^2},\ \sqrt{p^2+q^2}\right)$ функция. Ф II 160

3. $$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)\cos x\,dx,$$

где $f(x)$ — интегрируемая на отрезке $(0,\ 1)$ функция. Ф II 161

3.033

1. Если $f(x+\pi)=f(x)$ и $f(-x)=f(x)$, то

$$\int_0^\infty f(x)\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx.$$ ЛоV 277 (3)

2. Если $f(x+\pi)=-f(x)$ и $f(-x)=f(x)$, то

$$\int_0^\infty f(x)\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx.$$ ЛоV 279 (4)

В формулах 3.033 предполагается, что интегралы, стоящие в левых частях формул, существуют.

3.034 $$\int_0^\infty \frac{f(px)-f(qx)}{x}\,dx=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{q}{p},$$

если $f(x)$ — функция, непрерывная при $x\geqslant 0$, и если существует конечный предел $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ФII 633

3.035

1. $$\int_0^\pi \frac{f(\alpha+e^{xi})+f(\alpha+e^{-xi})}{1+2p\cos x+p^2}\,dx=\frac{2\pi}{1-p^2}f(\alpha+p)\quad [|p|<1].$$ Ла 230 (16)

2. $$\int_0^\pi \frac{1-p\cos x}{1-2p\cos x+p^2}\{f(\alpha+e^{xi})+f(\alpha+e^{-xi})\}\,dx=\pi\{f(\alpha+p)+f(\alpha)\}$$

$[|p|<1]$. Б 169

3. $$\int_0^\pi \frac{f(\alpha+e^{-xi})-f(\alpha+e^{xi})}{1-2p\cos x+p^2}\sin x\,dx=\frac{\pi}{pi}\{f(\alpha+p)-f(\alpha)\}\quad [|p|<1].$$

Б 169

В формулах 3.035 предполагается, что функция f аналитическая в замкнутом единичном круге с центром в точке α.

3.036

1. $$\int_0^\pi f\left(\frac{\sin^2 x}{1+2p\cos x+p^2}\right)dx=\int_0^\pi f(\sin^2 x)\,dx\qquad [p^2\geqslant 1];$$

$$=\int_0^\pi f\left(\frac{\sin^2 x}{p^2}\right)dx\qquad [p^2<1].$$ Ла 228 (6)

2. $$\int_0^\pi F^{(n)}(\cos x)\sin^{2n}x\,dx=(2n-1)!!\int_0^\pi F(\cos x)\cos nx\,dx.$$ Б 174

3.037 Если f — функция, аналитическая в круге радиуса r, и если

$$f[r(\cos x+i\sin x)]=f_1(r,x)+if_2(r,x),$$

то

1. $\int\limits_0^\infty \frac{f_1(r, x)}{p^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2p} f(re^{-p}).$ Ла 230 (19)

2. $\int\limits_0^\infty f_2(r, x) \frac{x\,dx}{p^2+x^2} = \frac{\pi}{2} [f(re^{-p}) - f(0)].$ Ла 230 (20)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{f_2(r, x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} [f(r) - f(0)].$ Ла 230 (21)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{f_2(r, x)}{x(p^2+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2p^2} [f(r) - f(re^{-p})].$ Ла 230 (22)

3.038 $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} F\left(qx + p\sqrt{1+x^2}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(p \operatorname{ch} x + q \operatorname{sh} x) \operatorname{sh} x\,dx = 2q \int\limits_0^\infty F'\left(\operatorname{sign} p \cdot \sqrt{p^2-q^2} \operatorname{ch} x\right) \cdot \operatorname{sh}^2 x\,dx$$

[F — функция, имеющая непрерывную производную в промежутке $(-\infty, \infty)$; все использованные интегралы сходятся]. Ло III 281 *и*, Ло III 391 *и*.

3.04 Несобственные интегралы

3.041 Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $(p, +\infty)$ и интегрируема в любой его конечной части (p, P); тогда по определению

$$\int\limits_p^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{P\to+\infty} \int\limits_p^P f(x)\,dx,$$

если этот предел существует. В случае существования указанного предела говорят, что интеграл $\int\limits_p^{+\infty} f(x)\,dx$ *существует* или *сходится*. В противном случае говорят, что интеграл *расходится*.

3.042 Пусть в любом промежутке $(p, q-\eta)$ $(0 < \eta < q-p)$ функция $f(x)$ ограничена и интегрируема, но оказывается неограниченной в каждом промежутке $(q-\eta, q)$ слева от точки q. Точка q носит в этом случае название *особой точки*. Тогда по определению

$$\int\limits_p^q f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0} \int\limits_p^{q-\eta} f(x)\,dx,$$

если этот предел существует. В этом случае говорят, что интеграл $\int\limits_p^q f(x)\,dx$ *существует* или *сходится*.

3.043 Если сходится не только интеграл от $f(x)$, но и интеграл от $|f(x)|$, то говорят, что интеграл от $f(x)$ *сходится абсолютно*.

3.044 Интеграл $\int\limits_p^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно, если можно указать такое

число $\alpha > 1$, при котором предел

$$\lim_{x\to+\infty}\{x^{\alpha}|f(x)|\}$$

существует; если же

$$\lim_{x\to+\infty}\{x|f(x)|\}=L>0,$$

то интеграл $\int\limits_p^{+\infty}|f(x)|\,dx$ **расходится.**

3.045 Интеграл $\int\limits_p^q f(x)\,dx$, **для которого** верхний предел q является особой точкой, **сходится абсолютно, если можно указать такое число $\alpha < 1$, при** котором предел

$$\lim_{x\to q}[(q-x)^{\alpha}|f(x)|]$$

существует; если же

$$\lim_{x\to q}[(q-x)|f(x)|]=L>0,$$

то интеграл $\int\limits_p^q f(x)\,dx$ **расходится.**

3.046 Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $(p, +\infty)$, причем $f(x)$ интегрируема в каждом конечном промежутке (p, P). Если интеграл

$$\int\limits_p^P f(x)\,dx$$

представляет собою ограниченную функцию от P, а $g(x)$ — монотонная функция, причем $g(x)\to 0$ при $x\to+\infty$, то интеграл

$$\int\limits_p^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$$

сходится. ФII 577

3.05 Главные значения несобственных интегралов

3.051 Пусть функция $f(x)$ имеет одну особую точку r внутри промежутка (p, q), в котором она определена, и интегрируема в каждой части этого промежутка, не содержащей точки r. Тогда по определению

$$\int\limits_p^q f(x)\,dx=\lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta'\to 0}}\left\{\int\limits_p^{r-\eta} f(x)\,dx+\int\limits_{r+\eta'}^{q} f(x)\,dx\right\},$$

причем предел должен существовать при н е з а в и с и м о м предельном переходе по η и по η'. Если указанный предел не существует, но существует предел

$$\lim_{\eta\to 0}\left\{\int\limits_p^{r-\eta} f(x)\,dx+\int\limits_{r+\eta}^{q} f(x)\,dx\right\},$$

то этот последний называют *главным значением несобственного интеграла* $\int\limits_p^q f(x)\,dx$ и говорят, что интеграл $\int\limits_p^q f(x)\,dx$ *существует в смысле главного значения.* Ф II 603

3.052 Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (p, q) и обращается в нуль в одной лишь точке r внутри этого промежутка. Пусть в окрестности точки r существует первая производная $f'(x)$, причем пусть $f'(r) \neq 0$, и в самой точке r существует вторая производная $f''(r)$. Тогда

$$\int\limits_p^q \frac{dx}{f(x)}$$

расходится, но существует в смысле главного значения. Ф II 605

3.053 Расходящийся интеграл от положительной функции не может существовать в смысле главного значения. Ф II 605

3.054 Пусть в промежутке $(-\infty, +\infty)$ у функции $f(x)$ нет особых точек. Тогда, по определению,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{P\to-\infty \\ Q\to+\infty}} \int\limits_P^Q f(x)\,dx,$$

причем предел должен существовать при независимом предельном переходе по P и по Q. Если указанный предел не существует, но существует предел

$$\lim_{P\to+\infty} \int\limits_{-P}^{+P} f(x)\,dx,$$

то этот последний называют *главным значением несобственного интеграла*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad \text{Ф II 607}$$

3.055 Для четной функции главное значение несобственного интеграла существует только в том случае, когда этот интеграл сходится (в обычном смысле). Ф II 607

3.1 – 3.2 СТЕПЕННЫЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

3.11 Рациональные функции

3.111 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p+qx}{r^2+2rx\cos\lambda+x^2}\,dx = \frac{\pi}{r\sin\lambda}(p-qr\cos\lambda)$ (главное значение)*)

(см. также 3.194 8. и 3.252 1. и 2.). БХ [22] (14)

*) В справочнике даны значения собственных и несобственных сходящихся интегралов, а также главные значения расходящихся интегралов (см. 3.05), если таковые имеются. В дальнейшем главные значения ничем не выделяются.

3.112 Интегралы типа $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(x)\,dx}{h_n(x)\,h_n(-x)}$,

где

$$g_n(x) = b_0 x^{2n-2} + b_1 x^{2n-4} + \ldots + b_{n-1},$$
$$h_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

[все корни $h_n(x)$ лежат в верхней полуплоскости].

1. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(x)\,dx}{h_n(x)\,h_n(-x)} = \frac{\pi i}{a_0} \frac{M_n}{\Delta_n},$$ Дж456

где

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix},$$

$$M_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

2. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(x)\,dx}{h_1(x)\,h_1(-x)} = \frac{\pi i b_0}{a_0 a_1}.$$ Дж454

3. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g_2(x)\,dx}{h_2(x)\,h_2(-x)} = \pi i \frac{-b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2}}{a_0 a_1}.$$

4. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g_3(x)\,dx}{h_3(x)\,h_3(-x)} = \pi i \frac{-a_2 b_0 + a_0 b_1 - \frac{a_0 a_1 b_2}{a_3}}{a_0(a_0 a_3 - a_1 a_2)}.$$ Дж454

5. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g_4(x)\,dx}{h_4(x)\,h_4(-x)} =$$
$$= \pi i \frac{b_0(-a_1 a_4 + a_2 a_3) - a_0 a_3 b_1 + a_0 a_1 b_2 + \frac{a_0 b_3}{a_4}(a_0 a_3 - a_1 a_2)}{a_0(a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3)}.$$ Дж455

6. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g_5(x)\,dx}{h_5(x)\,h_5(-x)} = \pi i \frac{M_5}{a_0 \Delta_5},$$

где

$$M_5 = b_0(-a_0a_4a_5 + a_1a_4^2 + a_2^2a_5 - a_2a_3a_4) + a_0b_1(-a_2a_5 + a_3a_4) +$$
$$+ a_0b_2(a_0a_5 - a_1a_4) + a_0b_3(-a_0a_3 + a_1a_2) + \frac{a_0b_4}{a_5}(-a_0a_1a_5 + a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3),$$
$$\Delta_5 = a_0^2a_5^2 - 2a_0a_1a_4a_5 - a_0a_2a_3a_5 + a_0a_3^2a_4 + a_1^2a_4^3 + a_1a_2^2a_5 - a_1a_2a_3a_4. \quad \text{Дж455}$$

3.12 Произведения рациональных функций и выражений, приводящихся к квадратным корням из многочленов первой и второй степени

3.121

1. $$\int_0^1 \frac{1}{1-2x\cos\lambda+x^2}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\operatorname{cosec}\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin k\lambda}{2k-1}.$$ БХ [10] (17)

2. $$\int_0^1 \frac{1}{q-px}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{\sqrt{q(q-p)}} \quad [0 < p < q].$$ БХ [10] (9)

3. $$\int_0^1 \frac{dx}{1-2rx+r^2}\sqrt{\frac{1\mp x}{1\pm x}} = \pm\frac{\pi}{4r} \mp \frac{1}{r}\frac{1\mp r}{1\pm r}\operatorname{arctg}\frac{1+r}{1-r}.$$

Ли [14] (5), Ли [14] (16)

3.13—3.17 Выражения, приводящиеся к квадратным корням из многочленов третьей и четвертой степени, и их произведения с рациональными функциями

В 3.131—3.137 положено: $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{a-c}{a-u}}$, $\beta = \arcsin\sqrt{\frac{c-u}{b-u}}$,
$\gamma = \arcsin\sqrt{\frac{u-c}{b-c}}$, $\delta = \arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(b-u)}{(b-c)(a-u)}}$,
$\varkappa = \arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(u-b)}{(a-b)(u-c)}}$, $\lambda = \arcsin\sqrt{\frac{a-u}{a-b}}$,
$\mu = \arcsin\sqrt{\frac{u-a}{u-b}}$, $\nu = \arcsin\sqrt{\frac{a-c}{u-c}}$, $p = \sqrt{\frac{a-b}{a-c}}$, $q = \sqrt{\frac{b-c}{a-c}}$.

3.131

1. $$\int_{-\infty}^{u} \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}}F(\alpha, p) \quad [a > b > c \geqslant u].$$ БФ (231.00)

2. $$\int_u^c \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}}F(\beta, p) \quad [a > b > c > u].$$ БФ (232.00)

3. $$\int_c^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}}F(\gamma, q) \quad [a > b \geqslant u > c].$$ БФ (233.00)

4. $$\int_u^b \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}}F(\delta, q) \quad [a > b > u \geqslant c].$$ БФ (234.00)

5. $$\int_b^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}}F(\varkappa, p) \quad [a \geqslant u > b > c].$$ БФ (235.00)

6. $\int\limits_u^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}} F(\lambda, p) \quad [a > u \geqslant b > c].$ БФ (236.00)

7. $\int\limits_a^u \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}} F(\mu, q) \quad [u > a > b > c].$ БФ (237.00)

8. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}} F(\nu, q) \quad [u \geqslant a > b > c].$ БФ (238.00)

3.132

1. $\int\limits_u^c \frac{x\,dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}} [cF(\beta, p) +$

$+ (a-c) E(\beta, p)] - 2\sqrt{\frac{(a-u)(c-u)}{b-u}} \quad [a > b > c > u].$ БФ (232.19)

2. $\int\limits_c^u \frac{x\,dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)}} = \frac{2a}{\sqrt{a-c}} F(\gamma, q) - 2\sqrt{a-c}\, E(\gamma, q)$

$[a > b \geqslant u > c].$ БФ (233.17)

3. $\int\limits_u^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}} [(b-a)\Pi(\delta, q^2, q) + aF(\delta, q)]$

$[a > b > u \geqslant c].$ БФ (234.16)

4. $\int\limits_b^u \frac{x\,dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}} [(b-c)\Pi(\varkappa, p^2, p) + cF(\varkappa, p)]$

$[a \geqslant u > b > c].$ БФ (235.16)

5. $\int\limits_u^a \frac{x\,dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)}} = \frac{2c}{\sqrt{a-c}} F(\lambda, p) + 2\frac{a}{b}\sqrt{a-c}\, E(\lambda, p)$

$[a > u \geqslant b > c].$ БФ (236.16)

6. $\int\limits_a^u \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{b\sqrt{a-c}} [a(a-b)\Pi(\mu, 1, q) + b^2 F(\mu, q)]$

$[u > a > b > c].$ БФ (237.16)

3.133

1. $\int\limits_{-\infty}^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^3(b-x)(c-x)}} = \frac{2}{(a-b)\sqrt{a-c}} [F(\alpha, p) - E(\alpha, p)]$

$[a > b > c \geqslant u].$ БФ (231.08)

2. $\int\limits_u^c \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^3(b-x)(c-x)}} = \frac{2}{(a-b)\sqrt{a-c}} [F(\beta, p) - E(\beta, p)] +$

$+ \frac{2}{a-c}\sqrt{\frac{c-u}{(a-u)(b-u)}} \quad [a > b > c > u].$ БФ (232.13)

3. $$\int_c^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^3(b-x)(x-c)}} = \frac{2}{(a-b)\sqrt{a-c}} E(\gamma, q) - \frac{2}{(a-b)(a-c)} \sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{a-u}} \quad [a > b \geqslant u > c].$$ БФ (233.09)

4. $$\int_u^b \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^3(b-x)(x-c)}} = \frac{2}{(a-b)\sqrt{a-c}} E(\delta, q) \quad [a > b > u \geqslant c].$$ БФ (234.05)

5. $$\int_b^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^3(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{(a-b)\sqrt{a-c}} [F(\varkappa, p) - E(\varkappa, p)] + \frac{2}{a-b} \sqrt{\frac{u-b}{(a-u)(u-c)}} \quad [a > u > b > c].$$ БФ (235.04)

6. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^3(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{(b-a)\sqrt{a-c}} E(\nu, q) + \frac{2}{a-b} \sqrt{\frac{u-b}{(u-a)(u-c)}} \quad [u > a > b > c].$$ БФ (238.05)

7. $$\int_{-\infty}^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)^3(c-x)}} = \frac{2\sqrt{a-c}}{(a-b)(b-c)} E(\alpha, p) - \frac{2}{(a-b)\sqrt{a-c}} F(\alpha, p) - \frac{2}{b-c} \sqrt{\frac{c-u}{(a-u)(b-u)}} \quad [a > b > c \geqslant u].$$ БФ (231.09)

8. $$\int_u^c \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)^3(c-x)}} = \frac{2\sqrt{a-c}}{(a-b)(b-c)} E(\beta, p) - \frac{2}{(a-b)\sqrt{a-c}} F(\beta, p) \quad [a > b > c > u].$$ БФ (232.14)

9. $$\int_c^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)^3(x-c)}} = \frac{2}{(b-c)\sqrt{a-c}} F(\gamma, q) - \frac{2\sqrt{a-c}}{(a-b)(b-c)} E(\gamma, q) + \frac{2}{(a-b)(b-c)} \sqrt{\frac{(a-u)(u-c)}{b-u}} \quad [a > b > u > c].$$ БФ (233.10)

10. $$\int_u^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)^3(x-c)}} = \frac{2}{(a-b)\sqrt{a-c}} F(\lambda, p) - \frac{2\sqrt{a-c}}{(a-b)(b-c)} E(\lambda, p) + \frac{2}{(a-b)(b-c)} \sqrt{\frac{(a-u)(u-c)}{u-b}} \quad [a > u > b > c].$$ БФ (236.09)

11. $$\int_a^u \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)^3(x-c)}} = \frac{2\sqrt{a-c}}{(a-b)(b-c)} E(\mu, q) - \frac{2}{(b-c)\sqrt{a-c}} F(\mu, q) \quad [u > a > b > c].$$ БФ (237.12)

12. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)^3(x-c)}} = \frac{2\sqrt{a-c}}{(a-b)(b-c)} E(\nu, q) - \frac{2}{(b-c)\sqrt{a-c}} F(\nu, q) - \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{u-a}{(u-b)(u-c)}} \quad [u \geqslant a > b > c].$$ БФ (238.04)

13. $$\int_{-\infty}^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)^3}} = \frac{2}{(c-b)\sqrt{a-c}} E(\alpha, p) + \frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{b-u}{(a-u)(c-u)}} \quad [a > b > c > u].$$ БФ (231.10)

14. $$\int_u^b \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)^3}} = \frac{2}{(b-c)\sqrt{a-c}} [F(\delta, q) - E(\delta, q)] + \frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{b-u}{(a-u)(u-c)}} \quad [a > b > u > c].$$ БФ (234.04)

15. $$\int_b^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)^3}} = \frac{2}{(b-c)\sqrt{a-c}} E(\varkappa, p) \quad [a \geqslant u > b > c].$$ БФ (235.01)

16. $$\int_u^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)^3}} = \frac{2}{(b-c)\sqrt{a-c}} E(\lambda, p) - \frac{2}{(b-c)(a-c)}\sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{u-c}} \quad [a > u \geqslant b > c].$$ БФ (236.10)

17. $$\int_a^u \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)^3}} = \frac{2}{(b-c)\sqrt{a-c}} [F(\mu, q) - E(\mu, q)] + \frac{2}{a-c}\sqrt{\frac{u-a}{(u-b)(u-c)}} \quad [u > a > b > c].$$ БФ (237.13)

18. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)^3}} = \frac{2}{(b-c)\sqrt{a-c}} [F(\nu, q) - E(\nu, q)] \quad [u \geqslant a > b > c].$$ БФ (238.03)

3.134

1. $$\int_{-\infty}^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^5(b-x)(c-x)}} = \frac{2}{3(a-b)^2\sqrt{(a-c)^3}} \times [(3a-b-2c)F(\alpha, p) - 2(2a-b-c)E(\alpha, p)] + \frac{2}{3(a-c)(a-b)}\sqrt{\frac{(c-u)(b-u)}{(a-u)^3}} \quad [a > b > c \geqslant u].$$ БФ (231.08)

2. $$\int_u^c \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^5(b-x)(c-x)}} = \frac{2}{3(a-b)^2\sqrt{(a-c)^3}} \times [(3a-b-2c)F(\beta, p) - 2(2a-b-c)E(\beta, p)] + \frac{2[4a^2-3ab-2ac+bc-u(3a-2b-c)]}{3(a-b)(a-c)^2}\sqrt{\frac{c-u}{(a-u)^3(b-u)}} \quad [a > b > c > u].$$ БФ (232.13)

3. $$\int_c^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^5(b-x)(x-c)}} = \frac{2}{3(a-b)^2\sqrt{(a-c)^3}} \times$$
$$\times [2(2a-b-c)E(\gamma, q) - (a-b)F(\gamma, q)] -$$
$$- \frac{2[5a^2-3ab-3ac+bc-2u(2a-b-c)]}{3(a-b)^2(a-c)^2}\sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{(a-u)^3}} \quad [a > b \geqslant u > c].$$
БФ [233.09]

4. $$\int_u^b \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^5(b-x)(x-c)}} = \frac{2}{3(a-b)^2\sqrt{(a-c)^3}} \times$$
$$\times [2(2a-b-c)E(\delta, q) - (a-b)F(\delta, q)] -$$
$$- \frac{2}{3(a-b)(a-c)}\sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{(a-u)^3}} \quad [a > b > u \geqslant c].$$
БФ (234.05)

5. $$\int_b^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^5(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{3(a-b)^2\sqrt{(a-c)^3}} \times$$
$$\times [(3a-b-2c)F(\varkappa, p) - 2(2a-b-c)E(\varkappa, p)] +$$
$$+ \frac{2[4a^2-2ab-3ac+bc-u(3a-b-2c)]}{3(a-b)^2(a-c)}\sqrt{\frac{u-b}{(a-u)^3(u-c)}} \quad [a > u > b > c].$$
БФ (235.04)

6. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^5(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{3(a-b)^2\sqrt{(a-c)^3}} \times$$
$$\times [2(2a-b-c)E(\nu, q) - (a-b)F(\nu, q)] +$$
$$+ \frac{2[4a^2-2ab-3ac+bc+u(b+2c-3a)]}{3(a-b)^2(a-c)}\sqrt{\frac{u-b}{(u-a)^3(u-c)}} \quad [u > a > b > c].$$
БФ (238.05)

7. $$\int_{-\infty}^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)^5(c-x)}} = \frac{2}{3(a-b)^2(b-c)^2\sqrt{a-c}} \times$$
$$\times [2(a-c)(a+c-2b)E(\alpha, p) + (b-c)(3b-a-2c)F(\alpha, p)] -$$
$$- \frac{2[3ab-ac+2bc-4b^2-u(2a-3b+c)]}{3(a-b)(b-c)^2}\sqrt{\frac{c-u}{(a-u)(b-u)^3}} \quad [a > b > c \geqslant u].$$
БФ (231.09)

8. $$\int_u^c \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)^5(c-x)}} = \frac{2}{3(a-b)^2(b-c)^2\sqrt{a-c}} \times$$
$$\times [(b-c)(3b-a-2c)F(\beta, p) + 2(a-c)(a-2b+c)E(\beta, p)] +$$
$$+ \frac{2}{3(a-b)(b-c)}\sqrt{\frac{(a-u)(c-u)}{(b-u)^3}} \quad [a > b > c > u].$$
БФ (232.14)

9. $$\int_c^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)^5(x-c)}} = \frac{2}{3(a-b)^2(b-c)^2\sqrt{a-c}} \times$$
$$\times [(a-b)(2a-3b+c)F(\gamma, q) + 2(a-c)(2b-a-c)E(\gamma, q)] +$$
$$+ \frac{2[3ab+3bc-ac-5b^2-2u(a-2b+c)]}{3(a-b)^2(b-c)^2}\sqrt{\frac{(a-u)(u-c)}{(b-u)^3}} \quad [a > b > u > c].$$
БФ (233.10)

10. $$\int_u^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)^5(x-c)}} = \frac{2}{3(a-b)^2(b-c)^2\sqrt{a-c}} \times$$
$$\times [(b-c)(3b-2c-a)F(\lambda, p)+2(a-c)(a+c-2b)E(\lambda, p)]+$$
$$+\frac{2[3ab+3bc-ac-5b^2+2u(2b-a-c)]}{3(a-b)^2(b-c)^2}\sqrt{\frac{(a-u)(u-c)}{(u-b)^3}} \quad [a>u>b>c].$$
БФ (236.09)

11. $$\int_a^u \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)^5(x-c)}} = \frac{2}{3(a-b)^2(b-c)^2\sqrt{a-c}} \times$$
$$\times [(a-b)(2a+c-3b)F(\mu, q)+2(a-c)(2b-a-c)E(\mu, q)]+$$
$$+\frac{2}{3(a-b)(b-c)}\sqrt{\frac{(u-a)(u-c)}{(u-b)^3}} \quad [u>a>b>c].$$ БФ (237.12)

12. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)^5(x-c)}} = \frac{2}{3(a-b)^2(b-c)^2\sqrt{a-c}} \times$$
$$\times [(a-b)(2a+c-3b)F(\nu, q)+2(a-c)(2b-c-a)E(\nu, q)]-$$
$$-\frac{2[3bc+2ab-ac-4b^2+u(3b-a-2c)]}{3(a-b)^2(b-c)}\sqrt{\frac{u-a}{(u-b)^3(u-c)}} \quad [u\geqslant a>b>c].$$
БФ (238.04)

13. $$\int_{-\infty}^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)^5}} = \frac{2}{3(b-c)^2\sqrt{(a-c)^3}} \times$$ 12
$$\times [2(a+b-2c)E(\alpha, p)-(b-c)F(\alpha, p)]+$$
$$+\frac{2[ab-3ac-2bc+4c^2+u(2a+b-3c)]}{3(a-c)(b-c)^2}\sqrt{\frac{b-u}{(a-u)(c-u)^3}}$$
$$[a>b>c>u].$$ БФ (231.10)

14. $$\int_u^b \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)^5}} = \frac{2}{3(b-c)^2\sqrt{(a-c)^3}} \times$$
$$\times [(2a+b-3c)F(\delta, q)-2(a+b-2c)E(\delta, q)]+$$
$$+\frac{2[ab-3ac-2bc+4c^2+u(2a+b-3c)]}{3(b-c)^2(a-c)}\sqrt{\frac{b-u}{(a-u)(u-c)^3}}$$
$$[a>b>u>c].$$ БФ (234.04)

15. $$\int_b^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)^5}} = \frac{2}{3(b-c)^2\sqrt{(a-c)^3}} \times$$
$$\times [2(a+b-2c)E(\varkappa, p)-(b-c)F(\varkappa, p)]+$$
$$+\frac{2}{3(a-c)(b-c)}\sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{(u-c)^3}} \quad [a\geqslant u>b>c].$$ БФ (235.20)

16. $$\int_u^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)^5}} = \frac{2}{3(b-c)^2\sqrt{(a-c)^3}} \times$$
$$\times [2(a+b-2c)E(\lambda, p)-(b-c)F(\lambda, p)]-$$
$$-\frac{2[ab-3ac-3bc+5c^2+2u(a+b-2c)]}{3(b-c)^2(a-c)^2}\sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{(u-c)^3}}$$
$$[a>u\geqslant b>c].$$ БФ (236.10)

17. $$\int_a^u \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)^5}} = \frac{2}{3(b-c)^2\sqrt{(a-c)^3}} \times$$
$$\times [(2a+b-3c)F(\mu, q) - 2(a+b-2c)E(\mu, q)] +$$
$$+ \frac{2[4c^2-ab-2ac-bc+u(3a+2b-5c)]}{3(b-c)(a-c)^2}\sqrt{\frac{u-a}{(u-b)(u-c)^3}}$$
$[u > a > b > c]$. БФ (237.13)

18. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)^5}} = \frac{2}{3(b-c)^2\sqrt{(a-c)^3}} \times$$
$$\times [(2a+b-3c)F(\nu, q) - 2(a+b-2c)E(\nu, q)] +$$
$$+ \frac{2}{3(a-c)(b-c)}\sqrt{\frac{(u-a)(u-b)}{(u-c)^3}}$$
$[u \geqslant a > b > c]$. БФ (238.03)

3.135

1. $$\int_{-\infty}^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)^3(c-x)^3}} = \frac{2}{(a-b)(b-c)^2\sqrt{a-c}} \times$$
$$\times [(b-c)F(\alpha, p) - (a+b-2c)E(\alpha, p)] +$$
$$+ \frac{2(b+c-2u)}{(b-c)^2\sqrt{(a-u)(b-u)(c-u)}}$$
$[a > b > c > u]$. БФ (231.13)

2. $$\int_u^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)^3(x-c)^3}} = \frac{2}{(a-b)(b-c)^2\sqrt{a-c}} \times$$
$$\times [(b-c)F(\lambda, p) - 2(2a-b-c)E(\lambda, p)] +$$
$$+ \frac{2(a-b-c+u)}{(a-b)(b-c)(a-c)}\sqrt{\frac{a-u}{(u-b)(u-c)}}$$
$[a > u > b > c]$. БФ (236.15)

3. $$\int_a^u \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)^3(x-c)^3}} = \frac{2}{(a-b)(b-c)^2\sqrt{a-c}} \times$$
$$\times [(2a-b-c)E(\mu, q) - 2(a-b)F(\mu, q)] +$$
$$+ \frac{2}{(a-c)(b-c)}\sqrt{\frac{u-a}{(u-b)(u-c)}}$$
$[u > a > b > c]$. БФ (237.14)

4. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)^3(x-c)^3}} = \frac{2}{(a-b)(b-c)^2\sqrt{a-c}} \times$$
$$\times [(2a-b-c)E(\nu, q) - 2(a-b)F(\nu, q)] -$$
$$- \frac{2}{(a-b)(b-c)}\sqrt{\frac{u-a}{(u-b)(u-c)}}$$
$[u \geqslant a > b > c]$. БФ (238.13)

5. $$\int_{-\infty}^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^3(b-x)(c-x)^3}} = \frac{2}{(a-b)(b-c)\sqrt{(a-c)^3}} \times$$
$$\times [(2b-a-c)E(\alpha, p) - (b-c)F(\alpha, p)] +$$
$$+ \frac{2}{(b-c)(a-c)}\sqrt{\frac{b-u}{(a-u)(c-u)}}$$
$[a > b > c > u]$. БХ (231.12)

6. $$\int\limits_u^b \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^3(b-x)(x-c)^3}} = \frac{2}{(b-c)(a-b)\sqrt{(a-c)^3}} \times \\ \times [(a-b)F(\delta, q) + (2b-a-c)E(\delta, q)] + \\ + \frac{2}{(b-c)(a-c)}\sqrt{\frac{b-u}{(a-u)(u-c)}} \quad [a > b > u > c].$$ БФ (234.03)

7. $$\int\limits_b^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^3(x-b)(x-c)^3}} = \frac{2}{(a-b)(b-c)\sqrt{(a-c)^3}} \times \\ \times [(b-c)F(\varkappa, p) - (2b-a-c)E(\varkappa, p)] + \\ + \frac{2}{(a-b)(a-c)}\sqrt{\frac{u-b}{(a-u)(u-c)}} \quad [a > u > b > c].$$ БФ (235.15)

8. $$\int\limits_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^3(x-b)(x-c)^3}} = \frac{2}{(a-b)(b-c)\sqrt{(a-c)^3}} \times \\ \times [(a+c-2b)E(\nu, q) - (a-b)F(\nu, q)] + \\ + \frac{2}{(a-b)(a-c)}\sqrt{\frac{u-b}{(u-a)(u-c)}} \quad [u > a > b > c].$$ БФ (238.14)

9. $$\int\limits_{-\infty}^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^3(b-x)^3(c-x)}} = \frac{2}{(b-c)(a-b)^2\sqrt{a-c}} \times \\ \times [(a+b-2c)E(\alpha, p) - 2(b-c)F(\alpha, p)] - \\ - \frac{2}{(a-b)(b-c)}\sqrt{\frac{c-u}{(a-u)(b-u)}} \quad [a > b > c \geqslant u].$$ БФ (231.11)

10. $$\int\limits_u^c \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^3(b-x)^3(c-x)}} = \frac{2}{(a-b)^2(b-c)\sqrt{a-c}} \times \\ \times [(a+b-2c)E(\beta, p) - 2(b-c)F(\beta, p)] + \\ + \frac{2}{(a-b)(a-c)}\sqrt{\frac{c-u}{(a-u)(b-u)}} \quad [a > b > c > u].$$ БФ (232.15)

11. $$\int\limits_c^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^3(b-x)^3(x-c)}} = \frac{2}{(a-b)^2(b-c)\sqrt{a-c}} \times \\ \times [(a-b)F(\gamma, q) - (a+b-2c)E(\gamma, q)] + \\ + \frac{2[a^2+b^2-ac-bc-u(a+b-2c)]}{(a-b)^2(b-c)(a-c)}\sqrt{\frac{u-c}{(a-u)(b-u)}} \quad [a > b > u > c].$$ БФ (233.11)

12. $$\int\limits_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^3(x-b)^3(x-c)}} = \frac{2}{(a-b)^2(b-c)\sqrt{a-c}} \times \\ \times [(a-b)F(\nu, q) - (a+b-2c)E(\nu, q)] + \\ + \frac{2u-a-b}{(a-b)^2\sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)}} \quad [u > a > b > c].$$ БФ (238.15)

3.136

1. $$\int_{-\infty}^{u} \frac{dx}{\sqrt{(a-x)^3(b-x)^3(c-x)^3}} = \frac{2}{(a-b)^2(b-c)^2\sqrt{(a-c)^3}} \times$$
$$\times [(b-c)(a+b-2c)F(\alpha, p) - 2(c^2+a^2+b^2-ab-ac-bc)E(\alpha, p)] +$$
$$+ \frac{2[c(a-c)+b(a-b)-u(2a-c-b)]}{(a-b)(a-c)(b-c)^2\sqrt{(a-u)(b-u)(c-u)}} \quad [a > b > c > u]. \qquad \text{БФ (231.14)}$$

2. $$\int_{u}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^3(x-b)^3(x-c)^3}} = \frac{2}{(a-b)^2(b-c)^2\sqrt{(a-c)^3}} \times$$
$$\times [(a-b)(2a-b-c)F(\nu, q) - 2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)E(\nu, q)] +$$
$$+ \frac{2[u(a+b-2c)-a(a-c)-b(b-c)]}{(a-b)^2(a-c)(b-c)\sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)}} \quad [u > a > b > c]. \qquad \text{БФ (238.16)}$$

3.137

1. $$\int_{-\infty}^{u} \frac{dx}{(r-x)\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)}} = \frac{2}{(a-r)\sqrt{a-c}} \times$$
$$\times \left[\Pi\left(\alpha, \frac{a-r}{a-c}, p\right) - F(\alpha, p)\right] \quad [a > b > c \geqslant u]. \qquad \text{БФ (231.15)}$$

2. $$\int_{u}^{c} \frac{dx}{(r-x)\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)}} = \frac{2(c-b)}{(r-b)(r-c)\sqrt{a-c}} \times$$
$$\times \Pi\left(\beta, \frac{r-b}{r-c}, p\right) + \frac{2}{(r-b)\sqrt{a-c}} F(\beta, p) \quad [a > b > c > u, r \neq 0].$$
БФ (232.17)

3. $$\int_{c}^{u} \frac{dx}{(r-x)\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)}} = \frac{2}{(r-c)\sqrt{a-c}} \Pi\left(\gamma, \frac{b-c}{r-c}, q\right)$$
$$[a > b \geqslant u > c, \ r \neq c]. \qquad \text{БФ (233.02)}$$

4. $$\int_{u}^{b} \frac{dx}{(r-x)\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)}} = \frac{2}{(r-a)(r-b)\sqrt{a-c}} \times$$
$$\times \left[(b-a)\Pi\left(\delta, q^2\frac{r-a}{r-b}, q\right) + (r-b)F(\delta, q)\right]$$
$$[a > b > u \geqslant c, \ r \neq b]. \qquad \text{БФ (234.18)}$$

5. $$\int_{b}^{u} \frac{dx}{(x-r)\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{(c-r)(b-r)\sqrt{a-c}} \times$$
$$\times \left[(c-b)\Pi\left(\varkappa, p^2\frac{c-r}{b-r}, p\right) + (b-r)F(\varkappa, p)\right]$$
$$[a \geqslant u > b > c, \ r \neq b]. \qquad \text{БФ (235.17)}$$

6. $$\int_{u}^{a} \frac{dx}{(x-r)\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{(a-r)\sqrt{a-c}} \Pi\left(\lambda, \frac{a-b}{a-r}, p\right)$$
$$[a > u \geqslant b > c, \ r \neq a]. \qquad \text{БФ (236.02)}$$

7. $$\int_a^u \frac{dx}{(x-r)\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{(b-r)(a-r)\sqrt{a-c}} \times$$
$$\times \left[(b-a)\Pi\left(\mu, \frac{b-r}{a-b}, q\right) + (a-p)F(\mu, q)\right]$$
$[u > a > b > c,\ r \neq a]$. БФ (237.17)

8. $$\int_u^\infty \frac{dx}{(x-r)\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{(r-c)\sqrt{a-c}} \times$$
$$\times \left[\Pi\left(\nu, \frac{r-c}{a-c}, q\right) - F(\nu, q)\right]$$ $[u \geqslant a > b > c]$. БФ (238.06)

3.138

1. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} = 2F\left(\arcsin\sqrt{u}, k\right)$$ $[0<u<1]$. П (532) ЯЭ 150

2. $$\int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(k'^2+k^2x)}} = 2F\left(\arccos\sqrt{u}, k\right)$$ $[0<u<1]$. П (533)

3. $$\int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-k'^2)}} = 2F\left(\arcsin\frac{\sqrt{1-u}}{k}, k\right)$$ $[0<u<1]$. П (534)

4. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1+k'^2x)}} = 2F\left(\operatorname{arctg}\sqrt{u}, k\right)$$ $[0<u<1]$. П (535)

5. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{x[1+x^2+2(k'^2-k^2)x]}} = F\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{u}, k\right)$$ $[0<u<1]$. ЯЭ 150

6. $$\int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{x[k'^2(1+x^2)+2(1+k^2)x]}} = F\left(\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{u}, k\right)$$ $[0<u<1]$. ЯЭ 150

7. $$\int_\alpha^u \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)[(x-m)^2+n^2]}} = \frac{1}{\sqrt{p}} F\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{u-\alpha}{p}}, \sqrt{\frac{p+m-\alpha}{2p}}\right)$$
$[\alpha < u]$,

8. $$\int_u^\alpha \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)[(x-m)^2+n^2]}} = \frac{1}{\sqrt{p}} F\left(2\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{\alpha-u}{p}}, \sqrt{\frac{p-m+\alpha}{2p}}\right)$$
$[u < \alpha]$,

где $p = \sqrt{(m-\alpha)^2+n^2}$.

3.139 Обозначение: $\alpha = \arccos\frac{1-\sqrt{3}-u}{1+\sqrt{3}-u}$, $\beta = \arccos\frac{\sqrt{3}-1+u}{\sqrt{3}+1-u}$,
$$\gamma = \arccos\frac{\sqrt{3}+1-u}{\sqrt{3}-1+u}, \quad \delta = \arccos\frac{u-1-\sqrt{3}}{u-1+\sqrt{3}}.$$

1. $\int\limits_{-\infty}^{u} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F(\alpha, \sin 75^\circ).$ Ж 66 (285)

2. $\int\limits_{u}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F(\beta, \sin 75^\circ).$ Ж 65 (284)

3. $\int\limits_{1}^{u} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F(\gamma, \sin 15^\circ).$ Ж 65 (283)

4. $\int\limits_{u}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F(\delta, \sin 15^\circ).$ Ж 65 (282)

5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} \left\{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2.$ МО 9

6. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}} \left\{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right\}^2.$ МО 9

7. $\int\limits_{u}^{1} \sqrt{1-x^3}\,dx = \frac{1}{5}\{\sqrt[4]{27} F(\beta, \sin 75^\circ) - 2u\sqrt{1-u^3}\}.$ БФ (244.01)

8. $\int\limits_{u}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^3}} = (3^{-\frac{1}{4}} - 3^{\frac{1}{4}}) F(\beta, \sin 75^\circ) +$

$+ 2\sqrt[4]{3} E(\beta, \sin 75^\circ) - \frac{2\sqrt{1-u^3}}{\sqrt{3}+1-u}.$ БФ (244.05)

9. $\int\limits_{u}^{1} \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{2u^{m-2}\sqrt{1-u^3}}{2m-1} + \frac{2(m-2)}{2m-1} \int\limits_{u}^{1} \frac{x^{m-3}\,dx}{\sqrt{1-x^3}}.$ БФ (244.07)

10. $\int\limits_{1}^{u} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^3-1}} = (3^{-\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{4}}) F(\gamma, \sin 15^\circ) -$

$- 2\sqrt[4]{3} E(\gamma, \sin 15^\circ) + \frac{2\sqrt{u^3-1}}{\sqrt{3}-1+u}.$ БФ (240.05)

11. $\int\limits_{-\infty}^{u} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{27}} [F(\alpha, \sin 75^\circ) - 2E(\alpha, \sin 75^\circ)] +$

$+ \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+u+u^2}}{(1+\sqrt{3}-u)\sqrt{1-u}} \quad [u \neq 1].$ БФ (246.06)

12. $\int\limits_{u}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{27}} [F(\delta, \sin 15^\circ) - 2E(\delta, \sin 15^\circ)] +$

$+ \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+u+u^2}}{(u-1+\sqrt{3})\sqrt{u-1}} \quad [u \neq 1].$ БФ (242.03)

13. $$\int_{-\infty}^{u} \frac{(1-x)\,dx}{(1+\sqrt{3}-x)^2\sqrt{1-x^3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{27}}[F(\alpha, \sin 75^\circ) - E(\alpha, \sin 75^\circ)].$$ БФ (246.07)

14. $$\int_{u}^{1} \frac{(1-x)\,dx}{(1+\sqrt{3}-x)^2\sqrt{1-x^3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{27}}[F(\beta, \sin 75^\circ) - E(\beta, \sin 75^\circ)].$$ БФ (244.04)

15. $$\int_{1}^{u} \frac{(x-1)\,dx}{(1+\sqrt{3}-x)^2\sqrt{x^3-1}} = \frac{2(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{u^3-1}}{u^2-2u-2} - \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{27}} E(\gamma, \sin 15^\circ).$$ БФ (240.08)

16. $$\int_{u}^{\infty} \frac{(x-1)\,dx}{(1+\sqrt{3}-x)^2\sqrt{x^3-1}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{u^3-1}}{u^2-2u-2} - \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{27}} E(\delta, \sin 15^\circ).$$ БФ (242.07)

17. $$\int_{-\infty}^{u} \frac{(1-x)\,dx}{(1-\sqrt{3}-x)^2\sqrt{1-x^3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[4]{27}}\left[\frac{2\sqrt[4]{3}\sqrt{1-u^3}}{u^3-2u-2} - E(\alpha, \sin 75^\circ)\right].$$ БФ (246.08)

18. $$\int_{1}^{u} \frac{(x-1)\,dx}{(1-\sqrt{3}-x)^2\sqrt{x^3-1}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[4]{27}}[F(\gamma, \sin 15^\circ) - E(\gamma, \sin 15^\circ)].$$ БФ (240.04)

19. $$\int_{u}^{\infty} \frac{(x-1)\,dx}{(1-\sqrt{3}-x)^2\sqrt{x^3-1}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[4]{27}}[F(\delta, \sin 15^\circ) - E(\delta, \sin 15^\circ)].$$ БФ (242.05)

20. $$\int_{-\infty}^{u} \frac{(x^2+x+1)\,dx}{(1+\sqrt{3}-x)^2\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} E(\alpha, \sin 75^\circ).$$ БФ (246.01)

21. $$\int_{u}^{1} \frac{(x^2+x+1)\,dx}{(x-1+\sqrt{3})^2\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} E(\beta, \sin 75^\circ).$$ БФ (244.02)

22. $$\int_{1}^{u} \frac{(x^2+x+1)\,dx}{(\sqrt{3}+x-1)^2\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} E(\gamma, \sin 15^\circ).$$ БФ (240.01)

23. $$\int_{u}^{\infty} \frac{(x^2+x+1)\,dx}{(x-1+\sqrt{3})^2\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} E(\delta, \sin 15^\circ).$$ БФ (242.01)

24. $$\int_{1}^{u} \frac{(x-1)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^3-1}} = \frac{4}{\sqrt[4]{27}} E(\gamma, \sin 15^\circ) - \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[4]{27}} F(\gamma, \sin 15^\circ) - \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \frac{2(u-1)(\sqrt{3}+1-u)}{(\sqrt{3}-1+u)\sqrt{u^3-1}}.$$ БФ (240.09)

25. $\int\limits_{-\infty}^{u} \frac{(1+\sqrt{3}-x)^2\,dx}{[(1+\sqrt{3}-x)^2-4\sqrt{3}p^2(1-x)]\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\Pi(\alpha,\ p^2,\ \sin 75^\circ).$

БФ (246.02)

26. $\int\limits_{u}^{1} \frac{(1+\sqrt{3}-x)^2\,dx}{[(1+\sqrt{3}-x)^2-4\sqrt{3}p^2(1-x)]\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\Pi(\beta,\ p^2,\ \sin 75^\circ).$

БФ (244.03)

27. $\int\limits_{1}^{u} \frac{(1-\sqrt{3}-x)^2\,dx}{[(1-\sqrt{3}-x)^2-4\sqrt{3}p^2(x-1)]\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\Pi(\gamma,\ p^2,\ \sin 15^\circ).$

БФ (240.02)

28. $\int\limits_{u}^{\infty} \frac{(1-\sqrt{3}-x)^2\,dx}{[(1-\sqrt{3}-x)^2-4\sqrt{3}p^2(x-1)]\sqrt{x^3-1}} =$

$= \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\Pi(\delta,\ p^2,\ \sin 15^\circ).$ БФ (242.02)

В 3.141 и 3.142 положено: $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{a-c}{a-u}}$, $\beta = \arcsin\sqrt{\frac{c-u}{b-u}}$, $\gamma = \arcsin\sqrt{\frac{u-c}{b-c}}$, $\delta = \arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(b-u)}{(b-c)(a-u)}}$, $\varkappa = \arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(u-b)}{(a-b)(u-c)}}$, $\lambda = \arcsin\sqrt{\frac{a-u}{a-b}}$, $\mu = \arcsin\sqrt{\frac{u-a}{u-b}}$, $\nu = \arcsin\sqrt{\frac{a-c}{u-c}}$, $p = \sqrt{\frac{a-b}{a-c}}$, $q = \sqrt{\frac{b-c}{a-c}}$.

3.141

1. $\int\limits_{u}^{c} \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)(c-x)}}\,dx = 2\sqrt{a-c}\,[F(\beta,\ p)-E(\beta,\ p)] +$

$+ 2\sqrt{\frac{(a-u)(c-u)}{b-u}}\qquad [a>b>c>u].$ БФ (232.06)

2. $\int\limits_{c}^{u} \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)(x-c)}}\,dx = 2\sqrt{a-c}\,E(\gamma,\ q)\qquad [a>b\geqslant u>c].$

БФ (233.01)

3. $\int\limits_{u}^{b} \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)(x-c)}}\,dx = 2\sqrt{a-c}\,E(\delta,\ q) - 2\sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{a-u}}$

$[a>b>u\geqslant c].$ БФ (234.06)

4. $\int\limits_{b}^{u} \sqrt{\frac{a-x}{(x-b)(x-c)}}\,dx = 2\sqrt{a-c}\,[F(\varkappa,\ p)-E(\varkappa,\ p)] +$

$+ 2\sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{u-c}}\qquad [a\geqslant u>b>c].$ БФ (235.07)

5. $$\int_u^a \sqrt{\frac{a-x}{(x-b)(x-c)}}\,dx = 2\sqrt{a-c}\,[F(\lambda, p) - E(\lambda, p)]$$

$[a > u \geqslant b > c]$. БФ (236.04)

6. $$\int_a^u \sqrt{\frac{x-a}{(x-b)(x-c)}}\,dx = -2\sqrt{a-c}\,E(\mu, q) + 2\sqrt{\frac{(u-a)(u-c)}{u-b}}$$

$[u > a > b > c]$. БФ (237.03)

7. $$\int_u^c \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)(c-x)}}\,dx = \frac{2(b-c)}{\sqrt{a-c}}F(\beta, p) - 2\sqrt{a-c}\,E(\beta, p) + 2\sqrt{\frac{(a-u)(c-u)}{b-u}}$$

$[a > b > c > u]$. БФ (232.07)

8. $$\int_c^u \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)(x-c)}}\,dx = 2\sqrt{a-c}\,E(\gamma, q) - \frac{2(a-b)}{\sqrt{a-c}}F(\gamma, q)$$

$[a > b \geqslant u > c]$. БФ (233.04)

9. $$\int_u^b \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)(x-c)}}\,dx = 2\sqrt{a-c}\,E(\delta, q) - \frac{2(a-b)}{\sqrt{a-c}}F(\delta, q) - 2\sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{a-u}}$$

$[a > b > u \geqslant c]$. БФ (234.07)

10. $$\int_b^u \sqrt{\frac{x-b}{(a-x)(x-c)}}\,dx = 2\sqrt{a-c}\,E(\varkappa, p) - \frac{2(b-c)}{\sqrt{a-c}}F(\varkappa, p) - 2\sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{u-c}}$$

$[a \geqslant u > b > c]$. БФ (235.06)

11. $$\int_u^a \sqrt{\frac{x-b}{(a-x)(x-c)}}\,dx = 2\sqrt{a-c}\,E(\lambda, p) - \frac{2(b-c)}{\sqrt{a-c}}F(\lambda, p)$$

$[a > u \geqslant b > c]$. БФ (236.03)

12. $$\int_a^u \sqrt{\frac{x-b}{(x-a)(x-c)}}\,dx = \frac{2(a-b)}{\sqrt{a-c}}F(\mu, q) - 2\sqrt{a-c}\,E(\mu, q) + 2\sqrt{\frac{(u-a)(u-c)}{u-b}}$$

$[u > a > b > c]$. БФ (237.04)

13. $$\int_u^c \sqrt{\frac{c-x}{(a-x)(b-x)}}\,dx = -2\sqrt{a-c}\,E(\beta, p) + 2\sqrt{\frac{(a-u)(c-u)}{b-u}}$$

$[a > b > c > u]$. БФ (232.08)

14. $$\int_c^u \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)(b-x)}}\,dx = 2\sqrt{a-c}\,[F(\gamma, q) - E(\gamma, q)]$$

$[a > b \geqslant u > c]$. БФ (233.03)

15. $$\int_u^b \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)(b-x)}}\,dx = 2\sqrt{a-c}\,[F(\delta, q) - E(\delta, q)] + 2\sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{a-u}} \quad [a > b > u \geqslant c].$$ БФ (234.08)

16. $$\int_b^u \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)(x-b)}}\,dx = 2\sqrt{a-c}\,E(\varkappa, p) - 2\sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{u-c}} \quad [a \geqslant u > b > c].$$ БФ (235.07)

17. $$\int_u^a \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)(x-b)}}\,dx = 2\sqrt{a-c}\,E(\lambda, p) \quad [a > u \geqslant b > c].$$ БФ (236.01)

18. $$\int_a^u \sqrt{\frac{x-c}{(x-a)(x-b)}}\,dx = 2\sqrt{a-c}\,[F(\mu, q) - E(\mu, q)] + 2\sqrt{\frac{(u-a)(u-c)}{u-b}} \quad [u > a > b > c].$$ БФ (237.05)

19. $$\int_u^c \sqrt{\frac{(b-x)(c-x)}{a-x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[(2a-b-c)\,E(\beta, p) - (b-c)\,F(\beta, p)] + \frac{2}{3}(2b-2a+c-u)\sqrt{\frac{(a-u)(c-u)}{b-u}} \quad [a > b > c > u].$$ БФ (232.11)

20. $$\int_c^u \sqrt{\frac{(x-c)(b-x)}{a-x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[(2a-b-c)\,E(\gamma, q) - 2(a-b)\,F(\gamma, q)] - \frac{2}{3}\sqrt{(a-u)(b-u)(u-c)} \quad [a > b \geqslant u > c].$$ БФ (233.06)

21. $$\int_u^b \sqrt{\frac{(x-c)(b-x)}{a-x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[2(b-a)\,F(\delta, q) + (2a-b-c)\,E(\delta, q)] + \frac{2}{3}(2c-b-u)\sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{a-u}} \quad [a > b > u \geqslant c].$$ БФ (234.11)

22. $$\int_b^u \sqrt{\frac{(x-b)(x-c)}{a-x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[(2a-b-c)\,E(\varkappa, p) - (b-c)\,F(\varkappa, p)] + \frac{2}{3}(b+2c-2a-u)\sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{u-c}} \quad [a \geqslant u > b > c].$$ БФ (235.10)

23. $$\int_u^a \sqrt{\frac{(x-b)(x-c)}{a-x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[(2a-b-c)\,E(\lambda, p) - (b-c)\,F(\lambda, p)] + \frac{2}{3}\sqrt{(a-u)(u-b)(u-c)} \quad [a > u \geqslant b > c].$$ БФ (236.07)

24. $$\int_a^u \sqrt{\frac{(x-b)(x-c)}{x-a}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[2(a-b)F(\mu, q) + (b+c-2a)E(\mu, q)] + \frac{2}{3}(u+2a-2b-c)\sqrt{\frac{(u-a)(u-b)}{u-c}}$$

$[u > a > b > c]$. БФ (237.08)

25. $$\int_u^c \sqrt{\frac{(a-x)(c-x)}{b-x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[(2b-a-c)E(\beta, p) - (b-c)F(\beta, p)] + \frac{2}{3}(a+c-b-u)\sqrt{\frac{(a-u)(c-u)}{b-u}}$$

$[a > b > c > u]$. БФ (232.10)

26. $$\int_c^u \sqrt{\frac{(a-x)(x-c)}{b-x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[(2b-a-c)E(\gamma, q) + (a-b)F(\gamma, q)] - \frac{2}{3}\sqrt{(a-u)(b-u)(u-c)}$$

$[a > b \geqslant u > c]$. БФ (233.05)

27. $$\int_u^b \sqrt{\frac{(a-x)(x-c)}{b-x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[(a-b)F(\delta, q) + (2b-a-c)E(\delta, q)] + \frac{2}{3}(2a+c-2b-u)\sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{a-u}}$$

$[a > b > u \geqslant c]$. БФ (234.10)

28. $$\int_b^u \sqrt{\frac{(a-x)(x-c)}{x-b}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[(b-c)F(\varkappa, p) + (a+c-2b)E(\varkappa, p)] + \frac{2}{3}(2b-a-2c+u)\sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{u-c}}$$

$[a \geqslant u > b > c]$. БФ (235.11)

29. $$\int_u^a \sqrt{\frac{(a-x)(x-c)}{x-b}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[(a+c-2b)E(\lambda, p) + (b-c)F(\lambda, p)] - \frac{2}{3}\sqrt{(a-u)(u-b)(u-c)}$$

$[a > u \geqslant b > c]$. БФ (236.06)

30. $$\int_a^u \sqrt{\frac{(x-a)(x-c)}{x-b}}\,dx = \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{(a-c)^3}}{b-c}\,[(a+c-2b)E(\mu, q) - (a-b)F(\mu, q)] + \frac{2}{3}\,\frac{a-c}{b-c}(u+b-a-c)\sqrt{\frac{(u-a)(u-c)}{u-b}}$$

$[u > a > b > c]$. БФ (237.06)

31. $$\int\limits_u^c \sqrt{\frac{(a-x)(b-x)}{c-x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[2(b-c)F(\beta, p)+$$
$$+(2c-a-b)E(\beta, p)]+\frac{2}{3}(a+2b-2c-u)\sqrt{\frac{(a-u)(c-u)}{b-u}}$$
$[a>b>c>u]$. БФ (232.09)

32. $$\int\limits_c^u \sqrt{\frac{(a-x)(b-x)}{x-c}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[(a+b-2c)E(\gamma, q)-$$
$$-(a-b)F(\gamma, q)]+\frac{2}{3}\sqrt{(a-u)(b-u)(u-c)}$$
$[a>b\geqslant u>c]$. БФ (233.07)

33. $$\int\limits_u^b \sqrt{\frac{(a-x)(b-x)}{x-c}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[(a+b-2c)E(\delta, q)-$$
$$-(a-b)F(\delta, q)]+\frac{2}{3}(2c-2a-b+u)\sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{a-u}}$$
$[a>b>u\geqslant c]$. БФ (234.09)

34. $$\int\limits_b^u \sqrt{\frac{(a-x)(x-b)}{x-c}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[(a+b-2c)E(\varkappa, p)-$$
$$-2(b-c)F(\varkappa, p)]+\frac{2}{3}(u+c-a-b)\sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{u-c}}$$
$[a\geqslant u>b>c]$. БФ (235.09)

35. $$\int\limits_u^a \sqrt{\frac{(a-x)(x-b)}{x-c}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[(a+b-2c)E(\lambda, p)-$$
$$-2(b-c)F(\lambda, p)]-\frac{2}{3}\sqrt{(a-u)(u-b)(u-c)}$$
$[a>u\geqslant b>c]$. БФ (236.05)

36. $$\int\limits_a^u \sqrt{\frac{(x-a)(x-b)}{x-c}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{a-c}\,[(a+b-2c)E(\mu, q)-$$
$$-(a-b)F(\mu, q)]+\frac{2}{3}(u+2c-a-2b)\sqrt{\frac{(u-a)(u-c)}{u-b}}$$
$[u>a>b>c]$. БФ (237.07)

3.142

1. $$\int\limits_{-\infty}^u \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)(c-x)^3}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a-c}}F(\alpha, p)-\frac{2\sqrt{a-c}}{b-c}E(\alpha, p)+$$
$$+\frac{2(a-c)}{b-c}\sqrt{\frac{b-u}{(a-u)(c-u)}}$$
$[a>b>c>u]$. БФ (231.05)

2. $$\int\limits_u^b \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)(x-c)^3}}\,dx = 2\frac{a-b}{(b-c)\sqrt{a-c}}F(\delta, q)-$$
$$-\frac{2\sqrt{a-c}}{b-c}E(\delta, q)+2\frac{a-c}{b-c}\sqrt{\frac{b-u}{(a-u)(u-c)}}$$
$[a>b>u>c]$. БФ (234.13)

3. $$\int_b^u \sqrt{\frac{a-x}{(x-b)(x-c)^3}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{b-c}E(\varkappa, p) - \frac{2}{\sqrt{a-c}}F(\varkappa, p)$$
$[a \geqslant u > b > c]$. БФ (235.12)

4. $$\int_u^a \sqrt{\frac{a-x}{(x-b)(x-c)^3}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{b-c}E(\lambda, p) - \frac{2}{\sqrt{a-c}}F(\lambda, p) - \frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{u-c}}$$
$[a > u \geqslant b > c]$. БФ (236.12)

5. $$\int_a^u \sqrt{\frac{x-a}{(x-b)(x-c)^3}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{b-c}E(\mu, q) - \frac{2(a-b)}{(b-c)\sqrt{a-c}}F(\mu, q) - 2\sqrt{\frac{u-a}{(u-b)(u-c)}}$$
$[u > a > b > c]$. БФ (237.10)

6. $$\int_u^\infty \sqrt{\frac{x-a}{(x-b)(x-c)^3}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{b-c}E(\nu, q) - \frac{2(a-b)}{(b-c)\sqrt{a-c}}F(\nu, q)$$
$[u \geqslant a > b > c]$. БФ (238.09)

7. $$\int_{-\infty}^u \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)^3(c-x)}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{b-c}E(\alpha, p) - 2\frac{a-b}{b-c}\sqrt{\frac{c-u}{(a-u)(b-u)}}$$
$[a > b > c \geqslant u]$. БФ (231.03)

8. $$\int_u^c \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)^3(c-x)}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{b-c}E(\beta, p)$$
$[a > b > c > u]$. БФ (232.01)

9. $$\int_c^u \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)^3(x-c)}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{b-c}[F(\gamma, q) - E(\gamma, q)] + \frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{(a-u)(u-c)}{b-u}}$$
$[a > b > u > c]$. БФ (233.15)

10. $$\int_u^a \sqrt{\frac{a-x}{(x-b)^3(x-c)}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{c-b}E(\lambda, p) + \frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{(a-u)(u-c)}{u-b}}$$
$[a > u > b > c]$. БФ (236.11)

11. $$\int_a^u \sqrt{\frac{x-a}{(x-b)^3(x-c)}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{b-c}[F(\mu, q) - E(\mu, q)]$$
$[u > a > b > c]$. БФ (237.09)

12. $$\int_u^\infty \sqrt{\frac{x-a}{(x-b)^3(x-c)}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{b-c}[F(\nu, q) - E(\nu, q)] + 2\sqrt{\frac{u-a}{(u-b)(u-c)}}$$
$[u \geqslant a > b > c]$. БФ (238.10)

13. $\int\limits_{-\infty}^{u} \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)^3(c-x)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a-c}} E(\alpha, p) \qquad [a > b > c \geqslant u].$

БФ (231.01)

14. $\int\limits_{u}^{c} \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)^3(c-x)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a-c}} E(\beta, p) -$

$- \frac{2(a-b)}{a-c} \sqrt{\frac{c-u}{(a-u)(b-u)}} \qquad [a > b > c > u].$ БФ (232.05)

15. $\int\limits_{c}^{u} \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)^3(x-c)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a-c}} [F(\gamma, q) - E(\gamma, q)] +$

$+ \frac{2}{a-c} \sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{a-u}} \qquad [a > b \geqslant u > c].$ БФ (233.13)

16. $\int\limits_{u}^{b} \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)^3(x-c)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a-c}} [F(\delta, q) - E(\delta, q)] \qquad [a > b > u \geqslant c].$

БФ (234.15)

17. $\int\limits_{b}^{u} \sqrt{\frac{x-b}{(a-x)^3(x-c)}}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{a-c}} E(\varkappa, p) +$

$+ 2 \sqrt{\frac{u-b}{(a-u)(u-c)}} \qquad [a > u > b > c].$ БФ (235.08)

18. $\int\limits_{u}^{\infty} \sqrt{\frac{x-b}{(x-a)^3(x-c)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a-c}} [F(\nu, q) - E(\nu, q)] +$

$+ 2 \sqrt{\frac{u-b}{(u-a)(u-c)}} \qquad [u > a > b > c].$ БФ (238.07)

159

19. $\int\limits_{-\infty}^{u} \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)(c-x)^3}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a-c}} [F(\alpha, p) - E(\alpha, p)] +$

$+ 2 \sqrt{\frac{b-u}{(a-u)(c-u)}} \qquad [a > b > c > u].$ БФ (231.04)

20. $\int\limits_{u}^{b} \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)(x-c)^3}}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{a-c}} E(\delta, q) +$

$+ 2 \sqrt{\frac{b-u}{(a-u)(u-c)}} \qquad [a > b > u > c].$ БФ (234.14)

21. $\int\limits_{b}^{u} \sqrt{\frac{x-b}{(a-x)(x-c)^3}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a-c}} [F(\varkappa, p) - E(\varkappa, p)] \qquad [a \geqslant u > b > c].$

БФ (235.03)

22. $\int\limits_{u}^{a} \sqrt{\frac{x-b}{(a-x)(x-c)^3}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a-c}} [F(\lambda, p) - E(\lambda, p)] +$

$+ \frac{2}{a-c} \sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{u-c}} \qquad [a > u \geqslant b > c].$ БФ (236.14)

23. $$\int_a^u \sqrt{\frac{x-b}{(x-a)(x-c)^3}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a-c}}E(\mu, q) - 2\frac{b-c}{a-c}\sqrt{\frac{u-a}{(u-b)(u-c)}} \quad [u > a > b > c].$$ БФ (237.11)

24. $$\int_u^\infty \sqrt{\frac{x-b}{(x-a)(x-c)^3}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a-c}}E(\nu, q) \quad [u \geqslant a > b > c].$$ БФ (238.01)

25. $$\int_{-\infty}^u \sqrt{\frac{c-x}{(a-x)^3(b-x)}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{a-b}E(\alpha, p) - \frac{2(b-c)}{(a-b)\sqrt{a-c}}F(\alpha, p) \quad [a > b > c \geqslant u].$$ БФ (231.07)

26. $$\int_u^c \sqrt{\frac{c-x}{(a-x)^3(b-x)}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{a-b}E(\beta, p) - \frac{2(b-c)}{(a-b)\sqrt{a-c}}F(\beta, p) - 2\sqrt{\frac{c-u}{(a-u)(b-u)}} \quad [a > b > c > u].$$ БФ (232.03)

27. $$\int_c^u \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)^3(b-x)}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{a-b}E(\gamma, q) - \frac{2}{\sqrt{a-c}}F(\gamma, q) - \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{a-u}} \quad [a > b \geqslant u > c].$$ БФ (233.14)

28. $$\int_u^b \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)^3(b-x)}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{a-b}E(\delta, q) - \frac{2}{\sqrt{a-c}}F(\delta, q) \quad [a > b > u \geqslant c].$$ БФ (234.20)

29. $$\int_b^u \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)^3(x-b)}}\,dx = \frac{2(b-c)}{(a-b)\sqrt{a-c}}F(\varkappa, p) - \frac{2\sqrt{a-c}}{a-b}E(\varkappa, p) + 2\frac{a-c}{a-b}\sqrt{\frac{u-b}{(a-u)(u-c)}} \quad [a > u > b > c].$$ БФ (235.13)

30. $$\int_u^\infty \sqrt{\frac{x-c}{(x-a)^3(x-b)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a-c}}F(\nu, q) - \frac{2\sqrt{a-c}}{a-b}E(\nu, q) + \frac{2(a-c)}{a-b}\sqrt{\frac{u-b}{(u-a)(u-c)}} \quad [u > a > b > c].$$ БФ (238.08)

31. $$\int_{-\infty}^u \sqrt{\frac{c-x}{(a-x)(b-x)^3}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{a-b}[F(\alpha, p) - E(\alpha, p)] + 2\sqrt{\frac{c-u}{(a-u)(b-u)}} \quad [a > b > c \geqslant u].$$ БФ (231.06)

32. $$\int_u^c \sqrt{\frac{c-x}{(a-x)(b-x)^3}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{a-b}[F(\beta, p) - E(\beta, p)] \quad [a > b > c > u].$$ БФ (232.04)

33. $\int\limits_c^u \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)(b-x)^3}}\,dx = -\frac{2\sqrt{a-c}}{a-b}E(\gamma, q) + \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{(a-u)(u-c)}{b-u}} \qquad [a>b>u>c].$ БФ (233.16)

34. $\int\limits_u^a \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)(x-b)^3}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{a-b}[F(\lambda, p)-E(\lambda, p)] + \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{(a-u)(u-c)}{u-b}} \qquad [a>u>b>c].$ БФ (236.13)

35. $\int\limits_a^u \sqrt{\frac{x-c}{(x-a)(x-b)^3}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{a-b}E(\mu, q) \qquad [u>a>b>c].$ БФ (237.01)

36. $\int\limits_u^\infty \sqrt{\frac{x-c}{(x-a)(x-b)^3}}\,dx = \frac{2\sqrt{a-c}}{a-b}E(\nu, q) - 2\frac{b-c}{a-b}\sqrt{\frac{u-a}{(u-b)(u-c)}} \qquad [u\geqslant a>b>c].$ БФ (238.11)

3.143

1. $\int\limits_u^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}F\left(\arccos\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1+u^4}},\ \sin 80°7'15''\right)^{*)}.$ Ж 66 (286)

2. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}F\left(\arccos\frac{u^2-1}{u^2+1},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$ Ж 66 (287)

3.144 Обозначение: $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{u^2-u+1}}$.

1. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x^2-x+1)}} = F\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad [u\geqslant 1].$ БФ (261.50)

2. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3(x-1)^3(x^2-x+1)}} = \frac{2(2u-1)}{\sqrt{u(u-1)(u^2-u+1)}} - 4E\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad [u>1].$ БФ (261.54)

3. $\int\limits_u^\infty \frac{(2x-1)^2\,dx}{\sqrt{x^3(x-1)^3(x^2-x+1)}} = 4\left[F\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - E\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{2u-1}{2\sqrt{u(u-1)(u^2-u+1)}}\right] \qquad [u>1].$ БФ (261.56)

4. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x^2-x+1)^3}} = \frac{4}{3}\left[F\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - E\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \qquad [u\geqslant 1].$ БФ (261.52)

*) $\sin 80°7'15'' = 2\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1) = 0{,}985171\ldots$

5. $$\int_u^\infty \frac{(2x-1)^2\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x^2-x+1)^3}} = 4E\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad [u>1].$$ БФ (261.51)

6. $$\int_u^\infty \sqrt{\frac{x(x-1)}{(x^2-x+1)^3}}\,dx = \frac{4}{3}E\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{3}F\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad [u>1].$$ БФ (261.53)

7. $$\int_u^\infty \frac{dx}{(2x-1)^2}\sqrt{\frac{x(x-1)}{x^2-x+1}} = \frac{1}{3}\left[F\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - E\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] + \frac{1}{2(2u-1)}\sqrt{\frac{u(u-1)}{u^2-u+1}} \qquad [u>1].$$ БФ (261.57)

8. $$\int_u^\infty \frac{dx}{(2x-1)^2}\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x(x-1)}} = E\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{3}{2(2u-1)}\sqrt{\frac{u(u-1)}{u^2-u+1}} \qquad [u>1].$$ БФ (261.58)

9. $$\int_u^\infty \frac{dx}{(2x-1)^2\sqrt{x(x-1)(x^2-x+1)}} = \frac{4}{3}E\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{3}F\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{2}{2u-1}\sqrt{\frac{u(u-1)}{u^2-u+1}} \qquad [u>1].$$ БФ (261.55)

10. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^5(x-1)^5(x^2-x+1)}} = \frac{40}{3}E\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{4}{3}F\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{2(2u-1)(9u^2-9u-1)}{3\sqrt{u^3(u-1)^3(u^2-u+1)}} \qquad [u>1].$$ БФ (261.54)

11. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x^2-x+1)^5}} = \frac{44}{27}F\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{56}{27}E\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{2(2u-1)\sqrt{u(u-1)}}{9\sqrt{(u^2-u+1)^3}} \qquad [u>1].$$ БФ (261.52)

12. $$\int_u^\infty \frac{dx}{(2x-1)^4\sqrt{x(x-1)(x^2-x+1)}} = \frac{16}{27}E\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{27}F\left(\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{8(5u^2-5u+2)}{9(2u-1)^3}\sqrt{\frac{u(u-1)}{u^2-u+1}} \qquad [u>1].$$ БФ (261.55)

3.145

1. $$\int_\alpha^u \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)[(x-m)^2+n^2]}} = \frac{1}{\sqrt{pq}}F\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{q(u-\alpha)}{p(u-\beta)}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(p+q)^2+(\alpha-\beta)^2}{pq}}\right) \qquad [\beta<\alpha<u].$$

2. $$\int_\beta^u \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)[(x-m)^2+n^2]}} = \frac{1}{\sqrt{pq}}F\left(2\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{q(\alpha-u)}{p(u-\beta)}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-(p-q)^2+(\alpha-\beta)^2}{pq}}\right) \qquad [\beta<u<\alpha].$$

3. $$\int_u^\beta \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)[(x-m)^2+n^2]}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{pq}} F\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{q(\beta-u)}{p(\alpha-u)}},\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(p+q)^2+(\alpha-\beta)^2}{pq}}\right) \qquad [u<\beta<\alpha],$$
где $(m-\alpha)^2+n^2=p^2$, $(m-\beta)^2+n^2=q^2$ *).

4. Пусть
$$(m_1-m)^2+(n_1+n)^2=p^2,\ (m_1-m)^2+(n_1-n)^2=p_1^2,$$
$$\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{\frac{(p+p_1)^2-4n^2}{4n^2-(p-p_1)^2}};$$
тогда
$$\int_{m-n\operatorname{tg}\alpha}^u \frac{dx}{\sqrt{[(x-m)^2+n^2][(x-m_1)^2+n_1^2]}} =$$
$$= \frac{2}{p+p_1} F\left(\alpha+\operatorname{arctg}\frac{u-m}{n},\ \frac{2\sqrt{pp_1}}{p+p_1}\right) \quad [m-n\operatorname{tg}\alpha<u<m+n\operatorname{ctg}\alpha].$$

3.146

1. $$\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\sqrt{2}\boldsymbol{K}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$ БХ [13] (6)

2. $$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{8}.$$ БХ [13] (7)

3. $$\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^4}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\sqrt{2}\boldsymbol{K}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$ БХ [13] (8)

В **3.147—3.151** положено: $\alpha=\arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(d-u)}{(a-d)(c-u)}}$,
$$\beta=\arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(u-d)}{(c-d)(a-u)}},\quad \gamma=\arcsin\sqrt{\frac{(b-d)(c-u)}{(c-d)(b-u)}},$$
$$\delta=\arcsin\sqrt{\frac{(b-d)(u-c)}{(b-c)(u-d)}},\quad \varkappa=\arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(b-u)}{(b-c)(a-u)}},$$
$$\lambda=\arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(u-b)}{(a-b)(u-c)}},\quad \mu=\arcsin\sqrt{\frac{(b-d)(a-u)}{(a-b)(u-d)}},$$
$$\nu=\arcsin\sqrt{\frac{(b-d)(u-a)}{(a-d)(u-b)}},\quad q=\sqrt{\frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)}},\quad r=\sqrt{\frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}}.$$

3.147

1. $$\int_u^d \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(d-x)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\alpha, q)$$
$$[a>b>c>d>u].$$ БФ (251.00)

*) При $\alpha+\beta=2m$ формулы 3.145 недействительны; тогда можно применить подстановку $x-m=z$, которая приводит к одной из формул 3.152

2. $$\int_d^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} F(\beta, r)$$

$[a > b > c \geqslant u > d]$. БФ (252.00)

3. $$\int_u^c \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} F(\gamma, r)$$

$[a > b > c > u \geqslant d]$. БФ (253.00)

4. $$\int_c^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} F(\delta, q)$$

$[a > b \geqslant u > c > d]$. БФ (254.00)

5. $$\int_u^b \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} F(\varkappa, q)$$

$[a > b > u \geqslant c > d]$. БФ (255.00)

6. $$\int_b^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} F(\lambda, r)$$

$[a \geqslant u > b > c > d]$. БФ (256.00)

7. $$\int_u^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} F(\mu, r)$$

$[a > u \geqslant b > c > d]$. БФ (257.00)

8. $$\int_a^u \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} F(\nu, q)$$

$[u > a > b > c > d]$. БФ (258.00)

3.148

1. $$\int_u^d \frac{x\,dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(d-x)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} \left\{ c\Pi\left(\alpha, \frac{a-d}{a-c}, q\right) - (c-d) F(\alpha, q) \right\}$$

$[a > b > c > d > u]$. БФ (251.03)

2. $$\int_d^u \frac{x\,dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} \left\{ (d-a)\Pi\left(\beta, \frac{d-c}{a-c}, r\right) + aF(\beta, r) \right\}$$

$[a > b > c \geqslant u > d]$. БФ (252.11)

3. $$\int_u^c \frac{x\,dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} \left\{ (c-b)\Pi\left(\gamma, \frac{c-d}{b-d}, r\right) + bF(\gamma, r) \right\}$$

$[a > b > c > u \geqslant d]$. БФ (253.11)

4. $$\int\limits_c^u \frac{x\,dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left\{(c-d)\Pi\left(\delta, \frac{b-c}{b-d}, q\right) + dF(\delta, q)\right\} \quad [a > b \geqslant u > c > d].$$ БФ (254.10)

5. $$\int\limits_u^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left\{(b-a)\Pi\left(\varkappa, \frac{b-c}{a-c}, q\right) + aF(\varkappa, q)\right\} \quad [a > b > u \geqslant c > d].$$ БФ (255.17)

6. $$\int\limits_b^u \frac{x\,dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left\{(b-c)\Pi\left(\lambda, \frac{a-b}{a-c}, r\right) + cF(\lambda, r)\right\} \quad [a \geqslant u > b > c > d].$$ БФ (256.11)

7. $$\int\limits_u^a \frac{x\,dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left\{(a-d)\Pi\left(\mu, \frac{b-a}{b-d}, r\right) + dF(\mu, r)\right\} \quad [a > u \geqslant b > c > d].$$ БФ (257.11)

8. $$\int\limits_a^u \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left\{(a-b)\Pi\left(\nu, \frac{a-d}{b-d}, q\right) + bF(\nu, q)\right\} \quad [u > a > b > c > d].$$ БФ (258.11)

3.149

1. $$\int\limits_u^d \frac{dx}{x\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(d-x)}} = \frac{2}{cd\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left\{(c-d)\Pi\left(\alpha, \frac{c(a-d)}{d(a-c)}, q\right) + dF(\alpha, q)\right\} \quad [a > b > c > d > u].$$ БФ (251.04)

2. $$\int\limits_d^u \frac{dx}{x\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(x-d)}} = \frac{2}{ad\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left\{(a-d)\Pi\left(\beta, \frac{a(d-c)}{d(a-c)}, r\right) + dF(\beta, r)\right\} \quad [a > b > c \geqslant u > d].$$ БФ (252.12)

3. $$\int\limits_u^c \frac{dx}{x\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(x-d)}} = \frac{2}{bc\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left\{(b-c)\Pi\left(\gamma, \frac{b(c-d)}{c(b-d)}, r\right) + cF(\gamma, r)\right\} \quad [a > b > c > u \geqslant d].$$ БФ (253.12)

4. $$\int\limits_c^u \frac{dx}{x\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{cd\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left\{(d-c)\Pi\left(\delta, \frac{d(b-c)}{c(b-d)}, q\right) + cF(\delta, q)\right\} \quad [a > b \geqslant u > c > d].$$ БФ (254.11)

5. $$\int_u^b \frac{dx}{x\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{ab\sqrt{(a-c)(b-d)}}\times$$
$$\times\left\{(a-b)\,\Pi\left(\varkappa, \frac{a(b-c)}{b(a-c)}, q\right) + bF(\varkappa, q)\right\} \quad [a > b > u \geqslant c > d].$$ БФ (255.18)

6. $$\int_b^u \frac{dx}{x\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{bc\sqrt{(a-c)(b-d)}}\times$$
$$\times\left\{(c-b)\,\Pi\left(\lambda, \frac{c(a-b)}{b(a-c)}, r\right) + bF(\lambda, r)\right\} \quad [a \geqslant u > b > c > d].$$ БФ (256.12)

7. $$\int_u^a \frac{dx}{x\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{ad\sqrt{(a-c)(b-d)}}\times$$
$$\times\left\{(d-a)\,\Pi\left(\mu, \frac{d(b-a)}{a(b-d)}, r\right) + aF(\mu, r)\right\} \quad [a > u \geqslant b > c > d].$$ БФ (257.12)

8. $$\int_a^u \frac{dx}{x\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}} =$$
$$= \frac{2}{ab\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left\{(b-a)\,\Pi\left(\nu, \frac{b(a-d)}{a(b-d)}, q\right) + aF(\nu, q)\right\}$$
$$[u > a > b > c > d].$$ БФ (258.12)

3.151

1. $$\int_u^d \frac{dx}{(p-x)\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(d-x)}} = \frac{2}{(p-c)(p-d)\sqrt{(a-c)(b-d)}}\times$$
$$\times\left[(d-c)\,\Pi\left(\alpha, \frac{(a-d)(p-c)}{(a-c)(p-d)}, q\right) + (p-d)F(\alpha, q)\right]$$
$$[a > b > c > d > u,\ p \neq d].$$ БФ (251.39)

2. $$\int_d^u \frac{dx}{(p-x)\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(x-d)}} = \frac{2}{(p-a)(p-d)\sqrt{(a-c)(b-d)}}\times$$
$$\times\left[(d-a)\,\Pi\left(\beta, \frac{(d-c)(p-a)}{(a-c)(p-d)}, r\right) + (p-d)F(\beta, r)\right]$$
$$[a > b > c \geqslant u > d,\ p \neq d].$$ БФ (252.39)

3. $$\int_u^c \frac{dx}{(p-x)\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(x-d)}} = \frac{2}{(p-b)(p-c)\sqrt{(a-c)(b-d)}}\times$$
$$\times\left[(c-b)\,\Pi\left(\gamma, \frac{(c-d)(p-b)}{(b-d)(p-c)}, r\right) + (p-c)F(\gamma, r)\right]$$
$$[a > b > c > u \geqslant d,\ p \neq c].$$ БФ (253.39)

4 $$\int_c^u \frac{dx}{(p-x)\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{(p-c)(p-d)\sqrt{(a-c)(b-d)}}\times$$
$$\times\left[(c-d)\,\Pi\left(\delta, \frac{(b-c)(p-d)}{(b-d)(p-c)}, q\right) + (p-c)F(\delta, q)\right]$$
$$[a > b \geqslant u > c > d,\ p \neq c].$$ БФ (254.39)

5. $$\int_u^b \frac{dx}{(p-x)\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{(p-a)(p-b)\sqrt{(a-c)(b-d)}} \times$$
$$\times \left[(b-a)\Pi\left(\varkappa, \frac{(b-c)(p-a)}{(a-c)(p-b)}, q\right) + (p-b)F(\varkappa, q)\right]$$
$[a > b > u \geqslant c > d,\ p \neq b]$. БФ (255.38)

6. $$\int_b^u \frac{dx}{(x-p)\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{(b-p)(p-c)\sqrt{(a-c)(b-d)}} \times$$
$$\times \left[(b-c)\Pi\left(\lambda, \frac{(a-b)(p-c)}{(a-c)(p-b)}, r\right) + (p-b)F(\lambda, r)\right]$$
$[a \geqslant u > b > c > d,\ p \neq b]$. БФ (256.39)

7. $$\int_u^a \frac{dx}{(p-x)\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{(p-a)(p-d)\sqrt{(a-c)(b-d)}} \times$$
$$\times \left[(a-d)\Pi\left(\mu, \frac{(b-a)(p-d)}{(b-d)(p-a)}, r\right) + (p-a)F(\mu, r)\right]$$
$[a > u \geqslant b > c > d,\ p \neq a]$. БФ (257.39)

8. $$\int_a^u \frac{dx}{(p-x)\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{(p-a)(p-b)\sqrt{(a-c)(b-d)}} \times$$
$$\times \left[(a-b)\Pi\left(\nu, \frac{(a-d)(p-b)}{(b-d)(p-a)}, q\right) + (p-a)F(\nu, q)\right]$$
$[u > a > b > c > d,\ p \neq a]$. БФ (258.39)

В 3.152—3.163 положено: $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{u}{b}$, $\beta = \operatorname{arcctg}\frac{u}{a}$,

$$\gamma = \arcsin\frac{u}{b}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+u^2}},\quad \delta = \arccos\frac{u}{b},\quad \varepsilon = \arccos\frac{b}{u},\quad \xi = \arcsin\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+u^2}},$$
$$\eta = \arcsin\frac{u}{b},\quad \zeta = \arcsin\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2-u^2}},\quad \varkappa = \arcsin\frac{a}{u}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{a^2-b^2}},$$
$$\lambda = \arcsin\sqrt{\frac{a^2-u^2}{a^2-b^2}},\quad \mu = \arcsin\sqrt{\frac{u^2-a^2}{u^2-b^2}},\quad \nu = \arcsin\frac{a}{u},\quad q = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$
$$r = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad s = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad t = \frac{b}{a}.$$

3.152

1. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = \frac{1}{a}F(\alpha, q)\quad [a > b > 0].$$ Ж 62 (258), БФ (221.00)

2. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = \frac{1}{a}F(\beta, q)\quad [a > b > 0].$$ Ж 63 (259) БФ (222.00)

3. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}F(\gamma, r)\quad [b \geqslant u > 0].$$ Ж 63 (260)

4. $$\int_u^b \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}F(\delta, r)\quad [b > u \geqslant 0].$$
Ж 63 (261), БФ (213.00)

5. $\int\limits_b^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} F(\varepsilon, s) \quad [u > b > 0].$

Ж 63 (262), БФ (211.00)

6. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} F(\xi, s) \quad [u > b > 0].$

Ж 63 (263), БФ (212.00)

7. $\int\limits_0^u \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{a} F(\eta, t) \quad [a > b \geqslant u > 0].$

Ж 63 (264), БФ (219.00)

8. $\int\limits_u^b \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{a} F(\zeta, t) \quad [a > b > u \geqslant 0].$

Ж 63 (265), БФ (220.00)

9. $\int\limits_b^u \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{a} F(\varkappa, q) \quad [a \geqslant u > b > 0].$

Ж 63 (266), БФ (217.00)

10. $\int\limits_u^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{a} F(\lambda, q) \quad [a > u \geqslant b > 0].$

Ж 63 (267), БФ (218.00)

11. $\int\limits_a^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{a} F(\mu, t) \quad [u > a > b > 0].$

Ж 63 (268), БФ (216.00)

12. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{a} F(\nu, t) \quad [u \geqslant a > b > 0].$

Ж 64 (269), БФ (215.00)

3.153

1. $\int\limits_0^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = u\sqrt{\frac{a^2+u^2}{b^2+u^2}} - aE(\alpha, q) \quad [u>0,\ a>b].$ БФ (221.09)

2. $\int\limits_0^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2-x^2)}} = \sqrt{a^2+b^2}\,E(\gamma, r) - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} F(\gamma, r) - u\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2+u^2}}$

$[b \geqslant u > 0].$ БФ (214.05)

3. $\int\limits_u^b \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2-x^2)}} = \sqrt{a^2+b^2}\,E(\delta, r) - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} F(\delta, r) \quad [b > u \geqslant 0].$

БФ (213.06)

4. $\int\limits_b^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(x^2-b^2)}} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} F(\varepsilon, s) - \sqrt{a^2+b^2}\,E(\varepsilon, s) +$

$+ \frac{1}{u}\sqrt{(u^2+a^2)(u^2-b^2)} \quad [u > b > 0].$ БФ (211.09)

5. $$\int_0^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}} = a\{F(\eta, t) - E(\eta, t)\} \qquad [a > b \geqslant u > 0].$$

БФ (219.05)

6. $$\int_u^b \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}} = a\{F(\zeta, t) - E(\zeta, t)\} + u\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2-u^2}}$$

$[a > b > u \geqslant 0]$. БФ (220.06)

7. $$\int_b^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} = aE(\varkappa, q) - \frac{1}{u}\sqrt{(a^2-u^2)(u^2-b^2)}$$

$[a \geqslant u > b > 0]$. БФ (217.05)

8. $$\int_u^a \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} = aE(\lambda, q) \qquad [a > u \geqslant b > 0].$$ БФ (218.06)

9. $$\int_a^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}} = a\{F(\nu, t) - E(\nu, t)\} + u\sqrt{\frac{u^2-a^2}{u^2-b^2}}$$

$[u > a > b > 0]$. БФ (216.06)

10. $$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+k^2x^2)}} = \frac{1}{k^2}\left\{\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} - E\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{1-k^2}\right)\right\}.$$

БХ [14] (9)

3.154

1. $$\int_0^u \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = \frac{a}{3}\{2(a^2+b^2)E(\alpha, q) - b^2F(\alpha, q)\} +$$
$$+ \frac{u}{3}(u^2-2a^2-b^2)\sqrt{\frac{a^2+u^2}{b^2+u^2}} \qquad [a > b, \quad u > 0].$$ БФ (221.09)

2. $$\int_0^u \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{3\sqrt{a^2+b^2}}\{(2a^2-b^2)a^2F(\gamma, r) -$$
$$- 2(a^4-b^4)E(\gamma, r)\} - \frac{u}{3}(2b^2-a^2+u^2)\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2+u^2}}$$

$[a \geqslant u > 0]$. БФ (214.05)

3. $$\int_u^b \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{3\sqrt{a^2+b^2}}\{(2a^2-b^2)a^2F(\delta, r) -$$
$$- 2(a^4-b^4)E(\delta, r)\} + \frac{u}{3}\sqrt{(a^2+u^2)(b^2-u^2)}$$

$[b > u \geqslant 0]$. БФ (213.06)

4. $$\int_b^u \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{3\sqrt{a^2+b^2}}\{(2b^2-a^2)b^2F(\varepsilon, s) +$$
$$+ 2(a^4-b^4)E(\varepsilon, s)\} + \frac{2b^2-2a^2+u^2}{3u}\sqrt{(u^2+a^2)(u^2-b^2)}$$

$[u > b > 0]$. БФ (211.09)

5. $$\int_0^u \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}} = \frac{a}{3}\{(2a^2+b^2)F(\eta,\ t)-2(a^2+b^2)E(\eta,\ t)\}+$$
$$+\frac{u}{3}\sqrt{(a^2-u^2)(b^2-u^2)} \qquad [a>b\geqslant u>0].$$ БФ (219.05)

6. $$\int_u^b \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}} = \frac{a}{3}\{(2a^2+b^2)F(\zeta,\ t)-2(a^2+b^2)E(\zeta,\ t)\}+$$
$$+\frac{u}{3}(u^2+a^2+2b^2)\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2-u^2}} \qquad [a>b>u\geqslant 0].$$ БФ (220.06)

7. $$\int_b^u \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} = \frac{a}{3}\{2(a^2+b^2)E(\varkappa,\ q)-b^2F(\varkappa,\ q)\}-$$
$$-\frac{u^2+2a^2+2b^2}{3u}\sqrt{(a^2-u^2)(u^2-b^2)} \qquad [a\geqslant u>b>0].$$
БФ (217.05)

8. $$\int_u^a \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} = \frac{a}{3}\{2(a^2+b^2)E(\lambda,\ q)-b^2F(\lambda,\ q)\}+$$
$$+\frac{u}{3}\sqrt{(a^2-u^2)(u^2-b^2)} \qquad [a>u\geqslant b>0].$$ БФ (218.06)

9. $$\int_a^u \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}} = \frac{a}{3}\{(2a^2+b^2)F(\mu,\ t)-2(a^2+b^2)E(\mu,\ t)\}+$$
$$+\frac{u}{3}(u^2+2a^2+b^2)\sqrt{\frac{u^2-a^2}{u^2-b^2}} \qquad [u>a>b>0].$$ БФ (216.06)

3.155

1. $$\int_u^a \sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}\,dx = \frac{a}{3}\{(a^2+b^2)E(\lambda,\ q)-2b^2F(\lambda,\ q)\}-$$
$$-\frac{u}{3}\sqrt{(a^2-u^2)(u^2-b^2)} \qquad [a>u\geqslant b>0].$$ БФ (218.11)

2. $$\int_a^u \sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}\,dx = \frac{a}{3}\{(a^2+b^2)E(\mu,\ t)-(a^2-b^2)F(\mu,\ t)\}+$$
$$+\frac{u}{3}(u^2-a^2-2b^2)\sqrt{\frac{u^2-a^2}{u^2-b^2}} \qquad [u>a>b>0].$$ БФ (216.10)

3. $$\int_0^u \sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx = \frac{a}{3}\{2b^2F(\alpha,\ q)-(a^2+b^2)E(\alpha,\ q)\}+$$
$$+\frac{u}{3}(u^2+a^2+2b^2)\sqrt{\frac{a^2+u^2}{b^2+u^2}} \qquad [a>b,\quad u>0].$$ БФ (221.08)

4 $$\int_0^u \sqrt{(a^2+x^2)(b^2-x^2)}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2}\{a^2F(\gamma,\ r)-(a^2-b^2)E(\gamma,\ r)\}+$$
$$+\frac{u}{3}(u^2+2a^2-b^2)\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2+u^2}} \qquad [a\geqslant u>0].$$ БФ (214.12)

5. $\int\limits_u^b \sqrt{(a^2+x^2)(b^2-x^2)}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2}\{a^2F(\delta, r) +$

$+2(b^2-a^2)E(\delta, r)\} + \frac{u}{3}\sqrt{(a^2+u^2)(b^2-u^2)} \qquad [b > u \geqslant 0].$

БФ (213.13)

6. $\int\limits_b^u \sqrt{(a^2+x^2)(x^2-b^2)}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2}\{(b^2-a^2)E(\varepsilon, s) - b^2F(\varepsilon, s)\} +$

$+\frac{u^2+a^2-b^2}{3u}\sqrt{(a^2+u^2)(u^2-b^2)} \qquad [u > b > 0].$ БФ (211.08)

7. $\int\limits_0^u \sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}\,dx = \frac{a}{3}\{(a^2+b^2)E(\eta, t) - (a^2-b^2)F(\eta, t)\} +$

$+\frac{u}{3}\sqrt{(a^2-u^2)(b^2-u^2)} \qquad [a > b \geqslant u > 0].$ БФ (219.11)

8. $\int\limits_u^b \sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}\,dx = \frac{a}{3}\{(a^2+b^2)E(\zeta, t) - (a^2-b^2)F(\zeta, t)\} +$

$+\frac{u}{3}(u^2-2a^2-b^2)\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2-u^2}} \qquad [a > b > u \geqslant 0].$ БФ (220.05)

9. $\int\limits_b^u \sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}\,dx = \frac{a}{3}\{(a^2+b^2)E(\varkappa, q) - 2b^2F(\varkappa, q)\} +$

$+\frac{u^2-a^2-b^2}{3u}\sqrt{(a^2-u^2)(u^2-b^2)} \qquad [a \geqslant u > b > 0].$ БФ (217.09)

3.156

1. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = \frac{1}{ub^2}\sqrt{\frac{b^2+u^2}{a^2+u^2}} - \frac{1}{ab^2}E(\alpha, q) \qquad [a \geqslant b, \quad u > 0].$

БФ (222.04)

2. $\int\limits_u^b \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2+a^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{a^2b^2\sqrt{a^2+b^2}}\{a^2F(\delta, r) - (a^2+b^2)E(\delta, r)\} +$

$+\frac{1}{a^2b^2u}\sqrt{(a^2+u^2)(b^2-u^2)} \qquad [b > u > 0].$ БФ (213.09)

3. $\int\limits_b^u \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2+a^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{a^2b^2\sqrt{a^2+b^2}}\{(a^2+b^2)E(\varepsilon, s) - b^2F(\varepsilon, s)\}$

$[u > b > 0].$ БФ (211.11)

4. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2+a^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{a^2b^2\sqrt{a^2+b^2}}\{(a^2+b^2)E(\gamma, s) - b^2F(\gamma, s)\} -$

$-\frac{1}{b^2u}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{a^2+u^2}} \qquad [u \geqslant b > 0].$ БФ (212.06)

5. $$\int_u^b \frac{dx}{x^2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{ab^2}\{F(\zeta, t)-E(\zeta, t)\} + \frac{1}{b^2u}\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2-u^2}} \quad [a>b>u>0].$$ БФ (220.09)

6. $$\int_b^u \frac{dx}{x^2\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{ab^2}E(\varkappa, q) \quad [a\geqslant u>b>0].$$ БФ (217.01)

7. $$\int_u^a \frac{dx}{x^2\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{ab^2}E(\lambda, q) - \frac{1}{a^2b^2u}\sqrt{(a^2-u^2)(u^2-b^2)} \quad [a>u\geqslant b>0].$$ БФ (218.12)

8. $$\int_a^u \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{ab^2}\{F(\mu, t)-E(\mu, t)\} + \frac{1}{a^2u}\sqrt{\frac{u^2-a^2}{u^2-b^2}} \quad [u>a>b>0].$$ БФ (216.09)

9. $$\int_u^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{ab^2}\{F(\nu, t)-E(\nu, t)\} \quad [u\geqslant a>b>0].$$ БФ (215.07)

3.157

1. $$\int_0^u \frac{dx}{(p-x^2)\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = \frac{1}{a(p+b^2)}\left\{\frac{b^2}{p}\Pi\left(\alpha, \frac{p+b^2}{p}, q\right)+F(\alpha, q)\right\} \quad [p\neq 0].$$ БФ (221.13)

2. $$\int_u^\infty \frac{dx}{(p-x^2)\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = -\frac{1}{a(a^2+p)}\left\{\Pi\left(\beta, \frac{a^2+p}{a^2}, q\right)-F(\beta, q)\right\}.$$ БФ (222.11)

3. $$\int_0^u \frac{dx}{(p-x^2)\sqrt{(a^2+x^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{p(p+a^2)\sqrt{a^2+b^2}}\left\{a^2\Pi\left(\gamma, \frac{b^2(p+a^2)}{p(a^2+b^2)}, r\right)+pF(\gamma, r)\right\} \quad [b\geqslant u>0, p\neq 0].$$ БФ (214.13) u

4. $$\int_u^b \frac{dx}{(p-x^2)\sqrt{(a^2+x^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{(p-b^2)\sqrt{a^2+b^2}}\Pi\left(\delta, \frac{b^2}{b^2-p}, r\right) \quad [b>u\geqslant 0, p\neq b^2].$$ БФ (213.02)

5. $$\int_b^u \frac{dx}{(p-x^2)\sqrt{(a^2+x^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{p(p-b^2)\sqrt{a^2+b^2}}\left\{b^2\Pi\left(\varepsilon, \frac{p}{p-b^2}, s\right)+(p-b^2)F(\varepsilon, s)\right\} \quad [u>b>0, p\neq b^2].$$ БФ (211.14)

6. $$\int_u^\infty \frac{dx}{(x^2-p)\sqrt{(a^2+x^2)(x^2-b^2)}} =$$
$$= \frac{1}{(a^2+p)\sqrt{a^2+b^2}}\left\{\Pi\left(\xi, \frac{a^2+p}{a^2+b^2}, s\right) - F(\xi, s)\right\} \quad [u \geqslant b > 0]. \quad \text{БФ (212.12)}$$

7. $$\int_0^u \frac{dx}{(p-x^2)\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{ap}\Pi\left(\eta, \frac{b^2}{p}, t\right)$$
$$[a > b \geqslant u > 0;\ p \neq b]. \quad \text{БФ (219.02)}$$

8. $$\int_u^b \frac{dx}{(p-x^2)\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}} =$$
$$= \frac{1}{a(p-a^2)(p-b^2)}\left\{(b^2-a^2)\Pi\left(\zeta, \frac{b^2(p-a^2)}{a^2(p-b^2)}, t\right) + (p-b^2)F(\zeta, t)\right\}$$
$$[a > b > u \geqslant 0;\ p \neq b^2]. \quad \text{БФ (220.13)}$$

9. $$\int_b^u \frac{dx}{(p-x^2)\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} =$$
$$= \frac{1}{ap(p-b^2)}\left\{b^2\Pi\left(\varkappa, \frac{p(a^2-b^2)}{a^2(p-b^2)}, q\right) + (p-b^2)F(\varkappa, q)\right\}$$
$$[a \geqslant u > b > 0;\ p \neq b^2]. \quad \text{БФ (217.12)}$$

10. $$\int_u^a \frac{dx}{(x^2-p)\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{a(a^2-p)}\Pi\left(\lambda, \frac{a^2-b^2}{a^2-p}, q\right)$$
$$[a > u \geqslant b > 0;\ p \neq a^2]. \quad \text{БФ (218.02)}$$

11. $$\int_a^u \frac{dx}{(p-x^2)\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}} =$$
$$= \frac{1}{a(p-a^2)(p-b^2)}\left\{(a^2-b^2)\Pi\left(\mu, \frac{p-b^2}{p-a^2}, t\right) + (p-a^2)F(\mu, t)\right\}$$
$$[u > a > b > 0;\ p \neq a^2,\ p \neq b^2]. \quad \text{БФ (216.12)}$$

12. $$\int_u^\infty \frac{dx}{(x^2-p)\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{ap}\left\{\Pi\left(\nu, \frac{p}{a^2}, t\right) - F(\nu, t)\right\}$$
$$[u \geqslant a > b > 0;\ p \neq 0]. \quad \text{БФ (215.12)}$$

3.158

1. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^3}} = \frac{1}{ab^2(a^2-b^2)}\{a^2E(\alpha, q) - b^2F(\alpha, q)\}$$
$$[a > b;\ u > 0]. \quad \text{БФ (221.05)}$$

2. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^3}} = \frac{1}{ab^2(a^2-b^2)}\{a^2E(\beta, q) - b^2F(\beta, q)\} -$$
$$- \frac{u}{b^2\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}} \quad [a > b,\ u \geqslant 0]. \quad \text{БФ (222.05)}$$

3. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3(x^2+b^2)}} = \frac{1}{a(a^2-b^2)}\{F(\alpha, q) - E(\alpha, q)\} + \frac{u}{a^2\sqrt{(u^2+a^2)(u^2+b^2)}} \quad [a > b;\ u > 0].$$ БФ (221.06)

4. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3(x^2+b^2)}} = \frac{1}{a(a^2-b^2)}\{F(\beta, q) - E(\beta, q)\} \quad [a > b,\ u \geqslant 0].$$ БФ (222.03)

5. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3(b^2-x^2)}} = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2+b^2}}E(\gamma, r) \quad [b \geqslant u > 0].$$ БФ (214.01) u

6. $$\int_u^b \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3(b^2-x^2)}} = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2+b^2}}E(\delta, r) - \frac{u}{a^2(a^2+b^2)}\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2+u^2}} \quad [b > u \geqslant 0].$$ БФ (213.08)

7. $$\int_b^u \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3(x^2-b^2)}} = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2+b^2}}\{F(\varepsilon, s) - E(\varepsilon, s)\} + \frac{1}{(a^2+b^2)u}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{u^2+a^2}} \quad [u > b > 0].$$ БФ (211.05)

8. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3(x^2-b^2)}} = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2+b^2}}\{F(\xi, s) - E(\xi, s)\} \quad [u \geqslant b > 0].$$ БФ (212.03)

9. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2-x^2)^3}} = \frac{1}{b^2\sqrt{a^2+b^2}}\{F(\gamma, r) - E(\gamma, r)\} + \frac{u}{b^2\sqrt{(a^2+u^2)(b^2-u^2)}} \quad [b > u > 0].$$ БФ (214.10)

10 $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(x^2-b^2)^3}} = \frac{u}{b^2\sqrt{(a^2+u^2)(u^2-b^2)}} - \frac{1}{b^2\sqrt{a^2+b^2}}E(\xi, s) \quad [u \geqslant b > 0].$$ БФ (212.04)

11. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3(b^2-x^4)}} = \frac{1}{a^2(a^2-b^2)}\left\{aE(\eta, t) - u\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2-u^4}}\right\} \quad [a > b \geqslant u > 0].$$ БФ (219.07)

12. $$\int_u^b \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3(b^2-x^2)}} = \frac{1}{a(a^2-b^2)}E(\zeta, t) \quad [a > b > u \geqslant 0].$$ БФ (220.10)

13. $$\int\limits_b^u \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3(x^2-b^2)}} = \frac{1}{a(a^2-b^2)}\left\{F(\varkappa, q) - E(\varkappa, q) + \frac{a}{u}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{a^2-u^2}}\right\}$$
$[a > u > b > 0]$. БФ (217.10)

14. $$\int\limits_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3(x^2-b^2)}} = \frac{1}{a(b^2-a^2)}\left\{E(\nu, t) - \frac{a}{u}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{u^2-a^2}}\right\}$$
$[u > a > b > 0]$. БФ (215.04)

15. $$\int\limits_0^u \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)^3}} = \frac{1}{ab^2}F(\eta, t) - \frac{1}{b^2(a^2-b^2)} \times \\ \times\left\{aE(\eta, t) - u\sqrt{\frac{a^2-u^2}{b^2-u^2}}\right\}$$
$[a > b > u > 0]$. БФ (219.06)

16. $$\int\limits_u^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)^3}} = \frac{1}{ab^2(a^2-b^2)}\left\{b^2F(\lambda, q) - a^2E(\lambda, q) + \right. \\ \left. + au\sqrt{\frac{a^2-u^2}{u^2-b^2}}\right\}$$
$[a > u > b > 0]$. БФ (218.04)

17. $$\int\limits_a^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)^3}} = \frac{a}{b^2(a^2-b^2)}E(\mu, t) - \frac{1}{ab^2}F(\mu, t)$$
$[u > a > b > 0]$. БФ (216.11)

18. $$\int\limits_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)^3}} = \frac{1}{b^2(a^2-b^2)}\left\{aE(\nu, t) - \frac{b^2}{u}\sqrt{\frac{u^2-a^2}{u^2-b^2}}\right\} - \\ - \frac{1}{ab^2}F(\nu, t)$$
$[u \geqslant a > b > 0]$. БФ (215.06)

3.159

1. $$\int\limits_0^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^3}} = \frac{a}{a^2-b^2}\{F(\alpha, q) - E(\alpha, q)\}$$
$[a > b,\ u > 0]$. БФ (221.12)

2. $$\int\limits_u^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^3}} = \frac{a}{a^2-b^2}\{F(\beta, q) - E(\beta, q)\} + \\ + \frac{u}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}$$
$[a > b,\ u \geqslant 0]$. БФ (222.10)

3. $$\int\limits_0^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3(x^2+b^2)}} = \frac{1}{a(a^2-b^2)}\{a^2E(\alpha, q) - b^2F(\alpha, q)\} - \\ - \frac{u}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}$$
$[a > b,\ u > 0]$. БФ (221.11)

4. $$\int\limits_u^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3(x^2+b^2)}} = \frac{1}{a(a^2-b^2)}\{a^2E(\beta, q) - b^2F(\beta, q)\}$$
$[a > b,\ u \geqslant 0]$. БФ (222.07)

5. $$\int_0^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3(b^2-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\{F(\gamma, r)-E(\gamma, r)\}$$

$[b \geqslant u > 0]$. БФ (214.04)

6. $$\int_u^b \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3(b^2-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\{F(\delta, r)-E(\delta, r)\}+$$

$$+\frac{u}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2+u^2}}$$ $[b > u \geqslant 0]$. БФ (213.07)

7. $$\int_b^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3(x^2-b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}E(\varepsilon, s)-$$

$$-\frac{a^2}{u(a^2+b^2)}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{u^2+a^2}}$$ $[u > b > 0]$. БФ (211.13)

8. $$\int_u^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3(x^2-b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}E(\xi, s)$$ $[u \geqslant b > 0]$. БФ (212.01)

9. $$\int_0^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2-x^2)^3}} = \frac{u}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2-u^2)}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}E(\gamma, r)$$

$[b > u > 0]$. БФ (214.07)

10. $$\int_u^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(x^2-b^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\{F(\xi, s)-E(\xi, s)\}+$$

$$+\frac{u}{\sqrt{(a^2+u^2)(u^2-b^2)}}$$ $[u > b > 0]$. БФ (212.10)

11. $$\int_0^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3(b^2-x^2)}} = \frac{1}{a^2-b^2}\left\{aE(\eta, t)-u\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2-u^2}}\right\}-\frac{1}{a}F(\eta, t)$$

$[a > b \geqslant u > 0]$. БФ (219.04)

12. $$\int_u^b \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3(b^2-x^2)}} = \frac{a}{a^2-b^2}E(\zeta, t)-\frac{1}{a}F(\zeta, t)$$ $[a > b > u \geqslant 0]$.

БФ (220.08)

13. $$\int_b^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3(x^2-b^2)}} = \frac{1}{a(a^2-b^2)}\left\{b^2F(\varkappa, q)-a^2E(\varkappa, q)+\frac{a^3}{u}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{a^2-u^2}}\right\}$$

$[a > u > b > 0]$. БФ (217.06)

14. $$\int_u^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3(x^2-b^2)}} = \frac{a}{a^2-b^2}\left\{\frac{a}{u}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{u^2-a^2}}-E(\nu, t)\right\}+\frac{1}{a}F(\nu, t)$$

$[u > a > b > 0]$. БФ (215.09)

15. $$\int_0^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)^3}} = \frac{1}{a^2-b^2}\left\{u\sqrt{\frac{a^2-u^2}{b^2-u^2}}-aE(\eta, t)\right\}$$

$[a > b > u > 0]$. БФ (219.12)

16. $$\int_u^a \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)^3}} = \frac{1}{a^2-b^2}\left\{aF(\lambda, q) - aE(\lambda, q) + u\sqrt{\frac{a^2-u^2}{u^2-b^2}}\right\}$$
$[a > u > b > 0]$. БФ (218.07)

17. $$\int_a^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)^3}} = \frac{a}{a^2-b^2}E(\mu, t) \quad [u > a > b > 0].$$ БФ (216.01)

18. $$\int_u^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)^3}} = \frac{1}{a^2-b^2}\left\{aE(\nu, t) - \frac{b^2}{u}\sqrt{\frac{u^2-a^2}{u^2-b^2}}\right\}$$
$[u \geqslant a > b > 0]$. БФ (215.11)

3.161

1. $$\int_u^\infty \frac{dx}{x^4\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = \frac{1}{3a^3b^4}\{2(a^2+b^2)E(\beta, q) - b^2F(\beta, q)\} + \frac{a^2b^2-u^2(2a^2+b^2)}{3a^2b^4u^3}$$
$[a > b,\ u > 0]$. БФ (222.04)

2. $$\int_u^b \frac{dx}{x^4\sqrt{(x^2+a^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{3a^4b^4\sqrt{a^2+b^2}}\{a^2(2a^2-b^2)F(\delta, r) - 2(a^4-b^4)E(\delta, r)\} + \frac{a^2b^2+2u^2(a^2-b^2)}{3a^4b^4u^3}\sqrt{(b^2-u^2)(a^2+u^2)}$$
$[b > u > 0]$. БФ (213.09)

3. $$\int_b^u \frac{dx}{x^4\sqrt{(x^2+a^2)(x^2-b^2)}} = \frac{2b^2-a^2}{3a^4b^2\sqrt{a^2+b^2}}F(\varepsilon, s) + \frac{2}{3}\frac{(a^2-b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{a^4b^4}E(\varepsilon, s) + \frac{1}{3a^2b^2u^3}\sqrt{(u^2+a^2)(u^2-b^2)}$$
$[u > b > 0]$. БФ (211.11)

4. $$\int_u^\infty \frac{dx}{x^4\sqrt{(x^2+a^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{3a^4b^4\sqrt{a^2+b^2}}\{2(a^4-b^4)E(\xi, s) + b^2(2b^2-a^2)F(\xi, s)\} - \frac{a^2b^2+u^2(2a^2-b^2)}{3a^2b^4u^3}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{u^2+a^2}}$$
$[u \geqslant b > 0]$. БФ (212.06)

5. $$\int_u^b \frac{dx}{x^4\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{3a^3b^4}\left\{(2a^2+b^2)F(\zeta, t) - 2(a^2+b^2)E(\zeta, t) + \frac{[(2a^2+b^2)u^2+a^2b^2]a}{u^3}\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2-u^2}}\right\}$$
$[a > b > u > 0]$. БФ (220.09)

6. $$\int_b^u \frac{dx}{x^4\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{3a^3b^4}\{2(a^2+b^2)E(\varkappa, q) - b^2F(\varkappa, q)\} + \frac{1}{3a^2b^2u^3}\sqrt{(a^2-u^2)(u^2-b^2)}$$
$[a \geqslant u > b > 0]$. БФ (217.14)

7. $$\int_u^a \frac{dx}{x^4\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{3a^3b^4}\Big\{2(a^2+b^2)E(\lambda, q) - b^2F(\lambda, q) - \frac{2(a^2+b^2)u^2+a^2b^2}{au^3}\sqrt{(a^2-u^2)(u^2-b^2)}\Big\} \quad [a > u \geqslant b > 0].$$ БФ (218.12)

8. $$\int_a^u \frac{dx}{x^4\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{3a^3b^4}\Big\{(2a^2+b^2)F(\mu, t) - 2(a^2+b^2)E(\mu, t) + \frac{[(a^2+2b^2)u^2+a^2b^2]\,b^2}{au^3}\sqrt{\frac{u^2-a^2}{u^2-b^2}}\Big\}$$ $[u > a > b > 0]$. БФ (216.09)

9. $$\int_u^\infty \frac{dx}{x^4\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{3a^3b^4}\Big\{(2a^2+b^2)F(\nu, t) - 2(a^2+b^2)E(\nu, t) + \frac{ab^2}{u^3}\sqrt{(u^2-a^2)(u^2-b^2)}\Big\} \quad [u \geqslant a > b > 0].$$ БФ (215.07)

3.162

1. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^5(x^2+b^2)}} = \frac{1}{3a^3(a^2-b^2)^2}\{(3a^2-b^2)F(\alpha, q) - 2(2a^2-b^2)E(\alpha, q)\} + \frac{u[a^2(4a^2-3b^2)+u^2(3a^2-2b^2)]}{3a^4(a^2-b^2)\sqrt{(u^2+a^2)^3(u^2+b^2)}} \quad [a > b,\ u > 0].$$ БФ (221.06)

2. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^5(x^2+b^2)}} = \frac{1}{3a^3(a^2-b^2)^2}\{(3a^2-b^2)F(\beta, q) - 2(2a^2-b^2)E(\beta, q)\} + \frac{u}{3a^2(a^2-b^2)}\sqrt{\frac{u^2+b^2}{(a^2+u^2)^3}}$$ $[a > b,\ u \geqslant 0]$. БФ (222.03)

3. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^5}} = \frac{3b^2-a^2}{3ab^2(a^2-b^2)^2}F(\alpha, q) + \frac{a(2a^2-4b^2)}{3b^4(a^2-b^2)^2}E(\alpha, q) + \frac{u}{3b^2(a^2-b^2)}\sqrt{\frac{u^2+a^2}{(u^2+b^2)^3}} \quad [a > b,\ u > 0].$$ БФ (221.05)

4. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^5}} = \frac{1}{3ab^4(a^2-b^2)^2}\{2a^2(a^2-2b^2)E(\beta, q) + b^2(3b^2-a^2)F(\beta, q)\} - \frac{u[b^2(3a^2-4b^2)+u^2(2a^2-3b^2)]}{3b^4(a^2-b^2)\sqrt{(u^2+a^2)(u^2+b^2)^3}} \quad [a > b,\ u \geqslant 0].$$ БФ (222.05)

5. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^5(b^2-x^2)}} = \frac{1}{3a^4\sqrt{(a^2+b^2)^3}}\{2(b^2+2a^2)E(\gamma, r) - a^2F(\gamma, r)\} + \frac{u}{3a^2(a^2+b^2)}\sqrt{\frac{b^2-u^2}{(a^2+u^2)^3}} \quad [b \geqslant u > 0].$$ БФ (214.15)

6. $$\int\limits_u^b \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^5(b^2-x^2)}} = \frac{1}{3a^4\sqrt{(a^2+b^2)^3}}\{(4a^2+2b^2)E(\delta, r)-a^2F(\delta, r)\}-$$
$$-\frac{u[a^2(5a^2+3b^2)+u^2(4a^2+2b^2)]}{3a^4(a^2+b^2)^2}\sqrt{\frac{b^2-u^2}{(a^2+u^2)^3}} \quad [b>u>0]. \quad \text{БФ (213.08)}$$

7. $$\int\limits_b^u \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^3)^5(x^2-b^2)}} = \frac{1}{3a^4\sqrt{(a^2+b^2)^3}}\{(3a^2+2b^2)F(\varepsilon, s)-$$
$$-(4a^2+2b^2)E(\varepsilon, s)\}+\frac{(3a^2+b^2)u^2+2(2a^2+b^2)a^2}{3a^2(a^2+b^2)^2u}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{(u^2+a^2)^3}}$$
$$[u>b>0]. \quad \text{БФ (211.05)}$$

8. $$\int\limits_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^5(x^2-b^2)}} = \frac{1}{3a^4\sqrt{(a^2+b^2)^3}}\{(3a^2+2b^2)F(\xi, s)-$$
$$-(4a^2+2b^2)E(\xi, s)\}+\frac{u}{3a^2(a^2+b^2)}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{(a^2+u^2)^3}} \quad [u>b>0].$$
БФ (212.03)

9. $$\int\limits_0^u \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2-x^2)^5}} = \frac{1}{3b^4\sqrt{(a^2+b^2)^3}}\{(2a^2+3b^2)F(\gamma, r)-$$
$$-(2a^2+4b^2)E(\gamma, r)\}+\frac{u\{(3a^2+4b^2)b^2-(2a^2+3b^2)u^2]}{3b^4(a^2+b^2)\sqrt{(a^2+u^2)(b^2-u^2)^3}} \quad [b>u>0].$$
БФ (214.10)

10. $$\int\limits_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(x^2-b^2)^5}} = \frac{1}{3b^4\sqrt{(a^2+b^2)^3}}\{(2a^2+4b^2)E(\xi, s)-b^2F(\xi, s)\}+$$
$$+\frac{u[(3a^2+4b^2)b^2-(2a^2+3b^2)u^2]}{3b^4(a^2+b^2)\sqrt{(a^2+u^2)(u^2-b^2)^3}} \quad [u>b>0]. \quad \text{БФ (212.04)}$$

11. $$\int\limits_0^u \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)^5}} = \frac{2a^2-3b^2}{3ab^4(a^2-b^2)}F(\eta, t)+$$
$$+\frac{2a(2b^2-a^2)}{3b^4(a^2-b^2)^2}E(\eta, t)+\frac{u[(3a^2-5b^2)b^2-2(a^2-2b^2)u^2]}{3b^4(a^2-b^2)^2(b^2-u^2)}\sqrt{\frac{a^2-u^2}{b^2-u^2}}$$
$$[a>b>u>0]. \quad \text{БФ (219.06)}$$

12 $$\int\limits_u^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)^5}} = \frac{3b^2-a^2}{3ab^2(a^2-b^2)^2}F(\lambda, q)+$$
$$+\frac{2a(a^2-2b^2)}{3b^4(a^2-b^2)^2}E(\lambda, q)+\frac{u[2(2b^2-a^2)u^2+(3a^2-5b^2)b^2]}{3b^4(a^2-b^2)^2(u^2-b^2)}\sqrt{\frac{a^2-u^2}{u^2-b^2}}$$
$$[a>u>b>0]. \quad \text{БФ (218.04)}$$

13. $$\int\limits_a^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)^5}} = \frac{2a^2-3b^2}{3ab^4(a^2-b^2)}F(\mu, t)+$$
$$+\frac{2a(2b^2-a^2)}{3b^4(a^2-b^2)^2}E(\mu, t)+\frac{u}{3b^2(a^2-b^2)(u^2-b^2)}\sqrt{\frac{u^2-a^2}{u^2-b^2}}$$
$$[u>a>b>0]. \quad \text{БФ (216.11)}$$

14. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)^5}} = \frac{(4b^2-2a^2)\,a}{3b^4(a^2-b^2)^2} E(\nu, t) + \frac{2a^2-3b^2}{3ab^4(a^2-b^2)} F(\nu, t) - \frac{(3b^2-a^2)\,u^2-(4b^2-2a^2)\,b^2}{3b^2u(a^2-b^2)^2(u^2-b^2)} \sqrt{\frac{u^2-a^2}{u^2-b^2}}$$
$[u \geqslant a > b > 0]$. БФ (215.06)

15. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^5(b^2-x^2)}} = \frac{1}{3a^3(a^2-b^2)^2}\left\{(4a^2-2b^2)E(\eta, t) - (a^2-b^2)F(\eta, t) - \frac{u\,[(5a^2-3b^2)\,a^2-(4a^2-2b^2)\,u^2]}{a(a^2-u^2)}\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2-u^2}}\right\}$$
$[a > b \geqslant u > 0]$. БФ (219.07)

16. $$\int_u^b \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^5(b^2-x^2)}} = \frac{2(2a^2-b^2)}{3a^3(a^2-b^2)^2} E(\zeta, r) - \frac{1}{3a^3(a^2-b^2)} F(\zeta, t) + \frac{u}{3a^2(a^2-b^2)(a^2-u^2)} \sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2-u^2}}$$
$[a > b > u \geqslant 0]$. БФ (220.10)

17. $$\int_b^u \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^5(x^2-b^2)}} = \frac{1}{3a^3(a^2-b^2)^2}\{(3a^2-b^2)F(\varkappa, q) - (4a^2-2b^2)E(\varkappa, q)\} + \frac{2(2a^2-b^2)\,a^2+(b^2-3a^2)\,u^2}{3a^2u(a^2-b^2)^2(a^2-u^2)}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{a^2-u^2}},$$
$[a > u > b > 0]$. БФ (217.10)

18. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^5(x^2-b^2)}} = \frac{1}{3a^2(a^2-b^2)^2}\{(4a^2-2b^2)E(\nu, t) - (a^2-b^2)F(\nu, t)\} + \frac{(4a^2-2b^2)\,a^2+(b^2-3a^2)\,u^2}{3a^2u(a^2-b^2)^2(u^2-a^2)}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{u^2-a^2}}$$
$[u > a > b > 0]$. БФ (215.04)

3.163

1. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3(x^2+b^2)^3}} = \frac{1}{ab^2(a^2-b^2)^2}\{(a^2+b^2)E(\alpha, q) - 2b^2F(\alpha, q)\} - \frac{u}{a^2(a^2-b^2)\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}$$
$[a > b,\ u > 0]$. БФ (221.07)

2. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3(x^2+b^2)^3}} = \frac{1}{ab^2(a^2-b^2)^2}\{(a^2+b^2)E(\beta, q) - 2b^2F(\beta, q)\} - \frac{u}{b^2(a^2-b^2)\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}$$
$[a > b,\ u \geqslant 0]$. БФ (222.12)

3. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3(b^2-x^2)^3}} = \frac{1}{a^2b^2\sqrt{(a^2+b^2)^3}}\{a^2F(\gamma, r) - (a^2-b^2)E(\gamma, r)\} + \frac{u}{b^2(a^2+b^2)\sqrt{(a^2+u^2)(b^2-u^2)}}$$
$[b > u > 0]$. БФ (214.15)

4 $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3(x^2-b^2)^3}} = \frac{b^2-a^2}{a^2b^2\sqrt{(a^2+b^2)^3}}E(\xi,\ s) - \frac{1}{a^2\sqrt{(a^2+b^2)^3}}F(\xi,\ s) + \frac{u}{b^2(a^2+b^2)\sqrt{(u^2+a^2)(u^2-b^2)}} \quad [u>b>0].$$ БФ (212.05)

5 $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3(b^2-x^2)^3}} = \frac{1}{ab^2(a^2-b^2)}F(\eta,\ t) - \frac{a^2+b^2}{ab^2(a^2-b^2)^2}E(\eta,\ t) + \frac{[a^4+b^4-(a^2+b^2)u^2]\,u}{a^2b^2(a^2-b^2)^2\sqrt{(a^2-u^2)(b^2-u^2)}} \quad [a>b>u>0].$$ БФ (279.08)

6. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3(x^2-b^2)^3}} = \frac{1}{ab^2(a^2-b^2)}F(\nu,\ t) - \frac{a^2+b^2}{ab^2(a^2-b^2)^2}E(\nu,\ t) + \frac{1}{u(a^2-b^2)\sqrt{(u^2-a^2)(u^2-b^2)}} \quad [u>a>b>0].$$ БФ (215.10)

3.164 Обозначения. $\alpha = \arccos\dfrac{u^2-\varrho\bar\varrho}{u^2+\varrho\bar\varrho}$, $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{-\dfrac{(\varrho-\bar\varrho)^2}{\varrho\bar\varrho}}$.

1 $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+\varrho^2)(x^2+\bar\varrho^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\varrho\bar\varrho}}F(\alpha,\ r).$$ БФ (225.00)

2. $$\int_u^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2-\varrho\bar\varrho)^2\sqrt{(x^2+\varrho^2)(x^2+\bar\varrho^2)}} = \frac{2u\sqrt{(u^2+\varrho^2)(u^2+\bar\varrho^2)}}{(\varrho+\bar\varrho)^2(u^4-\varrho^2\bar\varrho^2)} - \frac{1}{(\varrho+\bar\varrho)^2\sqrt{\varrho\bar\varrho}}E(\alpha,\ r).$$ БФ (225.03)

3 $$\int_u^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+\varrho\bar\varrho)^2\sqrt{(x^2+\varrho^2)(x^2+\bar\varrho^2)}} = -\frac{1}{(\varrho-\bar\varrho)^2\sqrt{\varrho\bar\varrho}}[F(\alpha,\ r)-E(\alpha,\ r)].$$ БФ (225.07)

38 4 $$\int_u^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+\varrho^2)^3(x^2+\bar\varrho^2)^3}} = -\frac{4\sqrt{\varrho\bar\varrho}}{(\varrho^2-\bar\varrho^2)^2}E(\alpha,\ r) + \frac{1}{(\varrho-\bar\varrho)^2\sqrt{\varrho\bar\varrho}}F(\alpha,\ r) - \frac{2u(u^2-\varrho\bar\varrho)}{(\varrho+\bar\varrho)^2(u^2+\varrho\bar\varrho)\sqrt{(u^2+\varrho^2)(u^2+\bar\varrho^2)}}.$$ БФ (225.05)

5 $$\int_u^\infty \frac{(x^2-\varrho\bar\varrho)^2\,dx}{\sqrt{(x^2+\varrho^2)^3(x^2+\bar\varrho^2)^3}} = -\frac{4\sqrt{\varrho\bar\varrho}}{(\varrho-\bar\varrho)^2}[F(\alpha,\ r)-E(\alpha,\ r)] + \frac{2u(u^2-\varrho\bar\varrho)}{(u^2+\varrho\bar\varrho)\sqrt{(u^2+\varrho^2)(u^2+\varrho^2)}}.$$ БФ (225.06)

6 $$\int_u^\infty \frac{\sqrt{(x^2+\varrho^2)(x^2+\bar\varrho^2)}}{(x^2+\varrho\bar\varrho)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\varrho\bar\varrho}}E(\alpha,\ r).$$ БФ (225.01)

7. $$\int_u^\infty \frac{(x^2-\varrho\bar\varrho)^2\,dx}{(x^2+\varrho\bar\varrho)^2\sqrt{(x^2+\varrho^2)(x^2+\bar\varrho^2)}} = -\frac{4\sqrt{\varrho\bar\varrho}}{(\varrho-\bar\varrho)^2}E(\alpha, r) + \frac{(\varrho+\bar\varrho)^2}{(\varrho-\bar\varrho)^2\sqrt{\varrho\bar\varrho}}F(\alpha, r).$$ БФ (225.08)

8. $$\int_u^\infty \frac{(x^2+\varrho\bar\varrho)^2\,dx}{[(x^2+\varrho\bar\varrho)^2-4p^2\varrho\bar\varrho x^2]\sqrt{(x^2+\varrho^2)(x^2+\bar\varrho^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\varrho\bar\varrho}}\Pi(\alpha, p^2, r).$$ БФ (225.02)

3.165 Обозначения: $\alpha = \arccos\frac{u^2-a^2}{u^2+a^2}$, $r = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{2}}$.

1. $$\int_u^a \frac{dx}{\sqrt{x^4+2b^2x^2+a^4}} = \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+\sqrt{a^2+b^2}} \times F\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{a\sqrt{2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\frac{a-u}{a+u}\right), \frac{2\sqrt{a\sqrt{2(a^2-b^2)}}}{a\sqrt{2}+\sqrt{a^2-b^2}}\right]$$ $[a > b,\ a > u \geqslant 0]$. БФ (264.00)

2. $$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+2b^2x^2+a^4}} = \frac{1}{2a}F(\alpha, r)$$ $[a^2 > b^2 > -\infty,\ a^2 > 0,\ u \geqslant 0]$. БФ (263.00 и 266.00)

3. $$\int_u^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^4+2b^2x^2+a^4}} = \frac{1}{2a^3}[F(\alpha, r)-2E(\alpha, r)] + \frac{\sqrt{u^4+2b^2u^2+a^4}}{a^2u(u^2+a^2)}$$ $[a > b > 0,\ u > 0]$. БФ (263.06)

4. $$\int_u^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2\sqrt{x^4+2b^2x^2+a^4}} = \frac{1}{4a(a^2-b^2)}[F(\alpha, r)-E(\alpha, r)]$$ $[a^2 > b^2 > -\infty,\ a^2 > 0,\ u \geqslant 0]$. БФ (263.03 и 266.05)

5. $$\int_u^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^2\sqrt{x^4+2b^2x^2+a^4}} = \frac{u\sqrt{u^4+2b^2u^2+a^4}}{2(a^2+b^2)(u^4-a^4)} - \frac{1}{4a(a^2+b^2)}E(\alpha, r)$$ $[a^2 > b^2 > -\infty,\ u^2 > a^2 > 0]$. БФ (263.05 и 266.02)

6. $$\int_u^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^4+2b^2x^2+a^4)^3}} = \frac{a}{2(a^4-b^4)}E(\alpha, r) - \frac{1}{4a(a^2-b^2)}F(\alpha, r) - \frac{u(u^2-a^2)}{2(a^2+b^2)(u^2+a^2)\sqrt{u^4+2b^2u^2+a^4}}$$ $[a^2 > b^2 > -\infty,\ a^2 > 0,\ u \geqslant 0]$. БФ (263.08 и 266.03)

7. $$\int_u^\infty \frac{(x^2-a^2)^2\,dx}{\sqrt{(x^4+2b^2x^2+a^4)^3}} = \frac{a}{a^2-b^2}[F(\alpha, r)-E(\alpha, r)] + \frac{u^2-a^2}{u^2+a^2}\,\frac{u}{\sqrt{u^4+2b^2u^2+a^4}}$$ $[|b^2| < a^2,\ u \geqslant 0]$. БФ (266.08)

8. $\int\limits_u^\infty \frac{(x^2+a^2)^2\,dx}{\sqrt{(x^2+2b^2x^2+a^4)^3}} = \frac{a}{a^2+b^2}E(\alpha, r) - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{u^2-a^2}{u^2+a^2}\cdot\frac{u}{\sqrt{u^4+2b^2u^2+a^4}}$

$[|b^2| < a^2, u \geqslant 0]$. БФ (266.06)$u$

9. $\int\limits_u^\infty \frac{(x^2-a^2)^2\,dx}{(x^2+a^2)^2\sqrt{x^4+2b^2x^2+a^4}} = \frac{a}{a^2-b^2}E(\alpha, r) - \frac{a^2+b^2}{2a(a^2-b^2)}F(\alpha, r)$

$[a^2 > b^2 > -\infty, a^2 > 0, u \geqslant 0]$. БФ (263.04 и 266.07)

10. $\int\limits_u^\infty \frac{\sqrt{x^4+2b^2x^2+a^4}}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{2a}E(\alpha, r)$ $[a^2 > b^2 > -\infty, a^2 > 0, u \geqslant 0]$.

БФ (263.01 и 266.01)

11. $\int\limits_u^\infty \frac{\sqrt{x^4+2b^2x^2+a^4}}{(x^2-a^2)^2}\,dx = \frac{1}{2a}[F(\alpha, r) - E(\alpha, r)] +$

$+\frac{u}{u^4-a^4}\sqrt{u^4+2b^2u^2+a^4}$ $[a > b > 0, u > a]$. БФ (263.07)

12. $\int\limits_u^\infty \frac{(x^2+a^2)^2\,dx}{[(x^2+a^2)^2-4a^2p^2x^2]\sqrt{x^4+2b^2x^2+a^4}} = \frac{1}{2a}\Pi(\alpha, p^2, r)$ $[a > b > 0, u \geqslant 0]$.

БФ (263.02)

3.166 Обозначения: $\alpha = \arccos\frac{u^2-1}{u^2+1}$, $\beta = \operatorname{arctg}\left\{(1+\sqrt{2})\frac{1-u}{1+u}\right\}$, $\gamma = \arccos u$, $\delta = \arccos\frac{1}{u}$, $\varepsilon = \arccos\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $q = 2\sqrt{3\sqrt{2}-4} = 2\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1) = \sin 80°7'15'' \approx 0{,}985171$.

1. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{2}F(\alpha, r)$ $[u \geqslant 0]$. Ж66 (287), БФ (263.50)

2. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{2}[F(\alpha, r) - 2E(\alpha, r)] + \frac{\sqrt{u^4+1}}{u(u^2+1)}$ $[u > 0]$. БФ (263.57)

3. $\int\limits_u^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^4+1)\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{2}E(\alpha, r) - \frac{1}{4}F(\alpha, r) - \frac{u(u^2-1)}{2(u^2+1)\sqrt{u^4+1}}$ $[u \geqslant 0]$.

БФ (263.59)

4. $\int\limits_u^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{4}[F(\alpha, r) - E(\alpha, r)]$ $[u \geqslant 0]$. БФ (263.53)

5. $\int\limits_u^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2-1)^2\sqrt{x^4+1}} = \frac{u\sqrt{u^4+1}}{2(u^4-1)} - \frac{1}{4}E(\alpha, r)$ $[u > 1]$. БФ (263.55)

6. $\int\limits_u^\infty \frac{\sqrt{x^4+1}}{(x^2-1)^2}\,dx = \frac{1}{2}[F(\alpha, r) - E(\alpha, r)] + \frac{u\sqrt{u^4+1}}{u^4-1}$ $[u > 1]$.

БФ (263.58)

7. $\displaystyle\int_u^\infty \frac{(x^2-1)^2\,dx}{(x^2+1)^2\sqrt{x^4+1}} = E(\alpha, r) - \frac{1}{2}F(\alpha, r) \quad [u \geqslant 0].$ БФ (263.54)

8. $\displaystyle\int_u^\infty \frac{\sqrt{x^4+1}\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}E(\alpha, r) \quad [u \geqslant 0].$ БФ (263.51)

9. $\displaystyle\int_u^\infty \frac{(x^2+1)^2\,dx}{[(x^2+1)^2-4p^2x^2]\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{2}\Pi(\alpha, p^2, r) \cdot [u \geqslant 0].$ БФ (263.52)

10. $\displaystyle\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{2}F(\varepsilon, r).$ Ж66 (288)

11. $\displaystyle\int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} = \left(2-\sqrt{2}\right)F(\beta, q) \quad [0 \leqslant u < 1].$ БФ (264.50)

12. $\displaystyle\int_u^1 \frac{(x^2+x\sqrt{2}+1)\,dx}{(x^2-x\sqrt{2}+1)\sqrt{x^4+1}} = \left(2+\sqrt{2}\right)E(\beta, q) \quad [0 \leqslant u < 1].$ БФ (264.51)

13. $\displaystyle\int_u^1 \frac{(1-x)^2\,dx}{(x^2-x\sqrt{2}+1)\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}[F(\beta, q) - E(\beta, q)] \quad [0 \leqslant u < 1].$

БФ (264.55)

14. $\displaystyle\int_u^1 \frac{(1+x)^2\,dx}{(x^2-x\sqrt{2}+1)\sqrt{x^4+1}} = \frac{3\sqrt{2}+4}{2}E(\beta, q) - \frac{3\sqrt{2}-4}{2}F(\beta, q)$

$[0 \leqslant u < 1].$ БФ (264.56)

15. $\displaystyle\int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}F(\gamma, r) \quad [u < 1].$ Ж 66 (290), БФ (259.75)

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2.$

17. $\displaystyle\int_1^u \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}F(\delta, r) \quad [u > 1].$ Ж 66 (289), БФ (260.75)

18. $\displaystyle\int_u^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sqrt{2}\,E(\gamma, r) - \frac{1}{\sqrt{2}}F(\gamma, r) \quad [u < 1].$ БФ (259.76)

19. $\displaystyle\int_1^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}F(\delta, r) - \sqrt{2}\,E(\delta, r) + \frac{1}{u}\sqrt{u^4-1} \quad [u > 1].$

БФ (260.77)

20. $\displaystyle\int_u^1 \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}F(\gamma, r) + \frac{u}{3}\sqrt{1-u^4} \quad [u < 1].$ БФ (259.76)

21. $\displaystyle\int_1^u \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{3}F(\delta, r) + \frac{\sqrt{2}}{3}u\sqrt{u^4-1} \quad [u > 1].$ БФ (260.77)

22. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^3)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F\left(\arccos\frac{1+(1-\sqrt{3})u}{1+(1+\sqrt{3})u}, \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)$$

$[u > 0]$. БФ (260.50)

23. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F\left(\arccos\frac{1-(1+\sqrt{3})u}{1+(\sqrt{3}-1)u}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$$

$[1 \geqslant u > 0]$. БФ (259.50)

В 3.167 и 3.168 положено: $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(d-u)}{(a-d)(c-u)}}$,

$\beta = \arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(u-d)}{(c-d)(a-u)}}$, $\gamma = \arcsin\sqrt{\frac{(b-d)(c-u)}{(c-d)(b-u)}}$,

$\delta = \arcsin\sqrt{\frac{(b-d)(u-c)}{(b-c)(u-d)}}$, $\varkappa = \arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(b-u)}{(b-c)(a-u)}}$,

$\lambda = \arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(u-b)}{(a-b)(u-c)}}$, $\mu = \arcsin\sqrt{\frac{(b-d)(a-u)}{(a-b)(u-d)}}$,

$\nu = \arcsin\sqrt{\frac{(b-d)(u-a)}{(a-d)(u-b)}}$, $q = \sqrt{\frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)}}$, $r = \sqrt{\frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}}$.

3.167

1. $$\int_u^d \sqrt{\frac{d-x}{(a-x)(b-x)(c-x)}}\,dx = \frac{2(c-d)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left\{\Pi\left(\alpha, \frac{a-d}{a-c}, q\right) - F(\alpha, q)\right\}$$

$[a > b > c > d > u]$. БФ (251.05)

2. $$\int_d^u \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)(b-x)(c-x)}}\,dx = \frac{2(d-a)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left\{\Pi\left(\beta, \frac{d-c}{a-c}, r\right) - F(\beta, r)\right\}$$

$[a > b > c \geqslant u > d]$. БФ (252.14)

3. $$\int_u^c \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)(b-x)(c-x)}}\,dx =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left\{(c-b)\Pi\left(\gamma, \frac{c-d}{b-d}, r\right) + (b-d)F(\gamma, r)\right\}$$

$[a > b > c > u \geqslant d]$. БФ (253.14)

4. $$\int_c^u \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)(b-x)(x-c)}}\,dx = \frac{2(c-d)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\Pi\left(\delta, \frac{b-c}{b-d}, q\right)$$

$[a > b \geqslant u > c > d]$. БФ (254.02)

5. $$\int_u^b \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)(b-x)(x-c)}}\,dx =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left\{(b-a)\Pi\left(\varkappa, \frac{b-c}{a-c}, q\right) + (a-d)F(\varkappa, q)\right\}$$

$[a > b > u \geqslant c > d]$. БФ (255.20)

6. $$\int_b^u \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)(x-b)(x-c)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left\{(b-c)\,\Pi\left(\lambda, \frac{a-b}{a-c}, r\right)+(c-d)\,F(\lambda, r)\right\}$$
$[a \geqslant u > b > c > d]$. БФ (256.13)

7. $$\int_u^a \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)(x-b)(x-c)}}\,dx = \frac{2(a-d)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\,\Pi\left(\mu, \frac{b-a}{b-d}, r\right)$$
$[a > u \geqslant b > c > d]$. БФ (257.02)

8. $$\int_a^u \sqrt{\frac{x-d}{(x-a)(x-b)(x-c)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left\{(a-b)\,\Pi\left(\nu, \frac{a-d}{b-d}, q\right)+(b-d)\,F(\nu, q)\right\}$$
$[u > a > b > c > d]$. БФ (258.14)

9. $$\int_u^d \sqrt{\frac{c-x}{(a-x)(b-x)(d-x)}}\,dx = \frac{2(c-d)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\,\Pi\left(\alpha, \frac{a-d}{a-c}, q\right)$$
$[a > b > c > d > u]$. БФ (251.02)

10. $$\int_d^u \sqrt{\frac{c-x}{(a-x)(b-x)(x-d)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[(a-d)\,\Pi\left(\beta, \frac{d-c}{a-c}, r\right)-(a-c)\,F(\beta, r)\right]$$
$[a > b > c \geqslant u > d]$. БФ (252.13)

11. $$\int_u^c \sqrt{\frac{c-x}{(a-x)(b-x)(x-d)}}\,dx = \frac{2(b-c)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[\Pi\left(\gamma, \frac{c-d}{b-d}, r\right)-F(\gamma, r)\right]$$
$[a > b > c > u \geqslant d]$. БФ (253.13)

12. $$\int_c^u \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)(b-x)(x-d)}}\,dx = \frac{2(c-d)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[\Pi\left(\delta, \frac{b-c}{b-d}, q\right)-F(\delta, q)\right]$$
$[a > b \geqslant u > c > d]$. БФ (254.12)

13. $$\int_u^b \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)(b-x)(x-d)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[(b-a)\,\Pi\left(\varkappa, \frac{b-c}{a-c}, q\right)+(a-c)\,F(\varkappa, q)\right]$$
$[a > b > u \geqslant c > d]$. БФ (259.19)

14. $$\int_b^u \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)(x-b)(x-d)}}\,dx = \frac{2(b-c)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\,\Pi\left(\lambda, \frac{a-b}{a-c}, r\right)$$
$[a \geqslant u > b > c > d]$. БФ (256.02)

15. $$\int\limits_u^a \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)(x-b)(x-d)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[(a-d)\,\Pi\left(\mu, \frac{b-a}{b-d}, r\right) + (d-c)\,F(\mu, r)\right] \quad [a > u \geqslant b > c > d].$$ БФ (257.13)

16. $$\int\limits_a^u \sqrt{\frac{x-c}{(x-a)(x-b)(x-d)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[(a-b)\,\Pi\left(\nu, \frac{a-d}{b-d}, q\right) + (b-c)\,F(\nu, q)\right] \quad [u > a > b > c > d].$$ БФ (258.13)

17 $$\int\limits_u^d \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)(c-x)(d-x)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[(c-d)\,\Pi\left(\alpha, \frac{a-d}{a-c}, q\right) + (b-c)\,F(\alpha, q)\right] \quad [a > b > c > d > u].$$ БФ (251.07)

18 $$\int\limits_d^u \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)(c-x)(x-d)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[(a-d)\,\Pi\left(\beta, \frac{d-c}{a-c}, r\right) - (a-b)\,F(\beta, r)\right] \quad [a > b > c \geqslant u > d].$$ БФ (252.15)

19. $$\int\limits_u^c \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)(c-x)(x-d)}}\,dx = \frac{2(b-c)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\,\Pi\left(\gamma, \frac{c-d}{b-d}, r\right) \quad [a > b > c > u \geqslant d].$$ БФ (253.02)

20. $$\int\limits_c^u \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)(x-c)(x-d)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[(d-c)\,\Pi\left(\delta, \frac{b-c}{b-d}, q\right) + (b-d)\,F(\delta, q)\right] \quad [a > b \geqslant u > c > d].$$ БФ (254.14)

21. $$\int\limits_u^b \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)(x-c)(x-d)}}\,dx = \frac{2(a-b)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[\Pi\left(\varkappa, \frac{b-c}{a-c}, q\right) - F(\varkappa, q)\right] \quad [a > b > u \geqslant c > d].$$ БФ (255.21)

22. $$\int\limits_b^u \sqrt{\frac{x-b}{(a-x)(x-c)(x-d)}}\,dx = \frac{2(b-c)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[\Pi\left(\lambda, \frac{a-b}{a-c}, r\right) - F(\lambda, r)\right] \quad [a \geqslant u > b > c > d].$$ БФ (256.15)

23. $$\int_u^a \sqrt{\frac{x-b}{(a-x)(x-c)(x-d)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[(d-a)\,\Pi\left(\mu, \frac{b-a}{b-d}, r\right) - (b-d)F(\mu, r)\right]$$

$[a > u \geqslant b > c > d]$. БФ (257.15)

24. $$\int_a^u \sqrt{\frac{x-b}{(x-a)(x-c)(x-d)}}\,dx = \frac{2(a-b)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\,\Pi\left(\nu, \frac{a-d}{b-d}, q\right)$$

$[u > a > b > c > d]$. БФ (258.02)

25. $$\int_u^d \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)(c-x)(d-x)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[(c-d)\,\Pi\left(\alpha, \frac{a-d}{a-c}, q\right) + (a-c)F(\alpha, q)\right]$$

$[a > b > c > d > u]$. БФ (251.06)

26. $$\int_d^u \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)(c-x)(x-d)}}\,dx = \frac{2(a-d)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\,\Pi\left(\beta, \frac{d-c}{a-c}, r\right)$$

$[a > b > c \geqslant u > d]$. БФ (252.02)

27. $$\int_u^c \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)(c-x)(x-d)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[(b-c)\,\Pi\left(\gamma, \frac{c-d}{b-d}, r\right) + (a-b)F(\gamma, r)\right]$$

$[a > b > c > u \geqslant d]$. БФ (253.15)

28. $$\int_c^u \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)(x-c)(x-d)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[(d-c)\,\Pi\left(\delta, \frac{b-c}{b-d}, q\right) + (a-d)F(\delta, q)\right]$$

$[a > b \geqslant u > c > d]$. БФ (254.13)

29. $$\int_u^b \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)(x-c)(x-d)}}\,dx = \frac{2(a-b)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\,\Pi\left(\varkappa, \frac{b-c}{a-c}, q\right)$$

$[a > b > u \geqslant c > d]$. БФ (255.02)

30. $$\int_b^u \sqrt{\frac{a-x}{(x-b)(x-c)(x-d)}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[(c-b)\,\Pi\left(\lambda, \frac{a-b}{a-c}, r\right) + (a-c)F(\lambda, r)\right]$$

$[a \geqslant u > b > c > d]$. БФ (256.14)

31. $\int\limits_u^a \sqrt{\frac{a-x}{(x-b)(x-c)(x-d)}}\,dx = \frac{2(d-a)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[\Pi\left(\mu, \frac{b-a}{b-d}, r\right) - F(\mu, r)\right]$

$[a > u \geqslant b > c > d]$. БФ (257.14)

32. $\int\limits_a^u \sqrt{\frac{x-a}{(x-b)(x-c)(x-d)}}\,dx = \frac{2(a-b)}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[\Pi\left(\nu, \frac{a-d}{b-d}, q\right) - F(\nu, q)\right]$

$[u > a > b > c > d]$. БФ (258.15)

3.168

1. $\int\limits_u^c \sqrt{\frac{c-x}{(a-x)(b-x)(x-d)^3}}\,dx =$

$= \frac{2}{d-a}\left[\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}\,E(\gamma, r) - \sqrt{\frac{(a-u)(c-u)}{(b-u)(u-d)}}\right]$

$[a > b > c > u > d]$. БФ (253.06)

2. $\int\limits_c^u \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)(b-x)(x-d)^3}}\,dx = \frac{2}{a-d}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}\,[F(\delta, q) - E(\delta, q)]$

$[a > b \geqslant u > c > d]$. БФ (254.04)

3. $\int\limits_u^b \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)(b-x)(x-d)^3}}\,dx = \frac{2}{a-d}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}\,[F(\varkappa, q) - E(\varkappa, q)] +$

$+ \frac{2}{b-d}\sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{(a-u)(u-d)}}$ $[a > b > u \geqslant c > d]$. БФ (255.09)

4. $\int\limits_b^u \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)(x-b)(x-d)^3}}\,dx =$

$= \frac{2}{a-d}\left[\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}\,E(\lambda, r) - \frac{c-d}{b-d}\sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{(u-c)(u-d)}}\right]$

$[a \geqslant u > b > c > d]$. БФ (256.06)

5. $\int\limits_u^a \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)(x-b)(x-d)^3}}\,dx = \frac{2}{a-d}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}\,E(\mu, r)$

$[a > u \geqslant b > c > d]$. БФ (257.01)

6. $\int\limits_a^u \sqrt{\frac{x-c}{(x-a)(x-b)(x-d)^3}}\,dx =$

$= \frac{2}{a-d}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}\,[F(\nu, q) - E(\nu, q)] + \frac{2}{a-d}\sqrt{\frac{(u-a)(u-c)}{(u-b)(u-d)}}$

$[u > a > b > c > d]$. БФ (258.10)

7. $\int\limits_u^c \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)(c-x)(x-d)^3}}\,dx =$

$= \frac{2}{(a-d)(c-d)\sqrt{(a-c)(b-d)}}\,[(b-c)(a-d)F(\gamma, r) - (a-c)(b-d)E(\gamma, r)] +$

$+ \frac{2(b-d)}{(a-d)(c-d)}\sqrt{\frac{(a-u)(c-u)}{(b-u)(u-d)}}$ $[a > b > c > u > d]$. БФ (253.03)

8. $$\int_c^u \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)(x-c)(x-d)^3}}\,dx = \frac{2}{(a-d)(c-d)\sqrt{(a-c)(b-d)}}\times$$
$$\times\left[(a-c)(b-d)E(\delta,\ q)-(a-b)(c-d)F(\delta,\ q)\right]$$
$$[a>b\geqslant u>c>d].$$ БФ (254.15)

9. $$\int_u^b \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)(x-c)(x-d)^3}}\,dx = \frac{2}{(a-d)(c-d)\sqrt{(a-c)(b-d)}}\times$$
$$\times\left[(a-c)(b-d)E(\varkappa,\ q)-(a-b)(c-d)F(\varkappa,\ q)\right]-$$
$$-\frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{(a-u)(u-d)}}\qquad [a>b>u\geqslant c>d].$$ БФ (255.06)

10. $$\int_b^u \sqrt{\frac{x-b}{(a-x)(x-c)(x-d)^3}}\,dx = \frac{2}{(a-d)(c-d)\sqrt{(a-c)(b-d)}}\times$$
$$\times\left[(a-c)(b-d)E(\lambda,\ r)-(a-d)(b-c)F(\lambda,\ r)\right]-$$
$$-\frac{2}{a-d}\sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{(u-c)(u-d)}}\qquad [a\geqslant u>b>c>d].$$ БФ (256.03)

11. $$\int_u^a \sqrt{\frac{x-b}{(a-x)(x-c)(x-d)^3}}\,dx = 2\frac{\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(a-d)(c-d)}E(\mu,\ r)-$$
$$-\frac{2(b-c)}{(c-d)\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\mu,\ r)\qquad [a>u\geqslant b>c>d].$$ БФ (257.09)

12. $$\int_a^u \sqrt{\frac{x-b}{(x-a)(x-c)(x-d)^3}}\,dx = \frac{2(b-d)}{(a-d)(c-d)}\sqrt{\frac{(u-a)(u-c)}{(u-b)(u-d)}}+$$
$$+\frac{2(a-b)}{(a-d)\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\nu,\ q)+2\frac{\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(a-d)(c-d)}E(\nu,\ q)$$
$$[u>a>b>c>d].$$ БФ (258.09)

13. $$\int_u^c \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)(c-x)(x-d)^3}}\,dx = \frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}\left[F(\gamma,\ r)-E(\gamma,\ r)\right]+$$
$$+\frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{(a-u)(c-u)}{(b-u)(u-d)}}\qquad [a>b>c>u>d].$$ БФ (253.04)

14. $$\int_c^u \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)(x-c)(x-d)^3}}\,dx = \frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}E(\delta,\ q)$$
$$[a>b\geqslant u>c>d].$$ БФ (254.01)

15. $$\int_u^b \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)(x-c)(x-d)^3}}\,dx = \frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}E(\varkappa,\ q)-$$
$$-\frac{2(a-d)}{(b-d)(c-d)}\sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{(a-u)(u-d)}}\qquad [a>b>u\geqslant c>d].$$ БФ (255.08)

16. $\int\limits_b^u \sqrt{\frac{a-x}{(x-b)(x-c)(x-d)^3}}\,dx =$

$$= \frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}\,[F(\lambda, r) - E(\lambda, r)] + \frac{2}{b-d}\sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{(u-c)(u-d)}}$$

$[a \geqslant u > b > c > d]$. БФ (256.05)

17. $\int\limits_u^a \sqrt{\frac{a-x}{(x-b)(x-c)(x-d)^3}}\,dx = \frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}\,[F(\mu, r) - E(\mu, r)]$

$[a > u \geqslant b > c > d]$. БФ (257.06)

18. $\int\limits_a^u \sqrt{\frac{x-a}{(x-b)(x-c)(x-d)^3}}\,dx = \frac{-2}{c-d}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}\,E(\nu, q) +$

$$+ \frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{(u-a)(u-c)}{(u-b)(u-d)}}$$

$[u > a > b > c > d]$. БФ (258.05)

19. $\int\limits_u^d \sqrt{\frac{d-x}{(a-x)(b-x)(c-x)^3}}\,dx = \frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,[F(\alpha, q) - E(\alpha, q)]$

$[a > b > c > d > u]$. БФ (251.01)

20. $\int\limits_d^u \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)(b-x)(c-x)^3}}\,dx = \frac{-2}{b-c}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,E(\beta, r) +$

$$+ \frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{(b-u)(u-d)}{(a-u)(c-u)}}$$

$[a > b > c \geqslant u > d]$. БФ (252.06)

21. $\int\limits_u^b \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)(b-x)(x-c)^3}}\,dx =$

$$= \frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,[F(\varkappa, q) - E(\varkappa, q)] + \frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{(b-u)(u-d)}{(a-u)(u-c)}}$$

$[a > b > u > c > d]$. БФ (255.05)

22. $\int\limits_b^u \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)(x-b)(x-c)^3}}\,dx = \frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,E(\lambda, r)$

$[a \geqslant u > b > c > d]$. БФ (256.01)

23. $\int\limits_u^a \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)(x-b)(x-c)^3}}\,dx =$

$$= \frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,E(\mu, r) - \frac{2(c-d)}{(a-c)(b-c)}\sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{(u-c)(u-d)}}$$

$[a > u \geqslant b > c > d]$. БФ (257.06)

24. $\int\limits_a^u \sqrt{\frac{x-d}{(x-a)(x-b)(x-c)^3}}\,dx =$

$$= \frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,[F(\nu, q) - E(\nu, q)] + \frac{2}{a-c}\sqrt{\frac{(u-a)(u-d)}{(u-b)(u-c)}}$$

$[u > a > b > c > d]$. БФ (258.06)

25. $$\int_u^a \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)(c-x)^3(d-x)}}\,dx = \frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,E(\alpha, q)$$
$[a > b > c > d > u]$. БФ (251.01)

26. $$\int_d^u \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)(c-x)^3(x-d)}}\,dx = \frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,[F(\beta, r) - E(\beta, r)] + \frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{(b-u)(u-d)}{(a-u)(c-u)}}$$
$[a > b > c > u > d]$. БФ (252.03)

27. $$\int_u^b \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)(x-c)^3(x-d)}}\,dx = \frac{2}{d-c}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,E(\varkappa, q) + \frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{(b-u)(u-d)}{(a-u)(u-c)}}$$
$[a > b > u > c > d]$. БФ (255.03)

28. $$\int_b^u \sqrt{\frac{x-b}{(a-x)(x-c)^3(x-d)}}\,dx = \frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,[F(\lambda, r) - E(\lambda, r)]$$
$[a \geqslant u > b > c > d]$. БФ (256.08)

29. $$\int_u^a \sqrt{\frac{x-b}{(a-x)(x-c)^3(x-d)}}\,dx = \frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,[F(\mu, r) - E(\mu, r)] + \frac{2}{a-c}\sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{(u-c)(u-d)}}$$
$[a > u \geqslant b > c > d]$. БФ (257.03)

30. $$\int_a^u \sqrt{\frac{x-b}{(x-a)(x-c)^3(x-d)}}\,dx = \frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,E(\nu, q) - \frac{2(b-c)}{(a-c)(c-d)}\sqrt{\frac{(u-a)(u-d)}{(u-b)(u-c)}}$$
$[u > a > b > c > d]$. БФ (258.03)

31. $$\int_u^d \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)(c-x)^3(d-x)}}\,dx = \frac{2\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(b-c)(c-d)}\,E(\alpha, q) - \frac{a-b}{b-c}\,\frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\,F(\alpha, q)$$
$[a > b > c > d > u]$. БФ (251.08)

32. $$\int_d^u \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)(c-x)^3(x-d)}}\,dx = \frac{2(a-d)}{(c-d)\sqrt{(a-c)(b-d)}}\,F(\beta, r) - 2\,\frac{\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(b-c)(c-d)}\,E(\beta, r) + 2\,\frac{a-c}{(b-c)(c-d)}\sqrt{\frac{(b-u)(u-d)}{(a-u)(c-u)}}$$
$[a > b > c > u > d]$. БФ (252.04)

33. $$\int\limits_u^b \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)(x-c)^3(x-d)}}\,dx = \frac{2(a-b)}{(b-c)\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\varkappa, q) - 2\frac{\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(b-c)(c-d)}E(\varkappa, q) + \frac{2(a-c)}{(b-c)(c-d)}\sqrt{\frac{(b-u)(u-d)}{(a-u)(u-c)}}$$

$[a > b > u > c > d]$. БФ (255.04)

34. $$\int\limits_b^u \sqrt{\frac{a-x}{(x-b)(x-c)^3(x-d)}}\,dx = \frac{2\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(b-c)(c-d)}E(\lambda, r) - \frac{2(a-d)}{(c-d)\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\lambda, r)$$

$[a \geqslant u > b > c > d]$. БФ (256.09)

35. $$\int\limits_u^a \sqrt{\frac{a-x}{(x-b)(x-c)^3(x-d)}}\,dx = \frac{2\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(b-c)(c-d)}E(\mu, r) - \frac{2(a-d)}{(c-d)\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\mu, r) - \frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{(a-u)(u-b)}{(u-c)(u-d)}}$$

$[a > u \geqslant b > c > d]$. БФ (257.04)

36. $$\int\limits_a^u \sqrt{\frac{x-a}{(x-b)(x-c)^3(x-d)}}\,dx = \frac{2\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(b-c)(c-d)}E(\nu, q) - \frac{2(a-b)}{(b-c)\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\nu, q) - \frac{2}{c-d}\sqrt{\frac{(u-a)(u-d)}{(u-b)(u-c)}}$$

$[u > a > b > c > d]$. БФ (258.04)

37. $$\int\limits_u^d \sqrt{\frac{d-x}{(a-x)(b-x)^3(c-x)}}\,dx = \frac{2\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(a-b)(b-c)}E(\alpha, q) - \frac{2(c-d)}{(b-c)\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\alpha, q) - \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{(a-u)(d-u)}{(b-u)(c-u)}}$$

$[a > b > c > d > u]$. БФ (251.11)

38. $$\int\limits_d^u \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)(b-x)^3(c-x)}}\,dx = \frac{2\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(a-b)(b-c)}E(\beta, r) - \frac{2(a-d)}{(a-b)\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\beta, r) + \frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{(c-u)(u-d)}{(a-u)(b-u)}}$$

$[a > b > c \geqslant u > d]$. БФ (252.07)

39. $$\int\limits_u^c \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)(b-x)^3(c-x)}}\,dx = \frac{2\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(a-b)(b-c)}E(\gamma, r) - \frac{2(a-d)}{(a-b)\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\gamma, r)$$

$[a > b > c > u \geqslant d]$. БФ (253.07)

40. $$\int_c^u \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)(b-x)^3(x-c)}}\,dx = \frac{2(c-d)}{(b-c)\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\delta, q) - \frac{2\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(a-b)(b-c)}E(\delta, q) + \frac{2(b-d)}{(a-b)(b-c)}\sqrt{\frac{(a-u)(u-c)}{(b-u)(u-d)}}$$

$[a > b > u > c > d]$. БФ (254.05)

41 $$\int_u^a \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)(x-b)^3(x-c)}}\,dx = \frac{2(a-d)}{(a-b)\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\mu, r) - \frac{2\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(a-b)(b-c)}E(\mu, r) + \frac{2(b-d)}{(a-b)(b-c)}\sqrt{\frac{(a-u)(u-c)}{(u-b)(u-d)}}$$

$[a > u > b > c > d]$. БФ (257.07)

42. $$\int_a^u \sqrt{\frac{x-d}{(x-a)(x-b)^3(x-c)}}\,dx = \frac{2\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(a-b)(b-c)}E(\nu, q) - \frac{2(c-d)}{(b-c)\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\nu, q)$$ $[u > a > b > c > d]$. БФ (258.07)

43. $$\int_u^d \sqrt{\frac{c-x}{(a-x)(b-x)^3(d-x)}}\,dx = \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}E(\alpha, q) - \frac{2(b-c)}{(a-b)(b-d)}\sqrt{\frac{(a-u)(d-u)}{(b-u)(c-u)}}$$ $[a > b > c > d > u]$. БФ (251.14)

44. $$\int_d^u \sqrt{\frac{c-x}{(a-x)(b-x)^3(x-d)}}\,dx = \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}[F(\beta, r) - E(\beta, r)] + \frac{2}{b-d}\sqrt{\frac{(c-u)(u-d)}{(a-u)(b-u)}}$$ $[a > b > c \geqslant u > d]$. БФ (252.10)

45. $$\int_u^c \sqrt{\frac{c-x}{(a-x)(b-x)^3(x-d)}}\,dx = \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}[F(\gamma, r) - E(\gamma, r)]$$

$[a > b > c > u \geqslant d]$. БФ (254.08)

46. $$\int_c^u \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)(b-x)^3(x-d)}}\,dx = \frac{2}{b-a}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}E(\delta, q) + \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{(a-u)(u-c)}{(b-u)(u-d)}}$$ $[a > b \geqslant u > c > d]$. БФ (254.08)

47. $$\int_u^a \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)(x-b)^3(x-d)}}\,dx = \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}[F(\mu, r) - E(\mu, r)] + \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{(a-u)(u-c)}{(u-b)(u-d)}}$$ $[a > u \geqslant b > c > d]$. БФ (257.10)

48. $$\int_a^u \sqrt{\frac{x-c}{(x-a)(x-b)^3(x-d)}}\,dx = \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}E(\nu, q)$$

$[u > a > b > c > d]$. БФ (258.01)

49. $\int\limits_u^d \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)^3(c-x)(d-x)}}\,dx=$

$$=\frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}\,[F(\alpha,q)-E(\alpha,q)]+\frac{2}{b-d}\sqrt{\frac{(a-u)(d-u)}{(b-u)(c-u)}}$$

$[a>b>c>d>u]$. БФ (251.12)

50. $\int\limits_d^u \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)^3(c-x)(x-d)}}\,dx=\frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}\,E(\beta,r)-$

$$-\frac{2(a-b)}{(b-c)(b-d)}\sqrt{\frac{(u-d)(c-u)}{(a-u)(b-u)}}$$ $[a>b>c\geqslant u>d]$. БФ (252.09)

51. $\int\limits_u^c \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)^3(c-x)(x-d)}}\,dx=\frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}\,E(\gamma,r)$

$[a>b>c>u\geqslant d]$. БФ (253.01)

52. $\int\limits_c^u \sqrt{\frac{a-x}{(b-x)^3(x-c)(x-d)}}\,dx=$

$$=\frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}\,[F(\delta,q)-E(\delta,q)]+\frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{(a-u)(u-c)}{(b-u)(u-d)}}$$

$[a>b>u>c>d]$. БФ (254.06)

53. $\int\limits_u^a \sqrt{\frac{a-x}{(x-b)^3(x-c)(x-d)}}\,dx=\frac{2}{c-b}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}\,E(\mu,r)+$

$$+\frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{(a-u)(u-c)}{(u-b)(u-d)}}$$ $[a>u>b>c>d]$. БФ (257.08)

54. $\int\limits_a^u \sqrt{\frac{x-a}{(x-b)^3(x-c)(x-d)}}\,dx=\frac{2}{b-c}\sqrt{\frac{a-c}{b-d}}\,[F(\nu,q)-E(\nu,q)]$

$[u>a>b>c>d]$. БФ (258.08)

55. $\int\limits_u^d \sqrt{\frac{d-x}{(a-x)^3(b-x)(c-x)}}\,dx=\frac{2}{b-a}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,E(\alpha,q)+$

$$+\frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{(b-u)(d-u)}{(a-u)(c-u)}}$$ $[a>b>c>d>u]$. БФ (251.09)

56. $\int\limits_d^u \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)^3(b-x)(c-x)}}\,dx=\frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,[F(\beta,q)-E(\beta,q)]$

$[a>b>c\geqslant u>d]$. БФ (252.05)

57. $\int\limits_u^c \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)^3(b-x)(c-x)}}\,dx=$

$$=\frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,[F(\gamma,r)-E(\gamma,r)]+\frac{2}{a-c}\sqrt{\frac{(c-u)(u-d)}{(a-u)(b-u)}}$$

$[a>b>c>u\geqslant d]$. БФ (253.05)

58. $$\int_c^u \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)^3(b-x)(x-c)}}\,dx = \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,E(\delta, q) - \frac{2(a-d)}{(a-b)(a-c)}\sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{(a-u)(u-d)}} \quad [a > b \geqslant u > c > d].$$ БФ (254.03)

59. $$\int_u^b \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)^3(b-x)(x-c)}}\,dx = \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,E(\varkappa, q) \quad [a > b > u \geqslant c > d].$$ БФ (255.01)

60. $$\int_b^u \sqrt{\frac{x-d}{(a-x)^3(x-b)(x-c)}}\,dx = \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}\,[F(\lambda, r) - E(\lambda, r)] + \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{(u-b)(u-d)}{(a-u)(u-c)}} \quad [a > u > b > c > d].$$ БФ (256.10)

61. $$\int_u^d \sqrt{\frac{c-x}{(a-x)^3(b-x)(d-x)}}\,dx = \frac{2(c-d)}{(a-d)\sqrt{(a-c)(b-d)}}\,F(\alpha, q) - \frac{2\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(a-b)(a-d)}\,E(\alpha, q) + \frac{2(a-c)}{(a-b)(a-d)}\sqrt{\frac{(b-u)(d-u)}{(a-u)(c-u)}} \quad [a > b > c > d > u].$$ БФ (251.15)

62. $$\int_d^u \sqrt{\frac{c-x}{(a-x)^3(b-x)(x-d)}}\,dx = \frac{2\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(a-b)(a-d)}\,E(\beta, r) - \frac{2(b-c)}{(a-b)\sqrt{(a-c)(b-d)}}\,F(\beta, r) \quad [a > b > c \geqslant u > d].$$ БФ (252.08)

63. $$\int_u^c \sqrt{\frac{c-x}{(a-x)^3(b-x)(x-d)}}\,dx = \frac{2\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(a-b)(a-d)}\,E(\gamma, r) - \frac{2(b-c)}{(a-b)\sqrt{(a-c)(b-d)}}\,F(\gamma, r) - \frac{2}{a-d}\sqrt{\frac{(c-u)(u-d)}{(a-u)(b-u)}} \quad [a > b > c > u \geqslant d].$$ БФ (253.10)

64. $$\int_c^u \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)^3(b-x)(x-d)}}\,dx = \frac{2\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(a-b)(a-d)}\,E(\delta, q) - \frac{2(c-d)}{(a-d)\sqrt{(a-c)(b-d)}}\,F(\delta, q) - \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{(a-u)(u-d)}} \quad [a > b \geqslant u > c > d].$$ БФ (254.09)

65. $$\int_u^b \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)^3(b-x)(x-d)}}\,dx = \frac{2\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(a-b)(a-d)}\,E(\varkappa, q) - \frac{2(c-d)}{(a-d)\sqrt{(a-c)(b-d)}}\,F(\varkappa, q) \quad [a > b > u \geqslant c > d].$$ БФ (255.10)

66. $$\int_b^u \sqrt{\frac{x-c}{(a-x)^3(x-b)(x-d)}}\,dx = \frac{2(b-c)}{(a-b)\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\lambda, r) - \frac{2\sqrt{(a-c)(b-d)}}{(a-b)(a-d)}E(\lambda, r) + \frac{2(a-c)}{(a-b)(a-d)}\sqrt{\frac{(u-b)(u-d)}{(a-u)(u-c)}}$$

$[a > u > b > c > d]$. БФ (256.07)

67. $$\int_u^d \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)^3(c-x)(d-x)}}\,dx = \frac{2}{a-d}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}[F(\alpha, q) - E(\alpha, q)] + \frac{2}{a-d}\sqrt{\frac{(b-u)(d-u)}{(a-u)(c-u)}}$$

$[a > b > c > d > u]$. БФ (251.13)

68. $$\int_d^u \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)^3(c-x)(x-d)}}\,dx = \frac{2}{a-d}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}E(\beta, r)$$

$[a > b > c \geqslant u > d]$. БФ (252.01)

69. $$\int_u^c \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)^3(c-x)(x-d)}}\,dx = \frac{2}{a-d}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}E(\gamma, r) - \frac{2(a-b)}{(a-c)(a-d)}\sqrt{\frac{(c-u)(u-d)}{(a-u)(b-u)}}$$

$[a > b > c > u \geqslant d]$. БФ (253.08)

70. $$\int_c^u \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)^3(x-c)(x-d)}}\,dx = \frac{2}{a-d}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}[F(\delta, q) - E(\delta, q)] + \frac{2}{a-c}\sqrt{\frac{(b-u)(u-c)}{(a-u)(u-d)}}$$

$[a > b \geqslant u > c > d]$. БФ (254.07)

71. $$\int_u^b \sqrt{\frac{b-x}{(a-x)^3(x-c)(x-d)}}\,dx = \frac{2}{a-d}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}[F(\varkappa, q) - E(\varkappa, q)]$$

$[a > b > u \geqslant c > d]$. БФ (255.07)

72. $$\int_b^u \sqrt{\frac{x-b}{(a-x)^3(x-c)(x-d)}}\,dx = \frac{-2}{a-d}\sqrt{\frac{b-d}{a-c}}E(\lambda, r) + \frac{2}{a-d}\sqrt{\frac{(u-b)(u-d)}{(a-u)(u-c)}}$$

$[a \geqslant u > b > c > d]$. БФ (256.04)

В 3.169—3.172 положено: $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{u}{b}$, $\beta=\operatorname{arctg}\frac{a}{u}$,

$$\gamma=\arcsin\frac{u}{b}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+u^2}},\quad \delta=\arccos\frac{u}{b},\quad \varepsilon=\arccos\frac{b}{u},\quad \xi=\arcsin\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+u^2}},$$

$$\eta=\arcsin\frac{u}{b},\quad \zeta=\arcsin\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2-u^2}},\quad \varkappa=\arcsin\frac{a}{u}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{a^2-b^2}},$$

$$\lambda=\arcsin\sqrt{\frac{a^2-u^2}{a^2-b^2}},\quad \mu=\arcsin\sqrt{\frac{u^2-a^2}{u^2-b^2}},\quad \nu=\arcsin\frac{a}{u},\quad q=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

$$r=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad s=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad t=\frac{b}{a}.$$

3.169

1. $$\int_0^u \sqrt{\frac{x^2+a^2}{x^2+b^2}}\,dx=a\{F(\alpha,q)-E(\alpha,q)\}+u\sqrt{\frac{a^2+u^2}{b^2+u^2}}$$
$[a>b,\quad u>0]$. БФ (221.03)

2. $$\int_0^u \sqrt{\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}}\,dx=\frac{b^2}{a}F(\beta,q)-aE(\beta,q)+u\sqrt{\frac{a^2+u^2}{b^2+u^2}}$$
$[a>b,\quad u>0]$. БФ (221.04)

3. $$\int_0^u \sqrt{\frac{x^2+a^2}{b^2-x^2}}\,dx=\sqrt{a^2+b^2}\,E(\gamma,r)-u\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2+u^2}}$$
$[b\geqslant u>0]$. БФ (214.11)

4. $$\int_u^b \sqrt{\frac{a^2+x^2}{b^2-x^2}}\,dx=\sqrt{a^2+b^2}\,E(\delta,r)$$
$[b>u\geqslant 0]$. БФ (213.01), Ж 64 (273)

5. $$\int_b^u \sqrt{\frac{a^2+x^2}{x^2-b^2}}\,dx=\sqrt{a^2+b^2}\{F(\varepsilon,s)-E(\varepsilon,s)\}+$$
$$+\frac{1}{u}\sqrt{(u^2+a^2)(u^2-b^2)}$$
$[u>b>0]$. БФ (211.03)

6. $$\int_0^u \sqrt{\frac{b^2-x^2}{a^2+x^2}}\,dx=\sqrt{a^2+b^2}\{F(\gamma,r)-E(\gamma,r)\}+u\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2+u^2}}$$
$[b\geqslant u>0]$. БФ (214.03)

7. $$\int_u^b \sqrt{\frac{b^2-x^2}{a^2+x^2}}\,dx=\sqrt{a^2+b^2}\{F(\delta,r)-E(\delta,r)\}$$
$[b>u\geqslant 0]$. БФ (213.03)

8. $$\int_b^u \sqrt{\frac{x^2-b^2}{a^2+x^2}}\,dx=\frac{1}{u}\sqrt{(a^2+u^2)(u^2-b^2)}-\sqrt{a^2+b^2}\,E(\varepsilon,s)$$
$[u>b>0]$. БФ (211.04)

9. $$\int_0^u \sqrt{\frac{b^2-x^2}{a^2-x^2}}\,dx=aE(\eta,t)-\frac{a^2-b^2}{a}F(\eta,t)$$
$[a>b\geqslant u>0]$. БФ (219.03)

10. $\int\limits_u^b \sqrt{\frac{b^2-x^2}{a^2-x^2}}\,dx = aE(\zeta, t) - \frac{a^2-b^2}{a}F(\zeta, t) - u\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2-u^2}}$

$[a > b > u \geqslant 0]$. БФ (220.04)

11. $\int\limits_b^u \sqrt{\frac{x^2-b^2}{a^2-x^2}}\,dx = aE(\varkappa, q) - \frac{b^2}{a}F(\varkappa, q) -$

$- \frac{1}{u}\sqrt{(a^2-u^2)(u^2-b^2)}$ $[a \geqslant u > b > 0]$. БФ (217.04)

12. $\int\limits_u^a \sqrt{\frac{x^2-b^2}{a^2-x^2}}\,dx = aE(\lambda, q) - \frac{b^2}{a}F(\lambda, q)$ $[a > u \geqslant b > 0]$. БФ (218.03)

13. $\int\limits_a^u \sqrt{\frac{x^2-b^2}{x^2-a^2}}\,dx = \frac{a^2-b^2}{a}F(\mu, t) - aE(\mu, t) + u\sqrt{\frac{u^2-a^2}{u^2-b^2}}$

$[u > a > b > 0]$. БФ (216.03)

14. $\int\limits_0^u \sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}}\,dx = aE(\eta, t)$ $[a > b \geqslant u > 0]$. Ж 64 (276), БФ (219.01)

15. $\int\limits_u^b \sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}}\,dx = a\left\{E(\zeta, t) - \frac{u}{a}\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2-u^2}}\right\}$

$[a > b > u \geqslant 0]$. БФ (220.03)

16. $\int\limits_b^u \sqrt{\frac{a^2-x^2}{x^2-b^2}}\,dx = a\{F(\varkappa, q) - E(\varkappa, q)\} +$

$+ \frac{1}{u}\sqrt{(a^2-u^2)(u^2-b^2)}$ $[a \geqslant u > b > 0]$. БФ (217.03)

17. $\int\limits_u^a \sqrt{\frac{a^2-x^2}{x^2-b^2}}\,dx = a\{F(\lambda, q) - E(\lambda, q)\}$ $[a > u \geqslant b > 0]$. БФ (218.09)

18. $\int\limits_a^u \sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}}\,dx = u\sqrt{\frac{u^2-a^2}{u^2-b^2}} - aE(\mu, t)$ $[u > a > b > 0]$. БФ (216.04)

3.171

1. $\int\limits_b^u \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{a^2+x^2}{x^2-b^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}E(\varepsilon, s)$

$[u > b > 0]$. БФ (211.01), Ж 64 (274)

2. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{a^2+x^2}{x^2-b^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}E(\xi, s) - \frac{a^2}{b^2u}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{a^2+u^2}}$

$[u \geqslant b > 0]$. БФ (212.09)

3. $\int\limits_u^b \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}} = \frac{a^2-b^2}{ab^2}F(\zeta, t) - \frac{a}{b^2}E(\zeta, t) + \frac{a^2}{b^2u}\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2-u^2}}$

$[a > b > u > 0]$. БФ (220.12)

4. $\int\limits_b^u \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{x^2-b^2}} = \frac{a}{b^2}E(\varkappa, q) - \frac{1}{a}F(\varkappa, q)$

$[a \geqslant u > b > 0]$. БФ (217.11)

5. $\int\limits_u^a \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{x^2-b^2}} = \frac{a}{b^2}E(\lambda, q) - \frac{1}{a}F(\lambda, q) - \frac{\sqrt{(a^2-u^2)(u^2-b^2)}}{b^2 u}$

$[a > u \geqslant b > 0]$. БФ (218.10)

6. $\int\limits_a^u \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}} = \frac{a}{b^2}E(\mu, t) - \frac{a^2-b^2}{ab^2}F(\mu, t) - \frac{1}{u}\sqrt{\frac{u^2-a^2}{u^2-b^2}}$

$[u > a > b > 0]$. БФ (216.08)

7. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{x^2+a^2}{x^2+b^2}} = \frac{1}{a}F(\beta, q) - \frac{a}{b^2}E(\beta, q) + \frac{a^2}{b^2 u}\sqrt{\frac{b^2+u^2}{a^2+u^2}}$

$[a > b,\ u > 0]$. БФ (222.08)

8. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\{F(\beta, q) - E(\beta, q)\} + \frac{1}{u}\sqrt{\frac{b^2+u^2}{a^2+u^2}}$

$[a > b,\ u > 0]$. БФ (222.09)

9. $\int\limits_u^b \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{b^2-x^2}{a^2+x^2}} = \frac{\sqrt{(b^2-u^2)(a^2+u^2)}}{a^2 u} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}E(\delta, r)$

$[b > u > 0]$. БФ (213.10)

10. $\int\limits_b^u \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{x^2-b^2}{a^2+x^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}\{F(\varepsilon, s) - E(\varepsilon, s)\}$

$[u > b > 0]$. БФ (211.07)

11. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{x^2-b^2}{a^2+x^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}\{F(\xi, s) - E(\xi, s)\} + \frac{1}{u}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{a^2+u^2}}$

$[u \geqslant b > 0]$. БФ (212.11)

12. $\int\limits_u^b \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{a^2+x^2}{b^2-x^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\{F(\delta, r) - E(\delta, r)\} + \frac{\sqrt{(b^2-u^2)(a^2+u^2)}}{b^2 u}$

$[b > u > 0]$. БФ (213.05)

13. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}} = \frac{a}{b^2}E(\nu, t) - \frac{a^2-b^2}{ab^2}F(\nu, t)$

$[u \geqslant a > b > 0]$. БФ (215.08)

14. $\int\limits_u^b \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{b^2-x^2}{a^2-x^2}} = \frac{1}{u}\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2-u^2}} - \frac{1}{a}E(\zeta, t)$

$[a > b > u > 0]$. БФ (220.11)

15. $\int\limits_b^u \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{x^2-b^2}{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\{F(\varkappa,\ q)-E(\varkappa,\ q)\}$

$[a \geqslant u > b > 0]$. БФ (217.08)

16. $\int\limits_u^a \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{x^2-b^2}{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\{F(\lambda,\ q)-E(\lambda,\ q)\}+\frac{\sqrt{(a^2-u^2)(u^2-b^2)}}{a^2u}$

$[a > u \geqslant b > 0]$. БФ (218.08)

17. $\int\limits_a^u \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{x^2-b^2}{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}E(\mu,\ t)-\frac{1}{u}\sqrt{\frac{u^2-a^2}{u^2-b^2}}$

$[u > a > b > 0]$. БФ (216.07)

18. $\int\limits_u^\infty \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{x^2-b^2}{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}E(\nu,\ t)$ $[u \geqslant a > b > 0]$. БФ (215.01), Ж 65 (281)

3.172

1. $\int\limits_0^u \sqrt{\frac{x^2+b^2}{(x^2+a^2)^3}}\,dx=\frac{1}{a}E(\alpha,\ q)-\frac{a^2-b^2}{a^2}\frac{u}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}$

$[a > b,\ u > 0]$. БФ (221.10)

2. $\int\limits_u^\infty \sqrt{\frac{x^2+b^2}{(x^2+a^2)^3}}\,dx=\frac{1}{a}E(\beta,\ q)$ $[a > b,\ u \geqslant 0]$. Ж 64 (271)

3. $\int\limits_0^u \sqrt{\frac{x^2+a^2}{(x^2+b^2)^3}}\,dx=\frac{a}{b^2}E(\alpha,\ q)$ $[a > b,\ u > 0]$. Ж 64 (270)

4. $\int\limits_u^\infty \sqrt{\frac{x^2+a^2}{(x^2+b^2)^3}}\,dx=\frac{a}{b^2}E(\beta,\ q)-\frac{a^2-b^2}{b^2}\frac{u}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}$

$[a > b,\ u \geqslant 0]$. БФ (222.06)

5. $\int\limits_0^u \sqrt{\frac{b^2-x^2}{(a^2+x^2)^3}}\,dx=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}E(\gamma,\ r)-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}F(\gamma,\ r)$

$[b \geqslant u > 0]$. БФ (214.08)

6. $\int\limits_u^b \sqrt{\frac{b^2-x^2}{(a^2+x^2)^3}}\,dx=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}E(\delta,\ r)-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}F(\delta,\ r)-$

$-\frac{u}{a^2}\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2+u^2}}$ $[b > u \geqslant 0]$. БФ (213.04)

7. $\int\limits_b^u \sqrt{\frac{x^2-b^2}{(a^2+x^2)^3}}\,dx=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}E(\varepsilon,\ s)-\frac{b^2}{a^2\sqrt{a^2+b^2}}F(\varepsilon,\ s)-$

$-\frac{1}{u}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{u^2+a^2}}$ $[u > b > 0]$. БФ (211.06)

8. $$\int_u^\infty \sqrt{\frac{x^2-b^2}{(a^2+x^2)^3}}\,dx = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2} E(\xi, s) - \frac{b^2}{a^2\sqrt{a^2+b^2}} F(\xi, s)$$

$[u \geqslant b > 0]$. БФ (212.08)

9. $$\int_0^u \sqrt{\frac{x^2+a^2}{(b^2-x^2)^3}}\,dx = \frac{a^2}{b^2\sqrt{a^2+b^2}} F(\gamma, r) - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2} E(\gamma, r) + \frac{(a^2+b^2)\,u}{b^2\sqrt{(a^2+u^2)(b^2-u^2)}}$$

$[b > u > 0]$. БФ (214.09)

10. $$\int_u^\infty \sqrt{\frac{x^2+a^2}{(x^2-b^2)^3}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} F(\xi, s) - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2} E(\xi, s) + \frac{(a^2+b^2)\,u}{b^2\sqrt{(a^2+u^2)(u^2-b^2)}}$$

$[u > b > 0]$. БФ (212.07)

11. $$\int_0^u \sqrt{\frac{b^2-x^2}{(a^2-x^2)^3}}\,dx = \frac{1}{a}\left\{F(\eta, t) - E(\eta, t) + \frac{u}{a}\sqrt{\frac{b^2-u^2}{a^2-u^2}}\right\}$$

$[a > b \geqslant u > 0]$. БФ (219.09)

12. $$\int_u^b \sqrt{\frac{b^2-x^2}{(a^2-x^2)^3}}\,dx = \frac{1}{a}\{F(\zeta, t) - E(\zeta, t)\}$$

$[a > b > u \geqslant 0]$. БФ (220.07)

13. $$\int_b^u \sqrt{\frac{x^2-b^2}{(a^2-x^2)^3}}\,dx = \frac{1}{u}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{a^2-u^2}} - \frac{1}{a} E(\varkappa, q)$$

$[a > u > b > 0]$. БФ (217.07)

14. $$\int_u^\infty \sqrt{\frac{x^2-b^2}{(x^2-a^2)^3}}\,dx = \frac{1}{a}[F(\nu, t) - E(\nu, t)] + \frac{1}{u}\sqrt{\frac{u^2-b^2}{u^2-a^2}}$$

$[u > a > b > 0]$. БФ (215.05)

15. $$\int_0^u \sqrt{\frac{a^2-x^2}{(b^2-x^2)^3}}\,dx = \frac{a}{b^2}[F(\eta, t) - E(\eta, t)] + \frac{u}{b^2}\sqrt{\frac{a^2-u^2}{b^2-u^2}}$$

96

$[a > b > u > 0]$. БФ (219.10)

16. $$\int_u^a \sqrt{\frac{a^2-x^2}{(x^2-b^2)^3}}\,dx = \frac{u}{b^2}\sqrt{\frac{a^2-u^2}{u^2-b^2}} - \frac{a}{b^2} E(\lambda, q)$$

$[a > u > b > 0]$. БФ (218.05)

17. $$\int_a^u \sqrt{\frac{x^2-a^2}{(x^2-b^2)^3}}\,dx = \frac{a}{b^2}[F(\mu, t) - E(\mu, t)]$$

$[u > a > b > 0]$. БФ (216.05)

18. $$\int_u^\infty \sqrt{\frac{x^2-a^2}{(x^2-b^2)^3}}\,dx = \frac{a}{b^2}[F(\nu, t) - E(\nu, t)] + \frac{1}{u}\sqrt{\frac{u^2-a^2}{u^2-b^2}}$$

$[u \geqslant a > b > 0]$. БФ (215.03)

3.173

1. $$\int_u^1 \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{x^2+1}{1-x^2}}=\sqrt{2}\left[F\left(\arccos u, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-E\left(\arccos u, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]+\frac{\sqrt{1-u^4}}{u} \quad [u<1]. \quad \text{БФ(259.77)}$$

2 $$\int_1^u \frac{dx}{x^2}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\sqrt{2}E\left(\arccos\frac{1}{u}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad [u>1]. \quad \text{БФ(260.76)}$$

В 3.174 и 3.175 принято: $\alpha=\arccos\dfrac{1+(1-\sqrt{3})u}{1+(1+\sqrt{3})u}$,

$$\beta=\arccos\frac{1-(1+\sqrt{3})u}{1+(\sqrt{3}-1)u}, \quad p=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}, \quad q=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

3.174

1. $$\int_0^u \frac{dx}{[1+(1+\sqrt{3})x]^2}\sqrt{\frac{1-x+x^2}{x(1+x)}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}E(\alpha, p) \quad [u>0]. \quad \text{БФ(260.51)}$$

2. $$\int_0^u \frac{dx}{[1+(\sqrt{3}-1)x]^2}\sqrt{\frac{1+x+x^2}{x(1-x)}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}E(\beta, q)$$
$$[1\geqslant u>0]. \quad \text{БФ(259.51)}$$

3. $$\int_0^u \frac{dx}{1-x+x^2}\sqrt{\frac{x(1+x)}{1-x+x^2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{27}}E(\alpha, p)-\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{27}}F(\alpha, p)-$$
$$-\frac{2(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\frac{1+(1-\sqrt{3})u}{1+(1+\sqrt{3})u}\sqrt{\frac{u(1+u)}{1-u+u^2}} \quad [u>0]. \quad \text{БФ(260.54)}$$

4 $$\int_0^u \frac{dx}{1+x+x^2}\sqrt{\frac{x(1-x)}{1+x+x^2}}=\frac{4}{\sqrt[4]{27}}E(\beta, q)-\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[4]{27}}F(\beta, q)-$$
$$-\frac{2(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\frac{1-(1+\sqrt{3})u}{1+(\sqrt{3}-1)u}\sqrt{\frac{u(1-u)}{1+u+u^2}} \quad [1\geqslant u>0]. \quad \text{БФ(259.55)}$$

3.175

1 $$\int_0^u \frac{dx}{1+x}\sqrt{\frac{x}{1+x^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{27}}[F(\alpha, p)-2E(\alpha, p)]+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{u(1-u+u^2)}}{\sqrt{1+u}[1+(1+\sqrt{3})u]} \quad [u>0]. \quad \text{БФ(260.55)}$$

2 $$\int_0^u \frac{dx}{1-x}\sqrt{\frac{x}{1-x^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{27}}[F(\beta, q)-2E(\beta, q)]+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{u(1+u+u^2)}}{\sqrt{1-u}[1+(\sqrt{3}-1)u]} \quad [0<u<1]. \quad \text{БФ(259.52)}$$

3.18 Выражения, приводящиеся к корням четвертой степени из многочленов второй степени, и их произведения с рациональными функциями

3.181

1. $$\int_b^u \frac{dx}{\sqrt[4]{(a-x)(x-b)}} = \sqrt{a-b}\left\{2\left[E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\right.\right.$$
$$+E\left(\arccos\sqrt[4]{\frac{4(a-u)(u-b)}{(a-b)^2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Big]-\Big[K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+$$
$$\left.\left.+F\left(\arccos\sqrt[4]{\frac{4(a-u)(u-b)}{(a-b)^2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\right\} \quad [a \geqslant u > b]. \qquad \text{БФ (271.05)}$$

2. $$\int_a^u \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)(x-b)}} = \sqrt{\frac{a-b}{2}}F\left[\left(\arccos\frac{a-b-2\sqrt{(u-a)(u-b)}}{a-b+2\sqrt{(u-a)(u-b)}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\right.$$
$$-2E\left(\arccos\frac{a-b-2\sqrt{(u-a)(u-b)}}{a-b+2\sqrt{(u-a)(u-b)}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Big]+$$
$$+\frac{2(2u-a-b)\sqrt[4]{(u-a)(u-b)}}{a-b+2\sqrt{(u-a)(u-b)}} \quad [u > a > b]. \qquad \text{БФ (272.05)}$$

3.182

1. $$\int_b^u \frac{dx}{\sqrt[4]{[(a-x)(x-b)]^3}} = \frac{2}{\sqrt{a-b}}\left[K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\right.$$
$$\left.+F\left(\arccos\sqrt{\frac{4(a-u)(u-b)}{(a-b)^2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \quad [a \geqslant u > b]. \qquad \text{БФ (271.01)}$$

2. $$\int_a^u \frac{dx}{\sqrt[4]{[(x-a)(x-b)]^3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-b}}F\left(\arccos\frac{a-b-2\sqrt{(u-a)(u-b)}}{a-b+2\sqrt{(u-a)(u-b)}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$[u > a > b]. \qquad \text{БФ (272.00)}$$

В 3.183—3.186 положено: $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt[4]{u^2+1}}$,
$$\beta = \arccos\sqrt[4]{1-u^2}, \quad \gamma = \arccos\frac{1-\sqrt{u^2-1}}{1+\sqrt{u^2-1}}.$$

3.183

1. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2+1}} = \sqrt{2}\left[F\left(\alpha,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2E\left(\alpha,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]+\frac{2u}{\sqrt[4]{u^2+1}}$$
$$[u > 0]. \qquad \text{БФ (273.55)}$$

2. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^2}} = \sqrt{2}\left[2E\left(\beta,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)-F\left(\beta,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$
$$[0 < u \leqslant 1]. \qquad \text{БФ (271.55)}$$

3. $$\int_1^u \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2-1}} = F\left(\gamma,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2E\left(\gamma,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{2u\sqrt[4]{u^2-1}}{1+\sqrt{u^2-1}}$$
$$[u > 1]. \qquad \text{БФ (272.55)}$$

3.184

1. $$\int_0^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{1-x^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}\left[2E\left(\beta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\beta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] - \frac{2u}{5}\sqrt[4]{(1-u^2)^3}$$
$[0 < u \leqslant 1]$. БФ (271.59)

2. $$\int_1^u \frac{dx}{x^2\sqrt[4]{x^2-1}} = E\left(\gamma, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}F\left(\gamma, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1-\sqrt{u^2-1}}{1+\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{u^2-1}}{u}$$
$[u > 1]$. БФ (272.54)

3.185

1. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2+1)^3}} = \sqrt{2}F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad [u > 0].$$ БФ (273.50)

2. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)^3}} = \sqrt{2}F\left(\beta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad [0 < u \leqslant 1].$$ БФ (271.51)

3. $$\int_1^u \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2-1)^3}} = F\left(\gamma, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad [u > 1].$$ БФ (272.50)

4. $$\int_0^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)^3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}F\left(\beta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2}{3}u\sqrt[4]{1-u^2}$$
$[0 < u \leqslant 1]$. БФ (271.54)

5. $$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2+1)^5}} = 2\sqrt{2}E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$[u > 0]$. БФ (273.54)

6. $$\int_0^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{(x^2+1)^5}} = 2\sqrt{2}\left[F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] + \frac{2u}{\sqrt[4]{u^2+1}}$$
$[u > 0]$. **БФ (273.56)**

7. $$\int_0^u \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{(x^2+1)^7}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}F\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{u}{6\sqrt[4]{(u^2+1)^3}}$$
$[u > 0]$. БФ (273.53)

3.186

1. $$\int_0^u \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)\sqrt[4]{x^2+1}}\,dx = 2\sqrt{2}E\left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad [u > 0].$$ БФ (273.51)

2. $$\int_0^u \frac{dx}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt[4]{1-x^2}} = \sqrt{2}\left[F\left(\beta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\beta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] + \frac{u\sqrt[4]{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}}$$
$[0 < u \leqslant 1]$. **БФ (271.58)**

3. $$\int_1^u \frac{dx}{(x^2+2\sqrt{x^2-1})\sqrt[4]{x^2-1}} = \frac{1}{2}\left[F\left(\gamma, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\gamma, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$
$[u > 1]$. БФ (272.53)

4. $$\int_0^u \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)^3}} = \sqrt{2}\left[2E\left(\beta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\beta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] - \frac{2u\sqrt[4]{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}} \quad [0 < u \leqslant 1].$$ БФ (271.57)

5. $$\int_1^u \frac{x^2\,dx}{(x^2+2\sqrt{x^2-1})\sqrt[4]{(x^2-1)^3}} = E\left(\gamma, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad [u > 1].$$ БФ (272.51)

3.19—3.23 Степени x и биномов вида $(\alpha+\beta x)$

3.191

1. $$\int_0^u x^{\nu-1}(u-x)^{\mu-1}\,dx = u^{\mu+\nu-1}\mathrm{B}(\mu, \nu) \quad [\operatorname{Re}\mu>0, \operatorname{Re}\nu>0].$$ ИПII 185 (7)

2. $$\int_u^\infty x^{-\nu}(x-u)^{\mu-1}\,dx = u^{\mu-\nu}\mathrm{B}(\nu-\mu, \mu) \quad [\operatorname{Re}\nu > \operatorname{Re}\mu > 0].$$ ИПII 201 (6)

3. $$\int_0^1 x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}\,dx = \int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\,dx = \mathrm{B}(\mu, \nu) \quad [\operatorname{Re}\mu > 0, \operatorname{Re}\nu > 0].$$ ФII 774 (1)

3.192

1. $$\int_0^1 \frac{x^p\,dx}{(1-x)^p} = p\pi \operatorname{cosec} p\pi \quad [p^2 < 1].$$ БХ (3) 4

2. $$\int_0^1 \frac{x^p\,dx}{(1-x)^{p+1}} = -\pi \operatorname{cosec} p\pi \quad [-1 < p < 0].$$ БХ [3] (5)

3. $$\int_0^1 \frac{(1-x)^p}{x^{p+1}}\,dx = -\pi \operatorname{cosec} p\pi \quad [-1 < p < 0].$$ БХ [4] (6)

4. $$\int_1^\infty (x-1)^{p-\frac{1}{2}}\frac{dx}{x} = \pi \sec p\pi \quad \left[-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}\right].$$ БХ [23] (7)

3.193 $$\int_0^n x^{\nu-1}(n-x)^n\,dx = \frac{n!\,n^{\nu+n}}{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n)} \quad [\operatorname{Re}\nu > 0].$$ ВТФI 2

3.194

1. $$\int_0^u \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(1+\beta x)^\nu} = \frac{u^\mu}{\mu}\,{}_2F_1(\nu, \mu; 1+\mu; -\beta u) \quad [|\arg(1+\beta u)| < \pi, \operatorname{Re}\mu > 0].$$ ИПI 310 (20)

2. $$\int_u^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(1+\beta x)^\nu} = \frac{u^{\mu-\nu}}{\beta^\nu(\nu-\mu)}\,{}_2F_1\left(\nu,\ \nu-\mu;\quad \nu-\mu+1;\ -\frac{1}{\beta u}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\nu]$. ИПI 310 (21)

3. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(1+\beta x)^\nu} = \beta^{-\mu}\mathrm{B}(\mu,\ \nu-\mu) \quad [|\arg\beta| < \pi,\ \operatorname{Re}\nu > \operatorname{Re}\mu > 0].$$

ФII 775 *и*, ИПI 310 (19)

4. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(1+\beta x)^{n+1}} = (-1)^n\frac{\pi}{\beta^\mu}\binom{\mu-1}{n}\operatorname{cosec}(\mu\pi)$$

$[|\arg\beta| < \pi,\quad 0 < \operatorname{Re}\nu < n+1]$. ИПI 308 (6)

5. $$\int_0^u \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+\beta x} = \frac{u^\mu}{\mu}\,{}_2F_1(1,\ \mu;\ 1+\mu;\ -u\beta)$$

$[|\arg(1-u\beta)| < \pi,\quad \operatorname{Re}\mu > 0]$. ИПI 308 (5)

6. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(1+\beta x)^2} = \frac{(1-\mu)\pi}{\beta^\mu}\operatorname{cosec}\mu\pi \qquad [0 < \operatorname{Re}\mu < 2].$$ БХ [16] (4)

7. $$\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{(a+bx)^{n+\frac{1}{2}}} = 2^{m+1}m!\,\frac{(2n-2m-3)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{a^{m-n+\frac{1}{2}}}{b^{m+1}}$$

$\left[m < n-\frac{1}{2},\ a > 0,\ b > 0\right]$. БХ [21] (2)

8 $$\int_0^1 \frac{x^{n-1}\,dx}{(1+x)^m} = 2^{-n}\sum_{k=0}^\infty \binom{m-n-1}{k}\frac{(-2)^{-k}}{n+k}.$$ БХ [3] (1)

3.195 $$\int_0^\infty \frac{(1+x)^{p-1}}{(x+a)^{p+1}}\,dx = \frac{1-a^{-p}}{p(a-1)} \qquad [a > 0].$$ Ли [19] (6)

3.196

1. $$\int_0^u (x+\beta)^\nu(u-x)^{\mu-1}\,dx = \frac{\beta^\nu u^\mu}{\mu}\,{}_2F_1\left(1,\ -\nu;\ 1+\mu;\ -\frac{u}{\beta}\right)$$

$\left[\left|\arg\frac{u}{\beta}\right| < \pi\right]$. ИПII 185 (8)

2. $$\int_u^\infty (x+\beta)^{-\nu}(x-u)^{\mu-1}\,dx = (u+\beta)^{\mu-\nu}\mathrm{B}(\nu-\mu,\ \mu)$$

$\left[\left|\arg\frac{u}{\beta}\right| < \pi,\ \operatorname{Re}\nu > \operatorname{Re}\mu > 0\right]$. ИПII 201 (7)

3. $$\int_a^b (x-a)^{\mu-1}(b-x)^{\nu-1}\,dx = (b-a)^{\mu+\nu-1}\mathrm{B}(\mu,\ \nu)$$

$[b > a,\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ВТФI 10 (13)

4. $$\int_1^\infty \frac{dx}{(a-bx)(x-1)^\nu} = -\frac{\pi}{b}\operatorname{cosec}\nu\pi\left(\frac{b}{b-a}\right)^\nu$$

$[a < b,\ b > 0,\ 0 < \nu < 1]$. Ли [23] (5)

5. $$\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(a-bx)(1-x)^\nu} = \frac{\pi}{b}\operatorname{cosec}\nu\pi\left(\frac{b}{a-b}\right)^\nu$$

$[a > b > 0,\ 0 < \nu < 1]$. Ли [24] (10)

3.197

1. $$\int_0^\infty x^{\nu-1}(\beta+x)^{-\mu}(x+\gamma)^{-\varrho}\,dx = \beta^{-\mu}\gamma^{\nu-\varrho}\mathrm{B}(\nu,\ \mu-\nu+\varrho)\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\mu,\ \nu;\ \mu+\varrho;\ 1-\frac{\gamma}{\beta}\right)$$ $[|\arg\beta| < \pi,\ |\arg\gamma| < \pi,$
$\operatorname{Re}\nu > 0,\ \operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}(\nu-\varrho)]$. ИПII 233 (9)

2. $$\int_u^\infty x^{-\lambda}(x+\beta)^\nu(x-u)^{\mu-1}\,dx = u^{\mu+\nu-\lambda}\mathrm{B}(\lambda-\mu-\nu,\ \mu)\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(-\nu,\ \lambda-\mu-\nu;\ \lambda-\nu;\ -\frac{\beta}{u}\right)$$
$\left[\left|\arg\frac{u}{\beta}\right| < \pi \text{ или } \left|\frac{\beta}{u}\right| < 1,\quad 0 < \operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}(\lambda-\nu)\right]$. ИПII 201 (8)

3. $$\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}(1-\beta x)^{-\nu}\,dx = \mathrm{B}(\lambda,\ \mu)\,{}_2F_1(\nu,\ \lambda;\ \lambda+\mu;\ \beta)$$

$[\operatorname{Re}\lambda > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ |\beta| < 1]$. УВII 79

4. $$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}(1+ax)^{-\mu-\nu}\,dx = (1+a)^{-\mu}\,\mathrm{B}(\mu,\ \nu)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0,\ a > -1]$. БХ [5] 4, ВТФI 10 (11)

5. $$\int_0^\infty x^{\lambda-1}(1+x)^\nu(1+\alpha x)^\mu\,dx = \mathrm{B}(\lambda,\ -\mu-\nu-\lambda)\times$$
$$\times\,{}_2F_1(-\mu,\ \lambda;\ -\mu-\nu;\ 1-\alpha)$$ $[|\arg\alpha| < \pi,\ -\operatorname{Re}(\mu+\nu) > \operatorname{Re}\lambda > 0]$.
ВТФI 60 (12), ИПI 310 (23)

6. $$\int_1^\infty x^{\lambda-\nu}(x-1)^{\nu-\mu-1}(\alpha x-1)^{-\lambda}\,dx = \alpha^{-\lambda}\mathrm{B}(\mu,\ \nu-\mu)\,{}_2F_1(\nu,\ \mu;\ \lambda;\ \alpha^{-1})$$

$[1+\operatorname{Re}\nu > \operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re}\mu,\ |\arg(\alpha-1)| < \pi]$. ВТФI 115 (6)

7. $$\int_0^\infty x^{\mu-\frac{1}{2}}(x+a)^{-\mu}(x+b)^{-\mu}\,dx = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{1-2\mu}\frac{\Gamma\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu)}$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0]$. БХ 19 (5)

8. $\int\limits_0^u x^{\nu-1}(x+\alpha)^{\lambda}(u-x)^{\mu-1}\,dx=\alpha^{\lambda}u^{\mu+\nu-1}\mathrm{B}(\mu,\nu)\,{}_2F_1\left(-\lambda,\nu;\mu+\nu;-\frac{u}{\alpha}\right)$

$\left[\left|\arg\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right|<\pi,\ \operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0\right].$ ИПII 186 (9)

9. $\int\limits_0^\infty x^{\lambda-1}(1+x)^{-\mu+\nu}(x+\beta)^{-\nu}\,dx=\mathrm{B}(\mu-\lambda,\lambda)\,{}_2F_1(\nu,\mu-\lambda;\mu;1-\beta)$

$[\operatorname{Re}\mu>\operatorname{Re}\lambda>0].$ ВТФI 205

10. $\int\limits_0^1 \frac{x^{q-1}\,dx}{(1-x)^q(1+px)}=\frac{\pi}{(1+p)^q}\operatorname{cosec} q\pi \quad [0<q<1,\ p>-1].$ БХ [5] (1)

11. $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-\frac{1}{2}}\,dx}{(1-x)^p(1+qx)^p}=$

$$=\frac{2\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-p)}{\sqrt{\pi}}\cos^{2p}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{q}\right)\frac{\sin\left[(2p-1)\operatorname{arctg}(\sqrt{q})\right]}{(2p-1)\sin\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{q})\right]}$$

$\left[-\frac{1}{2}<p<1,\ q>0\right].$ БХ [11] (1)

12. $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-\frac{1}{2}}\,dx}{(1-x)^p(1-qx)^p}=\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-p)}{\sqrt{\pi}}\frac{(1-\sqrt{q})^{1-2p}-(1+\sqrt{q})^{1-2p}}{(2p-1)\sqrt{q}}$

$\left[-\frac{1}{2}<p<1,\ 0<q<1\right].$ БХ [11] (2)

3.198 $\int\limits_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}[ax+b(1-x)+c]^{-(\mu+\nu)}\,dx=$

$$=(a+c)^{-\mu}(b+c)^{-\nu}\mathrm{B}(\mu,\nu)$$

$[a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c>0,\ \operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0].$ ФII 787

3.199 $\int\limits_a^b (x-a)^{\mu-1}(b-x)^{\nu-1}(x-c)^{-\mu-\nu}\,dx=$

$$=(b-a)^{\mu+\nu-1}(b-c)^{-\mu}(a-c)^{-\nu}\mathrm{B}(\mu,\nu)$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0,\ c<a<b].$ ВТФI 10 (14)

3.211 $\int\limits_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}(1-ux)^{-\varrho}(1-vx)^{-\sigma}\,dx=$

$$=\mathrm{B}(\mu,\lambda)F_1(\lambda,\varrho,\sigma,\lambda+\mu;u,v)$$

$[\operatorname{Re}\lambda>0,\ \operatorname{Re}\mu>0].$ ВТФI 231 (5)

3.212 $\int\limits_0^\infty [(1+ax)^{-p}+(1+bx)^{-p}]\,x^{q-1}\,dx=$

$$=2(ab)^{-\frac{q}{2}}\mathrm{B}(q,p-q)\cos\left\{q\arccos\left[\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right]\right\}$$

$[p>q>0].$ БХ [19] (9)

3.213 $\int\limits_0^\infty [(1+ax)^{-p}-(1+bx)^{-p}]\, x^{q-1}\, dx =$

$$= -2i\,(ab)^{-\frac{q}{2}} \mathrm{B}(q,\, p-q) \sin\left\{q \arccos\left[\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right]\right\}$$

$[p > q > 0]$. БХ [19] (10)

3.214 $\int\limits_0^1 [(1+x)^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1} + (1+x)^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}]\, dx = 2^{\mu+\nu-1}\, \mathrm{B}(\mu,\, \nu)$

$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. Ли [1] (15), ВТФI 10 (10)

3.215 $\int\limits_0^1 \{a^\mu x^{\mu-1}(1-ax)^{\nu-1} + (1-a)^\nu x^{\nu-1}[1-(1-a)x]^{\mu-1}\}\, dx = \mathrm{B}(\mu,\, \nu)$

$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0,\ |a| < 1]$. БХ [1] (16)

3.216

1. $\int\limits_0^1 \frac{x^{\mu-1}+x^{\nu-1}}{(1+x)^{\mu+\nu}}\, dx = \mathrm{B}(\mu,\, \nu) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ФII 775

2. $\int\limits_1^\infty \frac{x^{\mu-1}+x^{\nu-1}}{(1+x)^{\mu+\nu}}\, dx = \mathrm{B}(\mu,\, \nu) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ФII 775

3.217 $\int\limits_0^\infty \left\{\frac{b^p x^{p-1}}{(1+bx)^p} - \frac{(1+bx)^{p-1}}{b^{p-1}x^p}\right\} dx = \pi \operatorname{ctg} p\pi \qquad [0 < p < 1,\ b > 0]$.

БХ [18] (13)

3.218 $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2p-1}-(a+x)^{2p-1}}{(a+x)^p\, x^p}\, dx = \pi \operatorname{ctg} p\pi \qquad [p < 1]$ (сравни 3.217).

БХ [18] (7)

3.219 $\int\limits_0^\infty \left\{\frac{x^\nu}{(x+1)^{\nu+1}} - \frac{x^\mu}{(x+1)^{\mu+1}}\right\} dx = \psi(\mu+1) - \psi(\nu+1)$

$[\operatorname{Re}\mu > 1,\ \operatorname{Re}\nu > 1]$. БХ [19] (13)

3.221

1. $\int\limits_a^\infty \frac{(x-a)^{p-1}}{x-b}\, dx = \pi\,(a-b)^{p-1} \operatorname{cosec} p\pi \qquad [a > b,\ 0 < p < 1]$. Ли [24] (8)

2. $\int\limits_{-\infty}^a \frac{(a-x)^{p-1}}{x-b}\, dx = -\pi\,(b-a)^{p-1} \operatorname{cosec} p\pi \qquad [a < b,\ 0 < p < 1]$.

Ли [24] (8)

3.222

1. $$\int_0^1 \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x} = \beta(\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ УВ II 39

2. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{x+a} = \begin{cases} \pi \operatorname{cosec}(\mu\pi)\, a^{\mu-1} & \text{при } a > 0, \\ -\pi \operatorname{ctg}(\mu\pi)\,(-a)^{\mu-1} & \text{при } a < 0, \end{cases}$$ Ф II 718, Ф II 737, БХ [18] (2), ИП II 249 (28)

$[0 < \operatorname{Re}\mu < 1]$.

3.223

1. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(\beta+x)(\gamma+x)} = \frac{\pi}{\gamma-\beta}(\beta^{\mu-1} - \gamma^{\mu-1}) \operatorname{cosec}(\mu\pi)$$

$[|\arg\beta| < \pi,\ |\arg\gamma| < \pi,\quad 0 < \operatorname{Re}\mu < 2]$. ИП I 309 (7)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(\beta+x)(\alpha-x)} = \frac{\pi}{\alpha+\beta}[\beta^{\mu-1} \operatorname{cosec}(\mu\pi) + \alpha^{\mu-1} \operatorname{ctg}(\mu\pi)]$$

$[|\arg\beta| < \pi,\ \alpha > 0,\ 0 < \operatorname{Re}\mu < 2]$. ИП I 309 (8)

3 $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(a-x)(b-x)} = \pi \operatorname{ctg}(\mu\pi) \frac{a^{\mu-1} - b^{\mu-1}}{b-a}$$

$[a > b > 0,\ 0 < \operatorname{Re}\mu < 2]$. ИП I 309 (9)

3.224 $$\int_0^\infty \frac{(x+\beta)\, x^{\mu-1}\,dx}{(x+\gamma)(x+\delta)} = \pi \operatorname{cosec}(\mu\pi) \left\{ \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\delta} \gamma^{\mu-1} + \frac{\delta-\beta}{\delta-\gamma} \delta^{\mu-1} \right\}$$

$[|\arg\gamma| < \pi,\ |\arg\delta| < \pi,\ 0 < \operatorname{Re}\mu < 1]$. ИП I 309 (10)

3.225

1. $$\int_1^\infty \frac{(x-1)^{p-1}}{x^2}\,dx = (1-p)\,\pi \operatorname{cosec} p\pi \qquad [-1 < p < 1].$$ БХ [23] (8)

2. $$\int_1^\infty \frac{(x-1)^{1-p}}{x^3}\,dx = \frac{1}{2} p(1-p)\,\pi \operatorname{cosec} p\pi \qquad [0 < p < 1].$$ БФ [23] (1)

3. $$\int_0^\infty \frac{x^p\,dx}{(1+x)^3} = \frac{\pi}{2} p(1-p) \operatorname{cosec} p\pi \qquad [-1 < p < 2].$$ БХ [16] (5)

3.226

1. $$\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x}} = 2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$ БХ [8] (1)

2. $$\int_0^1 \frac{x^{n-\frac{1}{2}}\,dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi.$$ БХ [8] (2)

3.227

1. $$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}(\beta+x)^{1-\mu}}{\gamma+x}\,dx =$$
$$= \beta^{1-\mu}\gamma^{\nu-1}\mathrm{B}(\nu,\ \mu-\nu)\,{}_2F_1\left(\mu-1,\ \nu;\ \mu;\ 1-\frac{\gamma}{\beta}\right)$$
$[|\arg\beta| < \pi,\ |\arg\gamma| < \pi,\ 0 < \operatorname{Re}\nu < \operatorname{Re}\mu]$. ИП II 217 (9)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^{-\varrho}(\beta+x)^{-\sigma}}{\gamma+x}\,dx = \pi\gamma^{-\varrho}(\beta-\gamma)^{-\sigma}\operatorname{cosec}(\varrho\pi)\,I_{1-\gamma/\beta}(\sigma,\ \varrho)$$
$[|\arg\beta| < \pi,\ |\arg\gamma| < \pi,\ -\operatorname{Re}\sigma < \operatorname{Re}\varrho < 1]$. ИП II 217 (10)

3.228

1. $$\int_a^b \frac{(x-a)^{\nu}(b-x)^{-\nu}}{x-c}\,dx = \pi\operatorname{cosec}(\nu\pi)\left[1-\left(\frac{a-c}{b-c}\right)^{\nu}\right] \quad \text{при} \quad c < a;$$
$$= \pi\operatorname{cosec}(\nu\pi)\left[1-\cos(\nu\pi)\left(\frac{c-a}{b-c}\right)^{\nu}\right] \quad \text{при} \quad a < c < b;$$
$$= \pi\operatorname{cosec}(\nu\pi)\left[1-\left(\frac{c-a}{c-b}\right)^{\nu}\right] \quad \text{при} \quad c > b$$
$[|\operatorname{Re}\nu| < 1]$. ИП II 250 (31)

2. $$\int_a^b \frac{(x-a)^{\nu-1}(b-x)^{-\nu}}{x-c}\,dx = \frac{\pi\operatorname{cosec}(\nu\pi)}{b-c}\left|\frac{a-c}{b-c}\right|^{\nu-1} \quad \text{при} \quad c < a \quad \text{или} \quad c > b;$$
$$= -\frac{\pi(c-a)^{\nu-1}}{(b-c)^{\nu}}\operatorname{ctg}(\nu\pi) \quad \text{при} \quad a < c < b$$
$[0 < \operatorname{Re}\nu < 1]$. ИП II 250 (32)

3. $$\int_a^b \frac{(x-a)^{\nu-1}(b-x)^{\mu-1}}{x-c}\,dx = \frac{(b-a)^{\mu+\nu-1}}{b-c}\mathrm{B}(\mu,\ \nu)\,{}_2F_1\left(1,\ \mu;\ \mu+\nu;\ \frac{b-a}{b-c}\right)$$
при $c < a$ или $c > b$;
$$= (c-a)^{\nu-1}(b-c)^{\mu-1}\operatorname{ctg}\mu\pi - (b-a)^{\mu+\nu-2}\mathrm{B}(\mu-1,\ \nu)\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(2-\mu-\nu,\ 1;\ 2-\mu;\ \frac{b-c}{b-a}\right) \quad \text{при} \quad a < c < b$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП II 250 (33)

4 $$\int_0^1 \frac{(1-x)^{\nu-1}x^{-\nu}}{a-bx}\,dx = \frac{\pi(a-b)^{\nu-1}}{a^{\nu}}\operatorname{cosec}(\nu\pi)$$
$[0 < \operatorname{Re}\nu < 1,\ 0 < b < a]$. БХ [5] (8)

5. $$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}(x+a)^{1-\mu}}{x-c}\,dx = a^{1-\mu}(-c)^{\nu-1}\,\mathrm{B}(\mu-\nu,\ \nu)\,{}_2F_1\left(\mu-1,\ \nu;\ \mu;\ 1+\frac{c}{a}\right)$$
при $c < 0$;

$$= c^{\nu-1}(a+c)^{1-\mu}\operatorname{ctg}[(\mu-\nu)\pi] -$$

$$-\frac{a^{1-\mu+\nu}}{\pi(a+c)}\mathrm{B}(\mu-\nu-1,\ \nu)\,{}_2F_1\left(2-\mu,\ 1;\ 2-\mu+\nu;\ \frac{a}{a+c}\right) \quad \text{при} \quad c>0$$

$[a>0,\ 0<\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}\mu]$. ИП II 251 (34)

3.229 $$\int_0^1 \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(1-x)^{\mu}(1+ax)(1+bx)} = \frac{\pi\operatorname{cosec}\mu\pi}{a-b}\left[\frac{a}{(1+a)^{\mu}}-\frac{b}{(1+b)^{\mu}}\right]$$

$[0<\operatorname{Re}\mu<1]$. БХ [5] (7)

3.231

1. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx = \pi\operatorname{ctg}p\pi \qquad [p^2<1].$$ БХ [4] (4)

2. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1+x}\,dx = \pi\operatorname{cosec}p\pi \qquad [p^2<1].$$ БХ [4] (1)

3. $$\int_0^1 \frac{x^{p}-x^{-p}}{x-1}\,dx = \frac{1}{p}-\pi\operatorname{ctg}p\pi \qquad [p^2<1].$$ БХ [4] (3)

4. $$\int_0^1 \frac{x^{p}-x^{-p}}{1+x}\,dx = \frac{1}{p}-\pi\operatorname{cosec}p\pi \qquad [p^2<1].$$ БХ [4] (2)

5. $$\int_0^1 \frac{x^{\mu-1}-x^{\nu-1}}{1-x}\,dx = \psi(\nu)-\psi(\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0].$$

Ф II 815, БХ [4] (5)

6. $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x}\,dx = \pi(\operatorname{ctg}p\pi-\operatorname{ctg}q\pi) \qquad [p>0,\ q>0].$$ Ф II 718

3.232 $$\int_0^\infty \frac{(c+ax)^{-\mu}-(c+bx)^{-\mu}}{x}\,dx = c^{-\mu}\ln\frac{b}{a}$$

$[\operatorname{Re}\mu>-1;\ a>0;\ b>0;\ c>0]$. БХ [18] (14)

3.233 $$\int_0^\infty \left\{\frac{1}{1+x}-(1+x)^{-\nu}\right\}\frac{dx}{x} = \psi(\nu)+C \qquad [\operatorname{Re}\nu>0].$$ ВТФ I 17, УВ II 37

3.234

1. $$\int_0^1 \left(\frac{x^{q-1}}{1-ax}-\frac{x^{-q}}{a-x}\right)dx = \pi a^{-q}\operatorname{ctg}q\pi \qquad [0<q<1,\ a>0].$$ БХ [5] (11)

2. $$\int_0^1 \left(\frac{x^{q-1}}{1+ax}+\frac{x^{-q}}{a+x}\right)dx = \pi a^{-q}\operatorname{cosec}q\pi \qquad [0<q<1,\ a>0].$$ БХ [5] (10)

3.235 $\int\limits_0^\infty \frac{(1+x)^\mu - 1}{(1+x)^\nu} \frac{dx}{x} = \psi(\nu) - \psi(\nu-\mu)$ $[\operatorname{Re}\nu > \operatorname{Re}\mu > 0]$. БХ [18] (5)

3.236 $\int\limits_0^1 \frac{x^{\frac{\mu}{2}}\,dx}{[(1-x)(1-a^2x)]^{\frac{\mu+1}{2}}} = \frac{(1-a)^{-\mu} - (1+a)^{-\mu}}{2a\mu\sqrt{\pi}} \Gamma\left(1+\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)$

$[-2 < \mu < 1, \ |a| < 1]$. БХ [12] (32)

3.237 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_n^{n+1} \frac{dx}{x+u} = \ln \frac{u\left[\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\right]^2}{2\left[\Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right)\right]^2}$ $[|\arg u| < \pi]$. ИПII 216 (1)

3.238

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{\nu-1}}{x-u}\,dx = -\pi \operatorname{ctg}\frac{\nu\pi}{2}|u|^{\nu-1}\operatorname{sign} u$ $[0 < \operatorname{Re}\nu < 1]$.

ИПII 249 (29)

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{\nu-1}}{x-u}\operatorname{sign} x\,dx = \pi \operatorname{tg}\frac{\nu\pi}{2}|u|^{\nu-1}$ $[0 < \operatorname{Re}\nu < 1]$. ИПII 249 (30)

3. $\int\limits_a^b \frac{(b-x)^{\mu-1}(x-a)^{\nu-1}}{|x-u|^{\mu+\nu}}\,dx = \frac{(b-a)^{\mu+\nu-1}}{|a-u|^\mu|b-u|^\nu}\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}$

$[\operatorname{Re}\mu > 0, \ \operatorname{Re}\nu > 0, \ 0 < u < a < b$ или $0 < a < b < u]$. MO 7

3.24—3.27 Степени x, биномов вида $\alpha+\beta x^p$ и многочленов от x

3.241

1. $\int\limits_0^1 \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x^p} = \frac{1}{p}\beta\left(\frac{\mu}{p}\right)$ $[\operatorname{Re}\mu > 0, \ p > 0]$. УВII 39 и, БХ [2] (13)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x^\nu} = \frac{\pi}{\nu}\operatorname{cosec}\frac{\mu\pi}{\nu} = \frac{1}{\nu}B\left(\frac{\mu}{\nu}, \frac{\nu-\mu}{\nu}\right)$ $[\operatorname{Re}\nu \geqslant \operatorname{Re}\mu > 0]$.

ИПI 309 (15) и, БХ [17] (10)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1-x^q} = \frac{\pi}{q}\operatorname{ctg}\frac{p\pi}{q}$ $[p < q]$. БХ [17] (11)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(p+qx^\nu)^{n+1}} = \frac{1}{\nu p^{n+1}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\Gamma\left(1+n-\frac{\mu}{\nu}\right)}{\Gamma(1+n)}$

$\left[0 < \frac{\mu}{\nu} < n+1\right]$. БХ [17] (22) и

5. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x^q)^2} = \frac{(p-q)\pi}{q^2} \operatorname{cosec} \frac{(p-q)\pi}{q} \quad [p < 2q].$ БХ [17] (18)

3.242 $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{x^{4n}+2x^{2n}\cos t+1} = \frac{\pi}{n} \sin\left[\frac{(2n-2m-1)}{2n}t\right] \operatorname{cosec} t \operatorname{cosec} \frac{(2m+1)\pi}{2n}$

$[m < n,\ t^2 < \pi^2].$ ФП 642

3.243 $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(1+x^{2\nu})(1+x^{3\nu})} = -\frac{\pi}{8\nu} \frac{\operatorname{cosec}\left(\frac{\mu\pi}{3\nu}\right)}{1-4\cos^2\left(\frac{\mu\pi}{3\nu}\right)}$

$[0 < \operatorname{Re}\mu < 5\operatorname{Re}\nu].$ ИП I 312 (34)

3.244

1. $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{q-p-1}}{1+x^q}\,dx = \frac{\pi}{q} \operatorname{cosec} \frac{p\pi}{q} \quad [q > p > 0].$ БХ [2] (14)

2. $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-p-1}}{1-x^q}\,dx = \frac{\pi}{q} \operatorname{ctg} \frac{p\pi}{q} \quad [q > p > 0].$ БХ [2] (16)

3. $\int\limits_0^1 \frac{x^{\nu-1}-x^{\mu-1}}{1-x^\nu}\,dx = \frac{1}{\nu}\left[C+\psi\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\right] \quad [\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\nu > 0].$ БХ [2] (17)

4. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}-x^{2n}}{1-x^{2l}}\,dx = \frac{\pi}{l}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{2m+1}{2l}\pi\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)\right]$

$[m < l,\ n < l].$ ФП 640

3.245 $\int\limits_0^\infty [x^{\nu-\mu} - x^\nu(1+x)^{-\mu}]\,dx = \frac{\nu}{\nu-\mu+1} \mathrm{B}(\nu,\ \mu-\nu)$

$[\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\nu > 0].$ БХ [16] (13)

3.246 $\int\limits_0^\infty \frac{1-x^q}{1-x^r} x^{p-1}\,dx = \frac{\pi}{r} \sin\frac{q\pi}{r} \operatorname{cosec}\frac{p\pi}{r} \operatorname{cosec}\frac{(p+q)\pi}{r}$

$[p+q < r,\ p > 0].$ ИП I 311 (33), БХ [17] (12)

Интегралы вида $\int f(x^p \pm x^{-p},\ x^q \pm x^{-q},\ \ldots)\frac{dx}{x}$ следует преобразовывать подстановкой $x = e^t$ или $x = e^{-t}$; например, вместо $\int\limits_0^1 (x^{1+p} + x^{1-p})^{-1}\,dx$ следует искать $\int\limits_0^\infty \operatorname{sech} px\,dx$, вместо $\int\limits_0^1 \frac{x^{n-m-1}+x^{n+m-1}}{1+2x^n\cos a+x^{2n}}\,dx$ следует искать $\int\limits_0^\infty \operatorname{ch} mx(\operatorname{ch} nx - \cos a)^{-1}\,dx$ (см. 3.514 2.).

3.247

1. $$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{n-1}}{1-\xi x^b}\,dx = (n-1)!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^k}{(\alpha+kb)(\alpha+kb+1)\dots(\alpha+kb+k-1)}$$
$[b>0,\ |\xi|<1]$. А6.704

2. $$\int_0^\infty \frac{(1-x^p)\,x^{\nu-1}}{1-x^{np}}\,dx = \frac{\pi}{np}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\operatorname{cosec}\frac{(p+\nu)\pi}{np}\operatorname{cosec}\frac{\pi\nu}{np}$$
$[0<\operatorname{Re}\nu<(n-1)p]$. ИПI 311 (33)

3.248

1. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt{1+x^\nu}} = 2^{\frac{2\mu}{\nu}}\,\mathrm{B}(\nu-2\mu,\mu) \qquad [\nu>2\mu].$$ БХ [21] (9)

2. $$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$ БХ [8] (14)

3. $$\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2}.$$ БХ [8] (13)

3.249

1. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{(2n-3)!!}{2\cdot(2n-2)!!}\,\frac{\pi}{a^{2n-1}}.$$ ФII 743

2. $$\int_0^a (a^2-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dx = a^{2n}\frac{(2n-1)!!}{2(2n)!!}\,\pi.$$ ФII 156

3. $$\int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^n\,dx}{(a-x)^{n+1}} = 2^{n+1}Q_n(a).$$ ВТФII 181 (31)

4. $$\int_0^1 \frac{x^\mu\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{\mu+1}{2}\right) \qquad [\operatorname{Re}\mu>-1].$$ БХ [2] (7)

5. $$\int_0^1 (1-x^2)^{\mu-1}\,dx = 2^{2\mu-2}\,\mathrm{B}(\mu,\mu) = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\mu\right)$$
$[\operatorname{Re}\mu>0]$. ФII 784

6. $$\int_0^1 \left(1-\sqrt{x}\right)^{p-1}dx = \frac{2}{p(p+1)} \qquad [p>0].$$ БХ [7] (7)

7. $$\int_0^1 (1-x^\mu)^{-\frac{1}{\nu}}\,dx = \frac{1}{\mu}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\mu},\ 1-\frac{1}{\nu}\right) \qquad [\operatorname{Re}\mu>0,\ |\nu|>1].$$

3.251

1. $$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x^\lambda)^{\nu-1}\,dx = \frac{1}{\lambda}\mathrm{B}\left(\frac{\mu}{\lambda},\nu\right) \qquad [\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0,\ \lambda>0].$$
ФII 787

2. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}(1+x^2)^{\nu-1}\,dx=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\mu}{2},\ 1-\nu-\frac{\mu}{2}\right)$$
$$\left[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\left(\nu+\frac{1}{2}\mu\right)<1\right].$$

3. $$\int_1^\infty x^{\mu-1}(x^p-1)^{\nu-1}\,dx=\frac{1}{p}\mathrm{B}\left(1-\nu-\frac{\mu}{p},\ \nu\right)$$
$$[p>0,\ \operatorname{Re}\nu>0,\ \operatorname{Re}\mu<p-p\operatorname{Re}\nu].$$ ИПІ 311 (32)

4. $$\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{(ax^2+c)^n}=\frac{(2m-1)!!\,(2n-2m-3)!!\,\pi}{2\cdot(2n-2)!!\,a^m c^{n-m-1}\sqrt{ac}}$$
$$[a>0,\ c>0,\ n>m+1].$$ ГХ [141] (8a)

5. $$\int_0^\infty \frac{x^{2m+1}\,dx}{(ax^2+c)^n}=\frac{m!\,(n-m-2)!}{2\,(n-1)!\,a^{m+1}c^{n-m-1}}$$
$$[ac>0,\ n>m+1\geqslant 1].$$ ГХ [141] (8b)

6. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu+1}}{(1+x^2)^2}\,dx=\frac{\mu\pi}{4\sin\frac{\mu\pi}{2}}\qquad[-2<\operatorname{Re}\mu<2].$$ УВІ 159

7. $$\int_0^1 \frac{x^\mu\,dx}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{4}+\frac{\mu-1}{4}\beta\left(\frac{\mu-1}{2}\right)\qquad[\operatorname{Re}\mu>1].$$ Ли [3] (11)

8. $$\int_0^1 x^{q+p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\,dx=\frac{p\pi}{q^2}\operatorname{cosec}\frac{p\pi}{q}\qquad[q>p].$$ БХ [9] (22)

9. $$\int_0^1 x^{\frac{q}{p}-1}(1-x^q)^{-\frac{1}{p}}\,dx=\frac{\pi}{q}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{p}\qquad[p>1,\ q>0].$$ БХ [9] (23) и

10. $$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\,dx=\frac{\pi}{q}\operatorname{cosec}\frac{p\pi}{q}\qquad[q>p>0].$$ БХ [9] (20)

11. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}(1+\beta x^p)^{-\nu}\,dx=\frac{1}{p}\beta^{-\frac{\mu}{p}}\mathrm{B}\left(\frac{\mu}{p},\ \nu-\frac{\mu}{p}\right)$$
$$[|\arg\beta|<\pi,\ p>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<p\operatorname{Re}\nu].$$ БХ [17] (20), ВТФІ 10 (16)

3.252

1. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial c^{n-1}}\left[\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arcctg}\frac{b}{\sqrt{ac-b^2}}\right]$$
$$[a>0,\quad ac>b^2].$$ ГХ [131] (4)

2. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}=\frac{(2n-3)!!\,\pi a^{n-1}}{(2n-2)!!\,(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}\qquad[a>0,\quad ac>b^2].$$
ГХ [131] (5)

3. $$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{(-2)^n}{(2n+1)!!}\frac{\partial^n}{\partial c^n}\left\{\frac{1}{\sqrt{c}\,(\sqrt{ac}+b)}\right\}$$

$[a \geqslant 0,\ c>0,\ b>-\sqrt{ac}]$. ГХ [213] (4)

4. $$\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{(ax^2+2bx+c)^n} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial c^{n-2}}\left\{\frac{1}{2(ac-b^2)} - \frac{b}{2(ac-b^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arcctg}\frac{b}{\sqrt{ac-b^2}}\right\} \quad \text{при} \quad ac>b^2;$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial c^{n-2}}\left\{\frac{1}{2(ac-b^2)} + \frac{b}{4(b^2-ac)^{\frac{3}{2}}}\ln\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{b-\sqrt{b^2-ac}}\right\}$$

при $b^2>ac>0$;

$$= \frac{a^{n-2}}{2(n-1)(2n-1)b^{2n-2}} \quad \text{при} \quad ac=b^2 \qquad [a>0,\ b>0,\ n\geqslant 2].$$

ГХ [141] (5)

5. $$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{(ax^2+2bx+c)^n} = -\frac{(2n-3)!!\,\pi b a^{n-2}}{(2n-2)!!\,(ac-b^2)^{\frac{(2n-1)}{2}}}$$

$[ac>b^2,\ a>0,\ n\geqslant 2]$. ГХ [141] (6)

6. $$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^m\,dx}{(ax^2+2bx+c)^n} = \frac{(-1)^m \pi a^{n-m-1} b^m}{(2n-2)!!\,(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{E\left(\frac{m}{2}\right)} \binom{m}{2k}(2k-1)!!\,(2n-2k-3)!!\left(\frac{ac-b^2}{b^2}\right)^k$$

$[ac>b^2,\quad 0\leqslant m\leqslant 2n-2]$. ГХ [141] (17)

7. $$\int\limits_0^\infty \frac{x^n\,dx}{(ax^2+2bx+c)^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{n!}{(2n+1)!!\,\sqrt{c}\,(\sqrt{ac}+b)^{n+1}}$$

$[a\geqslant 0,\quad c>0,\quad b>-\sqrt{ac}]$. ГХ [213] (5а)

8. $$\int\limits_0^\infty \frac{x^{n+1}\,dx}{(ax^2+2bx+c)^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{n!}{(2n+1)!!\,\sqrt{a}\,(\sqrt{ac}+b)^{n+1}}$$

$[a>0,\ c\geqslant 0,\ b>-\sqrt{ac}]$. ГХ [213] (5в)

9. $$\int\limits_0^\infty \frac{x^{n+\frac{1}{2}}\,dx}{(ax^2+2bx+c)^{n+1}} = \frac{(2n-1)!!\,\pi}{2^{2n+\frac{1}{2}}(b+\sqrt{ac})^{n+\frac{1}{2}}\,n!\,\sqrt{a}}$$

$[a>0,\ c>0,\ b+\sqrt{ac}>0]$. Ли [21] (19)

10. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(1+2x\cos t+x^2)^\nu} =$

$$= 2^{\nu-\frac{1}{2}} \sin^{\nu-\frac{1}{2}} t\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \mathrm{B}(\mu,\ 2\nu-\mu)\, P^{\frac{1}{2}-\nu}_{\mu-\nu-\frac{1}{2}}(\cos t)$$

$[-\pi < t < \pi, \quad 0 < \operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}2\nu]$. ИП I 310 (22)

11 $\int\limits_0^\infty (1+2\beta x+x^2)^{\mu-\frac{1}{2}} x^{-\nu-1}\,dx = 2^{-\mu}(\beta^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\Gamma(1-\mu)\times$

$$\times \mathrm{B}(\nu-2\mu+1,\ -\nu)\, P^{\mu}_{\nu-\mu}(\beta)$$

$[\operatorname{Re}\nu < 0, \quad \operatorname{Re}(2\mu-\nu) < 1, \quad |\arg(\beta\pm 1)| < \pi]$; ВТФ I 160 (33)

$$= -\pi \operatorname{cosec} \nu\pi\, C_\nu^{\frac{1}{2}-\mu}(\beta)$$

$\left[-2 < \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-\mu\right) < \operatorname{Re}\nu < 0, \quad |\arg(\beta\pm 1)| < \pi\right]$. ВТФ I 178 (24)

12. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{x^2+2ax\cos t+a^2} = -\pi a^{\mu-2} \operatorname{cosec} t \operatorname{cosec}(\mu\pi) \sin[(\mu-1)t]$

$[a > 0, \ |t| < \pi, \ 0 < \operatorname{Re}\mu < 2]$. ФИ II 738, БХ [20] (3)

13. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(x^2+2ax\cos t+a^2)^2} = \frac{\pi a^{\mu-4}}{2} \operatorname{cosec}\mu\pi \operatorname{cosec}^3 t\times$

$$\times\{(\mu-1)\sin t\cos[(\mu-2)t] - \sin[(\mu-1)t]\}$$

$[a > 0, \ |t| < \pi, \ 0 < \operatorname{Re}\mu < 4]$. Ли [20] (8) и, ИП I 309 (13)

14. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt{1+2x\cos t+x^2}} = \pi \operatorname{cosec}(\mu\pi)\, \mathrm{P}_{\mu-1}(\cos t) \quad [|t| < \pi, \ 0 < \operatorname{Re}\mu < 1]$.

ИП I 310 (17)

3.253 $\int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{2\mu-1}(1-x)^{2\nu-1}}{(1+x^2)^{\mu+\nu}}\,dx = 2^{\mu+\nu-2}\mathrm{B}(\mu,\ \nu) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0, \ \operatorname{Re}\nu > 0]$.

ФИ II 787

3.254

1. $\int\limits_0^u x^{\lambda-1}(u-x)^{\mu-1}(x^2+\beta^2)^\nu\,dx = \beta^{2\nu}u^{\lambda+\mu-1}\mathrm{B}(\lambda,\ \mu)\times$

$$\times {}_3F_2\left(-\nu,\ \frac{\lambda}{2},\ \frac{\lambda+1}{2};\ \frac{\lambda+\mu}{2},\ \frac{\lambda+\mu+1}{2};\ \frac{-u^2}{\beta^2}\right)$$

$\left[\operatorname{Re}\left(\frac{u}{\beta}\right) > 0, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0, \quad \operatorname{Re}\mu > 0\right]$. ИП II 186 (10)

2. $$\int\limits_u^\infty x^{-\lambda}(x-u)^{\mu-1}(x^2+\beta^2)^\nu\,dx = u^{\mu-\lambda+2\nu}\frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\lambda-\mu-2\nu)}{\Gamma(\lambda-\mu)}\times$$
$$\times\,{}_3F_2\left(-\nu, \frac{\lambda-\mu}{2}-\nu, \frac{1+\lambda-\mu}{2}-\nu;\ \frac{\lambda}{2}-\nu, \frac{1+\lambda}{2}-\nu;\ -\frac{\beta^2}{u^2}\right)$$
$$\left[|u|>|\beta| \text{ или } \operatorname{Re}\left(\frac{\beta}{u}\right)>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<\operatorname{Re}(\lambda-2\nu)\right].$$
ИП II 202 (9)

3.255 $$\int\limits_0^1 \frac{x^{\mu+\frac{1}{2}}(1-x)^{\mu-\frac{1}{2}}}{(c+2bx-ax^2)^{\mu+1}}\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\left\{a+\left(\sqrt{c+2b-a}+\sqrt{c}\right)^2\right\}^{\mu+\frac{1}{2}}\sqrt{c+2b-a}}\,\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)}$$
$$\left[a+\left(\sqrt{c+2b-a}+\sqrt{c}\right)^2>0,\quad c+2b-a>0,\quad \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2}\right]$$
БХ [14] (2)

3.256

1. $$\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1-x^2)^{\frac{p+q}{2}}}\,dx = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{q-p}{4}\pi\right)\sec\left(\frac{q+p}{4}\pi\right)\mathrm{B}\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$$
$[p>0,\quad q>0,\quad p+q<2]$. БХ [8] (25)

2. $$\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1-x^2)^{\frac{p+q}{2}}}\,dx = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{q-p}{4}\pi\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{q+p}{4}\pi\right)\mathrm{B}\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$$
$[p>0,\quad q>0,\quad p+q<2]$. БХ [8] (26)

3.257 $$\int\limits_0^\infty \left[\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2+c\right]^{-p-1}dx = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{ac^{p+\frac{1}{2}}\,\Gamma(p+1)}.$$ БХ [20] (4)

3.258

1. $$\int\limits_b^\infty \left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx = \frac{a^2}{2(n-1)}\left(b-\sqrt{b^2-a^2}\right)^{n-1} -$$
$$-\frac{1}{2(n+1)}\left(b-\sqrt{b^2-a^2}\right)^{n+1}\qquad [0<a\leqslant b,\quad n\geqslant 2].$$ ГХ [215] (5)

2. $$\int\limits_b^\infty \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^n dx = \frac{\left(\sqrt{b^2+1}-b\right)^{n-1}}{2(n-1)} + \frac{\left(\sqrt{b^2+1}-b\right)^{n+1}}{2(n+1)}$$
$[n\geqslant 2]$. ГХ [214] (7)

3. $$\int\limits_0^\infty \left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)^n dx = \frac{na^{n+1}}{n^2-1}\qquad [n\geqslant 2].$$ ГХ [214] (6а)

4. $$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^n} = \frac{n}{a^{n-1}(n^2-1)} \qquad [n \geqslant 2].$$ ГХ [214] (5а)

5. $$\int_0^\infty x^m \left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)^n dx = \frac{n \cdot m!\, a^{m+n+1}}{(n-m-1)(n-m+1)\dots(m+n+1)}$$

$[a>0, \quad 0 \leqslant m \leqslant n-2]$. ГХ [214] (6)

6. $$\int_0^\infty \frac{x^m\, dx}{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^n} = \frac{n \cdot m!}{(n-m-1)(n-m+1)\dots(m+n+1)\, a^{n-m-1}}$$

$[a>0, \quad 0 \leqslant m \leqslant n-2]$. ГХ [214] (5)

7. $$\int_a^\infty (x-a)^m \left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx = \frac{n \cdot (n-m-2)!\,(2m+1)!\, a^{m+n+1}}{2^m (n+m+1)!}$$

$[a>0, \quad n \geqslant m+2]$. ГХ [215] (6)

3.259

1. $$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{n-1}(1+bx^m)^l\, dx = (n-1)! \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l}{k} \frac{b^k \Gamma(p+km)}{\Gamma(p+n+km)}$$

$[b^2>1]$. БХ [1] (14)

2. $$\int_0^u x^{\nu-1}(u-x)^{\mu-1}(x^m+\beta^m)^\lambda\, dx = \beta^{m\lambda} u^{\mu+\nu+1} \mathrm{B}(\mu, \nu) \times$$

$$\times {}_{m+1}F_m\left(-\lambda, \frac{\nu}{m}, \frac{\nu+1}{m}, \dots, \frac{\nu+m-1}{m}; \frac{\mu+\nu}{m}, \frac{\mu+\nu+1}{m}, \dots \right.$$

$$\left. \dots, \frac{\mu+\nu+m-1}{m}; \frac{-u^m}{\beta^m}\right)$$

$\left[\operatorname{Re}\mu>0, \quad \operatorname{Re}\nu>0, \quad \left|\arg\left(\frac{u}{\beta}\right)\right| < \frac{\pi}{m}\right]$. ИП II 186 (11)

3. $$\int_0^\infty x^{\lambda-1}(1+\alpha x^p)^{-\mu}(1+\beta x^p)^{-\nu}\, dx = \frac{1}{p}\, \alpha^{-\frac{\lambda}{p}} \mathrm{B}\left(\frac{\lambda}{p}, \mu+\nu-\frac{\lambda}{p}\right) \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\nu, \frac{\lambda}{p}; \mu+\nu; 1-\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$[|\arg\alpha|<\pi, \ |\arg\beta|<\pi, \ p>0, \ 0<\operatorname{Re}\lambda<2\operatorname{Re}(\mu+\nu)]$. ИП I 312 (35)

3.261

1. $$\int_0^1 \frac{(1-x\cos t)\, x^{\mu-1}\, dx}{1-2x\cos t+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kt}{\mu+k}$$

$[\operatorname{Re}\mu>0, \quad t \neq 2n\pi]$. БХ [6] (9)

2. $$\int_0^1 \frac{(x^\nu+x^{-\nu})\, dx}{1+2x\cos t+x^2} = \frac{\pi \sin \nu t}{\sin t \sin \nu\pi}$$

$[\nu^2<1, \quad t \neq (2n+1)\pi]$. БХ [6] (8)

3. $$\int_0^1 \frac{(x^{1+p}+x^{1-p})\, dx}{(1+2x\cos t+x^2)^2} = \frac{\pi(p\sin t\cos pt-\cos t\sin pt)}{2\sin^3 t\sin p\pi}$$

$[p^2<1, \quad t \neq (2n+1)\pi]$. БХ [6] (18)

4. $$\int_0^1 \frac{x^{\mu-1}}{1+2ax\cos t+a^2x^2}\cdot\frac{dx}{(1-x)^{\mu}}=$$
$$=\frac{\pi\operatorname{cosec} t\operatorname{cosec}\mu\pi}{(1+2a\cos t+a^2)^{\frac{\mu}{2}}}\sin\left(t-\mu\operatorname{arctg}\frac{a\sin t}{1+a\cos t}\right)$$
$[a>0, \quad 0<\operatorname{Re}\mu<1]$. БХ [6] (21)

3.262 $$\int_0^\infty \frac{x^{-p}\,dx}{1+x^3}=\frac{\pi}{3}\operatorname{cosec}\frac{(1-p)\pi}{3} \quad [-2<p<1].$$ Ли [18] (3)

3.263 $$\int_0^\infty \frac{x^{\nu}\,dx}{(x+\gamma)(x^2+\beta^2)}=\frac{\pi}{2(\beta^2+\gamma^2)}\left[\gamma\beta^{\nu-1}\sec\frac{\nu\pi}{2}+\beta^{\nu}\operatorname{cosec}\frac{\nu\pi}{2}-\right.$$
$$\left.-2\gamma^{\nu}\operatorname{cosec}(\nu\pi)\right]$$ $[\operatorname{Re}\beta>0, \quad |\arg\gamma|<\pi, \quad -1<\operatorname{Re}\nu<2]$. ИПІІ 216 (7)

3.264

1. $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{(a^2+x^2)(b^2-x^2)}=\frac{\pi}{2}\,\frac{a^{p-2}+b^{p-2}\cos\frac{p\pi}{2}}{a^2+b^2}\operatorname{cosec}\frac{p\pi}{2} \quad [p<4].$$
БХ [19] (14)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(\beta+x^2)(\gamma+x^2)}=\frac{\pi}{2}\,\frac{\gamma^{\frac{\mu}{2}-1}-\beta^{\frac{\mu}{2}-1}}{\beta-\gamma}\operatorname{cosec}\frac{\mu\pi}{2}$$
$[|\arg\beta|<\pi, \quad |\arg\gamma|<\pi, \ 0<\operatorname{Re}\mu<4]$. ИПІ309 (14)

3.265 $$\int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}\,dx=\psi(\mu)+C \quad [\operatorname{Re}\mu>0];$$ ФІІ796, УВІІ37, ВТФІ16 (13)
$$=\psi(1-\mu)+C-\pi\operatorname{ctg}(\mu\pi) \quad [\operatorname{Re}\mu>0].$$ ВТФІ16 (15) *и*

3.266 $$\int_0^\infty \frac{(x^{\nu}-a^{\nu})\,dx}{(x-a)(\beta+x)}=\frac{\pi}{a+\beta}\left\{\beta^{\nu}\operatorname{cosec}(\nu\pi)-a^{\nu}\operatorname{ctg}(\nu\pi)-\frac{a^{\nu}}{\pi}\ln\frac{\beta}{a}\right\}$$
$[|\arg\beta|<\pi, \quad |\operatorname{Re}\nu|<1]$. ИПІІ216 (8)

3.267

1. $$\int_0^1 \frac{x^{3n}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(n+1)}.$$ БХ [9] (6)

2. $$\int_0^1 \frac{x^{3n-1}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\frac{(n-1)!\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3\Gamma\left(n+\frac{2}{3}\right)}.$$ БХ [9] (7)

3.268

1. $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{px^{p-1}}{1-x^p}\right) dx = \ln p.$ БХ [5] (14)

2. $\int\limits_0^1 \frac{1-x^\mu}{1-x} x^{\nu-1}\, dx = \psi(\mu+\nu) - \psi(\nu)$ $[\operatorname{Re}\nu > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. БХ [2] (3)

3. $\int\limits_0^1 \left[\frac{n}{1-x} - \frac{x^{\mu-1}}{1-\sqrt[n]{x}}\right] dx = nC + \sum_{k=1}^{n} \psi\left(\mu + \frac{n-k}{n}\right)$

$[\operatorname{Re}\mu > 0]$. БХ [13] (10)

3.269

1. $\int\limits_0^1 \frac{x^p - x^{-p}}{1-x^2} x\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{p\pi}{2} - \frac{1}{p}$ $[p^2 < 1]$. БХ [4] (12)

2. $\int\limits_0^1 \frac{x^p - x^{-p}}{1+x^2} x\, dx = \frac{1}{p} - \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec} \frac{p\pi}{2}$ $[p^2 < 1]$. БХ [4] (8)

3. $\int\limits_0^1 \frac{x^\mu - x^\nu}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{\mu+1}{2}\right)$

$[\operatorname{Re}\mu > -1,\ \operatorname{Re}\nu > -1]$. БХ [2] (9)

3.271

1. $\int\limits_0^\infty \frac{x^p - x^q}{x-1} \frac{dx}{x+a} = \frac{\pi}{1+a}\left(\frac{a^p - \cos p\pi}{\sin p\pi} - \frac{a^q - \cos q\pi}{\sin q\pi}\right)$

$[p^2 < 1,\quad q^2 < 1,\quad a > 0]$. БХ [19] (2)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{x^p - a^p}{x-a} \frac{x^p - 1}{x-1}\, dx = \frac{\pi}{a-1}\left\{\frac{a^{2p} - 1}{\sin(2p\pi)} - \frac{1}{\pi} a^p \ln a\right\}$

$\left[p^2 < \frac{1}{4}\right]$. БХ [19] (3)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{x^p - a^p}{x-a} \frac{x^{-p} - 1}{x-1}\, dx = \frac{\pi}{a-1}\left\{2(a^p - 1)\operatorname{ctg} p\pi - \frac{1}{\pi}(a^p + 1)\ln a\right\}$

$[p^2 < 1]$. БХ [18] (9)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{x^p - a^p}{x-a} \frac{1-x^{-p}}{1-x} x^q\, dx = \frac{\pi}{a-1}\left\{\frac{a^{p+q} - 1}{\sin[(p+q)\pi]} + \right.$

$\left. + \frac{a^p - a^q}{\sin[(q-p)\pi]}\right\} \frac{\sin p\pi}{\sin q\pi}$ $[(p+q)^2 < 1,\ (p-q)^2 < 1]$. БХ [19] (4)

5. $\int\limits_0^\infty \left(\frac{x^p - x^{-p}}{1-x}\right)^2 dx = 2(1 - 2p\pi \operatorname{ctg} 2p\pi)$ $\left[p^2 < \frac{1}{4}\right]$. БХ [16] (3)

3.272

1. $$\int_0^1 \frac{x^{n-1}+x^{n-\frac{1}{2}}-2x^{2n-1}}{1-x}\,dx = 2\ln 2.$$ БХ [8] (8)

2. $$\int_0^1 \frac{x^{n-1}+x^{n-\frac{2}{3}}+x^{n-\frac{1}{3}}-3x^{3n-1}}{1-x}\,dx = 3\ln 3.$$ БХ [8] (9)

3.273

1. $$\int_0^1 \frac{\sin t - a^n x^n \sin[(n+1)t] + a^{n+1}x^{n+1}\sin nt}{1-2ax\cos t + a^2x^2}(1-x)^{p-1}\,dx = \Gamma(p)\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)!\,a^{k-1}\sin kt}{\Gamma(p+k)} \quad [p>0].$$ БХ [6] (13)

2. $$\int_0^1 \frac{\cos t - ax - a^n x^n \cos[(n+1)t] + a^{n+1}x^{n+1}\cos nt}{1-2ax\cos t + a^2x^2}(1-x)^{p-1}\,dx = \Gamma(p)\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)!\,a^{k-1}\cos kt}{\Gamma(p+k)} \quad [p>0].$$ БХ [6] (14)

3. $$\int_0^1 x\,\frac{\sin t - x^n\sin[(n+1)t] + x^{n+1}\sin nt}{1-2x\cos t + x^2}\,dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kt}{k+1}.$$ БХ [6] (12)

4. $$\int_0^1 \frac{1-x\cos t - x^{n+1}\cos[(n+1)t] + x^{n+2}\cos nt}{1-2x\cos t + x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kt}{k+1}.$$ БХ [6] (11)

3.274

1. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}(1-x)}{1-x^n}\,dx = \frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}\operatorname{cosec}\frac{\mu\pi}{n}\operatorname{cosec}\frac{(\mu+1)\pi}{n} \quad [0<\operatorname{Re}\mu<n-1].$$ БХ [20] (13)

2. $$\int_0^1 \frac{1-x^n}{(1+x)^{n+1}}\,\frac{dx}{1-x} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}.$$ БХ [5] (3)

3. $$\int_0^\infty \frac{x^q-1}{x^p-x^{-p}}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2p}\operatorname{tg}\frac{q\pi}{2p} \quad [p>q].$$ БХ [18] (6)

3.275

1. $$\int_0^1 \left\{\frac{x^{n-1}}{1-x^{\frac{1}{p}}} - \frac{px^{np-1}}{1-x}\right\}dx = p\ln p \quad [p>0].$$ БХ [13] (9)

2. $$\int_0^1 \left\{\frac{nx^{n-1}}{1-x^n} - \frac{x^{mn-1}}{1-x}\right\}dx = C + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi\left(m+\frac{n-k}{n}\right).$$ БХ [5] (13)

3. $$\int_0^1 \left(\frac{x^{p-1}}{1-x} - \frac{qx^{pq-1}}{1-x^q}\right)dx = \ln q \quad [q>0].$$ БХ [5] (12)

4. $$\int_0^\infty \left\{\frac{1}{1+x^{2^n}}-\frac{1}{1+x^{2^m}}\right\}\frac{dx}{x}=0.$$ БХ [18] (17)

3.276

1. $$\int_0^\infty \frac{\left[\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2+c\right]^{-p-1}dx}{x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2bc^{p+\frac{1}{2}}}\,\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)}\quad\left[p>-\frac{1}{2}\right].$$ БХ [20] (19)

2. $$\int_0^\infty \left(a+\frac{b}{x^2}\right)\left[\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2+c\right]^{-p-1}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{c^{p+\frac{1}{2}}}\,\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)}$$ $\left[p>-\frac{1}{2}\right]$. БХ [20] (5)

3.277

1. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\left[\sqrt{1+x^2}+\beta\right]^\nu}{\sqrt{1+x^2}}dx=2^{\frac{\mu}{2}-1}(\beta^2-1)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{4}}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma(1-\mu-\nu)P^{\frac{\nu+\mu}{2}}_{\frac{\mu}{2}-1}(\beta)$$ $[\operatorname{Re}\beta>-1,\quad 0<\operatorname{Re}\mu<1-\operatorname{Re}\nu]$. ИП I 310 (25)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\left[\sqrt{\beta^2+x^2}+x\right]^\nu}{\sqrt{\beta^2+x^2}}dx=\frac{\beta^{\mu+\nu-1}}{2^\mu}\,\mathrm{B}\left(\mu,\ \frac{1-\mu-\nu}{2}\right)$$ $[\operatorname{Re}\beta>0,\quad 0<\operatorname{Re}\mu<1-\operatorname{Re}\nu]$. ИП I 311 (28)

3 $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\left[\cos t\pm i\sin t\sqrt{1+x^2}\right]^\nu}{\sqrt{1+x^2}}dx=2^{\frac{\mu-1}{2}}\sin^{\frac{1-\mu}{2}}t\,\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma(1-\mu-\nu)}{\Gamma(-\nu)}\times$$ $$\times\left[\pi^{-\frac{1}{2}}Q^{\frac{\mu-1}{2}}_{-\frac{\mu+1}{2}-\nu}(\cos t)\mp\frac{i}{2}\pi^{\frac{1}{2}}P^{\frac{\mu-1}{2}}_{-\frac{\mu+1}{2}-\nu}(\cos t)\right]\quad[\operatorname{Re}\mu>0].$$ ИП I 311 (27)

4 $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\left[\sqrt{(\beta^2-1)(x^2+1)}+\beta\right]^\nu}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{2^{\frac{\mu-1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\times$$ $$\times e^{-\frac{1}{2}i\pi(\mu-1)}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma(1-\mu-\nu)}{\Gamma(-\nu)}(\beta^2-1)^{\frac{1-\mu}{4}}Q^{\frac{\mu-1}{2}}_{-\nu-\frac{\mu+1}{2}}(\beta)$$ $[\operatorname{Re}\beta>1,\quad \operatorname{Re}\nu<0,\quad \operatorname{Re}\mu<1-\operatorname{Re}\nu]$. ИП I 311 (26)

5. $$\int_u^\infty \frac{(x-u)^{\mu-1}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^{2\nu}}{\sqrt{x^2-1}}dx=$$ $$=\frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\pi i}(u^2-1)^{\frac{2\mu-1}{4}}Q^{\frac{1}{2}-\mu}_{\nu-\frac{1}{2}}(u)$$ $[|\arg(u-1)|<\pi,\quad 0<\operatorname{Re}\mu<1+\operatorname{Re}\nu]$. ИП II 202 (10)

6. $$\int_1^\infty \frac{x^{\mu-1}\left[\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{\nu}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{-\nu}\right]}{\sqrt{x^2-1}}\,dx =$$
$$= 2^{-\mu} \mathrm{B}\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}, \frac{1-\mu-\nu}{2}\right) \quad [\operatorname{Re}\mu < 1+\operatorname{Re}\nu].$$ ИПI311 (29)

7. $$\int_0^u \frac{(u-x)^{\mu-1}\left[\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)^{2\nu}+\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)^{2\nu}\right]}{\sqrt{x(x+2)}}\,dx =$$
$$= 2^{\frac{2\mu+1}{2}} \sqrt{\pi\,[u(u+2)]^{\mu-\frac{1}{2}}}\, P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\mu}(u+1)$$
$$[|\arg u| < \pi, \quad \operatorname{Re}\mu > 0].$$ ИПII186 (12)

3.278 $$\int_0^\infty \left(\frac{x^p}{1+x^{2p}}\right)^q \frac{dx}{1-x^2} = 0.$$

3.3 — 3.4 ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

3.31 Показательная функция

3.310 $$\int_0^\infty e^{-px}\,dx = \frac{1}{p} \qquad [\operatorname{Re} p > 0].$$

3.311

1. $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^{px}} = \frac{\ln 2}{p}.$$ Ло III 284 *и*

2. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}}{1+e^{-x}}\,dx = \beta(\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ ВТФI 20 (3), ИПI 144 (7)

3. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-px}}{1+e^{-qx}}\,dx = \frac{\pi}{q}\operatorname{cosec}\frac{p\pi}{q} \qquad [q > p > 0 \text{ или } 0 > p > q]$$
(сравни 3.241 2.). БХ [28] (7)

4. $$\int_0^\infty \frac{e^{-qx}\,dx}{1-ae^{-px}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{a^n}{q+kp} \qquad [0 < a < 1].$$ БХ [27] (7)

5. $$\int_0^\infty \frac{1-e^{\nu x}}{e^x-1}\,dx = \psi(\nu) + C + \pi \operatorname{ctg}(\pi\nu) \qquad [\operatorname{Re}\nu < 1]$$
(сравни 3.266). ВТФI 16 (16)

6. $$\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-\nu x}}{1-e^{-x}}\,dx = \psi(\nu) + C \qquad [\operatorname{Re}\nu > 0].$$ УВII 37, ВТФI 16 (14)

7. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}-e^{-\nu x}}{1-e^{-x}}\,dx = \psi(\nu) - \psi(\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0, \ \operatorname{Re}\nu > 0]$$
(сравни 3.231 5.) БХ [27] (8)

8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu x}\,dx}{b-e^{-x}} = \pi b^{\mu-1} \operatorname{ctg}(\mu\pi) \qquad [b>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<1].$ ИПІ 120(14)и

9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu x}\,dx}{b+e^{-x}} = \pi b^{\mu-1} \operatorname{cosec}(\mu\pi) \qquad [|\arg b|<\pi,\ 0<\operatorname{Re}\mu<1].$

ИПІ 120(15)и

10. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-px}-e^{-qx}}{1-e^{-(p+q)x}}\,dx = \frac{\pi}{p+q} \operatorname{ctg} \frac{p\pi}{p+q} \qquad [p>0,\ q>0].$ ГХ [311] (16с)

11. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{px}-e^{qx}}{e^{rx}-e^{sx}}\,dx = \frac{1}{r-s}\left[\psi\left(\frac{r-q}{r-s}\right)-\psi\left(\frac{r-p}{r-s}\right)\right]$

$[r>s,\ r>p,\ r>q].$ ГХ [311] (16)

12. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}\,dx = \frac{1}{\ln\frac{c}{d}}\left\{\psi\left(\frac{\ln\frac{c}{b}}{\ln\frac{c}{d}}\right)-\psi\left(\frac{\ln\frac{c}{a}}{\ln\frac{c}{d}}\right)\right\}$

$[c>a>0,\ b>0,\ d>0].$ ГХ [311] (16а)

3.312

1. $\int\limits_{0}^{\infty} \left(1-e^{-\frac{x}{\beta}}\right)^{\nu-1} e^{-\mu x}\,dx = \beta\,\mathrm{B}(\beta\mu,\nu) \qquad [\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\nu>0,\ \operatorname{Re}\mu>0]$

Ли [26] (13), ВТФІ 11 (24)

2. $\int\limits_{0}^{\infty} (1-e^{-x})^{-1}(1-e^{-\alpha x})(1-e^{-\beta x})\,e^{-px}\,dx =$

$= \psi(p+\alpha)+\psi(p+\beta)-\psi(p+\alpha+\beta)-\psi(p)$

$[\operatorname{Re}p>0,\ \operatorname{Re}p>-\operatorname{Re}\alpha,\ \operatorname{Re}p>-\operatorname{Re}\beta,\ \operatorname{Re}p>-\operatorname{Re}(\alpha+\beta)].$ ИПІ 145 (15)

3. $\int\limits_{0}^{\infty} (1-e^{-x})^{\nu-1}(1-\beta e^{-x})^{-\varrho}\,e^{-\mu x}\,dx = \mathrm{B}(\mu,\nu)\,{}_2F_1(\varrho,\mu;\mu+\nu;\beta)$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0,\ |\arg(1-\beta)|<\pi].$ ВТФІ 116 (15)

3.313 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu x}\,dx}{(1-e^{-x})^n} = \pi \operatorname{cosec}\mu\pi \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k-\mu}{(n-1)!} \qquad [0<\operatorname{Re}\mu<n].$ ИПІ 120 (20)

3.314 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu x}\,dx}{(e^{\beta/\gamma}+e^{-x/\gamma})^{\nu}} = \gamma \exp\left[\beta\left(\mu-\frac{\nu}{\gamma}\right)\right] \mathrm{B}(\gamma\mu,\nu-\gamma\mu)$

$\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\nu}{\gamma}\right)>\operatorname{Re}\mu>0,\ |\operatorname{Im}\beta|<\pi\operatorname{Re}\gamma\right].$ ИПІ 120 (21)

3.315

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu x}\,dx}{(e^{\beta}+e^{-x})^{\nu}(e^{\gamma}+e^{-x})^{\varrho}} = \exp[\gamma(\mu-\varrho)-\beta\nu]\times$

$\times\,\mathrm{B}(\mu,\ \nu+\varrho-\mu)\,{}_2F_1(\nu,\ \mu,\ \nu+\varrho,\ 1-e^{\gamma-\beta})$

$[|\operatorname{Im}\beta|<\pi,\ |\operatorname{Im}\gamma|<\pi,\ 0<\operatorname{Re}\mu<\operatorname{Re}(\nu+\varrho)].$ ИПІ 121 (22)

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu x}\,dx}{(\beta+e^{-x})(\gamma+e^{-x})} = \frac{\pi(\beta^{\mu-1}-\gamma^{\mu-1})}{\gamma-\beta}\operatorname{cosec}(\mu\pi)$$

$[|\arg\beta| < \pi,\ |\arg\gamma| < \pi,\ \beta \neq \gamma,\ 0 < \operatorname{Re}\mu < 2]$. ИПI 120 (18)

3.316 $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+e^{-x})^{\nu}-1}{(1+e^{-x})^{\mu}}\,dx = \psi(\mu)-\psi(\mu-\nu) \qquad [\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\nu > 0]$$

(сравни 3.235). БХ [28] (8)

3.317

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{(1+e^{-x})^{\mu}}\right\} dx = C+\psi(\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0]$$

(сравни 3.233 2.). БХ [28] (10)

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{(1+e^{-x})^{\nu}} - \frac{1}{(1+e^{-x})^{\mu}}\right\} dx = \psi(\mu)-\psi(\nu)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0,\quad \operatorname{Re}\nu > 0]$ (сравни 3.219). БХ [28] (11)

3.318

1. $$\int_{0}^{\infty} \frac{\left[\beta+\sqrt{1-e^{-x}}\right]^{-\nu}+\left[\beta-\sqrt{1-e^{-x}}\right]^{-\nu}}{\sqrt{1-e^{-x}}}\, e^{-\mu x}\,dx =$$

$$= \frac{2^{\mu+1}e^{(\mu-\nu)\pi i}(\beta^2-1)^{(\mu-\nu)/2}\Gamma(\mu)\,Q_{\mu-1}^{\nu-\mu}(\beta)}{\Gamma(\nu)}$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0]$. ИПI 145 (18)

2. $$\int_{u}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\left\{e^{-u}\sqrt{1-e^{-2x}} - e^{-x}\sqrt{1-e^{-2u}}\right\}^{\nu} e^{-\mu x}\,dx =$$

$$= \frac{2^{-\frac{1}{2}(\mu+\nu)}\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{u}{2}(\mu+\nu)}\,\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu+1)\,P_{-\frac{1}{2}(\mu-\nu)}^{-\frac{1}{2}(\mu+\nu)}\left(\sqrt{1-e^{-2u}}\right)}{\Gamma[(\mu+\nu+1)/2]}$$

$[u > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1]$. ИПI 145 (19)

3.32—3.34 Показательная функция от более сложных аргументов

3.321

1. $$\int_{0}^{u} e^{-x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^{2k+1}}{k!\,(2k+1)};$$

$$= e^{-u^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k u^{2k+1}}{(2k+1)!!}.$$ А. 6.700

2. $$\int_{0}^{u} e^{-q^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2q}\Phi(qu) \qquad [q > 0].$$

3. $\int\limits_0^\infty e^{-q^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2q}\qquad [q>0].$ Ф II 624

3.322

1. $\int\limits_u^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{4\beta}-\gamma x\right)dx = \sqrt{\pi\beta}\,e^{\beta\gamma^2}\left[1-\Phi\left(\gamma\sqrt{\beta}+\frac{u}{2\sqrt{\beta}}\right)\right]$

$[\operatorname{Re}\beta>0,\ u>0].$ ИПI 146 (21)

2. $\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{4\beta}-\gamma x\right)dx = \sqrt{\pi\beta}\exp(\beta\gamma^2)\left[1-\Phi\left(\gamma\sqrt{\beta}\right)\right]\qquad [\operatorname{Re}\beta>0].$

НИ 27 (1) и

3.323

1. $\int\limits_1^\infty \exp(-qx-x^2)\,dx = \frac{e^{-q-1}}{q+2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^k\frac{(2k-1)!!}{(q+2)^{2k}}.$ БХ [29] (4)

2. $\int\limits_{-\infty}^\infty \exp(-p^2x^2\pm qx)\,dx = \exp\left(\frac{q^2}{4p^2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{p}\qquad [p>0].$ БХ [28] (1)

3. $\int\limits_0^\infty \exp(-\beta^2x^4-2\gamma^2x^2)\,dx = 2^{-\frac{3}{2}}\frac{\gamma}{\beta}e^{\frac{\gamma^4}{2\beta^2}}K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\gamma^4}{2\beta^2}\right)$

$\left[|\arg\gamma|<\frac{\pi}{4},\quad |\arg\beta|<\frac{\pi}{4}\right].$ ИПI 147 (34) и

3.324

1. $\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\beta}{4x}-\gamma x\right)dx = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}K_1\left(\sqrt{\beta\gamma}\right)\qquad [\operatorname{Re}\beta\geqslant 0,\ \operatorname{Re}\gamma>0].$

ИПI 146 (25)

2. $\int\limits_{-\infty}^\infty \exp\left[-\left(x-\frac{b}{x}\right)^{2n}\right]dx = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right).$ БХ [28] (6)

3.325 $\int\limits_0^\infty \exp\left(-ax^2-\frac{b}{x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-2\sqrt{ab}\right)\qquad [a>0,\ b>0].$

Ф II 644

3.326 $\int\limits_0^\infty \exp(-x^\mu)\,dx = \frac{1}{\mu}\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right)\qquad [\operatorname{Re}\mu>0].$ БХ [26] (4)

Показательная функция от показательной функции

3.327 $\int\limits_0^\infty \exp(-ae^{nx})\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{Ei}(-a).$ Ли [26] (5)

3.328 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-e^x) e^{\mu x}\, dx = \Gamma(\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0].$ НГ 145(14)

3.329 $\int\limits_0^{\infty} \left[\frac{a \exp(-ce^{ax})}{1-e^{-ax}} - \frac{b \exp(-ce^{bx})}{1-e^{-bx}} \right] dx = e^{-c} \ln \frac{b}{a}$

$[a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0].$ БХ [27] (12)

3.331

1. $\int\limits_0^{\infty} \exp(-\beta e^{-x} - \mu x)\, dx = \beta^{-\mu} \gamma(\mu, \beta) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0].$ ИПI 147(36)

2. $\int\limits_0^{\infty} \exp(-\beta e^{x} - \mu x)\, dx = \beta^{\mu} \Gamma(-\mu, \beta) \qquad [\operatorname{Re}\beta > 0].$ ИПI 147(37)

3. $\int\limits_0^{\infty} (1 - e^{-x})^{\nu-1} \exp(\beta e^{-x} - \mu x)\, dx = \mathrm{B}(\mu, \nu)\, \beta^{-\frac{\mu+\nu}{2}} e^{\frac{\beta}{2}} M_{\frac{\nu-\mu}{2}, \frac{\nu+\mu-1}{2}}(\beta)$

$[\operatorname{Re}\mu > 0, \ \operatorname{Re}\nu > 0].$ ИПI 147(38)

4. $\int\limits_0^{\infty} (1 - e^{-x})^{\nu-1} \exp(-\beta e^{x} - \mu x)\, dx = \Gamma(\nu)\, \beta^{\frac{\mu-1}{2}} e^{-\frac{\beta}{2}} W_{\frac{1-\mu-2\nu}{2}, \frac{-\mu}{2}}(\beta)$

$[\operatorname{Re}\beta > 0, \ \operatorname{Re}\nu > 0].$ ИПI 147(39)

3.332 $\int\limits_0^{\infty} (1 - e^{-x})^{\nu-1} (1 - \lambda e^{-x})^{-\varrho} \exp(\beta e^{-x} - \mu x)\, dx =$

$= \mathrm{B}(\mu, \nu)\, \Phi_1(\mu, \varrho, \nu; \lambda, \beta)$

$[\operatorname{Re}\mu > 0, \ \operatorname{Re}\nu > 0, \quad |\arg(1-\lambda)| < \pi].$ ИПI 147(40)

3.333

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu x}\, dx}{\exp(e^{-x}) - 1} = \Gamma(\mu)\, \zeta(\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu < 1].$ ИПI 121(24)

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mu x}\, dx}{\exp(e^{-x}) + 1} = (1 - 2^{1-\mu})\, \Gamma(\mu)\, \zeta(\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0].$ ИПI 121(25)

3.334 $\int\limits_0^{\infty} (e^x - 1)^{\nu-1} \exp\left[-\frac{\beta}{e^x - 1} - \mu x \right] dx =$

$= \Gamma(\mu - \nu + 1)\, e^{\frac{\beta}{2}} \beta^{\frac{\nu-1}{2}} W_{\frac{\nu-2\mu-1}{2}, \frac{\nu}{2}}(\beta) \qquad [\operatorname{Re}\beta > 0, \ \operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\nu - 1].$

ИПI 147(41)

Показательная функция от гиперболической функции

3.335 $$\int\limits_0^\infty (e^{\nu x}+e^{-\nu x}\cos\nu\pi)\exp(-\beta\,\mathrm{sh}\,x)\,dx=-\pi[\mathbf{E}_\nu(\beta)+N_\nu(\beta)]$$

$[\mathrm{Re}\,\beta>0]$. ВТФ II 35 (34)

3.336

1. $$\int\limits_0^\infty \exp(-\nu x-\beta\,\mathrm{sh}\,x)\,dx=\pi\,\mathrm{cosec}\,\nu\pi\,[\mathbf{J}_\nu(\beta)-J_\nu(\beta)]$$

$\left[|\arg\beta|<\frac{\pi}{2}\right.$ и $|\arg\beta|=\frac{\pi}{2}$ при $\mathrm{Re}\,\nu>0$; ν не равно целому $\left.\text{числу}\right]$. В 341 (2)

2. $$\int\limits_0^\infty \exp(nx-\beta\,\mathrm{sh}\,x)\,dx=\frac{1}{2}[S_n(\beta)-\pi\mathbf{E}_n(\beta)-\pi N_n(\beta)]$$

$[\mathrm{Re}\,\beta>0;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots]$. В 342 (6)

3 $$\int\limits_0^\infty \exp(-nx-\beta\,\mathrm{sh}\,x)\,dx=\frac{1}{2}(-1)^{n+1}[S_n(\beta)+\pi\mathbf{E}_n(\beta)+\pi N_n(\beta)]$$

$[\mathrm{Re}\,\beta>0;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots]$. ВТФ II 84 (47)

3.337

1. $$\int\limits_{-\infty}^\infty \exp(-\alpha x-\beta\,\mathrm{ch}\,x)\,dx=2K_\alpha(\beta)\qquad\left[|\arg\beta|<\frac{\pi}{2}\right].$$ В 201 (7)

2. $$\int\limits_{-\infty}^\infty \exp(-\nu x+i\beta\,\mathrm{ch}\,x)\,dx=i\pi e^{\frac{i\nu\pi}{2}}H_\nu^1(\beta)\qquad[0<\arg z<\pi].$$

ВТФ II 21 (27)

3. $$\int\limits_{-\infty}^\infty \exp(-\nu x-i\beta\,\mathrm{ch}\,x)\,dx=-i\pi e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}H_\nu^2(\beta)\qquad[-\pi<\arg z<0].$$

ВТФ II 21 (30)

Показательная функция от тригонометрических функций и логарифма

3.338

1. $$\int\limits_0^\pi \{\exp i[(\nu-1)x-\beta\sin x]-\exp i[(\nu+1)x-\beta\sin x]\}\,dx=$$
$$=2\pi[\mathbf{J}_\nu'(\beta)+i\mathbf{E}_\nu'(\beta)]\qquad[\mathrm{Re}\,\beta>0].$$ ВТФ II 36

2. $$\int\limits_0^\pi \exp[\pm i(\nu x-\beta\sin x)]\,dx=\pi[\mathbf{J}_\nu(\beta)\pm i\mathbf{E}_\nu(\beta)]$$

$[\mathrm{Re}\,\beta>0]$. ВТФ II 35 (32)

3. $$\int_0^\infty \exp[-\gamma(x-\beta\sin x)]\,dx = \frac{1}{\gamma} + 2\sum_{k=1}^\infty \frac{\gamma J_k(k\beta)}{\gamma^2+k^2}$$

$[\operatorname{Re}\gamma > 0]$. В 619 (4)

3.339 $$\int_0^\pi \exp(2\cos x)\,dx = \pi I_0(2).$$ БХ [277] (2) и

3.341 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-p\operatorname{tg} x)\,dx = \operatorname{ci}(p)\sin p - \operatorname{si}(p)\cos(p) \qquad [p > 0].$$

БХ [271] (2) и

3.342 $$\int_0^1 \exp(-px\ln x)\,dx = \int_0^1 x^{-px}\,dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{p^{k-1}}{k^k}.$$ БХ [29] (1)

3.35 Показательная функция и рациональные функции

3.351

1. $$\int_0^u x^n e^{-\mu x}\,dx = \frac{n!}{\mu^{n+1}} - e^{-u\mu}\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}\frac{u^k}{\mu^{n-k+1}}$$

$[u > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. ИП I 134 (5)

2. $$\int_u^\infty x^n e^{-\mu x}\,dx = e^{-u\mu}\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}\frac{u^k}{\mu^{n-k+1}}$$

$[u > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. ИП I 133 (4)

3. $$\int_0^\infty x^n e^{-\mu x}\,dx = n!\,\mu^{-n-1} \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ ИП I 133 (3)

4. $$\int_u^\infty \frac{e^{-px}\,dx}{x^{n+1}} = (-1)^{n+1}\frac{p^n\operatorname{Ei}(-pu)}{n!} + \frac{e^{-pu}}{u^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k p^k u^k}{n(n-1)\dots(n-k)}$$

$[p > 0]$. НИ 21 (3)

5. $$\int_1^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{x} = -\operatorname{Ei}(-\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ БХ [104] (10)

6. $$\int_{-\infty}^u \frac{e^x}{x}\,dx = \operatorname{li}(e^u) = \operatorname{Ei}(u) \qquad [u < 0].$$

3.352

1. $$\int_0^u \frac{e^{-\mu x}\,dx}{x+\beta} = e^{\mu\beta}[\operatorname{Ei}(-\mu u-\mu\beta) - \operatorname{Ei}(-\mu\beta)]$$

$[|\arg\beta| < \pi]$. ИП II 217 (12)

2. $$\int_u^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{x+\beta} = -e^{\beta\mu}\operatorname{Ei}(-\mu u-\mu\beta)$$

$[u \geqslant 0,\ |\arg(u+\beta)| < \pi,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. ИП I 134 (6), ЯЭ 99

3. $$\int_u^v \frac{e^{-\mu x}\,dx}{x+\alpha} = e^{\alpha\mu}\{\operatorname{Ei}[-(\alpha+v)\mu]-\operatorname{Ei}[-(\alpha+u)\mu]\}$$

$[-\alpha < u$, или $-\alpha > v$, $\operatorname{Re}\mu > 0]$. ИП I 134 (7)

4. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{x+\beta} = -e^{\beta\mu}\operatorname{Ei}(-\mu\beta) \qquad [|\arg\beta| < \pi,\ \operatorname{Re}\mu > 0].$$

ИП II 217 (11)

5. $$\int_u^\infty \frac{e^{-px}\,dx}{a-x} = e^{-pa}\operatorname{Ei}(pa-pu)$$

$[p > 0,\ a < u$; при $a > u$ следует $\operatorname{Ei}(pa-pu)$ в этой формуле заменить на $\overline{\operatorname{Ei}}(pa-pu)]$. ИП II 251 (37)

6. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{a-x} = e^{-\mu a}\operatorname{Ei}(a\mu) \qquad [a > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0].$$ БХ [91] (4)

7. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ipx}\,dx}{x-a} = i\pi e^{iap} \qquad [p > 0].$$ ИП II 251 (38)

3.353

1. $$\int_u^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{(x+\beta)^n} = e^{-u\mu}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k-1)!\,(-\mu)^{n-k-1}}{(n-1)!\,(u+\beta)^k} - \frac{(-\mu)^{n-1}}{(n-1)!}e^{\beta\mu}\operatorname{Ei}[-(u+\beta)\mu]$$

$[n \geqslant 2,\ |\arg(u+\beta)| < \pi,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. ИП I 134 (10)

2. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{(x+\beta)^n} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)!\,(-\mu)^{n-k-1}\beta^{-k} - \frac{(-\mu)^{n-1}}{(n-1)!}e^{\beta\mu}\operatorname{Ei}(-\beta\mu)$$

$[n > 2,\ |\arg\beta| < \pi,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. ИП I 134 (9), БХ [92] (2)

3. $$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,dx}{(a\pm x)^2} = pe^{\pm ap}\operatorname{Ei}(\mp ap) \pm \frac{1}{a} \qquad [p > 0].$$

Ли [281] (28), Ли [281] (29)

4. $$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx = \frac{e}{2} - 1.$$ БХ [80] (6)

5. $\int\limits_0^\infty \frac{x^n e^{-\mu x}}{x+\beta}\,dx = (-1)^{n-1}\beta^n e^{\beta\mu}\operatorname{Ei}(-\beta\mu) + \sum_{k=1}^{n}(k-1)!\,(-\beta)^{n-k}\mu^{-k}$

$[|\arg\beta| < \pi,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. БХ [91] (3) *и*, ИП I 135 (11)

3.354

1. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{\beta^2+x^2} = \frac{1}{\beta}[\operatorname{ci}(\beta\mu)\sin\beta\mu - \operatorname{si}(\beta\mu)\cos\beta\mu]$

$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. БХ [91] (7)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{xe^{-\mu x}\,dx}{\beta^2+x^2} = -\operatorname{ci}(\beta\mu)\cos\beta\mu - \operatorname{si}(\beta\mu)\sin\beta\mu$

$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. БХ [91] (8)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{\beta^2-x^2} = \frac{1}{2\beta}[e^{-\beta\mu}\operatorname{Ei}(\beta\mu) - e^{\beta\mu}\operatorname{Ei}(-\beta\mu)]$

[$|\arg(\pm\beta)| < \pi$, $\operatorname{Re}\mu > 0$; при $\beta > 0$ следует в этой формуле $\operatorname{Ei}(\beta\mu)$ заменить через $\overline{\operatorname{Ei}}(\beta\mu)$]. БХ [91] (14)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{xe^{-\mu x}\,dx}{\beta^2-x^2} = \frac{1}{2}[e^{-\beta\mu}\operatorname{Ei}(\beta\mu) + e^{\beta\mu}\operatorname{Ei}(-\beta\mu)]$

[$|\arg(\pm\beta)| < \pi$, $\operatorname{Re}\mu > 0$; при $\beta > 0$ следует в этой формуле $\operatorname{Ei}(\beta\mu)$ заменить через $\overline{\operatorname{Ei}}(\beta\mu)$]. БХ [91] (15)

5. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ipx}\,dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{a}e^{-|ap|}$ $[a > 0]$. ИП I 118 (1) *и*

3.355

1. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{(\beta^2+x^2)^2} = \frac{1}{2\beta^3}\{\operatorname{ci}(\beta\mu)\sin\beta\mu - \operatorname{si}(\beta\mu)\cos\beta\mu - {}$

${} - \beta\mu[\operatorname{ci}(\beta\mu)\cos\beta\mu + \operatorname{si}(\beta\mu)\sin\beta\mu]\}$. Ли [92] 6

2. $\int\limits_0^\infty \frac{xe^{-\mu x}\,dx}{(\beta^2+x^2)^2} = \frac{1}{2\beta^2}\{1 - \beta\mu[\operatorname{ci}(\beta\mu)\sin\beta\mu - \operatorname{si}(\beta\mu)\cos\beta\mu]\}$

$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. БХ [92] (7)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-px}\,dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{1}{4a^3}[(ap-1)e^{ap}\operatorname{Ei}(-ap) + (1+ap)e^{-ap}\operatorname{Ei}(ap)]$

$[a > 0,\ p > 0]$. БХ [92] (8)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{xe^{-px}\,dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{1}{4a^2}\{-2 + ap[e^{-ap}\operatorname{Ei}(ap) - e^{ap}\operatorname{Ei}(-ap)]\}$. Ли [92] (9)

3.356

1. $$\int_0^\infty \frac{x^{2n+1}e^{-px}}{a^2+x^2}\,dx=(-1)^{n-1}a^{2n}[\operatorname{ci}(ap)\cos ap+\operatorname{si}(ap)\sin ap]+$$
$$+\frac{1}{p^{2n}}\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)!\,(-a^2p^2)^{k-1} \qquad [p>0].$$ БХ [91] (12)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^{2n}e^{-px}}{a^2+x^2}\,dx=(-1)^n a^{2n-1}[\operatorname{ci}(ap)\sin ap-\operatorname{si}(ap)\cos ap]+$$
$$+\frac{1}{p^{2n-1}}\sum_{k=1}^{n}(2n-2k)!\,(-a^2p^2)^{k-1} \qquad [p>0].$$ БХ [91] (11)

3. $$\int_0^\infty \frac{x^{2n+1}e^{-px}}{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}a^{2n}[e^{ap}\operatorname{Ei}(-ap)+e^{-ap}\operatorname{Ei}(ap)]-$$
$$-\frac{1}{p^{2n}}\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)!\,(a^2p^2)^{k-1} \qquad [p>0].$$ БХ [91] (17)

4. $$\int_0^\infty \frac{x^{2n}e^{-px}}{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}a^{2n-1}[e^{-ap}\operatorname{Ei}(ap)-e^{ap}\operatorname{Ei}(-ap)]-$$
$$-\frac{1}{p^{2n-1}}\sum_{k=1}^{n}(2n-2k)!\,(a^2p^2)^{k-1} \qquad [p>0].$$ БХ [91] (16)

3.357

1. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{a^3+a^2x+ax^2+x^3}=\frac{1}{2a^2}\{\operatorname{ci}(a\mu)(\sin a\mu+\cos a\mu)+$$
$$+\operatorname{si}(a\mu)(\sin a\mu-\cos a\mu)-e^{a\mu}\operatorname{Ei}(-a\mu)\}$$
$$[\operatorname{Re}\mu>0,\ a>0].$$ БХ [92] (18)

2. $$\int_0^\infty \frac{xe^{-\mu x}\,dx}{a^3+a^2x+ax^2+x^3}=\frac{1}{2a}\{\operatorname{ci}(a\mu)(\sin a\mu-\cos a\mu)-$$
$$-\operatorname{si}(a\mu)(\sin a\mu+\cos a\mu)+e^{a\mu}\operatorname{Ei}(-a\mu)\} \qquad [\operatorname{Re}\mu>0,\quad a>0].$$ БХ [92] (19)

3. $$\int_0^\infty \frac{x^2e^{-\mu x}\,dx}{a^3+a^2x+ax^2+x^3}=\frac{1}{2}\{-\operatorname{ci}(a\mu)(\sin a\mu+\cos a\mu)-$$
$$-\operatorname{si}(a\mu)(\sin a\mu-\cos a\mu)-e^{a\mu}\operatorname{Ei}(-a\mu)\} \qquad [\operatorname{Re}\mu>0,\quad a>0].$$ БХ [92] (20)

4. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{a^3-a^2x+ax^2-x^3}=\frac{1}{2a^2}\{\operatorname{ci}(a\mu)(\sin a\mu-\cos a\mu)-$$
$$-\operatorname{si}(a\mu)(\sin a\mu+\cos a\mu)+e^{-a\mu}\operatorname{Ei}(a\mu)\} \qquad [\operatorname{Re}\mu>0,\quad a>0].$$ БХ [92] (21)

5. $$\int_0^\infty \frac{xe^{-\mu x}\,dx}{a^3-a^2x+ax^2-x^3}=\frac{1}{2a}\{-\operatorname{ci}(a\mu)(\sin a\mu+\cos a\mu)-$$
$$-\operatorname{si}(a\mu)(\sin a\mu-\cos a\mu)+e^{-a\mu}\operatorname{Ei}(a\mu)\} \qquad [\operatorname{Re}\mu>0,\quad a>0].$$ БХ [92] (22)

6. $$\int_0^\infty \frac{x^3 e^{-\mu x}\,dx}{a^3-a^2x+ax^2-x^3} = \frac{1}{2}\{\operatorname{ci}(a\mu)(\cos a\mu - \sin a\mu) + \operatorname{si}(a\mu)(\cos a\mu + \sin a\mu) + e^{-a\mu}\operatorname{Ei}(a\mu)\}$$ $[\operatorname{Re}\mu > 0,\ a > 0]$. БХ [92] (23)

3.358

1. $$\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{a^4-x^4}\,dx = \frac{1}{4a^3}\{e^{-ap}\operatorname{Ei}(ap) - e^{ap}\operatorname{Ei}(-ap) + 2\operatorname{ci}(ap)\sin ap - 2\operatorname{si}(ap)\cos ap\}$$ $[p > 0,\quad a > 0]$. БХ [91] (18)

2. $$\int_0^\infty \frac{xe^{-px}\,dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^2}\{e^{ap}\operatorname{Ei}(-ap) + e^{-ap}\operatorname{Ei}(ap) - 2\operatorname{ci}(ap)\cos ap - 2\operatorname{si}(ap)\sin ap\}$$ $[p > 0,\quad a > 0]$. БХ [91] (19)

3. $$\int_0^\infty \frac{x^2e^{-px}\,dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a}\{e^{-ap}\operatorname{Ei}(ap) - e^{ap}\operatorname{Ei}(-ap) - 2\operatorname{ci}(ap)\sin ap + 2\operatorname{si}(ap)\cos ap\}$$ $[p > 0,\quad a > 0]$. БХ [91] (20)

4. $$\int_0^\infty \frac{x^3e^{-px}\,dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4}\{e^{ap}\operatorname{Ei}(-ap) + e^{-ap}\operatorname{Ei}(ap) + 2\operatorname{ci}(ap)\cos ap + 2\operatorname{si}(ap)\sin ap\}$$ $[p > 0,\quad a > 0]$. БХ [91] (21)

5. $$\int_0^\infty \frac{x^{4n}e^{-px}}{a^4-x^4}\,dx = \frac{1}{4}a^{4n-3}[e^{-ap}\operatorname{Ei}(ap) - e^{ap}\operatorname{Ei}(-ap) + 2\operatorname{ci}(ap)\sin ap - 2\operatorname{si}(ap)\cos ap] - \frac{1}{p^{4n-3}}\sum_{k=1}^{n}(4n-4k)!\,(a^4p^4)^{k-1}$$ $[p > 0,\quad a > 0]$. БХ [91] (22)

6. $$\int_0^\infty \frac{x^{4n+1}e^{-px}}{a^4-x^4}\,dx = \frac{1}{4}a^{4n-2}[e^{ap}\operatorname{Ei}(-ap) + e^{-ap}\operatorname{Ei}(ap) - 2\operatorname{ci}(ap)\cos ap - 2\operatorname{si}(ap)\sin ap] - \frac{1}{p^{4n-2}}\sum_{k=1}^{n}(4n-4k+1)!\,(a^4p^4)^{k-1}$$ $[p > 0,\quad a > 0]$. БХ [91] (23)

7. $$\int_0^\infty \frac{x^{4n+2}e^{-px}}{a^4-x^4}\,dx = \frac{1}{4}a^{4n-1}[e^{-ap}\operatorname{Ei}(ap) - e^{ap}\operatorname{Ei}(-ap) - 2\operatorname{ci}(ap)\sin ap + 2\operatorname{si}(ap)\cos ap] - \frac{1}{p^{4n-1}}\sum_{k=1}^{n}(4n-4k+2)!\,(a^4p^4)^{k-1}$$ $[p > 0,\quad a > 0]$. БХ [91] (24)

8. $$\int\limits_0^\infty \frac{x^{4n+3}e^{-px}}{a^4-x^4}\,dx = \frac{1}{4}a^{4n}\left[e^{ap}\operatorname{Ei}(-ap)+e^{-ap}\operatorname{Ei}(ap)+\right.$$

$$\left.+2\operatorname{ci}(ap)\cos ap+2\operatorname{si}(ap)\sin ap\right]-\frac{1}{p^{4n}}\sum_{k=1}^{n}(4n-4k+3)!\,(a^4p^4)^{k-1}$$

$[p>0,\quad a>0]$. БХ [91] (25)

3.359 $$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(i-x)^n}{(i+x)^n}\,\frac{e^{-ipx}}{1+x^2}\,dx=(-1)^{n-1}2\pi pe^{-p}L_{n-1}(2p) \quad \text{при} \quad p>0;$$

$$=0 \quad \text{при} \quad p<0.$$

ИП I 118 (2)

3.36 – 3.37 Показательная функция и алгебраические функции

3.361

1. $$\int\limits_0^u \frac{e^{-qx}}{\sqrt{qx}}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{q}}\,\Phi(\sqrt{qu}).$$

2. $$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-qx}}{\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{q}} \quad [q>0].$$ БХ [98] (10)

3. $$\int\limits_{-1}^\infty \frac{e^{-qx}}{\sqrt{1+x}}\,dx=e^q\sqrt{\frac{\pi}{q}} \quad [q>0].$$ БХ [104] (16)

3.362

1. $$\int\limits_1^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\,e^{-\mu} \quad [\operatorname{Re}\mu>0].$$ БХ [104] (11) и

2. $$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{\sqrt{x+\beta}}=\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\,e^{\beta\mu}\left[1-\Phi(\sqrt{\beta\mu})\right] \quad [\operatorname{Re}\mu>0,\ |\arg\beta|<\pi].$$

ИП I 135 (18)

3.363

1. $$\int\limits_u^\infty \frac{\sqrt{x-u}}{x}\,e^{-\mu x}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\,e^{-u\mu}-\pi\sqrt{u}\left[1-\Phi(\sqrt{u\mu})\right]$$

$[u>0,\quad \operatorname{Re}\mu>0]$. ИП I 136 (23)

2. $$\int\limits_u^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{x\sqrt{x-u}}=\frac{\pi}{\sqrt{u}}\left[1-\Phi(\sqrt{u\mu})\right] \quad [u>0,\quad \operatorname{Re}\mu\geqslant 0].$$ ИП I 136 (26)

3.364

1. $$\int\limits_0^2 \frac{e^{-px}\,dx}{\sqrt{x(2-x)}}=\pi e^{-p}I_0(p) \quad [p>0].$$ ГХ [312] (7а)

2. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi I_0(2).$ БХ [277] (2) и

3. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-px}\,dx}{\sqrt{x(x+a)}} = e^{\frac{ap}{2}} K_0\left(\frac{ap}{2}\right) \quad [a>0, \quad p>0].$ ГХ [312] (8а)

3.365

1. $\int\limits_{0}^{u} \frac{xe^{-\mu x}\,dx}{\sqrt{u^2-x^2}} = \frac{\pi u}{2}\left[\mathbf{L}_1(\mu u) - I_1(\mu u)\right] + u$

$[u>0, \quad \operatorname{Re}\mu>0].$ ИПI 136 (28)

2. $\int\limits_{u}^{\infty} \frac{xe^{-\mu x}\,dx}{\sqrt{x^2-u^2}} = uK_1(u\mu) \quad [u>0, \quad \operatorname{Re}\mu>0].$ ИПI 136 (29)

3.366

1. $\int\limits_{0}^{2u} \frac{(u-x)\,e^{-\mu x}\,dx}{\sqrt{2ux-x^2}} = \pi u e^{-u\mu} I_1(u\mu) \quad [\operatorname{Re}\mu>0].$ ИПI 136 (31)

2. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{(x+\beta)\,e^{-\mu x}\,dx}{\sqrt{x^2+2\beta x}} = \beta e^{\beta\mu} K_1(\beta\mu) \; [\operatorname{Re}\mu>0, \quad |\arg\beta|<\pi].$ ИПI 136 (30)

3. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xe^{-\mu x}\,dx}{\sqrt{x^2+\beta^2}} = \frac{\beta\pi}{2}\left[\mathbf{H}_1(\beta\mu) - N_1(\beta\mu)\right] - \beta$

$\left[|\arg\beta|<\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Re}\mu>0\right].$ ИПI 136 (27)

3.367 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-\mu x}\,dx}{(1+\cos t+x)\sqrt{x^2+2x}} = \frac{\exp\left(2\mu\cos^2\frac{t}{2}\right)}{\sin t} \times$

$\times\left(t - \sin t\int\limits_{0}^{\mu} K_0(v)\,e^{-v\cos t}\,dv\right) \quad [\operatorname{Re}\mu>0].$ ИПI 136 (33)

3.368 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-\mu x}\,dx}{x+\sqrt{x^2+\beta^2}} = \frac{\pi}{2\beta\mu}\left[\mathbf{H}_1(\beta\mu) - N_1(\beta\mu)\right] - \frac{1}{\beta^2\mu^2}$

$\left[|\arg\beta|<\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Re}\mu>0\right].$ ИПI 136 (32)

3.369 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-\mu x}\,dx}{\sqrt{(x+a)^3}} = \frac{2}{\sqrt{a}} - 2\sqrt{\pi\mu}\,e^{a\mu}\left(1 - \Phi\left(\sqrt{a\mu}\right)\right)$

$[|\arg a|<\pi, \quad \operatorname{Re}\mu>0].$ ИПI 135 (20)

3.371 $$\int_0^\infty x^{n-\frac{1}{2}} e^{-\mu x}\,dx = \sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\mu^{-n-\frac{1}{2}}$$

[$\operatorname{Re}\mu > 0$]. ИП I 135 (17)

3.372 $$\int_0^\infty x^{n-\frac{1}{2}}(2+x)^{n-\frac{1}{2}} e^{-px}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{p^n} e^p K_n(p)$$

[$p > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$]. ГХ [312] (8)

3.373 $$\int_0^\infty \left[\left(x+\sqrt{x^2+\beta^2}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2+\beta^2}\right)^n\right] e^{-\mu x}\,dx = 2\beta^{n+1} O_n(\beta\mu)$$

[$\operatorname{Re}\mu > 0$]. В 305 (1)

3.374

1. $$\int_0^\infty \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\mu x}\,dx = \frac{1}{2}\left[S_n(\mu) - \pi \mathbf{E}_n(\mu) - \pi N_n(\mu)\right]$$

[$\operatorname{Re}\mu > 0$]. ИП I 137 (35)

2. $$\int_0^\infty \frac{\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^n}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\mu x}\,dx = -\frac{1}{2}\left[S_n(\mu) + \pi \mathbf{E}_n(\mu) + \pi N_n(\mu)\right]$$

[$\operatorname{Re}\mu > 0$]. ИП I 137 (36)

3.38—3.39 Показательная функция и степенная функция с произвольными показателями степени

3.381

1. $$\int_0^u x^{\nu-1} e^{-\mu x}\,dx = \mu^{-\nu}\gamma(\nu, \mu u)$$

[$\operatorname{Re}\nu > 0$] ВТФ I 266 (22), ВТФ II 133 (1)

2 $$\int_0^u x^{p-1} e^{-x}\,dx = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{u^{p+k}}{k!\,(p+k)};$$

$$= e^{-u}\sum_{k=0}^\infty \frac{u^{p+k}}{p(p+1)\ldots(p+k)}.$$ А6.705

3. $$\int_u^\infty x^{\nu-1} e^{-\mu x}\,dx = \mu^{-\nu}\Gamma(\nu, \mu u)$$

[$u > 0, \ \operatorname{Re}\mu > 0$]. ВТФ I 256 (21), ВТФ II 133 (2)

4. $$\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\mu x}\,dx = \frac{1}{\mu^\nu}\Gamma(\nu)$$ [$\operatorname{Re}\mu > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 0$]. Ф II 779

5. $$\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-(p+iq)x}\,dx = \Gamma(\nu)\,(p^2+q^2)^{-\frac{\nu}{2}}\exp\left(-i\nu\,\operatorname{arctg}\frac{q}{p}\right)$$

$[p>0,\quad \operatorname{Re}\nu>0$ или $p=0,\quad 0<\operatorname{Re}\nu<1]$. ВТФI 12 (32)

6. $$\int_u^\infty \frac{e^{-x}}{x^\nu}\,dx = u^{-\frac{\nu}{2}}e^{-\frac{u}{2}}W_{-\frac{\nu}{2},\frac{(1-\nu)}{2}}(u)\quad [u>0].$$ УВII 160

3.382

1. $$\int_0^u (u-x)^\nu e^{-\mu x}\,dx = \mu^{-\nu-1}e^{-u\mu}\gamma(\nu+1,-u\mu)$$

$[\operatorname{Re}\nu>-1,\quad u>0]$. ИПI 137 (6)

2. $$\int_u^\infty (x-u)^\nu e^{-\mu x}\,dx = \mu^{-\nu-1}e^{-u\mu}\Gamma(\nu+1)$$

$[u>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}\mu>0]$. ИПI 137 (5), ИПII 202 (11)

3. $$\int_0^\infty (1+x)^{-\nu}e^{-\mu x}\,dx = \mu^{\frac{\nu}{2}-1}e^{\frac{\mu}{2}}W_{-\frac{\nu}{2},\frac{(1-\nu)}{2}}(\mu)$$

$[\operatorname{Re}\mu>0]$. УВII 160

4. $$\int_0^\infty (x+\beta)^\nu e^{-\mu x}\,dx = \mu^{-\nu-1}e^{\beta\mu}\Gamma(\nu+1,\ \beta\mu)$$

$[|\arg\beta|<\pi,\ \operatorname{Re}\mu>0]$. ИПI 137 (4), ИПII 233 (10)

5. $$\int_0^u (a+x)^{\mu-1}e^{-x}\,dx = e^a[\gamma(\mu,\ a+u)-\gamma(\mu,\ a)]$$

$[\operatorname{Re}\mu>0]$. ВТФII 139

6. $$\int_{-\infty}^\infty (\beta+ix)^{-\nu}e^{-ipx}\,dx = 0 \quad \text{при } p>0;$$

$$= -\frac{2\pi(-p)^{\nu-1}e^{\beta p}}{\Gamma(\nu)} \quad \text{при } p<0$$

$[\operatorname{Re}\nu>0,\ \operatorname{Re}\beta>0]$. ИПI 118 (4)

7. $$\int_{-\infty}^\infty (\beta-ix)^{-\nu}e^{-ipx}\,dx = \frac{2\pi p^{\nu-1}e^{-\beta p}}{\Gamma(\nu)} \quad \text{при } p>0;$$

$$=0 \quad \text{при } p<0$$

$[\operatorname{Re}\nu>0,\ \operatorname{Re}\beta>0]$. ИПI 118 (3)

3.383

1. $$\int_0^u x^{\nu-1}(u-x)^{\mu-1}e^{\beta x}\,dx = \mathrm{B}(\mu,\nu)\,u^{\mu+\nu-1}{}_1F_1(\nu;\ \mu+\nu;\ \beta u)$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$. ИПII 187 (14)

2. $$\int_0^u x^{\mu-1}(u-x)^{\mu-1}e^{\beta x}\,dx=\sqrt{\pi}\left(\frac{u}{\beta}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\beta u}{2}\right)\Gamma(\mu)\,I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta u}{2}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu>0]$. ИПII 187 (13)

3. $$\int_u^\infty x^{\mu-1}(x-u)^{\mu-1}e^{-\beta x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{u}{\beta}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}\Gamma(\mu)\exp\left(-\frac{\beta u}{2}\right)K_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta u}{2}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\beta u>0]$. ИПII 202 (12)

4. $$\int_u^\infty x^{\nu-1}(x-u)^{\mu-1}e^{-\beta x}\,dx=$$

$$=\beta^{-\frac{\mu+\nu}{2}}u^{\frac{\mu+\nu-2}{2}}\Gamma(\mu)\exp\left(-\frac{\beta u}{2}\right)W_{\frac{\nu-\mu}{2},\,\frac{1-\mu-\nu}{2}}(\beta u)$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\beta u>0]$. ИПII 202 (13)

5. $$\int_0^\infty \frac{x^{q-1}e^{-px}}{(1+ax)^n}\,dx=p^{-q}\Gamma(q)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{\Gamma(q+k)}{\Gamma(q)}\left(\frac{a}{p}\right)^n$$

$[q>0,\ p>0,\ a>0]$. БХ [92] (3)

6. $$\int_0^\infty x^{\nu-1}(x+\beta)^{-\nu+\frac{1}{2}}e^{-\mu x}\,dx=2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu)\,\mu^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\beta\mu}{2}}D_{1-2\nu}\left(\sqrt{2\beta\mu}\right)$$

2 $[|\arg\beta|<\pi,\ \operatorname{Re}\nu>0,\ \operatorname{Re}\mu\geqslant 0]$. ИПI 139 (20), ВТФII 119 (2) и

7. $$\int_0^\infty x^{\nu-1}(x+\beta)^{-\nu-\frac{1}{2}}e^{-\mu x}\,dx=2^{\nu}\Gamma(\nu)\,\beta^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\beta\mu}{2}}D_{-2\nu}\left(\sqrt{2\beta\mu}\right)$$

$[|\arg\beta|<\pi,\ \operatorname{Re}\nu>0,\ \operatorname{Re}\mu\geqslant 0]$. ИПI 139 (21), ВТФII 119 (1) и

8. $$\int_0^\infty x^{\nu-1}(x+\beta)^{-\varrho}e^{-\mu x}\,dx=\beta^{\frac{\nu-\varrho-1}{2}}\mu^{\frac{\varrho-\nu-1}{2}}e^{\frac{\beta\mu}{2}}\Gamma(\nu)\,W_{\frac{1-\nu-\varrho}{2},\,\frac{\nu-\varrho}{2}}(\beta\mu)$$

$[|\arg\beta|<\pi,\ \operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$;
УВII 143и, ИПII 234 (12), ВТФI 255 (2) и

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{\beta\mu}\Gamma(\nu)\,K_{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{\beta\mu}{2}\right)$$

$[|\arg\beta|<\pi,\ \operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$.
ИПII 233 (11), ВТФII 19 (16) и, ВТФII 82 (22) и

9. $$\int_u^\infty \frac{(x-u)^{\nu}e^{-\mu x}}{x}\,dx=u^{\nu}\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(-\nu,\ u\mu)$$

$[u>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}\mu>0]$. ИПI 138 (8)

10. $$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}e^{-\mu x}}{x+\beta}\,dx=\beta^{\nu-1}e^{\beta\mu}\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu,\ \beta\mu)$$

$[|\arg\beta|<\pi,\ \operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$. ВТФII 137 (3)

3.384

1. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\nu-1}(1+x)^{\mu-1}e^{-ipx}\,dx = 2^{\mu+\nu-1}\mathrm{B}(\mu, \nu)\, e^{ip}\,{}_1F_1(\mu;\ \nu+\mu;\ -2ip)$$
$[\operatorname{Re}\nu > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. ИПI 119 (13)

2. $$\int_{u}^{v} (x-u)^{2\mu-1}(v-x)^{2\nu-1}e^{-px}\,dx = \mathrm{B}(2\mu,\ 2\nu)(v-u)^{\mu+\nu-1} \times$$
$$\times\, p^{-\mu-\nu}\exp\left(-p\frac{u+v}{2}\right) M_{\mu-\nu,\ \mu+\nu-\frac{1}{2}}(vp-up)$$
$[v > u > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИПI 139 (23)

3 $$\int_{u}^{\infty} (x+\beta)^{2\nu-1}(x-u)^{2\varrho-1}e^{-\mu x}\,dx = \frac{(u+\beta)^{\nu+\varrho-1}}{\mu^{\nu+\varrho}}\exp\left[\frac{(\beta-u)\mu}{2}\right]\times$$
$$\times\,\Gamma(2\varrho)\,W_{\nu-\varrho,\ \nu+\varrho-\frac{1}{2}}(u\mu+\beta\mu)$$
$[u > 0,\ |\arg(\beta+u)| < \pi,\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\varrho > 0]$. ИПI 139 (22)

4. $$\int_{u}^{\infty} (x+\beta)^{\nu}(x-u)^{-\nu}e^{-\mu x}\,dx = \frac{1}{\mu}\nu\pi\operatorname{cosec}(\nu\pi)\quad e^{-\frac{(\beta+u)\mu}{2}}k_{2\nu}\left[\frac{(\beta+u)\mu}{2}\right]$$
2 $[u > 0,\ |\arg(u+\beta)| < \pi,\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu < 1]$. ИПI 139 (17)

5. $$\int_{u}^{\infty} (x-u)^{\nu-1}(x+u)^{-\nu+\frac{1}{2}}e^{-\mu x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\mu}}2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu)\,D_{1-2\nu}\left(2\sqrt{u\mu}\right)$$
$[u > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИПI 139 (18)

6. $$\int_{u}^{\infty} (x-u)^{\nu-1}(x+u)^{-\nu-\frac{1}{2}}e^{-\mu x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{u}}2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu)\,D_{-2\nu}\left(2\sqrt{u\mu}\right)$$
$[u > 0,\ \operatorname{Re}\mu \geqslant 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИПI 139 (19)

7. $$\int_{-\infty}^{\infty} (\beta-ix)^{-\mu}(\gamma-ix)^{-\nu}e^{-ipx}\,dx =$$
$$= \frac{2\pi e^{-\beta p}p^{\mu+\nu-1}}{\Gamma(\mu+\nu)}\,{}_1F_1(\nu;\ \mu+\nu;\ (\beta-\gamma)p) \quad \text{при } p > 0;$$
$$= 0 \quad \text{при } p < 0$$
$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0,\ \operatorname{Re}(\mu+1) > \nu]$. ИПI 119 (10)

8. $$\int_{-\infty}^{\infty} (\beta+ix)^{-\mu}(\gamma+ix)^{-\nu}e^{-ipx}\,dx = 0 \quad \text{при } p > 0;$$
$$= -\frac{2\pi e^{\beta p}(-p)^{\mu+\nu-1}}{\Gamma(\mu+\nu)}\,{}_1F_1[\mu;\ \mu+\nu;\ (\beta-\gamma)p] \quad \text{при } p < 0$$
$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu) > 1]$. ИПI 119 (11)

9. $$\int_{-\infty}^{\infty} (\beta + ix)^{-2\mu} (\gamma - ix)^{-2\nu} e^{-ipx}\, dx =$$
$$= -2\pi(\beta+\gamma)^{-\mu-\nu} \frac{p^{\mu+\nu-1}}{\Gamma(2\nu)} \exp\left(\frac{\gamma-\beta}{2} p\right) \times$$
$$\times W_{\nu-\mu, \frac{1}{2}-\nu-\mu} (\beta p + \gamma p) \quad \text{при} \quad p > 0;$$
$$= 2\pi(\beta+\gamma)^{-\mu-\nu} \frac{(-p)^{\mu+\nu-1}}{\Gamma(2\mu)} \exp\left(\frac{\beta-\gamma}{2} p\right) \times$$
$$\times W_{\mu-\nu, \frac{1}{2}-\nu-\mu} (-\beta p - \gamma p) \quad \text{при} \quad p < 0$$
$$\left[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu) > \frac{1}{2}\right].$$
ИПI 119 (12)

3.385 $$\int_0^1 x^{\nu-1} (1-x)^{\lambda-1} (1-\beta x)^{-\varrho} e^{-\mu x}\, dx = \mathrm{B}(\nu, \lambda)\, \Phi_1(\nu, \varrho, \lambda+\nu; \beta, -\mu)$$
$$[\operatorname{Re}\lambda > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0,\ |\arg(1-\beta)| < \pi].$$
ИПI 139 (24)

3.386

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(ix)^{\nu_0} \prod\limits_{k=1}^{n} (\beta_k + ix)^{\nu_k} e^{-ipx}\, dx}{\beta_0 - ix} = 2\pi e^{-\beta_0 p} \beta_0^{\nu_0} \prod_{k=1}^{n} (\beta_0 + \beta_k)^{\nu_k}$$
$$\left[\operatorname{Re}\nu_0 > -1,\quad \operatorname{Re}\beta_k > 0,\ \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re}\nu_k < 1,\ \arg ix = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x,\quad p > 0\right].$$
ИП I 118 (8)

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(ix)^{\nu_0} \prod\limits_{k=1}^{n} (\beta_k + ix)^{\nu_k} e^{-ipx}\, dx}{\beta_0 + ix} = 0$$
$$\left[\operatorname{Re}\nu_0 > -1,\ \operatorname{Re}\beta_k > 0,\ \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re}\nu_k < 1,\ \arg ix = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x,\ p > 0\right].$$
ИПI 119 (9)

3.387

1. $$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\nu-1} e^{-\mu x}\, dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{2}{\mu}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu)\, I_{\nu-\frac{1}{2}}(\mu)$$
$$\left[\operatorname{Re}\nu \geqslant 0,\ |\arg\mu| < \frac{\pi}{2}\right].$$
В 190 (2) и

2. $$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\nu-1} e^{i\mu x}\, dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{2}{\mu}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu)\, J_{\nu-\frac{1}{2}}(\mu) \qquad [\operatorname{Re}\nu > 0].$$
В34 (3) и, В60 (4) и

3. $$\int_1^\infty (x^2-1)^{\nu-1} e^{-\mu x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu) K_{\nu-\frac{1}{2}}(\mu)$$

$\left[|\arg\mu| < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Re}\nu > 0\right]$, B190 (4) *u*

4. $$\int_1^\infty (x^2-1)^{\nu-1} e^{i\mu x}\,dx = i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu) H^{(1)}_{\frac{1}{2}-\nu}(\mu)$$

$[\operatorname{Im}\mu > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 0]$; ВТФ II 83 (28) *u*

$$= -i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{2}{\mu}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu) H^{(2)}_{\frac{1}{2}-\nu}(-\mu)$$

$[\operatorname{Im}\mu < 0, \ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ВТФ II 83 (29) *u*

5. $$\int_0^u (u^2-x^2)^{\nu-1} e^{\mu x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2u}{\mu}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu)\left[I_{\nu-\frac{1}{2}}(u\mu) + \mathbf{L}_{\nu-\frac{1}{2}}(u\mu)\right].$$

$[u > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП II 188 (20) *u*

6. $$\int_u^\infty (x^2-u^2)^{\nu-1} e^{-\mu x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2u}{\mu}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu) K_{\nu-\frac{1}{2}}(u\mu)$$

$[u > 0, \ \operatorname{Re}\mu > 0, \ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП II 203 (17) *u*

7. $$\int_0^\infty (x^2+u^2)^{\nu-1} e^{-\mu x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2u}{\mu}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu)\left[\mathbf{H}_{\nu-\frac{1}{2}}(u\mu) - N_{\nu-\frac{1}{2}}(u\mu)\right]$$

$[|\arg u| < \pi, \quad \operatorname{Re}\mu > 0]$. ИП I 138 (10)

3.388

1. $$\int_0^{2u} (2ux-x^2)^{\nu-1} e^{-\mu x}\,dx = \sqrt{\pi}\left(\frac{2u}{\mu}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-u\mu}\Gamma(\nu) I_{\nu-\frac{1}{2}}(u\mu)$$

$[u > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП I 138 (14)

2. $$\int_0^\infty (2\beta x+x^2)^{\nu-1} e^{-\mu x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2\beta}{\mu}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\beta\mu}\Gamma(\nu) K_{\nu-\frac{1}{2}}(\beta\mu)$$

$[|\arg\beta| < \pi; \quad \operatorname{Re}\nu > 0, \quad \operatorname{Re}\mu > 0]$. ИП I 138 (13)

3. $$\int_0^\infty (x^2+ix)^{\nu-1} e^{-\mu x}\,dx = -\frac{i\sqrt{\pi}\, e^{\frac{i\mu}{2}}}{2\mu^{\nu-\frac{1}{2}}}\Gamma(\nu) H^{(2)}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu}{2}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП I 138 (15)

4. $$\int_0^\infty (x^2-ix)^{\nu-1} e^{-\mu x}\,dx = \frac{i\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{i\mu}{2}}}{2\mu^{\nu-\frac{1}{2}}}\Gamma(\nu) H^{(1)}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu}{2}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП I 138 (16)

3.389

1. $$\int_0^u x^{2\nu-1}(u^2-x^2)^{\varrho-1}e^{\mu x}\,dx =$$
$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{B}(\nu,\ \varrho)\,u^{2\nu+2\varrho-2}\,{}_1F_2\left(\nu;\ \frac{1}{2},\ \nu+\varrho;\ \frac{\mu^2u^2}{4}\right)+$$
$$+\frac{\mu}{2}\,\mathrm{B}\left(\nu+\frac{1}{2},\ \varrho\right)u^{2\nu+2\varrho-1}\,{}_1F_2\left(\nu+\frac{1}{2};\ \frac{3}{2},\ \nu+\varrho+\frac{1}{2};\ \frac{\mu^2u^2}{4}\right)$$
$[\operatorname{Re}\varrho>0,\quad \operatorname{Re}\nu>0]$. ИП II 188 (21)

2. $$\int_0^\infty x^{2\nu-1}(u^2+x^2)^{\varrho-1}e^{-\mu x}\,dx=\frac{u^{2\nu+2\varrho-2}}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\varrho)}\,G_{13}^{31}\left(\frac{\mu^2u^2}{4}\,\middle|\,\begin{matrix}1-\nu\\1-\varrho-\nu,\ 0,\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right)$$
$\left[\,|\arg u|<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0\right]$. ИП II 234 (15) и

3. $$\int_0^u x(u^2-x^2)^{\nu-1}e^{\mu x}\,dx=\frac{u^{2\nu}}{2\nu}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\nu}u^{\nu+\frac{1}{2}}\,\Gamma(\nu)\times$$
$$\times\left[I_{\nu+\frac{1}{2}}(\mu u)+\mathbf{L}_{\nu+\frac{1}{2}}(\mu u)\right]$$
$[\operatorname{Re}\nu>0]$. ИП II 188 (19) и

4. $$\int_u^\infty x(x^2-u^2)^{\nu-1}e^{-\mu x}\,dx=2^{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\pi}\right)^{-1}\mu^{\frac{1}{2}-\nu}u^{\nu+\frac{1}{2}}\,\Gamma(\nu)\,K_{\nu+\frac{1}{2}}(u\mu)$$
$[\operatorname{Re}(u\mu)>0]$. ИП II 203 (16) и

5. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{(ix)^{-\nu}e^{-ipx}\,dx}{\beta^2+x^2}=\pi\beta^{-\nu-1}e^{-|p|\beta}$$
$\left[\,|\nu|<1,\quad \operatorname{Re}\beta>0,\quad \arg ix=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}x\right]$. ИП I 118 (5)

6. $$\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\mu x}}{\beta^2+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\,\Gamma(\nu)\,\beta^{\nu-1}\left[\exp\left(i\mu\beta+i\frac{(\nu-1)\pi}{2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\,\Gamma(1-\nu,\ i\beta\mu)+\exp\left(-i\beta\mu-i\frac{(\nu-1)\pi}{2}\right)\Gamma(1-\nu,\ -i\beta\mu)\right]$$
$[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП II 218 (22)

7. $$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}e^{-\mu x}\,dx}{1+x^2}=\pi\operatorname{cosec}(\nu\pi)\,V_\nu(2\mu,\ 0)$$
$[\operatorname{Re}\mu>0,\quad \operatorname{Re}\nu>0]$. ИП I 138 (9)

8. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{(\beta+ix)^{-\nu}e^{-ipx}}{\gamma^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{\gamma}\,(\beta+\gamma)^{-\nu}e^{-p\gamma}$$
$[\operatorname{Re}\nu>-1,\ p>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\gamma>0]$. ИП I 118 (6)

9. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{(\beta-ix)^{-\nu}e^{-ipx}}{\gamma^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{\gamma}\,(\beta-\gamma)^{-\nu}e^{\gamma p}$$
$[p>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\gamma>0,\ \beta\neq\gamma,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП I 118 (7)

3.391 $$\int_0^\infty \left[\left(\sqrt{x+2\beta}+\sqrt{x}\right)^{2\nu}-\left(\sqrt{x+2\beta}-\sqrt{x}\right)^{2\nu}\right] e^{-\mu x}\,dx =$$

$$= 2^{\nu+1}\frac{\nu}{\mu}\beta^{\nu}e^{\beta\mu}K_{\nu}(\beta\mu) \qquad [|\arg\beta|<\pi,\quad \operatorname{Re}\mu>0]$$

ИП I 140 (30)

3.392

1. $$\int_0^\infty \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\nu} e^{-\mu x}\,dx = \frac{1}{\mu}S_{1,\nu}(\mu)+\frac{\nu}{\mu}S_{0,\nu}(\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu>0].$$

ИП I 140 (25)

2. $$\int_0^\infty \left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^{\nu} e^{-\mu x}\,dx = \frac{1}{\mu}S_{1,\nu}(\mu)-\frac{\nu}{\mu}S_{0,\nu}(\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu>0].$$

ИП I 140 (26)

3. $$\int_0^\infty \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\nu}}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\mu x}\,dx = \pi\operatorname{cosec}\nu\pi\left[\mathbf{J}_{-\nu}(\mu)-J_{-\nu}(\mu)\right]$$

$[\operatorname{Re}\mu>0]$. ИП I 140 (27), ВТФ II 35 (33)

4. $$\int_0^\infty \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^{\nu}}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\mu x}\,dx = S_{0,\nu}(\mu)-\nu S_{-1,\nu}(\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu>0].$$

ИП I 140 (28)

3.393 $$\int_0^\infty \frac{\left(x+\sqrt{x^2+4\beta^2}\right)^{2\nu}}{\sqrt{x^3+4\beta^2 x}} e^{-\mu x}\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\mu\pi^3}}{2^{2\nu+\frac{3}{2}}\beta^{2\nu}}\left[J_{\nu+\frac{1}{4}}(\beta\mu)N_{\nu-\frac{1}{4}}(\beta\mu)-J_{\nu-\frac{1}{4}}(\beta\mu)N_{\nu+\frac{1}{4}}(\beta\mu)\right]$$

$[\operatorname{Re}\beta>0,\quad \operatorname{Re}\mu>0]$. ИП I 140 (33)

3.394 $$\int_0^\infty \frac{\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}}{x^{\nu+1}\sqrt{1+x^2}} e^{-\mu x}\,dx = \sqrt{2}\,\Gamma(-\nu)\,D_{\nu}\left(\sqrt{2i\mu}\right)D_{\nu}\left(\sqrt{-2i\mu}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu\geqslant 0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$. ИП I 140 (32)

3.395

1. $$\int_1^\infty \frac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)^{\nu}+\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)^{-\nu}}{\sqrt{x^2-1}} e^{-\mu x}\,dx = 2K_{\nu}(\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu>0].$$

ИП I 140 (29)

2. $$\int_1^\infty \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2\nu}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2\nu}}{\sqrt{x(x^2-1)}} e^{-\mu x}\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}\,K_{\nu+\frac{1}{4}}\left(\frac{\mu}{2}\right)K_{\nu-\frac{1}{4}}\left(\frac{\mu}{2}\right) \qquad [\operatorname{Re}\mu>0].$$

ИП I 140 (34)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^\nu + \cos\nu\pi\,(x+\sqrt{x^2+1})^{-\nu}}{\sqrt{x^2+1}} e^{-\mu x}\,dx =$

$= -\pi[\mathbf{E}_\nu(\mu)+N_\nu(\mu)] \qquad [\operatorname{Re}\mu>0].$ ВТФII 35 (34)

3.41 — 3.44 Рациональные функции от степенной и показательной функций

3.411

1. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\nu-1}\,dx}{e^{\mu x}-1} = \frac{1}{\mu^\nu}\Gamma(\nu)\zeta(\nu) \qquad [\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>1].$ ФII 792 и

2. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2n-1}\,dx}{e^{px}-1} = (-1)^{n-1}\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{2n}\frac{B_{2n}}{4n}.$ ФII 721 и

3. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\nu-1}\,dx}{e^{\mu x}+1} = \frac{1}{\mu^\nu}(1-2^{1-\nu})\Gamma(\nu)\zeta(\nu) \qquad [\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0].$

ФII 792 и, УВII 46.

4. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2n-1}\,dx}{e^{px}+1} = (1-2^{1-2n})\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{2n}\frac{|B_{2n}|}{4n}.$ БХ [83] (2), ВТФI 39 (25)

5. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{x\,dx}{1-e^{-x}} = \frac{\pi^2}{12}.$ БХ [104] (5)

6. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\nu-1}e^{-\mu x}}{1-\beta e^{-x}}\,dx = \Gamma(\nu)\,{}_1F_1(\beta;\nu;\mu)$

$[\operatorname{Re}\mu>0$ и: либо $|\beta|\leqslant 1,\ \beta\neq 1,\ \operatorname{Re}\nu>0$; либо $\beta=1,\ \operatorname{Re}\nu>1]$.
ВТФI 27 (3)

7. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\nu-1}e^{-\mu x}}{1-e^{-\beta x}}\,dx = \frac{1}{\beta^\nu}\Gamma(\nu)\zeta\left(\nu,\frac{\mu}{\beta}\right) \qquad [\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>1].$

ИПI 144 (10)

8. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{n-1}e^{-px}}{1+e^x}\,dx = (n-1)!\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{(p+k)^n} \qquad [p>-1;\ n=1,2,\ldots].$

БХ [83] (9)

9. $\int\limits_0^\infty \frac{xe^{-x}\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6}-1$ (сравни **4.231** 2.). БХ [82] (1)

10. $\int\limits_0^\infty \frac{xe^{-2x}\,dx}{e^{-x}+1} = 1-\frac{\pi^2}{12}$ (сравни **4.251** 6.). БХ [82] (2)

11. $\int\limits_0^\infty \frac{xe^{-3x}}{e^{-x}+1}\,dx = \frac{\pi^2}{12}-\frac{3}{4}$ (сравни **4.251** 5.). БХ [82] (3)

12. $\int\limits_0^\infty \frac{xe^{-2nx}}{1+e^x}\,dx = -\frac{\pi^2}{12} + \sum\limits_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ (сравни 4.251 6.) БХ [82] (5)

13. $\int\limits_0^\infty \frac{xe^{-(2n-1)x}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi^2}{12} + \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2}$ (сравни 4.251 5.). БХ [82] (4)

14. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2e^{-nx}}{1-e^{-x}}\,dx = 2 \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (сравни 4.261 12.). БХ [82] (9)

15. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx = 2 \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{k^3}$ (сравни 4.261 11.). Ли [82] (10)

16. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^2e^{-\mu x}}{1+e^{-x}}\,dx = \pi^3 \cos^3 \mu\pi\,(2-\sin^2\mu\pi)$

$[0 < \operatorname{Re}\mu < 1]$. ИПІ 120 (17) и

17. $\int\limits_0^\infty \frac{x^3e^{-nx}}{1-e^{-x}}\,dx = \frac{\pi^4}{15} - 6\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^4}$ (сравни 4.262 5.). БХ [82] (12)

18. $\int\limits_0^\infty \frac{x^3e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx = 6 \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{k^4}$ (сравни 4.262 4.). Ли [82] (13)

19. $\int\limits_0^\infty e^{-px}(e^{-x}-1)^n \frac{dx}{x} = -\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k n_k \ln(p+n-k)$

$[n_k = n(n+1)\ldots(n+k-1);\ n_0 = 1]$. Ли 89 (10)

20. $\int\limits_0^\infty e^{-px}(e^{-x}-1)^n \frac{dx}{x^2} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k n_k (p+n-k)\ln(p+n-k)$

$[n_k = n(n+1)\ldots(n+k-1);\ n_0 = 1]$. Ли [89] (15)

21. $\int\limits_0^\infty x^{n-1}\frac{1-e^{-mx}}{1-e^x}\,dx = (n-1)! \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{k^n}$ (сравни 4.272 11.). Ли [83] (8)

22. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^{rx}-q}\,dx = \frac{1}{qr^p}\Gamma(p) \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k^p}$ $[p > 0]$. БХ [83] (5)

23. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{xe^{\mu x}\,dx}{\beta+e^x} = \pi\beta^{\mu-1}\operatorname{cosec}(\mu\pi)\,[\ln\beta - \pi\operatorname{ctg}(\mu\pi)]$

$[|\arg\beta| < \pi,\ 0 < \operatorname{Re}\mu < 1]$. БХ [101] (5), ИПІ 120 (16) и

24. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{xe^{\mu x}}{e^{\nu x}-1}\,dx = \left(\frac{\pi}{\nu}\operatorname{cosec}\frac{\mu\pi}{\nu}\right)^2$ $[\operatorname{Re}\nu > \operatorname{Re}\mu > 0]$

(сравни 4.254 2.). Ли [101] (3)

25. $\int\limits_0^\infty x\,\frac{1+e^{-x}}{e^x-1}\,dx = \frac{\pi^2}{3} - 1$ (сравни 4.231 3.). БХ [82] (6)

26. $\int\limits_0^\infty x\,\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-3x}}\,e^{-x}dx=\frac{2\pi^2}{27}.$ Ли [82] (7) и

27. $\int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-\mu x}}{1+e^x}\,\frac{dx}{x}=\ln\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}\sqrt{\pi}\right]$ $[\operatorname{Re}\mu>-1].$ БХ [93] (4)

28. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\nu x}-e^{-\mu x}}{e^{-x}+1}\,\frac{dx}{x}=\ln\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0].$ БХ [93] (6)

29 $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{px}-e^{qx}}{1+e^{rx}}\,\frac{dx}{x}=\ln\left[\operatorname{tg}\frac{p\pi}{2r}\operatorname{ctg}\frac{q\pi}{2r}\right]$

$[|r|>|p|,\ |r|>|q|,\ rp>0,\ rq>0]$

(сравни 4.267 18.). БХ [103] (3)

30. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{px}-e^{qx}}{1-e^{rx}}\,\frac{dx}{x}=\ln\left[\sin\frac{p\pi}{r}\operatorname{cosec}\frac{q\pi}{r}\right]$

$[|r|>|p|,\ |r|>|q|,\ rp>0,\ rq>0]$

(сравни 4.267 19.). БХ [103] (4)

31 $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-qx}+e^{(q-p)x}}{1-e^{-px}}\,x\,dx=\left(\frac{\pi}{p}\operatorname{cosec}\frac{q\pi}{p}\right)^2$ $[0<q<p].$ БХ [82] (8)

32. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-px}-e^{(p-q)x}}{e^{-qx}+1}\,\frac{dx}{x}=\ln\operatorname{ctg}\frac{p\pi}{2q}$ $[0<p<q].$ БХ [93] (7)

3.412 $\int\limits_0^\infty \left\{\frac{a+be^{-px}}{ce^{px}+g+he^{-px}}-\frac{a+be^{-qx}}{ce^{qx}+g+he^{-qx}}\right\}\frac{dx}{x}=$

$=\frac{a+b}{c+g+h}\ln\frac{p}{q}$ $[p>0,\ q>0].$ БХ [96] (7)

3.413

1. $\int\limits_0^\infty \frac{(1-e^{-\beta x})(1-e^{-\gamma x})\,e^{-\mu x}}{1-e^{-x}}\,\frac{dx}{x}=\ln\frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\beta+\gamma+\mu)}{\Gamma(\mu+\beta)\,\Gamma(\mu+\gamma)}$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\mu>-\operatorname{Re}\beta,\ \operatorname{Re}\mu>-\operatorname{Re}\gamma,\ \operatorname{Re}\mu>-\operatorname{Re}(\beta+\gamma)]$

(сравни 4.267 25.). БХ [93] (13)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\{1-e^{(q-p)x}\}^2}{e^{qx}-e^{(q-2p)x}}\,\frac{dx}{x}=\ln\operatorname{cosec}\frac{q\pi}{2p}$ $[0<q<p].$ БХ [95] (6)

3. $$\int_0^\infty \frac{e^{-px}-e^{-qx}}{1+e^{-x}} \frac{1+e^{-(2n+1)x}}{x}\,dx =$$
$$= \ln\left\{\frac{q(q+2)(q+4)\ldots(q+2n)}{p(p+2)(p+4)\ldots(p+2n)} \frac{(p+1)(p+3)\ldots(p+2n-1)}{(q+1)(q+3)\ldots(q+2n-1)}\right\}$$
$[\operatorname{Re} p > -2n,\ \operatorname{Re} q > -2n]$ (сравни 4.267 14.). БХ [93] (11)

3.414 $$\int_0^\infty \frac{(1-e^{-\beta x})(1-e^{-\gamma x})(1-e^{-\delta x})e^{-\mu x}}{1-e^{-x}} \frac{dx}{x} =$$
$$= \ln \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+\beta+\gamma)\Gamma(\mu+\beta+\delta)\Gamma(\mu+\gamma+\delta)}{\Gamma(\mu+\beta)\Gamma(\mu+\gamma)\Gamma(\mu+\delta)\Gamma(\mu+\beta+\gamma+\delta)}$$
$[2\operatorname{Re}\mu > |\operatorname{Re}\beta| + |\operatorname{Re}\gamma| + |\operatorname{Re}\delta|]$
(сравни 4.267 31.). БХ [93] (14), ИП I 145 (17)

3.415

1. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+\beta^2)(e^{\mu x}-1)} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\beta\mu}{2\pi}\right) - \frac{\pi}{\beta\mu} - \psi\left(\frac{\beta\mu}{2\pi}\right)\right]$$
$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. БХ [97] (20), ВТФ I 18 (27)

2. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+\beta^2)^2(e^{2\pi x}-1)} = -\frac{1}{8\beta^3} - \frac{1}{4\beta^2} + \frac{1}{4\beta}\psi'(\beta);$$
$$= \frac{1}{4\beta^4}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|B_{2k+2}|}{\beta^{2k}} \qquad [\operatorname{Re}\beta > 0].$$
БХ [97] (22), ВТФ I 22 (12)

3.416

1. $$\int_0^\infty \frac{(1+ix)^{2n}-(1-ix)^{2n}}{i} \frac{dx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{1}{2} \frac{2n-1}{2n+1}.$$ БХ [88] (4)

2. $$\int_0^\infty \frac{(1+ix)^{2n}-(1-ix)^{2n}}{i} \frac{dx}{e^{\pi x}+1} = \frac{1}{2n+1}.$$ БХ [87] (1)

3. $$\int_0^\infty \frac{(1+ix)^{2n-1}-(1-ix)^{2n-1}}{i} \frac{dx}{e^{\pi x}+1} = \frac{1}{2n}[1-2^{2n}B_{2n}].$$ БХ [87] (2)

3.417

1. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{a^2e^x+b^2e^{-x}} = \frac{\pi}{2ab}\ln\frac{b}{a} \qquad [ab > 0]$$
(сравни 4.231 6.). БХ [101] (1)

2. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{a^2e^x-b^2e^{-x}} = \frac{\pi^2}{4ab}$$ (сравни 4.231 8.). Ли [101] (2)

3.418

1. $$\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+e^{-x}-1} = 1,171\,953\,6194\ldots$$ Ли [88] (1)

2. $$\int\limits_0^\infty \frac{xe^{-x}\,dx}{e^x+e^{-x}-1} = 0,311\,821\,1319\ldots$$ Ли [88] (2)

3. $$\int\limits_0^{\ln 2} \frac{x\,dx}{e^x+2e^{-x}-2} = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$ БХ [104] (7)

3.419

1. $$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{(\beta+e^x)(1+e^{-x})} = \frac{(\ln\beta)^2}{2(\beta-1)} \qquad [|\arg\beta|<\pi]$$ (сравни **4.232** 2.). БХ [101] (16)

2. $$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{(\beta+e^x)(1-e^{-x})} = \frac{\pi^2+(\ln\beta)^2}{2(\beta+1)} \qquad [|\arg\beta|<\pi]$$ (сравни **4.232** 3.). БХ [101] (17)

3. $$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,dx}{(\beta+e^x)(1-e^{-x})} = \frac{[\pi^2+(\ln\beta)^2]\ln\beta}{3(\beta+1)} \qquad [|\arg\beta|<\pi]$$ (сравни **4.261** 4.). БХ [102] (6)

4. $$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^3\,dx}{(\beta+e^x)(1-e^{-x})} = \frac{\pi^2+(\ln\beta)^2}{4(\beta+1)} \qquad [|\arg\beta|<\pi]$$ (сравни 4.262 3.). БХ [102] (9)

5. $$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^4\,dx}{(\beta+e^x)(1-e^{-x})} = \frac{[\pi^2+(\ln\beta)^2]^2}{15(\beta+1)}[7\pi^2+3(\ln\beta)^2]\ln\beta$$ (сравни **4.263** 1.). БХ [102] (10)

6. $$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^5\,dx}{(\beta+e^x)(1-e^{-x})} = \frac{[\pi^2+(\ln\beta)^2]^2}{6(\beta+1)}[3\pi^2+(\ln\beta)^2]^2$$ (сравни **4.264** 3). БХ [102] (7)

7. $$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{(x-\ln\beta)\,x\,dx}{(\beta-e^x)(1-e^{-x})} = \frac{-[4\pi^2+(\ln\beta)^2]\ln\beta}{6(\beta-1)} \qquad [|\arg\beta|<\pi]$$ (сравни 4.257 4.). БХ [102] (7)

3.421

1. $$\int\limits_0^\infty (e^{-\nu x}-1)^n(e^{-\varrho x}-1)^m e^{-\mu x}\frac{dx}{x^2} = \sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{l=0}^m(-1)^l\binom{m}{l}\times$$
$$\times\{(m-l)\varrho+(n-k)\nu+\mu\}\ln[(m-l)\varrho+(n-k)\nu+\mu]$$
$$[\operatorname{Re}\nu>0,\ \operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\varrho>0].$$ БХ [89] (17)

2. $$\int_0^\infty (1-e^{-\nu x})^n (1-e^{-\varrho x}) e^{-x} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (\varrho + k\nu + 1)^2 \times$$
$$\times \ln(\varrho + k\nu + 1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (k\nu+1)^2 \ln(k\nu+1)$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0,\ \operatorname{Re}\varrho > 0]$. БХ [89] (31)

3. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-\mu x}\,dx}{(\beta+e^{-x})(\gamma+e^{-x})} = \frac{\pi(\beta^{\mu-1}\ln\beta - \gamma^{\mu-1}\ln\gamma)}{(\beta-\gamma)\sin\mu\pi} + \frac{\pi^2(\beta^{\mu-1}-\gamma^{\mu-1})\cos\mu\pi}{(\gamma-\beta)\sin^2\mu\pi}$$
$[|\arg\beta| < \pi,\ |\arg\gamma| < \pi,\ \beta \neq \gamma,\ 0 < \operatorname{Re}\mu < 2]$. ИП I 120 (19)

4. $$\int_0^\infty (e^{-px}-e^{-qx})(e^{-rx}-e^{-sx}) e^{-x} \frac{dx}{x} = \ln\frac{(p+s+1)(q+r+1)}{(p+r+1)(q+s+1)}$$
$[p+s > -1,\ p+r > -1,\ q > p]$ (сравни 4.267 24.). БХ [89] (11)

5 $$\int_0^\infty (1-e^{-px})(1-e^{-qx})(1-e^{-rx}) e^{-x} \frac{dx}{x^2} = (p+q+1)\ln(p+q+1) +$$
$$+ (p+r+1)\ln(p+r+1) + (q+r+1)\ln(q+r+1) - (p+1)\ln(p+1) -$$
$$- (q+1)\ln(q+1) - (r+1)\ln(r+1) - (p+q+r)\ln(p+q+r)$$
$[p > 0,\ q > 0,\ r > 0]$ (сравни 4.268 3.). БХ [89] (14)

3.422 $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(x-a)e^{\mu x}\,dx}{(\beta-e^x)(1-e^{-x})} = \frac{-\pi^2}{e^a-1}\operatorname{cosec}^2\mu\pi\,[(e^{a\mu}+1)\ln\mu - 2\pi\operatorname{ctg}\mu\pi\,(e^{a\mu}-1)]$$
$[a > 0,\ |\arg\beta| < \pi,\ |\operatorname{Re}\mu| < 1]$ (сравни 4.257 5.). БХ [102] (8)и

3.423

1. $$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{(e^x-1)^2}\,dx = \Gamma(\nu)[\zeta(\nu-1) - \zeta(\nu)] \qquad [\operatorname{Re}\nu > 2].$$
ИП I 313 (10)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}e^{-\mu x}}{(e^x-1)^2}\,dx = \Gamma(\nu)[\zeta(\nu-1,\ \mu+1) - (\mu+1)\zeta(\nu,\ \mu+1)]$$
$[\operatorname{Re}\mu > -2,\ \operatorname{Re}\nu > 2]$. ИП I 313 (11)

3. $$\int_0^\infty \frac{x^q e^{-px}\,dx}{(1-ae^{-px})^2} = \frac{\Gamma(q+1)}{ap^{q+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k}{k^q} \qquad [a < 1,\ q > -1,\ p > 0].$$
БХ [85] (13)

4. $$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}e^{-\mu x}}{(1-\beta e^{-x})^2}\,dx = \Gamma(\nu)[{}_1F_1(\beta;\ \nu-1;\ \mu-1) - (\mu-1)\,{}_1F_1(\beta;\ \nu;\ \mu-1)]$$
$[\operatorname{Re}\nu > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ |\arg(1-\beta)| < \pi]$. ИП I 313 (12)

5. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^x\,dx}{(\beta+e^x)^2} = \frac{1}{\beta}\ln\beta \qquad [|\arg\beta| < \pi] \qquad \text{(сравни 4.231 3.)}.$$
БХ [101] (10)

3.424

1. $\int\limits_0^\infty \frac{(1+a)\,e^x - a}{(1-e^x)^2} e^{-ax} x^n\,dx = n!\,\zeta(n,\ a).$ БХ [85] (15)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{(1+a)\,e^x + a}{(1+e^x)^2} e^{-ax} x^n\,dx = n! \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{(a+k)^n}.$ БХ [85] (14)

3 $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{a^2e^x + b^2e^{-x}}{(a^2e^x - b^2e^{-x})^2} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{2ab}$ $[ab > 0]$. БХ [102] (3) и

4 $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{a^2e^x - b^2e^{-x}}{(a^2e^x + b^2e^{-x})^2} x^2\,dx = \frac{\pi}{ab} \ln \frac{b}{a}$ $[ab > 0]$. БХ [102] (1)

5. $\int\limits_0^\infty \frac{e^x - e^{-x} + 2}{(e^x - 1)^2} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2 - 2.$ БХ [85] (7)

3.425

1. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{xe^x\,dx}{(a^2 + b^2e^{2x})^n} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)}{4a^{2n-1}b\Gamma(n)} \left[2\ln\frac{a}{2b} - C - \psi\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$

$[ab > 0,\ n > 0]$ (сравни 4.231 5.)

БХ [101] (13), Лв [101] (13)

2. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{(a^2e^x - e^{-x})\,x^2\,dx}{(a^2e^x + e^{-x})^{p+1}} = -\frac{1}{a^{p+1}} \mathrm{B}\left(\frac{p}{2},\ \frac{p}{2}\right) \ln a$

$[a > 0,\ p > 0]$. БХ [102] (5)

3.426

1. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{(e^x - ae^{-x})\,x^2\,dx}{(a+e^x)^2\,(1+e^{-x})^2} = \frac{(\ln a)^2}{a-1}.$ БХ [102] (12)

2 $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{(e^x - ae^{-x})\,x^2\,dx}{(a+e^x)^2\,(1-e^{-x})^2} = \frac{\pi^2 + (\ln a)^2}{a+1}.$ БХ [102] (13)

3.427

1. $\int\limits_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-\mu x}}{e^{-x} - 1}\right) dx = \psi(\mu)$ $[\mathrm{Re}\,\mu > 0]$

(сравни 4.281 4.). УВ II 20

2. $\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\,dx = C$ (сравни 4.281 1.). БХ [94] (1)

3. $\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{-x}}\right) \frac{e^{-2x}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{4}.$ БХ [94] (5)

4. $$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{e^x-1}\right)\frac{e^{-\mu x}}{x}\,dx=\ln\Gamma(\mu)-\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\ln\mu+\mu-\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$[\operatorname{Re}\mu>0]$. УВ II 23

5. $$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{1}{e^x+1}\right)\frac{dx}{x}=-\frac{1}{2}\ln\pi.$$ БХ [94] (6)

6. $$\int_0^\infty \left(\frac{e^{\mu x}-1}{1-e^{-x}}-\mu\right)\frac{e^{-x}}{x}\,dx=-\ln\Gamma(\mu)-\ln\sin(\pi\mu)+\ln\pi$$

$[\operatorname{Re}\mu<1]$. ВТФІ 21 (6)

7. $$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-\nu x}}{1-e^{-x}}-\frac{e^{-\mu x}}{x}\right)dx=\ln\mu-\psi(\nu)$$ (сравни 4.281 5.). БХ [94] (3)

8. $$\int_0^\infty \left(\frac{n}{x}-\frac{e^{-\mu x}}{1-e^{-x/n}}\right)e^{-x}\,dx=n\psi(n\mu+n)-n\ln n$$ $[\operatorname{Re}\mu>0]$. БХ [94] (4)

9. $$\int_0^\infty \left(\mu-\frac{1-e^{-\mu x}}{1-e^{-x}}\right)\frac{e^{-x}}{x}\,dx=\ln\Gamma(\mu+1)$$ $[\operatorname{Re}\mu>-1]$. УВ II 24

10. $$\int_0^\infty \left(\nu e^{-x}-\frac{e^{-\mu x}-e^{-(\mu+\nu)x}}{e^x-1}\right)\frac{dx}{x}=\ln\frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma(\mu+1)}$$ $[\operatorname{Re}\mu>-1,\ \operatorname{Re}\nu>0]$

(сравни 4.267 33.). БХ [94] (8)

11. $$\int_0^\infty [(1-e^x)^{-1}+x^{-1}-1]\,e^{-xz}\,dx=\psi(z)-\ln z$$ $[\operatorname{Re}z>0]$. ВТФІ 18 (24)

3.428

1. $$\int_0^\infty \left(\nu e^{-\mu x}-\frac{1}{\mu}e^{-x}-\frac{1}{\mu}\,\frac{e^{-x}-e^{-\mu\nu x}}{1-e^{-x}}\right)\frac{dx}{x}=\frac{1}{\mu}\ln\Gamma(\mu\nu)-\nu\ln\mu$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$. БХ [94] (18)

2. $$\int_0^\infty \left(\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{1-e^{-x}}+\frac{e^{(1-\mu)x}}{1-e^{x/n}}+\frac{e^{-n\mu x}}{1-e^{-x}}\right)e^{-x}\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{n-1}{2}\ln 2\pi-\left(n\mu+\frac{1}{2}\right)\ln n$$ $[\operatorname{Re}\mu>0]$. БХ [94] (14)

3. $$\int_0^\infty \left(n\mu-\frac{n-1}{2}-\frac{n}{1-e^{-x}}-\frac{e^{(1-\mu)x}}{1-e^{\frac{x}{n}}}\right)\frac{e^{-x}}{x}\,dx=\sum_0^{n-1}\ln\Gamma\left(\mu-\frac{k}{n}+1\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu>0]$. БХ 94 (13)

4. $$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-\nu x}}{1-e^{x}}-\frac{e^{-\mu\nu x}}{1-e^{\mu x}}-\frac{e^{x}}{1-e^{x}}+\frac{e^{\mu x}}{1-e^{\mu x}}\right)\frac{dx}{x}=\nu\ln\mu$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$. Ли [94] (15)

5. $$\int_0^\infty \left[\frac{1}{e^x-1} - \frac{\mu e^{-\mu x}}{1-e^{-\mu x}} + \left(a\mu - \frac{\mu+1}{2}\right)e^{-\mu x} + (1-a\mu)e^{-x}\right]\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{\mu-1}{2}\ln(2\pi) + \left(\frac{1}{2} - a\mu\right)\ln\mu \quad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ БХ [94] (16)

6. $$\int_0^\infty \left[\frac{e^{-\nu x}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-\mu\nu x}}{1-e^{-\mu x}} - \frac{(\mu-1)e^{-\mu x}}{1-e^{-\mu x}} - \frac{\mu-1}{2}e^{-\mu x}\right]\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{\mu-1}{2}\ln(2\pi) + \left(\frac{1}{2} - \mu\nu\right)\ln\mu$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$ (сравни 4.267 37.). БХ [94] (17)

7. $$\int_0^\infty \left[1 - e^{-x} - \frac{(1-e^{-\nu x})(1-e^{-\mu x})}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x} = \ln \mathrm{B}(\mu, \nu)$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$ (сравни 4.267 35.). БХ [94] (12)

3.429 $$\int_0^\infty [e^{-x} - (1+x)^{-\mu}]\frac{dx}{x} = \psi(\mu) \quad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ ВТФ I 17 (20), НГ 184 (7)

3.431

1. $$\int_0^\infty \left(e^{-\mu x} - 1 + \mu x - \frac{1}{2}\mu^2 x^2\right)x^{\nu-1}\,dx = \frac{-1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)\mu^\nu}\Gamma(\nu+3)$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ -2 > \operatorname{Re}\nu > -3]$. Ли [90] (5)

2 $$\int_0^\infty \left[x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2}(x+2)(1-e^{-x})\right]e^{-px}\,dx = -1 + \left(p+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$$
$[\operatorname{Re} p > 0]$. ИП I 144 (6)

3.432

1. $$\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-mx}(e^{-x}-1)^n\,dx = \Gamma(\nu)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{(n+m-k)^\nu}$$
$[\operatorname{Re}\nu > 0]$. Ли [90] (10)

2. $$\int_0^\infty [x^{\nu-1}e^{-x} - e^{-\mu x}(1-e^{-x})^{\nu-1}]\,dx = \Gamma(\nu) - \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\nu)}$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. Ли [81] (14)

3.433 $$\int_0^\infty x^{p-1}\left[e^{-x} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right]dx = \Gamma(p) \quad [-n < p < -n+1].$$ ФИ II 805

3.434

1. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\nu x} - e^{-\mu x}}{x^{\varrho+1}}\,dx = \frac{\mu^\varrho - \nu^\varrho}{\varrho}\Gamma(1-\varrho) \quad [\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0,\ \operatorname{Re}\varrho < 1].$$ БХ [90] (6)

2. $\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x} - e^{-\nu x}}{x}\,dx = \ln\frac{\nu}{\mu}$ $[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ФИ 634

3.435

1. $\int_0^\infty \left\{(x+1)e^{-x} - e^{-\frac{x}{2}}\right\}\frac{dx}{x} = 1 - \ln 2$. Ли [89] (19)

2. $\int_0^\infty \frac{1-e^{-\mu x}}{x(x+\beta)}\,dx = \frac{1}{\beta}\left[\ln(\beta\mu) - e^{\beta\mu}\operatorname{Ei}(-\beta\mu)\right]$ $[|\arg\beta| < \pi,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$.

ИПШ 217 (18)

3. $\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right)\frac{dx}{x} = C$. ФИ 795, ФИ 802

4. $\int_0^\infty \left(e^{-\mu x} - \frac{1}{1+ax}\right)\frac{dx}{x} = \ln\frac{a}{\mu} - C$ $[a > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. БХ [92] (10)

3.436 $\int_0^\infty \left\{\frac{e^{-npx} - e^{-nqx}}{n} - \frac{e^{-mpx} - e^{-mqx}}{m}\right\}\frac{dx}{x^2} = (q-p)\ln\frac{m}{n}$ $[p > 0,\ q > 0]$.

БХ [89] (28)

3.437 $\int_0^\infty \left\{pe^{-x} - \frac{1-e^{-px}}{x}\right\}\frac{dx}{x} = p\ln p - p$ $[p > 0]$. БХ [89] (24)

3.438

1. $\int_0^\infty \left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right)e^{-x} - \frac{1}{x}e^{-\frac{x}{2}}\right\}\frac{dx}{x} = \frac{\ln 2 - 1}{2}$. БХ [89] (19)

2. $\int_0^\infty \left\{\frac{p^2}{6}e^{-x} - \frac{p^2}{2x} - \frac{p}{x^2} - \frac{1-e^{-px}}{x^3}\right\}\frac{dx}{x} = \frac{p^2}{6}\ln p - \frac{11}{36}p^3$ $[p > 0]$.

БХ [89] (33)

3. $\int_0^\infty \left(e^{-x} - e^{-2x} - \frac{1}{x}e^{-2x}\right)\frac{dx}{x} = 1 - \ln 2$. БХ [89] (25)

4. $\int_0^\infty \left\{\left(p - \frac{1}{2}\right)e^{-x} + \frac{x+2}{2x}\left(e^{-px} - e^{-\frac{x}{2}}\right)\right\}\frac{dx}{x} = \left(p - \frac{1}{2}\right)(\ln p - 1)$

$[p > 0]$. БХ [89] (22)

3.439 $\int_0^\infty \left\{(p-q)e^{-rx} + \frac{1}{mx}\left(e^{-mpx} - e^{-mqx}\right)\right\}\frac{dx}{x} =$

$= p\ln p - q\ln q - (p-q)\left(1 + \ln\frac{r}{m}\right)$ $[p > 0,\ q > 0,\ r > 0]$.

Ли [89] (26), Ли [89] (27)

3.441 $$\int_0^\infty \{(p-r)e^{-qx}+(r-q)e^{-px}+(q-p)e^{-rx}\}\frac{dx}{x^2}=(r-q)p\ln p+$$
$$+(p-r)q\ln q+(q-p)r\ln r$$
$[p>0,\ q>0,\ r>0]$ (сравни 4.268 6.). БХ [89] (18)

3.442

1. $$\int_0^\infty \left\{1-\frac{x+2}{2x}(1-e^{-x})\right\}e^{-qx}\frac{dx}{x}=-1+\left(q+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{q+1}{q}\qquad [q>0].$$ БХ [89] (23)

2. $$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}-1}{x}+\frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x}=C-1.$$ БХ [92] (16)

3. $$\int_0^\infty \left(e^{-px}-\frac{1}{1+a^2x^2}\right)\frac{dx}{x}=-C+\ln\frac{a}{p}\qquad [p>0].$$ БХ [92] (11)

3.443

1. $$\int_0^\infty \left\{\frac{e^{-x}p^2}{2}-\frac{p}{x}+\frac{1-e^{-px}}{x^2}\right\}\frac{dx}{x}=\frac{p^2}{2}\ln p-\frac{3}{4}\ p^2\qquad [p>0].$$ БХ [89] (32)

2. $$\int_0^\infty \frac{(1-e^{-px})^n e^{-qx}}{x^3}\,dx=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(q+kp)^2\ln(q+kp)$$
$[n>2,\ q>0,\ pn+q>0]$ (сравни 4.268 4.). БХ [89] (30)

3. $$\int_0^\infty (1-e^{-px})^2 e^{-qx}\frac{dx}{x^2}=(2p+q)\ln(2p+q)-2(p+q)\ln(p+q)+q\ln q$$
$[q>0,\ 2p>-q]$ (сравни 4.268 2.). БХ [89] (13)

3.45 Алгебраические функции от показательной функции и степенная функция

3.451

1. $$\int_0^\infty xe^{-x}\sqrt{1-e^{-x}}\,dx=\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}-\ln 2\right).$$ БХ [99] (1)

2. $$\int_0^\infty xe^{-x}\sqrt{1-e^{-2x}}\,dx=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}+\ln 2\right)$$ (сравни 4.241 9.). БХ [99] (2)

3.452

1. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{e^x-1}}=2\pi\ln 2.$$ ФII 643 и, БХ [99] (4)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{e^x-1}}=4\pi\left\{(\ln 2)^2+\frac{\pi^2}{12}\right\}.$$ БХ [99] (5)

3. $$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}\,dx}{\sqrt{e^x-1}}=\frac{\pi}{2}[2\ln 2-1].$$ БХ [99] (6)

4. $\int_0^\infty \frac{xe^{-x}\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = 1 - \ln 2.$ БХ [99] (8)

5. $\int_0^\infty \frac{xe^{-2x}\,dx}{\sqrt{e^x-1}} = \frac{3}{4}\pi\left(\ln 2 - \frac{7}{12}\right).$ БХ [99] (7)

3.453

1. $\int_0^\infty \frac{xe^x}{a^2e^x-(a^2-b^2)} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \frac{2\pi}{ab} \ln\left(1+\frac{b}{a}\right)$ $[ab>0]$ (сравни 4.298 18.).

БХ [99] (16)

2. $\int_0^\infty \frac{xe^x\,dx}{[a^2e^x-(a^2+b^2)]\sqrt{e^x-1}} = \frac{2\pi}{ab} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ $[ab>0]$ (сравни 4.298 19.).

БХ [99] (17)

3.454

1. $\int_0^\infty \frac{xe^{-2nx}\,dx}{\sqrt{e^{2x}+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \left\{\ln 2 + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}\right\}.$ Ли [99] (10)

2. $\int_0^\infty \frac{xe^{-(2n-1)x}\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = -\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \left\{\ln 2 + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k}\right\}.$ Ли [99] (9)

3.455

1. $\int_0^\infty \frac{x^2e^x\,dx}{\sqrt{(e^x-1)^3}} = 8\pi \ln 2.$ БХ [99] (11)

2. $\int_0^\infty \frac{x^3e^x\,dx}{\sqrt{(e^x-1)^3}} = 24\pi\left[(\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{12}\right].$ БХ [99] (12)

3.456

1. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{e^{3x}-1}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left[\ln 3 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right].$ БХ [99] (13)

2. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(e^{3x}-1)^2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left[\ln 3 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right]$ (сравни 4.244 3.). БХ [99] (14)

3.457

1. $\int_0^\infty xe^{-x}\left(1-e^{-2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} dx = \frac{(2n-1)!!}{4\cdot(2n)!!}\pi\,[C+\psi(n+1)+2\ln 2]$

(сравни 4.241 5.). БХ [99] (3)

2. $\int_{-\infty}^\infty \frac{xe^x\,dx}{(a+e^x)^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(2n+1)\,a^{n+\frac{1}{2}}} [\ln(4a) - 3C - 2\psi(2n) - \psi(n)].$

БХ [101] (12)

3. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{(a^2e^x+e^{-x})^\mu} = \frac{-1}{2a^\mu} \mathrm{B}\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}\right) \ln a$

$[a>0, \operatorname{Re}\mu>0].$ БХ [101] (14)

3.458

1. $$\int\limits_0^{\ln 2} xe^x (e^x-1)^{p-1}\,dx = \frac{1}{p}\left[\ln 2 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{p+k+1}\right].$$ БХ [104] (4)

2. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^x\,dx}{(a+e^x)^{\nu+1}} = \frac{1}{\nu a^\nu}[\ln a - C - \psi(\nu)] \qquad [a>0];$$

$$= \frac{1}{\nu a^\nu}\left[\ln a - \sum_{k=1}^{\nu-1}\frac{1}{k}\right] \qquad [\nu\text{ — целое}].$$ БХ [101] (11)

3.46—3.48 Показательная функция от более сложных аргументов и степенная функция

3.461

1. $$\int\limits_u^{\infty} \frac{e^{-p^2x^2}}{x^{2n}}\,dx = \frac{(-1)^n 2^{n-1} p^{2n-1}\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}[1-\Phi(pu)] +$$

$$+ \frac{e^{-p^2u^2}}{2u^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k 2^{k+1}(pu)^{2k}}{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k-1)} \qquad [p>0].$$ НИ 21 (4)

2. $$\int\limits_0^{\infty} x^{2n}e^{-px^2}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{2(2p)^n}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \qquad [p>0].$$ ФII 743

3. $$\int\limits_0^{\infty} x^{2n+1}e^{-px^2}\,dx = \frac{n!}{2p^{n+1}} \qquad [p>0].$$ БХ [81] (7)

4. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x+ai)^{2n}e^{-x^2}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2a)^{2k}n!}{(2k)!\,(n-k)!}.$$

БХ [100] (12)

5. $$\int\limits_u^{\infty} e^{-\frac{1}{\mu}x^2}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{u}e^{-\mu^2u^2} - \mu\sqrt{\pi}[1-\Phi(u\mu)]$$

$$\left[|\arg\mu| < \frac{\pi}{4},\ u>0\right].$$ ИПI 135 (19) и

3.462

1. $$\int\limits_0^{\infty} x^{\nu-1}e^{-\beta x^2-\gamma x}\,dx = (2\beta)^{-\frac{\nu}{2}}\Gamma(\nu)\exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right)D_{-\nu}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right)$$

$[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$. ВТФII 119 (3) и, ИПI 313 (13)

2. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-px^2+2qx}\,dx = \frac{1}{2^{n-1}p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\frac{d^{n-1}}{dq^{n-1}}\left(qe^{\frac{q^2}{p}}\right) \qquad [p>0];$$ БХ [100] (8)

$$= n!\,e^{\frac{q^2}{p}}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\frac{q}{p}\right)^n\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{(n-2k)!\,(k)!}\left(\frac{p}{4q^2}\right)^k \qquad [p>0].$$

Ли [100] (8)

3. $$\int_{-\infty}^{\infty}(ix)^{\nu}e^{-\beta^2x^2-iqx}\,dx=2^{-\frac{\nu}{2}}\sqrt{\pi}\,\beta^{-\nu-1}\exp\left(-\frac{q^2}{8\beta^2}\right)D_{\nu}\left(\frac{q}{\beta\sqrt{2}}\right)$$

$$\left[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ \arg ix=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}x\right].$$ ИП I 121 (23)

4. $$\int_{-\infty}^{\infty}x^n\exp\left[-(x-\beta)^2\right]dx=(2i)^{-n}\sqrt{\pi}\,H_n(iz).$$ ВТФ II 195 (31)

5. $$\int_0^{\infty}xe^{-\mu x^2-2\nu x}\,dx=\frac{1}{2\mu}-\frac{\nu}{2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\,e^{\frac{\nu^2}{\mu}}\left[1-\Phi\left(\frac{\nu}{\sqrt{\mu}}\right)\right]$$

$$\left[|\arg\nu|<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}\mu>0\right].$$ ИП I 146 (31) и

6. $$\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-px^2+2qx}\,dx=\frac{q}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\exp\left(\frac{q^2}{p}\right)\qquad[\operatorname{Re}p>0].$$ БХ [100] (7)

7. $$\int_0^{\infty}x^2e^{-\mu x^2-2\nu x}\,dx=-\frac{\nu}{2\mu^2}+\sqrt{\frac{\pi}{\mu^5}}\,\frac{2\nu^2+\mu}{4}\,e^{\frac{\nu^2}{\mu}}\left[1-\Phi\left(\frac{\nu}{\sqrt{\mu}}\right)\right]$$

$$\left[|\arg\nu|<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}\mu>0\right].$$ ИП I 146 (32)

8. $$\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\mu x^2+2\nu x}\,dx=\frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\left(1+2\frac{\nu^2}{\mu}\right)e^{\frac{\nu^2}{\mu}}$$

$$[|\arg\nu|<\pi,\ \operatorname{Re}\mu>0].$$ БХ [100] (8) и

3.463 $$\int_0^{\infty}\left(e^{-x^2}-e^{-x}\right)\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}C.$$ БХ [89] (5)

3.464 $$\int_0^{\infty}\left(e^{-\mu x^2}-e^{-\nu x^2}\right)\frac{dx}{x^2}=\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\nu}-\sqrt{\mu}\right)$$

$$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0].$$ Ф II 645

3.465 $$\int_0^{\infty}\left(1+2\beta x^2\right)e^{-\mu x^2}\,dx=\frac{\mu+\beta}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mu^3}}\qquad[\operatorname{Re}\mu>0].$$ ИП I 136 (24) и

3.466

1. $$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\mu^2x^2}}{x^2+\beta^2}\,dx=\left[1-\Phi(\beta\mu)\right]\frac{\pi}{2\beta}e^{\beta^2\mu^2}$$

$$\left[\operatorname{Re}\beta>0,\ |\arg\mu|<\frac{\pi}{4}\right].$$ НИ 19 (13)

2. $$\int_0^{\infty}\frac{x^2e^{-\mu^2x^2}}{x^2+\beta^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\mu}-\frac{\pi\beta}{2}e^{\mu^2\beta^2}\left[1-\Phi(\beta\mu)\right]$$

$$\left[\operatorname{Re}\beta>0,\ |\arg\mu|<\frac{\pi}{4}\right].$$ ИП II 217 (16)

3. $\int\limits_0^1 \frac{e^{x^2}-1}{x^2}dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!\,(2k-1)}$. ФИ II 683

3.467 $\int\limits_0^{\infty} \left(e^{-x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}C.$ БХ [92] (12)

3.468

1. $\int\limits_{u\sqrt{2}}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2-u^2}}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4u}[1-\Phi(u)]^2 \qquad [u>0].$ НИ 33 (17)

2. $\int\limits_0^{\infty} \frac{xe^{-\mu x^2}\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\,e^{a^2\mu}\left[1-\Phi\left(a\sqrt{\mu}\right)\right]$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ a>0].$ НИ 19 (11)

3.469

1. $\int\limits_0^{\infty} e^{-\mu x^4-2\nu x^2}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\nu}{\mu}}\exp\left(\frac{\nu^2}{2\mu}\right)K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\nu^2}{2\mu}\right)$

$[\operatorname{Re}\mu>0].$ ИП I 146 (23)

2. $\int\limits_0^{\infty} \left(e^{-x^4}-e^{-x}\right)\frac{dx}{x} = \frac{3}{4}C.$ БХ [89] (7)

3. $\int\limits_0^{\infty} \left(e^{-x^4}-e^{-x^2}\right)\frac{dx}{x} = \frac{1}{4}C.$ БХ [89] (6)

3.471

1. $\int\limits_0^{u} \exp\left(-\frac{\beta}{x}\right)\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{\beta}{u}\right).$ ИП II 188 (22)

2. $\int\limits_0^{u} x^{\nu-1}(u-x)^{\mu-1}e^{-\frac{\beta}{x}}\,dx = \beta^{\frac{\nu-1}{2}}u^{\frac{2\mu+\nu-1}{2}}\exp\left(-\frac{\beta}{2u}\right)\times$

$\times\Gamma(\mu)\,W_{\frac{1-2\mu-\nu}{2},\,\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\beta}{u}\right) \qquad [\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ u>0].$

ИП II 187 (18)

3. $\int\limits_0^{u} x^{-\mu-1}(u-x)^{\mu-1}e^{-\frac{\beta}{x}}\,dx = \beta^{-\mu}u^{\mu-1}\,\Gamma(\mu)\exp\left(-\frac{\beta}{u}\right)$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ u>0].$ ИП II 187 (16)

4. $\int\limits_0^{u} x^{-2\mu}(u-x)^{\mu-1}e^{-\frac{\beta}{x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi u}}\beta^{\frac{1}{2}-\mu}e^{-\frac{\beta}{2u}}\,\Gamma(\mu)\,K_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta}{2u}\right)$

$[u>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\mu>0].$ ИП II 187 (17)

5. $$\int_u^\infty x^{\nu-1}(x-u)^{\mu-1}e^{\frac{\beta}{x}}\,dx =$$
$$= \mathrm{B}(1-\mu-\nu, \mu)\,u^{\mu+\nu-1}\,{}_1F_1\left(1-\mu-\nu;\ 1-\nu;\ \frac{\beta}{u}\right)$$
$[0 < \operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}(1-\nu),\ u > 0]$. ИП II 203 (15)

6. $$\int_u^\infty x^{-2\mu}(x-u)^{\mu-1}e^{\frac{\beta}{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{u}}\,\beta^{\frac{1}{2}-\mu}\,\Gamma(\mu)\exp\left(\frac{\beta}{2u}\right) I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta}{2u}\right)$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ u > 0]$. ИП II 202 (14)

7. $$\int_0^\infty x^{\nu-1}(x+\gamma)^{\mu-1}e^{-\frac{\beta}{x}}\,dx =$$
$$= \beta^{\frac{\nu-1}{2}}\gamma^{\frac{\nu-1}{2}+\mu}\,\Gamma(1-\mu-\nu)\,e^{\frac{\beta}{2\gamma}}W_{\frac{\nu-1}{2}+\mu,\ -\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$$
$[|\arg\gamma| < \pi,\ \operatorname{Re}(1-\mu) > \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП II 234 (13) и

8. $$\int_0^u x^{-2\mu}(u^2-x^2)^{\mu-1}e^{-\frac{\beta}{x}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} u^{\mu-\frac{3}{2}}\Gamma(\mu)\,K_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta}{u}\right)$$
$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ u > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. ИП II 188 (23) и

9. $$\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-\frac{\beta}{x}-\gamma x}\,dx = 2\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\nu}{2}}K_\nu\left(2\sqrt{\beta\gamma}\right) \qquad [\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0].$$
ВТФ II 82 (23) и, ИП I 146 (29)

10. $$\int_0^\infty x^{\nu-1}\exp\left[\frac{i\mu}{2}\left(x-\frac{\beta^2}{x}\right)\right]dx = 2\beta^\nu e^{\frac{i\nu\pi}{2}}K_{-\nu}(\beta\mu)$$
$[\operatorname{Im}\mu > 0,\ \operatorname{Im}(\beta^2\mu) > 0]$. ВТФ II 82 (24)

11. $$\int_0^\infty x^{\nu-1}\exp\left[\frac{i\mu}{2}\left(x+\frac{\beta^2}{x}\right)\right]dx = i\pi\beta^\nu e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}H_{-\nu}^{(1)}(\beta\mu)$$
$[\operatorname{Im}\mu > 0,\ \operatorname{Im}(\beta^2\mu) > 0]$. ВТФ II 21 (33)

12. $$\int_{-\infty}^\infty x^{\nu-1}\exp\left(-x-\frac{\mu^2}{4x}\right)dx = 2\left(\frac{\mu}{2}\right)^\nu K_{-\nu}(\mu)$$
$\left[|\arg\mu| < \frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}\mu^2 > 0\right]$. В 203 (15)

13. $$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}e^{-\frac{\beta}{x}}}{x+\gamma}\,dx = \gamma^{\nu-1}e^{\frac{\beta}{\gamma}}\,\Gamma(1-\nu)\,\Gamma\left(\nu,\ \frac{\beta}{\gamma}\right)$$
$[|\arg\gamma| < \pi,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\nu < 1]$. ИП II 218 (19)

14. $$\int_0^1 \frac{\exp\left(1-\frac{1}{x}\right)-x^\nu}{x(1-x)}\,dx = \psi(\nu) \qquad [\operatorname{Re}\nu > 0].$$
БХ [80] (7)

3.472

1. $$\int_0^\infty \left(\exp\left(-\frac{a}{x^2}\right)-1\right)e^{-\mu x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\left[\exp\left(-2\sqrt{a\mu}\right)-1\right]$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}a>0]$. ИП I 146 (30)

2. $$\int_0^\infty x^2\exp\left(-\frac{a}{x^2}-\mu x^2\right)dx=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\mu^3}}\left(1+2\sqrt{a\mu}\right)\exp\left(-2\sqrt{a\mu}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}a>0]$. ИП I 146 (26)

3. $$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{a}{x^2}-\mu x^2\right)\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-2\sqrt{a\mu}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ a>0]$. ИП I 146 (28) и

4. $$\int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2a}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\right]\frac{dx}{x^4}=\sqrt{\frac{a\pi}{2}}(1+a)e^{-\frac{1}{a}}$$

$[a>0]$. БХ [98] (14)

3.473 $$\int_0^\infty \exp\left(-x^n\right)x^{\left(m+\frac{1}{2}\right)n-1}\,dx=\frac{(2m-1)!!}{2^m n}\sqrt{\pi}.$$ БХ [98] (6)

3.474

1. $$\int_0^1 \left\{\frac{n\exp\left(1-x^{-n}\right)}{1-x^n}-\frac{x^{np}}{1-x}\right\}\frac{dx}{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi\left(p+\frac{k-1}{n}\right)$$

$[p>0]$. БХ [80] (8)

2. $$\int_0^1 \left\{\frac{n\exp\left(1-x^{-n}\right)}{1-x^n}-\frac{\exp\left(1-\frac{1}{x}\right)}{1-x}\right\}\frac{dx}{x}=-\ln n.$$ БХ [80] (9)

3.475

1. $$\int_0^\infty \left\{\exp\left(-x^{2^n}\right)-\frac{1}{1+x^{2^{n+1}}}\right\}\frac{dx}{x}=-\frac{1}{2^n}C.$$ БХ [92] (14)

2. $$\int_0^\infty \left\{\exp\left(-x^{2^n}\right)-\frac{1}{1+x^2}\right\}\frac{dx}{x}=-2^{-n}C.$$ БХ [92] (13)

3. $$\int_0^\infty \left\{\exp\left(-x^{2^n}\right)-e^{-x}\right\}\frac{dx}{x}=\left(1-2^{-n}\right)C.$$ БХ [89] (8)

3.476

1. $$\int_0^\infty \left[\exp\left(-\nu x^p\right)-\exp\left(-\mu x^p\right)\right]\frac{dx}{x}=\frac{1}{p}\ln\frac{\mu}{\nu}$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$. БХ [89] (3)

2. $\int\limits_0^\infty [\exp(-x^p) - \exp(-x^q)] \frac{dx}{x} = \frac{p-q}{pq} C$

$[p > 0,\ q > 0]$. БХ [89] (9)

3.477

1. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\exp(-a|x|)}{x-u} dx = \frac{\operatorname{sign} u}{\pi} [\exp(a|u|) \operatorname{Ei}(-a|u|) -$

$- \exp(-a|u|) \overline{\operatorname{Ei}}(a|u|)]$ $[a > 0]$. ИП II 251 (35)

2. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sign} x \exp(-a|x|)}{x-u} dx = -[\exp(a|u|) \operatorname{Ei}(-a|u|) -$

$- \exp(-a|u|) \overline{\operatorname{Ei}}(a|u|)]$ $[a > 0]$. ИП II 251 (36)

3.478

1. $\int\limits_0^\infty x^{\nu-1} \exp(-\mu x^p)\, dx = \frac{1}{|p|} \mu^{-\frac{\nu}{p}} \Gamma\left(\frac{\nu}{p}\right)$

$[\operatorname{Re} \mu > 0,\ \operatorname{Re} \nu > 0]$. БХ [81] (8) и, ИП I 313 (15 и 16)

2. $\int\limits_0^\infty x^{\nu-1} [1 - \exp(-\mu x^p)]\, dx = -\frac{1}{|p|} \mu^{-\frac{\nu}{p}} \Gamma\left(\frac{\nu}{p}\right)$

$[\operatorname{Re} \mu > 0$ и $-p < \operatorname{Re} \nu < 0$ при $p > 0,\ 0 < \operatorname{Re} \nu < -p$ при $p < 0]$.

ИП I 313 (18 и 19)

3. $\int\limits_0^u x^{\nu-1} (u-x)^{\mu-1} \exp(\beta x^n)\, dx = \mathrm{B}(\mu, \nu)\, u^{\mu+\nu-1} \times$

$\times {}_nF_n\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\nu+1}{n}, \ldots, \frac{\nu+n-1}{n}; \frac{\mu+\nu}{n}, \frac{\mu+\nu+1}{n}, \ldots, \frac{\mu+\nu+n-1}{n}; \beta u^n\right)$

$[\operatorname{Re} \mu > 0,\ \operatorname{Re} \nu > 0,\ n = 2, 3, \ldots]$. ИП II 187 (15)

4. $\int\limits_0^\infty x^{\nu-1} \exp(-\beta x^p - \gamma x^{-p})\, dx = \frac{2}{p} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{\nu}{2p}} K_{\frac{\nu}{p}}(2\sqrt{\beta\gamma})$

$[\operatorname{Re} \beta > 0,\ \operatorname{Re} \gamma > 0]$. ИП I 313 (17)

3.479

1. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\nu-1} \exp(-\beta\sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\nu} \Gamma(\nu) K_{\frac{1}{2}-\nu}(\beta)$

$[\operatorname{Re} \beta > 0,\ \operatorname{Re} \nu > 0]$. ИП I 313 (14)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}\exp(i\mu\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1-\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)H^{(1)}_{\frac{1-\nu}{2}}(\mu)$$

$[\operatorname{Im}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ВТФII 83 (30)

3.481

1. $$\int_{-\infty}^\infty xe^x \exp(-\mu e^x)\,dx = -\frac{1}{\mu}(C + \ln\mu)$$ $[\operatorname{Re}\mu > 0]$. БХ [100] (13)

2. $$\int_{-\infty}^\infty xe^x \exp(-\mu e^{2x})\,dx = -\frac{1}{4}[C + \ln(4\mu)]\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0]$. БХ [100] (14)

3.482

1. $$\int_0^\infty \exp(nx - \beta\operatorname{sh}x)\,dx = \frac{1}{2}[S_n(\beta) - \pi\mathbf{E}_n(\beta) + \pi N_n(\beta)]$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0]$. ИПI 168 (11)

2. $$\int_0^\infty \exp(-nx - \beta\operatorname{sh}x)\,dx = (-1)^{n+1}\frac{1}{2}[S_n(\beta) + \pi\mathbf{E}_n(\beta) + \pi N_n(\beta)]$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0]$. ИПI 168 (12)

3. $$\int_0^\infty \exp(-\nu x - \beta\operatorname{sh}x)\,dx = \frac{\pi}{\sin\nu\pi}[\mathbf{J}_\nu(\beta) - J_\nu(\beta)]$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0]$. ИП I 168 (13)

3.483 $$\int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(\nu\operatorname{Arsh}x - iax)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \begin{cases} -2\exp\left(-\frac{i\nu\pi}{2}\right)K_\nu(a) & \text{при } a > 0, \\ -2\exp\left(\frac{i\nu\pi}{2}\right)\cdot K_\nu(a) & \text{при } a < 0 \end{cases}$$

$[|\operatorname{Re}\nu| < 1]$. ИПI 122 (32)

3.484 $$\int_0^\infty \left[\left(1+\frac{a}{qx}\right)^{qx} - \left(1+\frac{a}{px}\right)^{px}\right]\frac{dx}{x} = (e^a - 1)\ln\frac{q}{p}$$

$[p > 0,\ q > 0]$. БХ [89] (34)

3.485 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-\operatorname{tg}^2 x)\,dx = \frac{\pi e}{2}[1 - \Phi(1)].$$

3.486 $$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \int_0^1 e^{-x\ln x}\,dx = \sum_{k=1}^\infty k^{-k}.$$ Ф II 483

3.5 ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

3.51 Гиперболические функции

3.511

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{\pi}{2a} \quad [a > 0].$

2. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx}\, dx = \frac{\pi}{2b} \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2b} \quad [b > |a|].$ БХ [27] (10) и

3. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} bx}\, dx = \frac{\pi}{2b} \sec \frac{a\pi}{2b} - \frac{1}{b} \beta \left(\frac{a+b}{2b}\right) \quad [b > |a|].$ ГХ [351] (3b)

4. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} bx}\, dx = \frac{\pi}{2b} \sec \frac{a\pi}{2b} \quad [b > |a|].$ БХ [4] (14) и

5. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax \operatorname{ch} bx}{\operatorname{sh} cx}\, dx = \frac{\pi}{2c} \frac{\sin \frac{a\pi}{c}}{\cos \frac{a\pi}{c} + \cos \frac{b\pi}{c}} \quad [c > |a| + |b|].$ БХ [27] (11)

6. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx}{\operatorname{ch} cx}\, dx = \frac{\pi}{c} \frac{\cos \frac{a\pi}{2c} \cos \frac{b\pi}{2c}}{\cos \frac{a\pi}{c} + \cos \frac{b\pi}{c}} \quad [c > |a| + |b|].$ БХ [27] (5) и

7. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx}{\operatorname{ch} cx}\, dx = \frac{\pi}{c} \frac{\sin \frac{a\pi}{2c} \sin \frac{b\pi}{2c}}{\cos \frac{a\pi}{c} + \cos \frac{b\pi}{c}} \quad [c > |a| + |b|].$ БХ [27] (6) и

8. $\int_0^\infty \frac{dx}{\operatorname{ch} x^2} = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}$ БХ [98] (25)

9. $\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 ax}{\operatorname{sh}^2 x}\, dx = 1 - a\pi \operatorname{ctg} a\pi \quad [a^2 < 1].$ БХ [16] (3) и

10. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx}{\operatorname{ch}^2 bx}\, dx = \frac{a\pi}{2b^2} \sec \frac{a\pi}{2b} \quad [b > |a|].$ БХ [27] (16) и

3.512

1. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} 2\beta x}{\operatorname{ch}^{2\nu} ax}\, dx = \frac{4^{\nu-1}}{a} \mathrm{B}\left(\nu + \frac{\beta}{a},\ \nu - \frac{\beta}{a}\right)$

$[\operatorname{Re}(\nu \pm \beta) > 0,\ a > 0].$ Ли [27] (17) и, ВТФ I 11 (26)

2. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^\mu x}{\operatorname{ch}^\nu x}\, dx = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{\mu+1}{2},\ \frac{\nu-1}{2}\right) \quad [\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}(\mu - \nu) > 0].$

ВТФ I 1 (23)

3.513

1. $$\int_0^\infty \frac{dx}{a+b\,\mathrm{sh}\,x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}\qquad [ab\neq 0].$$ ГХ [351] (8)

2. $$\int_0^\infty \frac{dx}{a+b\,\mathrm{ch}\,x}=\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b}\qquad [b^2>a^2];$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}}{a+b-\sqrt{a^2-b^2}}\qquad [b^2<a^2].$$ ГХ [351] (7)

3. $$\int_0^\infty \frac{dx}{a\,\mathrm{sh}\,x+b\,\mathrm{ch}\,x}=\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b}\qquad [b^2>a^2];$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}}{a+b-\sqrt{a^2-b^2}}\qquad [a^2>b^2].$$ ГХ [351] (9)

4. $$\int_0^\infty \frac{dx}{a+b\,\mathrm{ch}\,x+c\,\mathrm{sh}\,x}=\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\left[\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}{a+b+c}+\varepsilon\pi\right]$$
$[b^2>a^2+c^2;\ \varepsilon=0$ при $(b-a)(a+b+c)>0$,
$|\varepsilon|=1$ при $(b-a)(a+b+c)<0$, притом $\varepsilon=1$ при $a<b+c$
и $\varepsilon=-1$ при $a>b+c]$;
$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2+c^2}}\ln\frac{a+b+c+\sqrt{a^2-b^2+c^2}}{a+b+c-\sqrt{a^2-b^2+c^2}}$$
$[b^2<a^2+c^2,\ a^2\neq b^2]$;
$$=\frac{1}{c}\ln\frac{a+c}{a}\qquad [a=b\neq 0,\ c\neq 0];$$
$$=\frac{2(a-b)}{c(a-b-c)}\qquad [b^2=a^2+c^2,\ c(a-b-c)<0].$$
ГХ [351] (6)

3.514

1. $$\int_0^\infty \frac{dx}{\mathrm{ch}\,ax+\cos t}=\frac{t}{a}\,\mathrm{cosec}\,t\qquad [0<t<\pi].$$ БХ [27] (22) и

2. $$\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}\,ax-\cos t_1}{\mathrm{ch}\,bx-\cos t_2}\,dx=\frac{\pi}{b}\,\frac{\sin\dfrac{a(\pi-t_2)}{b}}{\sin t_2\sin\dfrac{a}{b}\pi}-\frac{\pi-t_2}{b\sin t_2}\cos t_1\qquad [b>|a|,\quad 0<t<\pi].$$
БХ [6] (20) и

3. $$\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}\,ax\,dx}{(\mathrm{ch}\,x+\cos t)^2}=\frac{\pi(-\cos t\sin at+a\sin t\cos at)}{\sin^3 t\sin a\pi}$$
$[a^2<1,\quad 0<t<\pi]$. БХ [6] (18) и

4. $$\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,ax\,\mathrm{sh}\,bx}{(\mathrm{ch}\,ax+\cos t)^2}\,dx=\frac{b\pi}{a^2}\,\mathrm{cosec}\,t\,\mathrm{cosec}\frac{b\pi}{a}\sin\frac{bt}{a}$$
$[a>|b|,\quad 0<t<\pi]$. БХ [27] (27) и

3.515 $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\sqrt{2}\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{ch}2x}}\right)dx=-\ln 2.$ БХ [21] (12) и

3.516

1. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(z+\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch}x)^\mu}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(z+\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch}x)^\mu}=Q_{\mu-1}(z)$

$[\operatorname{Re}\mu>-1].$

При надлежащем выборе однозначной ветви подынтегральной функции эта формула справедлива для любых значений z в разрезанной от -1 до $+1$ плоскости z, если только $\mu<0$; если же $\mu>0$, то эта формула перестает быть верной для точек, в которых знаменатель обращается в нуль.

КГ 425, УВII 113

2. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(\beta+\sqrt{\beta^2-1}\operatorname{ch}x)^{n+1}}=Q_n(\beta).$ ВТФ II 181 (32)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\gamma x\,dx}{(\beta+\sqrt{\beta^2-1}\operatorname{ch}x)^{\nu+1}}=\frac{e^{-i\gamma\pi}\Gamma(\nu-\gamma+1)\,Q_\nu^\gamma(\beta)}{\Gamma(\nu+1)}$

$[\operatorname{Re}(\nu\pm\gamma)>-1,\quad \nu\neq-1,\ -2,\ -3,\ \ldots].$ ВТФ I 157 (12)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^{2\mu}x\,dx}{(\beta+\sqrt{\beta^2-1}\operatorname{ch}x)^{\nu+1}}=\frac{2^\mu e^{-i\mu\pi}\Gamma(\nu-2\mu+1)\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\beta^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\Gamma(\nu+1)}Q_{\nu-\mu}^\mu(\beta)$

$[\operatorname{Re}(\nu-2\mu+1)>0,\quad \operatorname{Re}(\nu+1)>0].$ ВТФ I 155 (2)

3.517

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)x\,dx}{(\beta+\operatorname{ch}x)^{\nu+\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\beta^2-1)^{-\frac{\nu}{2}}\frac{\Gamma(\nu+\gamma+1)\,\Gamma(\nu-\gamma)\,P_\gamma^{-\nu}(\beta)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$

$[\operatorname{Re}(\nu-\gamma)>0,\quad \operatorname{Re}(\nu+\gamma+1)>0].$ ВТФ I 156 (11)

2. $\int\limits_0^a \frac{\operatorname{ch}\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)x\,dx}{(\operatorname{ch}a-\operatorname{ch}x)^{\nu+\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\operatorname{sh}^\nu a}P_\gamma^\nu(\operatorname{ch}a)$

$\left[\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2},\ a>0\right].$ ВТФ I 156 (8)

3.518

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^{2\mu}x\,dx}{(\operatorname{ch}a+\operatorname{sh}a\operatorname{ch}x)^{\nu+1}}=\frac{2^\mu e^{-i\mu\pi}}{\sqrt{\pi}\operatorname{sh}^\mu a}\frac{\Gamma(\nu-2\mu+1)\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)}Q_{\nu-\mu}^\mu(\operatorname{ch}a)$

$[\operatorname{Re}(\nu+1)>0,\quad \operatorname{Re}(\nu-2\mu+1)>0,\quad a>0].$ ВТФ I 155 (3) и

2. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^{2\mu+1} x\,dx}{(\beta+\operatorname{ch} x)^{\nu+1}} = 2^\mu (\beta^2-1)^{\frac{\mu-\nu}{2}} \Gamma(\nu-2\mu)\,\Gamma(\mu+1)\,P_\mu^{\mu-\nu}(\beta)$$

[$\operatorname{Re}(-\mu-\nu) > \operatorname{Re}\mu > -1$, β не лежит на луче $(-1, +\infty)$ действительной оси]. ВТФI 155 (1)

3. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^{2\mu-1} x \operatorname{ch} x\,dx}{(1+a\operatorname{sh}^2 x)^\nu} = \frac{1}{2} a^{-\mu} \mathrm{B}(\mu, \nu-\mu) \qquad [\operatorname{Re}\nu > \operatorname{Re}\mu > 0,\ a > 0].$$

ВТФI 11 (22)

4. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^{\mu-1} x\,(\operatorname{ch} x+1)^{\nu-1}\,dx}{(\beta+\operatorname{ch} x)^\varrho} = \frac{2^{-\varrho+\frac{\mu}{2}}\,{}_2F_1\left(\varrho, \varrho-\frac{\mu}{2};\ 1+\varrho-\frac{\mu}{4}-\frac{\nu}{2};\ \frac{1-\beta}{2}\right)}{\mathrm{B}\left(\varrho-\frac{\mu}{2},\ 1+\frac{\mu}{4}-\frac{\nu}{2}\right)}$$

$\left[\operatorname{Re} 2\varrho > \operatorname{Re}\mu;\quad \operatorname{Re}\left(1+\frac{\mu}{4}\right) > \operatorname{Re}\left(\frac{\nu}{2}\right)\right].$ ВТФI 115(11)

5. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^{\mu-1} x\,(\operatorname{ch} x-1)^{\nu-1}\,dx}{(\beta+\operatorname{ch} x)^\varrho} =$$

$$= \frac{2^{-(2-\mu-\nu+\varrho)}\,{}_2F_1\left(\varrho,\ 2-\mu-\nu+\varrho;\ 1+\varrho-\frac{\mu}{2},\ \frac{1-\beta}{2}\right)}{\mathrm{B}\left(2-\mu-\nu+\varrho,\ -1+\nu+\frac{\mu}{2}\right)}$$

[$\operatorname{Re}(1+\varrho) > \operatorname{Re}(\mu+\nu)$, $\operatorname{Re}(4\varrho+2\nu+\mu) > 0$]. ВТФI 115 (10)

6. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^{\mu-1} x \operatorname{ch}^{\nu-1} x}{(\operatorname{ch}^2 x-\beta)^\varrho}\,dx = \frac{{}_2F_1\left(\varrho,\ 1+\varrho-\frac{\mu+\nu}{2};\ 1+\varrho-\frac{\nu}{2};\ \beta\right)}{2\mathrm{B}\left(\frac{\mu}{2},\ 1+\varrho-\frac{\mu+\nu}{2}\right)}$$

[$2\operatorname{Re}(1+\varrho) > \operatorname{Re}\nu$, $2\operatorname{Re}(1+\varrho) > \operatorname{Re}(\mu+\nu)$]. ВТФI 115 (9)

3.519 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sh}[(r-p)\operatorname{tg} x]}{\operatorname{sh}(r\operatorname{tg} x)}\,dx = \pi \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k\pi+r} \sin\frac{pk\pi}{r} \qquad [p^2 < r^2].$$ БХ [274] (13)

3.52—3.53 Гиперболические функции и алгебраические функции

3.521

1. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{\pi^2}{2a^2} \qquad [a > 0].$$ ГХ [352] (2b)

2. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\operatorname{ch} x} = 2G = \pi \ln 2 - 4L\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1{,}831931188\ldots$$

Ло III 225 (103а), БХ [84] (1) *и*

3. $$\int_1^\infty \frac{dx}{x\operatorname{sh} ax} = -2\sum_{k=0}^\infty \operatorname{Ei}[-(2k+1)a].$$ Ли [104] (14)

4. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x \operatorname{ch} ax} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{Ei}[-(2k+1)a].$ Ли (104) (13)

3.522

1. $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{(b^2+x^2)\operatorname{sh} ax} = \frac{\pi}{2ab} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{ab+k\pi}$ $[a>0,\ b>0].$

2. $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{(b^2+x^2)\operatorname{sh} \pi x} = \frac{1}{2b} - \beta(b+1)$ $[b>0].$ БХ [97] (16), ГХ [352] (8)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(b^2+x^2)\operatorname{ch} ax} = \frac{2\pi}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2ab+(2k-1)\pi}$ $[a>0,\ b>0].$ БХ [97] (5)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(b^2+x^2)\operatorname{ch} \pi x} = \frac{1}{b}\beta\left(b+\frac{1}{2}\right)$ $[b>0].$ БХ [97] (4)

5. $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)\operatorname{sh} \pi x} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$ БХ [97] (7)

6. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{ch} \pi x} = 2 - \frac{\pi}{2}.$ БХ [97] (1)

7. $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)\operatorname{sh} \frac{\pi x}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$ БХ [97] (8)

8. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2}} = \ln 2.$ БХ [97] (2)

9. $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)\operatorname{sh} \frac{\pi x}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\pi + 2\ln(\sqrt{2}+1)] - 2.$ БХ [97] (9)

10. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{ch} \frac{\pi x}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\pi - 2\ln(\sqrt{2}+1)].$ БХ [97] (3)

3.523

1. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\beta-1}}{\operatorname{sh} ax}\,dx = \frac{2^\beta-1}{2^{\beta-1}a^\beta}\Gamma(\beta)\zeta(\beta)$ $[\operatorname{Re}\beta>1,\ a>0].$ УВII 46 *u*

2. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{\operatorname{sh} ax}\,dx = \frac{2^{2n}-1}{2n}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{2n}|B_{2n}|$ $[a>0].$ УВI 169 *u*, ГХ [352] (2a)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\beta-1}}{\operatorname{ch} ax}\,dx = \frac{2}{(2a)^\beta}\Gamma(\beta)\,{}_1F_1\left(-1;\ \beta;\ \frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{2}{(2a)^\beta}\Gamma(\beta)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2}{2k+1}\right)^\beta$ $[\operatorname{Re}\beta>0,\ a>0].$

ВТФI 35, ИПI 322 (1)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2n}}{\operatorname{ch} ax} dx = \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{2n+1} |E_{2n}| \quad [a > 0].$ БХ [84] (12) и, ГХ [352] (1а)

5. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2\, dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{\pi^3}{8}$ (сравни 4.261 6.). БХ [84] (3)

6. $\int\limits_0^\infty \frac{x^3\, dx}{\operatorname{sh} x} = \frac{\pi^4}{8}$ (сравни 4.262 1. и 2.). БХ [84] (5)

7. $\int\limits_0^\infty \frac{x^4\, dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{5}{32}\pi^5.$ БХ [84] (7)

8. $\int\limits_0^\infty \frac{x^5}{\operatorname{sh} x} dx = \frac{\pi^6}{4}.$ БХ [84] (8)

9. $\int\limits_0^\infty \frac{x^6}{\operatorname{ch} x} dx = \frac{61}{128}\pi^7.$ БХ [84] (9)

10. $\int\limits_0^\infty \frac{x^7}{\operatorname{sh} x} dx = \frac{17}{16}\pi^8.$ БХ [84] (10)

11. $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}\, dx}{\operatorname{ch} x} = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{\sqrt{(2k+1)^3}}.$ БХ [98] (7)и

12. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} \operatorname{ch} x} = 2\sqrt{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}.$ БХ [98] (25)и

3.524

1. $\int\limits_0^\infty x^{\mu-1} \frac{\operatorname{sh} \beta x}{\operatorname{sh} \gamma x} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{(2\gamma)^\mu} \left\{\zeta\left[\mu, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right)\right] - \right.$

$\left. - \zeta\left[\mu, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\beta}{\gamma}\right)\right]\right\} \quad [\operatorname{Re}\gamma > |\operatorname{Re}\beta|,\ \operatorname{Re}\mu > -1].$

ИПI 323 (10)

2. $\int\limits_0^\infty x^{2m} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx} dx = \frac{\pi}{2b} \frac{d^{2m}}{da^{2m}} \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2b} \quad [b > |a|].$ БХ [112] (20)и

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx} \frac{dx}{x^p} = \Gamma(1-p) \sum_{n=0}^\infty \left\{\frac{1}{[b(2k+1)-a]^{1-p}} - \frac{1}{[b(2k+1)+a]^{1-p}}\right\}$

$[b > |a|,\ p < 1].$ БХ [131] (2)и

4. $\int\limits_0^\infty x^{2m+1} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} bx} dx = \frac{\pi}{2b} \frac{d^{2m+1}}{da^{2m+1}} \sec \frac{a\pi}{2b} \quad [b > |a|].$ БХ [112] (18)и

5. $\int\limits_0^\infty x^{\mu-1} \frac{\operatorname{ch} \beta x}{\operatorname{sh} \gamma x} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{(2\gamma)^\mu} \left\{\zeta\left[\mu, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right)\right] + \right.$

$\left. + \zeta\left[\mu, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\beta}{\gamma}\right)\right]\right\} \quad [\operatorname{Re}\gamma > |\operatorname{Re}\beta|,\ \operatorname{Re}\mu > 1].$

ИПI 323 (12)

6. $\int\limits_0^\infty x^{2m}\frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} bx}\,dx=\frac{\pi}{2b}\frac{d^{2m}}{da^{2m}}\sec\frac{a\pi}{2b}$ $[b>|a|]$. БХ [112] (17)

7. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} bx}\cdot\frac{dx}{x^p}=\Gamma(1-p)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left\{\frac{1}{[b(2k+1)-a]^{1-p}}+\right.$

$\left.+\frac{1}{[b(2k+1)+a]^{1-p}}\right\}$ $[b>|a|,\ p<1]$. БХ [131] (1) и

8. $\int\limits_0^\infty x^{2m+1}\frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh} bx}\,dx=\frac{\pi}{2b}\frac{d^{2m+1}}{da^{2m+1}}\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2b}$ $[b>|a|]$. БХ [112] (19) и

9. $\int\limits_0^\infty x^{2m-1}\operatorname{cth} ax\,dx=\frac{2^{2m-1}-1}{m}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^{2m}|B_{2m}|$ $[a>0]$. БХ [83] (11)

10. $\int\limits_0^\infty x^2\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx}\,dx=\frac{\pi^3}{4b^3}\sin\frac{a\pi}{2b}\sec^3\frac{a\pi}{2b}$ $[b>|a|]$. БХ [84] (18)

11. $\int\limits_0^\infty x^4\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx}\,dx=8\left(\frac{\pi}{2b}\sec\frac{a\pi}{2b}\right)^5\cdot\sin\frac{a\pi}{2b}\cdot\left(2+\sin^2\frac{a\pi}{2b}\right)$

$[b>|a|]$. БХ [82] (17) и

12. $\int\limits_0^\infty x^6\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx}\,dx=16\left(\frac{\pi}{2b}\sec\frac{a\pi}{2b}\right)^7\sin\frac{a\pi}{2b}\left(45-30\cos^2\frac{a\pi}{2b}+2\cos^4\frac{a\pi}{2b}\right)$

$[b>|a|]$. БХ [82] (21) и

13. $\int\limits_0^\infty x\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} bx}\,dx=\frac{\pi^2}{4b^2}\sin\frac{a\pi}{2b}\sec^2\frac{a\pi}{2b}$ $[b>|a|]$. БХ [84] (15) и

14. $\int\limits_0^\infty x^3\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} bx}\,dx=\left(\frac{\pi}{2b}\sec\frac{a\pi}{2b}\right)^4\sin\frac{a\pi}{2b}\cdot\left(6-\cos^2\frac{a\pi}{2b}\right)$

$[b>|a|]$. БХ [82] (14) и

15. $\int\limits_0^\infty x^5\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} bx}\,dx=\left(\frac{\pi}{2b}\sec\frac{a\pi}{2b}\right)^6\sin\frac{a\pi}{2b}\left(120-60\cos^2\frac{a\pi}{2b}+\cos^4\frac{a\pi}{2b}\right)$

$[b>|a|]$. БХ [82] (18) и

16. $\int\limits_0^\infty x^7\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} bx}\,dx=\left(\frac{\pi}{2b}\sec\frac{a\pi}{2b}\right)^8\sin\frac{a\pi}{2b}\times$

$\times\left(5040-4200\cos^2\frac{a\pi}{2b}+546\cos^4\frac{a\pi}{2b}-\cos^6\frac{a\pi}{2b}\right)$ $[b>|a|]$.

БХ [82] (22) и

17. $\int\limits_0^\infty x\frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh} bx}\,dx=\left(\frac{\pi}{2b}\sec\frac{a\pi}{2b}\right)^2$ $[b>|a|]$. БХ [84] (16) и

18. $\int\limits_0^\infty x^3 \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh} bx} dx = 2\left(\frac{\pi}{2b} \sec \frac{a\pi}{2b}\right)^4 \left(1 + 2\sin^2 \frac{a\pi}{2b}\right)$

$[b > |a|]$. БХ [82] (15) и

19. $\int\limits_0^\infty x^5 \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh} bx} dx = 8\left(\frac{\pi}{2b} \sec \frac{a\pi}{2b}\right)^6 \left(15 - 15\cos^2 \frac{a\pi}{2b} + 2\cos^4 \frac{a\pi}{2b}\right)$

$[b > |a|]$. БХ [82] (19) и

20. $\int\limits_0^\infty x^7 \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh} bx} dx = 16\left(\frac{\pi}{2b} \sec \frac{a\pi}{2b}\right)^8 \times$

$\times \left(315 - 420\cos^2 \frac{a\pi}{2b} + 126\cos^4 \frac{a\pi}{2b} - 4\cos^6 \frac{a\pi}{2b}\right)$

$[b > |a|]$. БХ [82] (23) и

21. $\int\limits_0^\infty x^2 \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} bx} dx = \frac{\pi^3}{8b^3}\left(2\sec^3 \frac{a\pi}{2b} - \sec \frac{a\pi}{2b}\right)$ $[b > |a|]$. БХ [84] (17) и

22. $\int\limits_0^\infty x^4 \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} bx} dx = \left(\frac{\pi}{2b} \sec \frac{a\pi}{2b}\right)^5 \left(24 - 20\cos^2 \frac{a\pi}{2b} + \cos^4 \frac{a\pi}{2b}\right)$

$[b > |a|]$. БХ [82] (16) и

23. $\int\limits_0^\infty x^6 \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} bx} dx = \left(\frac{\pi}{2b} \sec \frac{a\pi}{2b}\right)^7 \left(720 - 840\cos^2 \frac{a\pi}{2b} + \right.$

$\left. + 182\cos^4 \frac{a\pi}{2b} - \cos^6 \frac{a\pi}{2b}\right)$ $[b > |a|]$. БХ [82] (20) и

24. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} bx} \cdot \frac{dx}{x} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{a\pi}{4b} + \frac{\pi}{4}\right)$ $[b > |a|]$. БХ [95] (3) и

3.525

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} \pi x} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{a}{2}\cos a + \frac{1}{2}\sin a \ln[2(1+\cos a)]$

$[\pi \geqslant |a|]$. БХ [97] (10) и

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} x} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\sin a + \frac{1}{2}\cos a \ln \frac{1-\sin a}{1+\sin a}$

$[\pi \geqslant 2|a|]$. БХ [97] (11) и

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh} \pi x} \cdot \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}(a\sin a - 1) + \frac{1}{2}\cos a \ln[2(1+\cos a)]$

$[\pi > |a|]$. БХ [97] (12) и

4. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{x\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\cos a-1+\frac{1}{2}\sin a\ln\frac{1+\sin a}{1-\sin a}$$

$\left[\frac{\pi}{2}>|a|\right]$. БХ [97] (13) *и*

5. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch}\pi x}\cdot\frac{x\,dx}{1+x^2}=-2\sin\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2}\sin a-\cos a\ln\operatorname{tg}\frac{a+\pi}{4}$$

$[\pi>|a|]$. ГХ [352] (12)

6. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch}\pi x}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=2\cos\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\cos a-\sin a\ln\operatorname{tg}\frac{a+\pi}{4}$$

$[\pi>|a|]$. ГХ [352] (11)

7. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} bx}\cdot\frac{dx}{c^2+x^2}=\frac{\pi}{c}\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin\frac{k(b-a)}{b}\pi}{bc+k\pi}\qquad [b\geqslant|a|].$$ БХ [97] (18)

8. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh} bx}\cdot\frac{x\,dx}{c^2+x^2}=\frac{\pi}{2bc}+\pi\sum_{k=1}^\infty\frac{\cos\frac{k(b-a)}{b}\pi}{bc+k\pi}\qquad [b>|a|].$$ БХ [97] (19)

3.526

1. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax\operatorname{ch} bx}{\operatorname{ch} cx}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\ln\left\{\operatorname{tg}\frac{(a+b+c)\pi}{4c}\operatorname{ctg}\frac{(b+c-a)\pi}{4c}\right\}$$

$[c>|a|+|b|]$. БХ [93] (10) *и*

2. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 ax}{\operatorname{sh} bx}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\ln\sec\frac{a}{b}\pi\qquad [b>|2a|].$$ БХ [95] (5) *и*

3. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{\operatorname{sh}\beta x\operatorname{ch}\gamma x}dx=\frac{\Gamma(\mu)}{(2\gamma)^\mu}\left\{{}_1F_1\left[-1;\ \mu;\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{\beta}{\gamma}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+{}_1F_1\left[-1;\ \mu;\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\right)\right]\right\}\qquad [\operatorname{Re}\gamma>|\operatorname{Re}\beta|,\ \operatorname{Re}\mu>0].$$

ИП I 323 (11)

3.527

1. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{\operatorname{sh}^2 ax}dx=\frac{4}{(2a)^\mu}\Gamma(\mu)\zeta(\mu-1)\qquad [\operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}\mu>2].$$ БХ [86] (7) *и*

2. $$\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{\operatorname{sh}^2 ax}dx=\frac{\pi^{2m}}{a^{2m+1}}|B_{2m}|\qquad [a>0].$$ БХ [86] (5) *и*

3. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{\operatorname{ch}^2 ax}dx=\frac{4}{(2a)^\mu}(1-2^{2-\mu})\Gamma(\mu)\zeta(\mu-1)$$

$[\operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}\mu>0]$. БХ [86] (6) *и*

4. $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2 ax} = \frac{\ln 2}{a^2}$. Ло III 396

5. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2m}}{\operatorname{ch}^2 ax}\,dx = \frac{(2^{2m}-2)\,\pi^{2m}}{(2a)^{2m}\,a}\,|B_{2m}|$ $[a>0]$. БХ [86] (2) и

6. $\int\limits_0^\infty x^{\mu-1}\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch}^2 ax}\,dx = \frac{2\Gamma(\mu)}{a^\mu}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{\mu-1}}$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ a>0]$. БХ [86] (15) и

7. $\int\limits_0^\infty \frac{x\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch}^2 ax}\,dx = \frac{\pi}{2a^2}$. БХ [86] (8) и

8. $\int\limits_0^\infty x^{2m+1}\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch}^2 ax}\,dx = \frac{2m+1}{a}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^{2m+1}|E_{2m}|$ $[a>0]$. БХ [86] (12) и

9. $\int\limits_0^\infty x^{2m+1}\frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh}^2 ax}\,dx = \frac{2^{2m+1}-1}{a^2(2a)^{2m}}\,(2m+1)!\,\zeta(2m+1)$. БХ [86] (13) и

10. $\int\limits_0^\infty x^{2m}\frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh}^2 ax}\,dx = \frac{2^{2m}-1}{a}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{2m}|B_{2m}|$ $[a>0]$. БХ [86] (14) и

11. $\int\limits_0^\infty \frac{x\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch}^{2\mu+1} ax}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\mu a^2}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}$ $[\mu>0]$. Ли [86] (9)

12. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\pi^2}{3}$. БХ [102] (2) и

13. $\int\limits_0^\infty x^2\frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh}^2 ax}\,dx = \frac{\pi^2}{2a^3}$. БХ [86] (11) и

14. $\int\limits_0^\infty x^2\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch}^2 ax}\,dx = \frac{\ln 2}{2a^3}$. БХ [86] (10) и

15. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch} x}\frac{dx}{x} = \ln 2$. БХ [93] (17) и

3.528

1. $\int\limits_0^\infty \frac{(1+xi)^{2n-1}-(1-xi)^{2n-1}}{i\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2}}\,dx = 2$. БХ [87] (8)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{(1+xi)^{2n}-(1-xi)^{2n}}{i\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2}}\,dx = (-1)^{n+1}\,2\,|E_{2n}|+2$. БХ [87] (7)

3.529

1. $$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x} = -\ln 2.$$ БХ [94] (10) и

2. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax - 1}{\operatorname{sh} bx} \cdot \frac{dx}{x} = -\ln\cos\frac{a\pi}{2b} \quad [b > |a|].$$ ГХ [352] (66)

3. $$\int_0^\infty \left(\frac{a}{\operatorname{sh} ax} - \frac{b}{\operatorname{sh} bx}\right)\frac{dx}{x} = (b-a)\ln 2.$$ БХ [94] (11) и

3.531

1. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{2\operatorname{ch} x - 1} = 1{,}1719536194\ldots$$ Ли [88] (1)

2. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2t} = \frac{t\ln 2 - L(t)}{\sin t\cos t}.$$ Ло III 402

3. $$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\operatorname{ch} x + \cos t} = \frac{t}{3}\cdot\frac{\pi^2 - t^2}{\sin t} \quad [0 < t < \pi].$$ БХ [88] (3) и

4. $$\int_0^\infty \frac{x^4\,dx}{\operatorname{ch} x + \cos t} = \frac{t}{15}\cdot\frac{(\pi^2 - t^2)(7\pi^2 - 3t^2)}{\sin t} \quad [0 < t \lessgtr \pi].$$ БХ [88] (4) и

5. $$\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{\operatorname{ch} x - \cos 2a\pi} = 2\cdot(2m)!\operatorname{cosec} 2a\pi \sum_{k=1}^\infty \frac{\sin 2ka\pi}{k^{2m+1}}.$$ БХ [88] (5) и

6. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\,dx}{\operatorname{ch} x - \cos t} = \frac{i\Gamma(\mu)}{\sin t}\left[e^{-it}{}_1F_1(e^{-it};\mu;1) - e^{it}{}_1F_1(e^{it};\mu;1)\right]$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ 0 < t < 2\pi].$ ИП I 323 (5)

7. $$\int_0^\infty \frac{x^\mu\,dx}{\operatorname{ch} x + \cos t} = \frac{2\Gamma(\mu+1)}{\sin t}\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1}\frac{\sin kt}{k^{\mu+1}} \quad [\mu > -1].$$ БХ [96] (14) и

8. $$\int_0^u \frac{x\,dx}{\operatorname{ch} 2x - \cos 2t} = \frac{1}{2}\operatorname{cosec} 2t\,[L(\theta+t) - L(\theta-t) - 2L(t)]$$

$[\theta = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} u \operatorname{ctg} t),\ t \neq n\pi].$ Ло III 402

3.532

1. $$\int_0^\infty \frac{x^n\,dx}{a\operatorname{ch} x + b\operatorname{sh} x} = \frac{(2n)!}{a+b}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^{n+1}}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^k$$

$[a > 0,\ b > 0,\ n > -1].$ ГХ [352] (5)

2. $$\int_0^u \frac{x \operatorname{ch} x\, dx}{\operatorname{ch} 2x - \cos 2t} = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} t \left\{ L\left(\frac{\theta+t}{2}\right) - L\left(\frac{\theta-t}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + L\left(\pi - \frac{\psi+t}{2}\right) + L\left(\frac{\psi-t}{2}\right) - 2L\left(\frac{t}{2}\right) - 2L\left(\frac{\pi-t}{2}\right) \right\}$$
$$\left[\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{th} \frac{u}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2},\ \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \operatorname{cth} \frac{u}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2};\ t \neq n\pi \right].$$ Ло III 288 *u*

3.533

1. $$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{ch} x\, dx}{\operatorname{ch} 2x - \cos 2t} = \operatorname{cosec} t \left[\frac{\pi}{2} \ln 2 - L\left(\frac{t}{2}\right) - L\left(\frac{\pi-t)}{2}\right) \right]$$
$[t \neq m\pi]$. Ло III 403

2. $$\int_0^\infty x \frac{\operatorname{sh} ax\, dx}{(\operatorname{ch} ax - \cos t)^2} = \frac{t}{a^2} \operatorname{cosec} t$$
$[0 < t < \pi]$ (ср. 3.514 1.). БХ [88] (11) *u*

3. $$\int_0^\infty x^3 \frac{\operatorname{sh} x\, dx}{(\operatorname{ch} x + \cos t)^2} = \frac{t(\pi^2 - t^2)}{\sin t}$$
$[0 < t < \pi]$ (ср. 3.531 3.). БХ [88] (13)

4. $$\int_0^\infty x^{2m+1} \frac{\operatorname{sh} x\, dx}{(\operatorname{ch} x - \cos 2a\pi)^2} = 2(2m+1)! \operatorname{cosec} 2a\pi \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2ka\pi}{k^{2m+1}}$$
$[0 < a < \pi]$. БХ [88] (14)

3.534

1. $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \operatorname{ch} ax\, dx = \frac{\pi}{2a} I_1(a).$$ В 94 (9)

2. $$\int_0^1 \frac{\operatorname{ch} ax}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} I_0(a).$$ В 94 (9)

3.535 $$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2a - \operatorname{ch} 2ax}} \cdot \frac{dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{\pi}{2\sqrt{2a^2}} \cdot \frac{\arcsin(\operatorname{th} a)}{\operatorname{sh} a}.$$ БХ [80] (11)

3.536

1. $$\int_0^\infty \frac{x^2}{\operatorname{ch} x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\sqrt{(2k+1)^3}}.$$ БХ [98] (7)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^2 \operatorname{th} x^2\, dx}{\operatorname{ch} x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}.$$ БХ [98] (8)

3. $$\int_0^\infty \operatorname{sh}(\nu \operatorname{Arsh} x) \frac{x^{\mu-1}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{\sin\frac{\mu\pi}{2} \sin\frac{\nu\pi}{2}}{2^\mu \pi} \Gamma(\mu) \Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right) \times$$
$$\times \Gamma\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}\right) \quad [-1 < \operatorname{Re}\mu < 1 - |\operatorname{Re}\nu|].$$ ИПI 324 (14)

4. $$\int_0^\infty \operatorname{ch}(\nu \operatorname{Arch} x)\frac{x^{\mu-1}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{\cos\frac{\mu\pi}{2}\cos\frac{\nu\pi}{2}}{2^\mu \pi}\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)\times \Gamma\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}\right) \quad [0 < \operatorname{Re}\mu < 1 - |\operatorname{Re}\nu|].$$ ИПI 324 (15)

3.54 Гиперболические функции и показательная функция

3.541

1. $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\operatorname{sh}^\nu \beta x\,dx = \frac{1}{2^{\nu+1}\beta}\,\mathrm{B}\left(\frac{\mu}{2\beta}-\frac{\nu}{2},\ \nu+1\right)$$ $[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\beta\nu]$. ВТФI 11 (25), ИПI 163 (5)

2. $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\frac{\operatorname{sh}\beta x}{\operatorname{sh} bx}\,dx = \frac{1}{2b}\left[\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu+\beta}{2b}\right)-\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu-\beta}{2b}\right)\right]$$ $[\operatorname{Re}(\mu+b\pm\beta) > 0]$. ВТФI 16

3. $$\int_{-\infty}^\infty e^{-\mu x}\frac{\operatorname{sh}\mu x}{\operatorname{sh}\beta x}\,dx = \frac{\pi}{2\beta}\operatorname{tg}\frac{\mu\pi}{\beta} \qquad [\operatorname{Re}\beta > 2|\operatorname{Re}\mu|].$$ БХ [18] (6)

4. $$\int_0^\infty e^{-x}\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} x}\,dx = \frac{1}{a}-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{a\pi}{2}.$$ БХ [4] (3)

5. $$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,dx}{(\operatorname{ch} px)^{2q+1}} = \frac{2^{2q-2}}{p}\,\mathrm{B}(q,\ q)-\frac{1}{2qp}.$$ Ли [27] (19)

6. $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \beta\left(\frac{\mu+1}{2}\right) \qquad [\operatorname{Re}\mu > -1].$$ ИПI 163 (7)

7. $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\operatorname{th} x\,dx = \beta\left(\frac{\mu}{2}\right)-\frac{1}{\mu} \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ ИПI 163 (9)

8. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \beta\left(\frac{\mu}{2}\right)-1 \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ ИПI 163 (8)

9. $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\frac{\operatorname{sh}\mu x}{\operatorname{ch}^2 \mu x}\,dx = \frac{1}{\mu}(1-\ln 2) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ Ли [27] (15)

10. $$\int_0^\infty e^{-qx}\frac{\operatorname{sh} px}{\operatorname{sh} qx}\,dx = \frac{1}{p}-\frac{\pi}{2q}\operatorname{ctg}\frac{p\pi}{2q} \qquad [0 < p < 2q].$$ БХ [27] (9) и

3.542

1. $$\int_0^\infty e^{-\mu x}(\operatorname{ch}\beta x - 1)^\nu\,dx = \frac{1}{2^\nu \beta}\,\mathrm{B}\left(\frac{\mu}{\beta}-\nu,\ 2\nu+1\right)$$ $\left[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\beta\nu\right]$. ИПI 163 (6)

2. $\int\limits_0^\infty e^{-\mu x}(\operatorname{ch} x-\operatorname{ch} u)^{\nu-1}\,dx=-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{i\pi\nu}\Gamma(\nu)\operatorname{sh}^{\nu-\frac{1}{2}}u\,Q_{\mu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\nu}(\operatorname{ch} u)$

$[\operatorname{Re}\nu>0,\ \operatorname{Re}\mu>\operatorname{Re}\nu-1]$. ВТФI 155 (4), ИПI 164 (23)

3.543

1. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ibx}\,dx}{\operatorname{sh} x+\operatorname{sh} t}=-\frac{i\pi e^{itb}}{\operatorname{sh}\pi b\operatorname{ch} t}(\operatorname{ch}\pi b-e^{-2itb})$ $[t>0]$. ИПI 121 (30)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\mu x}}{\operatorname{ch} x-\cos t}\,dx=2\operatorname{cosec} t\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin kt}{\mu+k}$ $[\operatorname{Re}\mu>-1,\ t\neq 2n\pi]$.

БХ [6] (10) u

3. $\int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-x}\cos t}{\operatorname{ch} x-\cos t}e^{-(\mu-1)x}\,dx=2\sum_{k=0}^\infty\frac{\cos kt}{\mu+k}$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ t\neq 2n\pi]$. БХ [6] (9) u

4. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{px}+\cos t}{(\operatorname{ch} px+\cos t)^2}\,dx=\frac{1}{p}\left(t\operatorname{cosec} t+\frac{1}{1+\cos t}\right)$ $[p>0]$. БХ [27] (26) u

3.544 $\int\limits_u^\infty \frac{\exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sqrt{2(\operatorname{ch} x-\operatorname{ch} u)}}\,dx=Q_n(\operatorname{ch} u)$. ВТФ II 181 (33)

3.545

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax}{e^{px}+1}\,dx=\frac{\pi}{2p}\operatorname{cosec}\frac{a\pi}{p}-\frac{1}{2a}$ $[p>a,\ p>0]$. БХ [27] (3)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax}{e^{px}-1}\,dx=\frac{1}{2a}-\frac{\pi}{2p}\operatorname{ctg}\frac{a\pi}{p}$ $[p>a,\ p>0]$. БХ [27] (9)

3.546

1 $\int\limits_0^\infty e^{-\beta x^2}\operatorname{sh} ax\,dx=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}}\exp\frac{a^2}{4\beta}\Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{\beta}}\right)$ $[\operatorname{Re}\beta>0]$.

ИПI 166 (38) u

2. $\int\limits_0^\infty e^{-\beta x^2}\operatorname{ch} ax\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\exp\frac{a^2}{4\beta}$ $[\operatorname{Re}\beta>0]$. ФII 720 u

3. $\int\limits_0^\infty e^{-\beta x^2}\operatorname{sh}^2 ax\,dx=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\left(\exp\frac{a^2}{\beta}-1\right)$ $[\operatorname{Re}\beta>0]$. ИПI 166 (40)

4. $\int\limits_0^\infty e^{-\beta x^2}\operatorname{ch}^2 ax\,dx=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\left(\exp\frac{a^2}{\beta}+1\right)$ $[\operatorname{Re}\beta>0]$. ИПI 166 (41)

3.547

1. $$\int_0^\infty \exp(-\beta \operatorname{sh} x) \operatorname{sh} \gamma x \, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma\pi}{2} [J_\gamma(\beta) - \mathbf{J}_\gamma(\beta)] - \frac{\pi}{2} [\mathbf{E}_\gamma(\beta) + N_\gamma(\beta)] = \gamma S_{-1,\gamma}(\beta) \quad [\operatorname{Re} \beta > 0].$$ В 341 (5), ИПІ 168 (14) и

2. $$\int_0^\infty \exp(-\beta \operatorname{ch} x) \operatorname{sh} \gamma x \operatorname{sh} x \, dx = \frac{\gamma}{\beta} K_\gamma(\beta).$$ ИПІ 168 (9) и

3. $$\int_0^\infty \exp(-\beta \operatorname{sh} x) \operatorname{ch} \gamma x \, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi\gamma}{2} [\mathbf{J}_\gamma(\beta) - J_\gamma(\beta)] - \frac{\pi}{2} [\mathbf{E}_\gamma(\beta) + N_\gamma(\beta)] = S_{0,\gamma}(\beta)$$ $[\operatorname{Re} \beta > 0$, γ не равно целому числу$]$.
ИПІ 168 (16) и, В 341 (4), ВТФII 84 (50)

4. $$\int_0^\infty \exp(-\beta \operatorname{ch} x) \operatorname{ch} \gamma x \, dx = K_\gamma(\beta) \quad [\operatorname{Re} \beta > 0].$$ ИПІ 168 (16) и, В 201 (5).

5. $$\int_0^\infty \exp(-\beta \operatorname{sh} x) \operatorname{sh} \gamma x \operatorname{ch} x \, dx = \frac{\gamma}{\beta} S_{0,\gamma}(\beta) \quad [\operatorname{Re} \beta > 0].$$
ИПІ 168 (7), ВТФII 85 (51).

6. $$\int_0^\infty \exp(-\beta \operatorname{sh} x) \operatorname{sh}[(2n+1)x] \operatorname{ch} x \, dx = O_{2n+1}(\beta) \quad [\operatorname{Re} \beta > 0].$$
ИПІ 167 (5)

7. $$\int_0^\infty \exp(-\beta \operatorname{sh} x) \operatorname{ch} \gamma x \operatorname{ch} x \, dx = \frac{1}{\beta} S_{1,\gamma}(\beta) \quad [\operatorname{Re} \beta > 0].$$
ИПІ 168 (8), ВТФII 85 (52)

8. $$\int_0^\infty \exp(-\beta \operatorname{sh} x) \operatorname{ch} 2nx \operatorname{ch} x \, dx = O_{2n}(\beta) \quad [\operatorname{Re} \beta > 0].$$ ИПІ 168 (6)

9. $$\int_0^\infty \exp(-\beta \operatorname{ch} x) \operatorname{sh}^{2\nu} x \, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\beta}\right)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) K_\nu(\beta) \quad \left[\operatorname{Re} \beta > 0,\ \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ВТФII 82 (20)

10. $$\int_0^\infty \exp[-2(\beta \operatorname{cth} x + \mu x)] \operatorname{sh}^{2\nu} x \, dx = \frac{1}{4} \beta^{\frac{\nu-1}{2}} \Gamma(\mu - \nu) \times \left[W_{-\mu+\frac{1}{2},\nu}(4\beta) - (\mu - \nu) W_{-\mu-\frac{1}{2},\nu}(4\beta)\right] \quad [\operatorname{Re} \beta > 0,\ \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu].$$
ИПІ 165 (31)

11. $$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\beta^2}{2} \operatorname{sh} x\right) \operatorname{sh}^{\nu-1} x \operatorname{ch}^\nu x \, dx = -\pi D_\nu\left(\beta e^{\frac{i\pi}{4}}\right) D_\nu\left(\beta e^{-\frac{i\pi}{4}}\right) \quad \left[\operatorname{Re} \nu > 0,\ |\arg \beta| \leqslant \frac{\pi}{4}\right].$$ ВТФII 120 (10)

12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\exp(2\nu x - 2\beta \operatorname{sh} x)}{\sqrt{\operatorname{sh} x}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi^3\beta}\,[J_{\nu+\frac{1}{4}}(\beta)\,J_{\nu-\frac{1}{4}}(\beta) +$

$+ N_{\nu+\frac{1}{4}}(\beta)\,N_{\nu-\frac{1}{4}}(\beta)] \quad [\operatorname{Re}\beta > 0].$ ИПІ 169 (20)

13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\exp(-2\nu x - 2\beta \operatorname{sh} x)}{\sqrt{\operatorname{sh} x}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi^3\beta}\,[J_{\nu+\frac{1}{4}}(\beta)\,N_{\nu-\frac{1}{4}}(\beta) -$

$- J_{\nu-\frac{1}{4}}(\beta)\,N_{\nu+\frac{1}{4}}(\beta)] \quad [\operatorname{Re}\beta > 0].$ ИПІ 169 (21)

14. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\exp(-2\beta \operatorname{sh} x)\operatorname{sh} 2\nu x}{\sqrt{\operatorname{sh} x}}\,dx = \frac{1}{4i}\sqrt{\frac{\pi^3\beta}{2}}\,[e^{\nu\pi i}H^{(1)}_{\frac{1}{2}+\nu}(\beta)\,H^{(2)}_{\frac{1}{2}-\nu}(\beta) -$

$- e^{-\nu\pi i}H^{(1)}_{\frac{1}{2}-\nu}(\beta)\,H^{(2)}_{\frac{1}{2}+\nu}(\beta)] \quad [\operatorname{Re}\beta > 0].$ ИПІ 170 (24)

15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\exp(-2\beta \operatorname{sh} x)\operatorname{ch} 2\nu x}{\sqrt{\operatorname{sh} x}}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi^3\beta}{2}}\,[e^{\nu\pi i}H^{(1)}_{\frac{1}{2}+\nu}(\beta)\,H^{(2)}_{\frac{1}{2}-\nu}(\beta) +$

$+ e^{-\nu\pi i}H^{(1)}_{\frac{1}{2}-\nu}(\beta)\,H^{(2)}_{\frac{1}{2}+\nu}(\beta)] \quad [\operatorname{Re}\beta > 0].$ ИПІ 170 (25)

16. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\exp(-2\beta \operatorname{ch} x)\operatorname{ch} 2\nu x}{\sqrt{\operatorname{ch} x}}\,dx = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}}\,K_{\nu+\frac{1}{4}}(\beta)\,K_{\nu-\frac{1}{4}}(\beta) \quad [\operatorname{Re}\beta > 0].$

ИПІ 170 (26)

17. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\exp[-2\beta(\operatorname{ch} x - 1)]\operatorname{ch} 2\nu x}{\sqrt{\operatorname{ch} x}}\,dx = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}}\cdot e^{2\beta}K_{\nu+\frac{1}{2}}(\beta)\,K_{\nu-\frac{1}{2}}(\beta)$

$[\operatorname{Re}\beta > 0].$ ИПІ 170 (27)

18. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{4}\right)\pi\right]\exp(-2\nu x - 2\beta\operatorname{sh} x) + \sin\left[\left(\nu+\frac{1}{4}\right)\pi\right]\exp(2\nu x - 2\beta\operatorname{sh} x)}{\sqrt{\operatorname{sh} x}}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi^3\beta}\,[J_{\frac{1}{4}+\nu}(\beta)\,J_{\frac{1}{4}-\nu}(\beta) + N_{\frac{1}{4}+\nu}(\beta)\,N_{\frac{1}{4}-\nu}(\beta)] \quad [\operatorname{Re}\beta > 0].$

ИПІ 169 (22)

19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\left[\left(\nu+\frac{1}{4}\right)\pi\right]\exp(-2\nu x - 2\beta\operatorname{sh} x) - \cos\left[\left(\nu+\frac{1}{4}\right)\pi\right]\exp(2\nu x - 2\beta\operatorname{sh} x)}{\sqrt{\operatorname{sh} x}}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi^3\beta}\,[J_{\frac{1}{4}+\nu}(\beta)\,N_{\frac{1}{4}-\nu}(\beta) - J_{\frac{1}{4}-\nu}(\beta)\,N_{\frac{1}{4}+\nu}(\beta)]$

$[\operatorname{Re}\beta > 0].$ ИПІ 169 (23)

20. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\exp[-\beta(\operatorname{ch} x - 1)]\operatorname{ch}\nu x\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} x(\operatorname{ch} x - 1)}}\,dx = e^{\beta}K_\nu(\beta) \quad [\operatorname{Re}\beta > 0].$ ИПІ 169 (19)

3.548

1. $$\int_0^\infty e^{-\mu x^4} \operatorname{sh} ax^2\,dx = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{2\mu}} \exp\left(\frac{a^2}{8\mu}\right) I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2}{8\mu}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0]$. ИПI 166 (42)

2. $$\int_0^\infty e^{-\mu x^4} \operatorname{ch} ax^2\,dx = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{2\mu}} \exp\left(\frac{a^2}{8\mu}\right) I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2}{8\mu}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0]$. ИПI 166 (43)

3.549

1. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} \operatorname{sh}[(2n+1)\operatorname{Arsh} x]\,dx = O_{2n+1}(\beta)$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0]$ (**сравни 3.547** 6.). **ИПI 167** (5)

2. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} \operatorname{ch}(2n \operatorname{Arsh} x)\,dx = O_{2n}(\beta)$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0]$ (**сравни 3.547** 8.). ИПI 168 (6)

3. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} \operatorname{sh}(\nu \operatorname{Arsh} x)\,dx = \frac{\nu}{\beta} S_{0,\nu}(\beta) \quad [\operatorname{Re}\beta > 0]$$ (**сравни 3.547** 5.).

ИПI 168 (7)

4. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} \operatorname{ch}(\nu \operatorname{Arsh} x)\,dx = \frac{1}{\beta} S_{1,\nu}(\beta) \quad [\operatorname{Re}\beta > 0]$$ (**сравни 3.547** 7.).

ИПI 168 (8)

Ряд других интегралов, в которые входят гиперболические и экспоненциальная функции, зависящие от $\operatorname{Arsh} x$ или $\operatorname{Arch} x$, можно найти в справочнике, сделав предварительно подстановку $x = \operatorname{sh} t$ или $x = \operatorname{ch} t$.

3.55 — 3.56 Гиперболические, показательные и степенные функции

3.551

1. $$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-\beta x} \operatorname{sh}\gamma x\,dx = \frac{1}{2}\Gamma(\mu)[(\beta-\gamma)^{-\mu} - (\beta+\gamma)^{-\mu}]$$

$[\operatorname{Re}\mu > -1, \quad \operatorname{Re}\beta > |\operatorname{Re}\gamma|]$. ИПI 164 (18)

2. $$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-\beta x} \operatorname{ch}\gamma x\,dx = \frac{1}{2}\Gamma(\mu)[(\beta-\gamma)^{-\mu} + (\beta+\gamma)^{-\mu}]$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0, \quad \operatorname{Re}\beta > |\operatorname{Re}\gamma|]$. ИПI 164 (19)

3. $$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-\beta x} \operatorname{cth} x\,dx = \Gamma(\mu)\left[2^{1-\mu}\zeta\left(\mu, \frac{\beta}{2}\right) - \beta^{-\mu}\right]$$

$[\operatorname{Re}\mu > 1, \quad \operatorname{Re}\beta > 0]$. ИПI 164 (21)

4. $$\int_0^\infty x^n e^{-(p+mq)x} \operatorname{sh}^m qx\,dx = 2^{-m} n! \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{(-1)^k}{(p+2kq)^{n+1}}$$

$[p > 0, \quad q > 0, \quad m < p + qm]$. Ли [81] (4)

5. $$\int_0^1 \frac{e^{-\beta x}}{x} \operatorname{sh} \gamma x \, dx = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma} + \operatorname{Ei}(\gamma-\beta) - \operatorname{Ei}(-\gamma-\beta) \right].$$ БХ [80] (4)

6. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}}{x} \operatorname{sh} \gamma x \, dx = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma} \qquad [\operatorname{Re} \beta > |\operatorname{Re} \gamma|].$$ ИПI 163 (12)

7. $$\int_1^\infty \frac{e^{-\beta x}}{x} \operatorname{ch} \gamma x \, dx = \frac{1}{2} \left[-\operatorname{Ei}(\gamma-\beta) - \operatorname{Ei}(-\gamma-\beta) \right]$$
$[\operatorname{Re} \beta > |\operatorname{Re} \gamma|]$. ИПI 164 (15)

8. $$\int_0^\infty x e^{-x} \operatorname{cth} x \, dx = \frac{\pi^2}{3} - 1.$$ БХ [82] (6)

9. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} \operatorname{th} x \frac{dx}{x} = \ln \frac{\beta}{4} + 2 \ln \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{4} + \frac{1}{2}\right)} \qquad [\operatorname{Re} \beta > 0].$$ ИПI 164 (16)

3.552

1. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1} e^{-\beta x}}{\operatorname{sh} x} dx = 2^{1-\mu} \Gamma(\mu) \zeta\left[\mu, \frac{1}{2}(\beta+1)\right]$$
$[\operatorname{Re} \mu > 1, \quad \operatorname{Re} \beta > -1]$. ИПI 164 (20)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^{2m-1} e^{-ax}}{\operatorname{sh} ax} dx = \frac{1}{2m} \left| B_{2m} \right| \left(\frac{\pi}{a} \right)^{2m}$$ ВТФI 38 (24) *и*

3. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1} e^{-x}}{\operatorname{ch} x} dx = 2^{1-\mu} (1 - 2^{1-\mu}) \Gamma(\mu) \zeta(\mu) \qquad [\operatorname{Re} \mu > 0].$$ ВТФI 32 (5)

4. $$\int_0^\infty \frac{x^{2m-1} e^{-ax}}{\operatorname{ch} ax} dx = \frac{1-2^{1-2m}}{2m} \left| B_{2m} \right| \left(\frac{\pi}{a} \right)^{2m}.$$ ВТФI 39 (25) *и*

5. $$\int_0^\infty \frac{x^2 e^{-2nx}}{\operatorname{sh} x} dx = 4 \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{(2k+1)^3}$$ (сравни 4.261 13.). БХ [84] (4)

6. $$\int_0^\infty \frac{x^3 e^{-2nx}}{\operatorname{sh} x} dx = \frac{\pi^4}{8} - 12 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^4}$$ (сравни 4.262 6.). БХ [84] (6)

3.553

1. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 ax}{\operatorname{sh} x} \frac{e^{-x}\, dx}{x} = \frac{1}{2} \ln(a\pi \operatorname{cosec} a\pi) \qquad [a < 1].$$ БХ [95] (7)

2. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{ch} x} \cdot \frac{e^{-x}\, dx}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{\pi}$$ (сравни 4.267 2.). БХ [95] (4)

3.554

1. $$\int_0^\infty e^{-\beta x}(1-\operatorname{sech} x)\frac{dx}{x} = 2\ln\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{4}\right)} - \ln\frac{\beta}{4} \quad [\operatorname{Re}\beta > 0].$$

ИПІ 164 (17)

2. $$\int_0^\infty e^{-\beta x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cosech} x\right)dx = \psi\left(\frac{\beta+1}{2}\right) - \ln\frac{\beta}{2} \quad [\operatorname{Re}\beta > 0].$$

ИПІ 163 (10)

3. $$\int_0^\infty \left[\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}-\beta\right)x}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} - (1-2\beta)\,e^{-x}\right]\frac{dx}{x} = 2\ln\Gamma(\beta) - \ln\pi + \ln(\sin\pi\beta)$$

$[0 < \operatorname{Re}\beta < 1]$. ВТФІ 21 (7)

4. $$\int_0^\infty e^{-\beta x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cth} x\right)dx = \psi\left(\frac{\beta}{2}\right) - \ln\frac{\beta}{2} + \frac{1}{\beta} \quad [\operatorname{Re}\beta > 0].$$

ИПІ 163 (11)

5. $$\int_0^\infty \left\{-\frac{\operatorname{sh} qx}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} + 2qe^{-x}\right\}\frac{dx}{x} = 2\ln\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right) + \ln\cos\pi q - \ln\pi$$

$\left[q^2 < \frac{1}{2}\right]$. УВІІ 24

6. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-\beta x}(\operatorname{cth} x - 1)\,dx = 2^{1-\mu}\Gamma(\mu)\,\zeta\left(\mu, \frac{\beta}{2}+1\right)$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0;\quad \operatorname{Re}\mu > 1]$. ИПІ 164 (22)

3.555

1. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 ax}{1-e^{px}}\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{p}{2a\pi}\sin\frac{2a\pi}{p}\right) \quad [2a < p]$$ (сравни 3.545 2.).

БХ [93] (15)

2. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 ax}{e^x+1}\,\frac{dx}{x} = -\frac{1}{4}\ln(a\pi\operatorname{ctg} a\pi) \quad \left[a < \frac{1}{2}\right]$$ (сравни 3.545 1.).

БХ [93] (9)

3.556

1. $$\int_{-\infty}^\infty x\,\frac{1-e^{px}}{\operatorname{sh} x}\,dx = -\frac{\pi^2}{2}\operatorname{tg}^2\frac{p\pi}{2} \quad [p < 1]$$ (сравни 4.255 3.).

БХ [101] (4)

2. $$\int_0^\infty \frac{1-e^{-px}}{\operatorname{sh} x}\,\frac{1-e^{-(p+1)x}}{x}\,dx = 2p\ln 2 \quad [p > -1].$$ БХ [95] (8)

3.557

1. $$\int_0^\infty \frac{e^{-px}-e^{-qx}}{\operatorname{ch} x-\cos\frac{m}{n}\pi}\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=2\operatorname{cosec}\frac{m}{n}\pi\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\sin\left(\frac{km}{n}\pi\right)\ln\frac{\Gamma\left(\frac{n+q+k}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{p+k}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+p+k}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{q+k}{2n}\right)}$$

$[m+n$ нечетно];

$$=2\operatorname{cosec}\frac{m}{n}\pi\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{k-1}\sin\left(\frac{km}{n}\pi\right)\ln\frac{\Gamma\left(\frac{n+q-k}{n}\right)\Gamma\left(\frac{p+k}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+p-k}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q+k}{n}\right)}$$

$[m+n$ четно]; $[p>-1, \quad q>-1]$. БХ [96] (1)

2. $$\int_0^\infty \frac{(1-e^{-x})^2}{\operatorname{ch} x+\cos\frac{m}{n}\pi}\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=2\operatorname{cosec}\frac{m}{n}\pi\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\sin\left(\frac{km}{n}\pi\right)\times$$

$$\times\ln\frac{\left[\Gamma\left(\frac{n+k+1}{2n}\right)\right]^2\Gamma\left(\frac{k+2}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2n}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{k+1}{2n}\right)\right]^2\Gamma\left(\frac{n+k}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{n+k+2}{2n}\right)}\qquad [m+n \text{ нечетно}];$$

$$=2\operatorname{cosec}\frac{m}{n}\pi\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{k-1}\sin\left(\frac{km}{n}\pi\right)\times$$

$$\times\ln\frac{\left[\Gamma\left(\frac{n-k+1}{n}\right)\right]^2\Gamma\left(\frac{k+2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]^2\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-k+2}{n}\right)}\qquad [m+n \text{ четно}].$$

БХ [96] (2)

3. $$\int_0^\infty\left[e^{-x}\operatorname{tg}\frac{m}{2n}\pi-\frac{e^{-px}\sin\frac{m}{n}\pi}{\operatorname{ch} x+\cos\frac{m}{n}\pi}\right]\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{m}{2n}\pi\right)\ln(2n)+2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\sin\left(\frac{km}{n}\pi\right)\ln\frac{\Gamma\left(\frac{p+n+k}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+k}{2n}\right)}$$

$[m+n$ нечетно];

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{m}{2n}\pi\right)\ln n+2\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{k-1}\sin\left(\frac{km}{n}\pi\right)\ln\frac{\Gamma\left(\frac{p+n-k}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+k}{n}\right)}$$

$[m+n$ четно]. БХ [96] (3)

4. $$\int_0^\infty \frac{1+e^{-x}}{\operatorname{ch} x+\cos a}\cdot\frac{dx}{x^{1-p}} = 2\sec\frac{a}{2}\,\Gamma(p)\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1}\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)a}{k^p} \quad [p>0].$$ Ли [96] (5)

5. $$\int_0^\infty \frac{x^q e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch} x-\cos\lambda}\,dx = \frac{2\Gamma(q+1)}{\cos\frac{\lambda}{2}}\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1}\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\lambda}{k^{q+1}} \quad [q>-1].$$ Ли [96] (5) *и*

6. $$\int_0^\infty x\frac{e^{-x}-\cos a}{\operatorname{ch} x-\cos a}\,dx = a\pi-\frac{a^2}{2}-\frac{\pi^2}{3}.$$ БХ [88] (8)

7. $$\int_0^\infty x^{2m+1}\frac{e^{-x}-\cos a\pi}{\operatorname{ch} x-\cos a\pi}\,dx = 2\cdot(2m+1)!\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos ka\pi}{k^{2m+2}}.$$ БХ [88] (6)

3.558

1. $$\int_0^\infty x\frac{1-e^{-nx}}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}\,dx = \frac{2n\pi^2}{3}-4\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{k^2}.$$ БХ [85] (3)

2. $$\int_0^\infty x\frac{1-(-1)^n e^{-nx}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}\,dx = \frac{n\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{n-k}{k^2}.$$ Ли [85] (1)

3. $$\int_0^\infty x^2\frac{1-e^{-nx}}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}\,dx = 8n\zeta(3)-8\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{k^3}.$$ БХ [85] (5)

4. $$\int_0^\infty x^2e^x\frac{1-e^{-2nx}}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = 8n\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{(2k-1)^3}-8\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{(2k-1)^3}.$$ Ли [85] (6)

5. $$\int_0^\infty x^2\frac{1+(-1)^n e^{-nx}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}\,dx = 6n\zeta(3)-8\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{k^3}.$$ Ли [85] (4)

6. $$\int_0^\infty x^3\frac{1-e^{-nx}}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}\,dx = \frac{4}{15}n\pi^4-24\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{k^4}.$$ БХ [85] (9)

7. $$\int_0^\infty x^3\frac{1+(-1)^n e^{-nx}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}\,dx = \frac{7}{30}n\pi^4+24\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{n-k}{k^4}.$$ БХ [85] (8)

3.559 $$\int_0^\infty e^{-x}\left[a-\frac{1}{2}+\frac{(1-e^{-x})(1-ax)-xe^{-x}}{4\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}e^{(2-a)x}\right]\frac{dx}{x} =$$

$$= a-\frac{1}{2}+\ln\Gamma(a)-\frac{1}{2}\ln(2\pi) \quad [a>0].$$ БХ [96] (6)

3.561 $$\int_0^\infty \frac{e^{-2x}\operatorname{th}\frac{x}{2}}{x\operatorname{ch}x}\,dx = 2\ln\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$ БХ [93] (18)

3.562

1. $$\int_0^\infty x^{2\mu-1}e^{-\beta x^2}\operatorname{sh}\gamma x\,dx = \frac{1}{2}\Gamma(2\mu)(2\beta)^{-\mu}\exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right)\times$$
$$\times\left[D_{-2\mu}\left(-\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right)-D_{-2\mu}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right)\right]\quad\left[\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\beta > 0\right].$$ ИПI 166 (44)

2. $$\int_0^\infty x^{2\mu-1}e^{-\beta x^2}\operatorname{ch}\gamma x\,dx = \frac{1}{2}\Gamma(2\mu)(2\beta)^{-\mu}\exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right)\times$$
$$\times\left[D_{-2\mu}\left(-\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right)+D_{-2\mu}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right)\right]\quad[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0].$$ ИПI 166 (45)

3. $$\int_0^\infty xe^{-\beta x^2}\operatorname{sh}\gamma x\,dx = \frac{\gamma}{4\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\exp\frac{\gamma^2}{4\beta}\qquad[\operatorname{Re}\beta > 0].$$ БХ [81] (12) *и*, ИПI 165 (34)

4. $$\int_0^\infty xe^{-\beta x^2}\operatorname{ch}\gamma x\,dx = \frac{\gamma}{4\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\exp\frac{\gamma^2}{4\beta}\Phi\left(\frac{\gamma}{2\sqrt{\beta}}\right)+\frac{1}{2\beta}\qquad[\operatorname{Re}\beta > 0].$$ ИПI 166 (35)

5. $$\int_0^\infty x^2e^{-\beta x^2}\operatorname{sh}\gamma x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}(2\beta+\gamma^2)}{8\beta^2\sqrt{\beta}}\exp\left(\frac{\gamma^2}{4\beta}\right)\Phi\left(\frac{\gamma}{2\sqrt{\beta}}\right)-\frac{\gamma}{4\beta^2}$$
$$[\operatorname{Re}\beta > 0].$$ ИПI 166 (36)

6. $$\int_0^\infty x^2e^{-\beta x^2}\operatorname{ch}\gamma x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}(2\beta+\gamma^2)}{8\beta^2\sqrt{\beta}}\exp\left(\frac{\gamma^2}{4\beta}\right)\qquad[\operatorname{Re}\beta > 0].$$ ИПI 166 (37)

3.6—4.1 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

3.61 Рациональные функции от синусов и косинусов и тригонометрические функции кратных дуг

3.611

1. $$\int_0^{2\pi}(1-\cos x)^n\sin nx\,dx = 0.$$ БХ [68] (10)

2. $$\int_0^{2\pi}(1-\cos x)^n\cos nx\,dx = (-1)^n\frac{\pi}{2^{n-1}}.$$ БХ [68] (11)

3 $$\int_0^\pi(\cos t+i\sin t\cos x)^n\,dx = \int_0^\pi(\cos t+i\sin t\cos x)^{-n-1}\,dx = \pi P_n(\cos t).$$ ВТФI 158 (23) *и*

3.612

1. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx \cos mx}{\sin x}\, dx = 0$ при $n \leqslant m$;

$= \pi$ при $n > m$ если $m+n$ — нечетное число;

$= 0$ при $n > m$, если $m+n$ — четное число. Ли [64] (3)

2. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx = 0$ при n четном;

$= \pi$ при n нечетном. БХ [64] (1 и 2)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\, dx = \frac{\pi}{2}$. ФII 145

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x}\, dx = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)$. ГХ [332] (21b)

5. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin 2nx}{\cos x}\, dx = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\cos x}\, dx = (-1)^{n-1} 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)$.

ГХ [332] (22a)

6. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\, dx = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\, dx = (-1)^n \pi$. ГХ [332] (22b)

7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx \cos x}{\sin x}\, dx = \frac{\pi}{2}$. Ли [45] (17)

3.613

1. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos nx\, dx}{1 + a\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\right)^n \quad [a^2 < 1]$. БХ [64] (12)

2. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos nx\, dx}{1 - 2a\cos x + a^2} = \frac{\pi a^n}{1-a^2} \quad a^2 < [1]$;

$= \frac{\pi}{(a^2-1)a^n} \quad [a^2 > 1]$. БХ [65] (3)

3. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx \sin x\, dx}{1 - 2a\cos x + a^2} = \frac{\pi}{2} a^{n-1} \quad [a^2 < 1]$;

$= \frac{\pi}{2a^{n+1}} \quad [a^2 > 1]$. БХ [65] (4) ГХ [332] (34a)

4. $\int\limits_0^\pi \frac{\cos nx \cos x\, dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1+a^2}{1-a^2}a^{n-1} \qquad [a^2<1];$

$= \frac{\pi}{2a^{n+1}}\cdot\frac{a^2+1}{a^2-1} \qquad [a^2>1].$

БХ [65] (5), ГХ [332] (34b)

5. $\int\limits_0^\pi \frac{\cos(2n-1)x\, dx}{1-2a\cos 2x+a^2} = \int\limits_0^\pi \frac{\cos 2nx \cos x\, dx}{1-2a\cos 2x+a^2} = 0 \qquad [a^2\neq 1].$

БХ [65] (9 и 10)

6. $\int\limits_0^\pi \frac{\cos(2n-1)x \cos 2x\, dx}{1-2a\cos 2x+a^2} = 0 \qquad [a^2\neq 1].$ БХ [65] (12)

7. $\int\limits_0^\pi \frac{\sin 2nx \sin x\, dx}{1-2a\cos 2x+a^2} = \int\limits_0^\pi \frac{\sin(2n-1)x \sin 2x\, dx}{1-2a\cos 2x+a^2} = 0 \qquad [a^2\neq 1].$

БХ [65] (6 и 7)

8. $\int\limits_0^\pi \frac{\sin(2n-1)x \sin x\, dx}{1-2a\cos 2x+a^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^{n-1}}{1+a} \qquad [a^2<1];$

$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(1+a)a^n} \qquad [a^2>1].$ БХ [65] (8)

9. $\int\limits_0^\pi \frac{\cos(2n-1)x \cos x\, dx}{1-2a\cos 2x+a^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^{n-1}}{1-a} \qquad [a^2<1];$

$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(a-1)a^n} \qquad [a^2>1].$ БХ [65] (11)

10. $\int\limits_0^\pi \frac{\sin nx - a\sin(n-1)x}{1-2a\cos x+a^2}\sin mx\, dx = 0$ при $m<n;$

$= \frac{\pi}{2}a^{m-n}$ при $m\geqslant n;$

$[a^2<1].$ Ли [65] (13)

11. $\int\limits_0^\pi \frac{\cos nx - a\cos(n-1)x}{1-2a\cos x+a^2}\cos mx\, dx = \frac{\pi}{2}(a^{m-n}-1) \qquad [a^2<1].$ БХ [65] (14)

12. $\int\limits_0^\pi \frac{\sin nx - a\sin[(n+1)x]}{1-2a\cos x+a^2}dx = 0 \qquad [a^2<1].$ БХ [68] (13)

13. $\int\limits_0^\pi \frac{\cos nx - a\cos[(n+1)x]}{1-2a\cos x+a^2}dx = 2\pi a^n \qquad [a^2<1].$ БХ [68] (14)

3.614 $\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{a^2-2ab\cos x+b^2}\cdot\frac{\sin px\cdot dx}{1-2a^p\cos px+a^{2p}} = \frac{\pi b^{p-1}}{2a^{p+1}(1-b^p)}$

$[0<a<1,\ 0<a<b,\ p>0].$ БХ [66] (9)

3.615

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2nx\,dx}{1-a^2\sin^2 x} = \frac{(-1)^n \pi}{2\sqrt{1-a^2}} \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^{2n} \qquad [a^2 < 1].$$ БХ [47] (27)

2. $$\int_0^{\pi} \frac{\cos x \sin 2nx\,dx}{1+(a+b\sin x)^2} = -\frac{\pi}{b} \sin\left\{2n \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{s}{2}}\right\} \operatorname{tg}^{2n}\left(\frac{1}{2}\arccos\sqrt{\frac{s}{2a^2}}\right).$$

3. $$\int_0^{\pi} \frac{\cos x \cos(2n+1)x\,dx}{1+(a+b\sin x)^2} =$$
$$= \frac{\pi}{b} \cos\left\{(2n+1) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{s}{2}}\right\} \operatorname{tg}^{2n+1}\left(\frac{1}{2}\arccos\sqrt{\frac{s}{2a^2}}\right),$$
где $s = -(1+b^2-a^2) + \sqrt{(1+b^2-a^2)^2+4a^2}$. БХ [65] (21 и 22)

3.616

1. $$\int_0^{\pi} (1-2a\cos x+a^2)^n\,dx = \pi \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 a^{2k}.$$ БХ [63] (1)

2. $$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(1-2a\cos x+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1-2a\cos x+a^2)^n} =$$
$$= \frac{\pi}{(1-a^2)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+k-1)!}{(k!)^2 (n-k-1)!} \cdot \left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^k \qquad [a^2 < 1];$$
$$= \frac{\pi}{(a^2-1)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+k-1)!}{(k!)^2 (n-k-1)!} \cdot \frac{1}{(a^2-1)^k} \qquad [a^2 > 1].$$ ГХ [331] (63)

3. $$\int_0^{\pi} (1-2a\cos x+a^2)^n \cos nx\,dx = (-1)^n \pi a^n.$$ БХ [63] (2)

4. $$\int_0^{\pi} (1-2a\cos x+a^2)^n \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-2a\cos x+a^2)^n \cos mx\,dx =$$
$$= 0 \qquad [n < m];$$
$$= \pi(-a)^m (1+a^2)^{n-m} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-m}{2}\right)} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m+k}\left(\frac{a}{1+a^2}\right)^{2k} \qquad [n \geqslant m].$$
ГХ [332] (35a)

5. $$\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx\,dx}{(1-2a\cos 2x+a^2)^m} = 0.$$ ГХ [332] (32a)

6. $$\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{(1-2a\cos 2x+a^2)^m} = \frac{1}{2(m-1)a}\left[\frac{1}{(1-a)^{2m-2}} - \frac{1}{(1+a)^{2m-2}}\right]$$
$[a \neq 0, \pm 1]$, ГХ [332] (32c)

7. $$\int_0^{\pi} \frac{\cos nx\,dx}{(1-2a\cos x+a^2)^m} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx\,dx}{(1-2a\cos x+a^2)^m} =$$
$$= \frac{a^{2m+n-2}\pi}{(1-a^2)^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+n-1}{k}\binom{2m-k-2}{m-1}\left(\frac{1-a^2}{a^2}\right)^k \qquad [a^2<1];$$
$$= \frac{\pi}{a^n(a^2-1)^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+n-1}{k}\binom{2m-k-2}{m-1}(a^2-1)^k \qquad [a^2>1].$$

ГХ [332] (31)

8. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2nx\,dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^{n+1}} = \binom{2n}{n}\frac{(b^2-a^2)^n}{(2ab)^{2n+1}}\pi \qquad [a>0,\ b>0].$$

ГХ [332] (30b)

3.62 Степени тригонометрических функций

3.621

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\mu-1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mu-1} x\,dx = 2^{\mu-2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}\right).$$ ФII 789

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{2}} x\,dx = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).$$

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x\,dx = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}.$$ ФII 151

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} x\,dx = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$ Ф II 151

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\mu-1} x \cos^{\nu-1} x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \qquad [\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0].$$

Ло V 113 (50), Ло V 122, ФII 788

3.622

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\pm\mu} x\,dx = \frac{\pi}{2}\sec\frac{\mu\pi}{2} \qquad [|\operatorname{Re}\mu|<1].$$ БХ [42] (1)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{\mu} x\,dx = \frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{\mu+1}{2}\right) \qquad [\operatorname{Re}\mu>-1].$$ БХ [34] (1)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x\, dx = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2n-2k-1}$. БХ [34] (2)

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n+1} x\, dx = (-1)^{n+1} \frac{\ln 2}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2n-2k}$. БХ [34] (3)

3.623

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\mu-1} x \cos^{2\nu-2} x\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^{\mu-1} x \sin^{2\nu-2} x\, dx =$

$= \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{\mu}{2}, \nu - \frac{\mu}{2}\right)$ $[0 < \operatorname{Re}\mu < 2 \operatorname{Re}\nu]$. БХ [42] (6), БХ [45] (22)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{\mu} x \sin^2 x\, dx = \frac{1+\mu}{4} \beta\left(\frac{\mu+1}{2}\right)$ $[\operatorname{Re}\mu > -1]$. БХ [34] (4)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{\mu} x \cos^2 x\, dx = \frac{1-\mu}{4} \beta\left(\frac{\mu+1}{2}\right)$ $[\operatorname{Re}\mu > -1]$. БХ [34] (5)

3.624

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^p x}{\cos^{p+2} x}\, dx = \frac{1}{p+1}$ $[p > -1]$. ГХ [331] (34b)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\mu-\frac{1}{2}} x}{\cos^{2\mu-1} x}\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\mu-\frac{1}{2}} x}{\sin^{2\mu-1} x}\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{4}\right) \Gamma(1-\mu)}{\Gamma\left(\frac{5}{4} - \frac{\mu}{2}\right)}$

$\left[-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\mu < 1\right]$. Ли [55] (12)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^{n-\frac{1}{2}} 2x}{\cos^{2n+1} x}\, dx = \frac{(2n-1)!!}{2 \cdot (2n)!!} \pi$. БХ [38] (3)

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^{\mu} 2x}{\cos^{2(\mu+1)} x}\, dx = 2^{2\mu} \mathrm{B}(\mu+1, \mu+1)$ $[\operatorname{Re}\mu > -1]$. БХ [35] (1)

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2\mu-2} x}{\cos^{\mu} 2x}\, dx = 2^{1-2\mu} \mathrm{B}(2\mu-1, 1-\mu) = \frac{\Gamma\left(\mu - \frac{1}{2}\right) \Gamma(1-\mu)}{2\sqrt{\pi}}$

$\left[\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\mu < 1\right]$. БХ [35] (4)

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin ax}{\sin x}\right)^2 dx = \frac{a\pi}{2}.$$ ФИ II 145

3.625

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2n-1} x \cos^p 2x}{\cos^{2p+2n+1} x} dx = \frac{(n-1)!}{2} \cdot \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+n+1)} =$$
$$= \frac{(n-1)!}{2(p+n)(p+n-1)\dots(p+1)} = \frac{1}{2} \mathrm{B}(n, p+1)$$
$[p > -1]$, (сравни **3.251** 1.). БХ [35] (2)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2n} x \cos^p 2x}{\cos^{2p+2n+2} x} dx = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(n + \frac{1}{2}, p+1\right)$$
$[p > -1]$, (сравни **3.251** 1.). БХ [35] (3)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2n-1} x \cos^{m-\frac{1}{2}} 2x}{\cos^{2n+2m} x} dx = \frac{(2n-2)!!\,(2m-1)!!}{(2n+2m-1)!!}.$$ БХ [38] (6)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2n} x \cos^{m-\frac{1}{2}} 2x}{\cos^{2n+2m+1} x} dx = \frac{(2n-1)!!\,(2m-1)!!}{(2n+2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$ БХ [38] (7)

3.626

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2n-1} x}{\cos^{2n+2} x} \sqrt{\cos 2x}\, dx = \frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!}$$ (сравни **3.251** 1.). БХ [38] (4)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n+3} x} \sqrt{\cos 2x}\, dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$ (сравни **3.251** 1.). БХ [38] (5)

3.627 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^\mu x}{\cos^\mu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg}^\mu x}{\sin^\mu x} dx = \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}{2^\mu \sqrt{\pi}} \sin\frac{\mu\pi}{2}$$
$\left[-1 < \operatorname{Re}\mu < \frac{1}{2}\right].$ БХ [55] (12) *и*

3.628 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^{2p+1} x \frac{d \sin^{2p} x}{dx} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(p+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)$$
$\left[\frac{1}{2} > p > 0\right].$ В 691

3.63 Степени тригонометрических функций и тригонометрические функции от линейной функции аргумента

3.631

1. $$\int_0^{\pi} \sin^{\nu-1} x \sin ax\, dx = \frac{\pi \sin \frac{a\pi}{2}}{2^{\nu-1} \nu \mathrm{B}\left(\frac{\nu+a+1}{2}, \frac{\nu-a+1}{2}\right)} \quad [\operatorname{Re} \nu > 0].$$ ЛоV 121 (67) и, В 337 и

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-2} x \sin \nu x\, dx = \frac{-1}{\nu-1} \cos \frac{\nu\pi}{2} \quad [\operatorname{Re} \nu > 1].$$ ГХ [332] (16d), ФII 152

3. $$\int_0^{\pi} \sin^{\nu} x \sin \nu x\, dx = 2^{-\nu} \pi \sin \frac{\nu\pi}{2} \quad [\operatorname{Re} \nu > -1].$$ ЛоV 121 (69)

4. $$\int_0^{\pi} \sin^{n} x \sin 2mx\, dx = 0.$$ ГХ [332] (11a)

5. $$\int_0^{\pi} \sin^{2n} x \sin (2m+1) x\, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \sin (2m+1) x\, dx =$$
$$= \frac{(-1)^m 2^{n+1} n!\, (2n-1)!!}{(2n-2m-1)!!\, (2m+2n+1)!!} \quad [m \leqslant n] \text{*)};$$
$$= \frac{(-1)^n 2^{n+1} n!\, (2m-2n-1)!!\, (2n-1)!!}{(2m+2n+1)!!} \quad [m \geqslant n] \text{*)}.$$ ГХ [332] (11b)

6. $$\int_0^{\pi} \sin^{2n+1} x \sin (2m+1) x\, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \sin (2m+1) x\, dx =$$
$$= \frac{(-1)^m \pi}{2^{2n+1}} \binom{2n+1}{n-m} \quad [n \geqslant m];$$
$$= 0 \quad [n < m].$$ БХ [40] (12), ГХ [332] (11c)

7. $$\int_0^{\pi} \sin^{n} x \cos (2m+1) x\, dx = 0.$$ ГХ [332] (12a)

8. $$\int_0^{\pi} \sin^{\nu-1} x \cos ax\, dx = \frac{\pi \cos \frac{a\pi}{2}}{2^{\nu-1} \nu \mathrm{B}\left(\frac{\nu+a+1}{2}, \frac{\nu-a+1}{2}\right)} \quad [\operatorname{Re} \nu > 0].$$ ЛоV 121 (68) и, В 337 и

9. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu-1} x \cos ax\, dx = \frac{\pi}{2^{\nu} \nu \mathrm{B}\left(\frac{\nu+a+1}{2}, \frac{\nu-a+1}{2}\right)} \quad [\operatorname{Re} \nu > 0].$$ ГХ [332] (9c)

*) При $m=n$ следует положить $(2n-2m-1)!!=1$.

10. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-2} x \cos \nu x \, dx = \frac{1}{\nu-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \qquad [\operatorname{Re} \nu > 1].$

ГХ [332] (16b), ФII 152

11. $\int\limits_0^{\pi} \sin^{\nu} x \cos \nu x \, dx = \frac{\pi}{2^{\nu}} \cos \frac{\nu\pi}{2} \qquad [\operatorname{Re} \nu > -1].$ ЛоV 121 (70) а

12. $\int\limits_0^{\pi} \sin^{2n} x \cos 2mx \, dx = 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \cos 2mx \, dx =$

$= \frac{(-1)^m}{2^{2n}} \binom{2n}{n-m} \qquad [n \geqslant m];$

$= 0 \qquad [n < m].$ БХ [40] (16), ГХ [332] (12b)

13. $\int\limits_0^{\pi} \sin^{2n+1} x \cos 2mx \, dx = 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \cos 2mx \, dx =$

$= \frac{(-1)^m \, 2^{n+1} \, n! \, (2n+1)!!}{(2n-2m+1)!! \, (2m+2n+1)!!} \qquad [n \geqslant m-1];$

$= \frac{(-1)^{n+1} \, 2^{n+1} \, n! \, (2m-2n+1)!! \, (2n+1)!!}{(2m+2n+1)!!} \qquad [n < m-1].$

ГХ [332] (12c)

14. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu-2} x \sin \nu x \, dx = \frac{1}{\nu-1} \qquad [\operatorname{Re} \nu > 1].$ ГХ [332] (16c), ФII 152

15. $\int\limits_0^{\pi} \cos^m x \sin nx \, dx = [1 - (-1)^{m+n}] \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx \, dx =$

$$= [1 - (-1)^{m+n}] \left\{ \sum_{k=0}^{r-1} \frac{m!}{(m-k)!} \frac{(m+n-2k-2)!!}{(m+n)!!} + s \frac{m! \, (n-m-2)!!}{(m+n)!!} \right\}$$

$$\left[r = \begin{cases} m & [m \leqslant n], \\ n & [m \geqslant n], \end{cases} \qquad s = \begin{cases} 2 & [n-m = 4l+2 > 0], \\ 1 & [n-m = 2l+1 > 0], \\ 0 & [n-m = 4l \text{ или } n-m < 0] \end{cases} \right].$$

ГХ [332] (13a)

16. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx \, dx = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}.$ ФII 153

17. $\int\limits_0^{\pi} \cos^n x \cos mx\, dx = [1+(-1)^{m+n}] \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos mx\, dx =$

$$= [1+(-1)^{m+n}] \begin{cases} s \dfrac{n!}{(m-n)(m-n+2)\dots(m+n)} & [n < m]; \\ \dfrac{\pi}{2^{n+1}} \dbinom{n}{k} & [m \leqslant n \text{ и } n-m=2k]; \\ \dfrac{n!}{(2k+1)!!\,(2m+2k+1)!!} & [m < n \text{ и } n-m=2k+1]; \end{cases}$$

где $s = \begin{cases} 0 & [m-n=2k], \\ 1 & [m-n=4k+1], \\ -1 & [m-n=4k-1]. \end{cases}$ ГХ [332] (14а)

18. $\int\limits_0^{\pi} \cos^m x \cos ax\, dx = \dfrac{(-1)^m \sin a\pi}{2^m (m+a)}\, {}_2F_1\left(-m, \dfrac{a+m}{2};\ 1-\dfrac{a+m}{2};\ -1\right)$

$[a \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots]$. В 342

19. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu-2} x \cos \nu x\, dx = 0 \quad [\operatorname{Re} \nu > 1]$. ГХ [332] (16а), ФII 152

20. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx\, dx = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. ЛоV 122 (78), ФII 153

3.632

1. $\int\limits_0^{\pi} \sin^{p-1} x \cos\left[a\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right] dx = 2^{p-1} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{p-a}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{p+a}{2}\right)}{\Gamma(p-a)\,\Gamma(p+a)}\, \Gamma(p)$

$[p^2 < a^2]$. БХ [62] (11)

2. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu-1} x \sin\left[a\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right] dx = \dfrac{\pi \sin \dfrac{a\pi}{2}}{2^{\nu-1} \nu \mathrm{B}\left(\dfrac{\nu+a+1}{2}, \dfrac{\nu-a+1}{2}\right)}$

$[\operatorname{Re} \nu > 0]$. В 337u

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \sin[(p+2n)x]\, dx = (-1)^{n-1} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^k 2^k}{p+k+1} \dbinom{n-1}{k}$. Ли [41] (12)

4. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^{n-1} x \cos[m(x-a)]\, dx = [1-(-1)^{n+m}] \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos[m(x-a)]\, dx =$

$$= \frac{[1-(-1)^{n+m}]\, \pi \cos ma}{2^{n-1} n \mathrm{B}\left(\dfrac{n+m+1}{2}, \dfrac{n-m+1}{2}\right)} \quad [n \geqslant m].$$

ЛоV 123 (80), ЛоV 139 (94а)

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q-2} x \cos[(p-q)x]\, dx = \frac{\pi}{2^{p+q-1}(p+q-1)\,\mathrm{B}(p, q)}$

$[p+q>1]$. УВII 41

3.633

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1} x \sin ax \sin x\, dx = \frac{a\pi}{2^{p+1}\, p(p+1)\,\mathrm{B}\left(\frac{p+a}{2}+1, \frac{p-a}{2}+1\right)}$.

ЛоV 150 (110)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx \sin 2mx\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx \cos 2mx\, dx =$

$= \frac{\pi}{2^{n+2}} \binom{n}{m}$. БХ [42] (19 и 20)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos[(n+1)x] \cos 2mx\, dx = \frac{\pi}{2^{n+1}} \binom{n-1}{m-1} \quad [n>m-1]$.

БХ [42] (21)

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q} x \cos px \cos qx\, dx = \frac{\pi}{2^{p+q+2}} \left[1 + \frac{1}{(p+q+1)\,\mathrm{B}(p+1, q+1)}\right]$

$[p+q>-1]$. ГХ [332] (10c)

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q} x \sin px \sin qx\, dx = \frac{\pi}{2^{p+q+2}} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{p}{k}\binom{q}{k}$

$[p+q>-1]$. БХ [42] (16)

3.634

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\mu-1} x \cos^{\nu-1} x \sin(\mu+\nu)x\, dx = \sin\frac{\mu\pi}{2}\,\mathrm{B}(\mu, \nu)$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$. БХ [42] (23), ФII 814*u*

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\mu-1} x \cos^{\nu-1} x \cos(\mu+\nu)x\, dx = \cos\frac{\mu\pi}{2}\,\mathrm{B}(\mu, \nu)$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$. БХ [42] (24), ФII 814*u*

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+n-1} x \sin px \cos[(n+1)x] \sin x\, dx =$

$= \frac{\pi}{2^{p+n+1}} \frac{\Gamma(p+n)}{n!\,\Gamma(p)} \quad [p>-n]$. БХ [42] (15)

3.635

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{\mu-1} 2x \operatorname{tg} x\, dx = \frac{1}{4}\left[\psi\left(\frac{\mu+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\mu}{2}\right)\right] \quad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ БХ[34](7)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+2n} x \sin px \operatorname{tg} x\, dx =$$
$$= \frac{\pi}{2^{p+2n+1}\Gamma(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(p+n-k)}{(n-k)!} \quad [p > -2n].$$ БХ [42] (22)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin[(n+1)x] \operatorname{ctg} x\, dx = \frac{\pi}{2}.$$ БХ [45] (18)

3.636

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\pm\mu} x \sin 2x\, dx = \frac{\mu\pi}{2} \operatorname{cosec} \frac{\mu\pi}{2} \quad [0 < \operatorname{Re}\mu < 2].$$ БХ [45] (20)и

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\pm\mu} x \cos 2x\, dx = \mp \frac{\mu\pi}{2} \sec \frac{\mu\pi}{2} \quad [|\operatorname{Re}\mu| < 1].$$ БХ [45] (21)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{2\mu} x}{\cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg}^{2\mu} x}{\sin x}\, dx = \frac{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\Gamma(-\mu)}{2\sqrt{\pi}}$$
$$\left[-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\mu < 1\right],$$ (сравни 3.251 1). БХ [45] (13 и 14)

3.637

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^p x \sin^{q-2} x \sin qx\, dx = -\cos \frac{(p+q)\pi}{2} \mathrm{B}(p+q-1, 1-p)$$
$$[p+q > 1 > p].$$ ГХ [332] (15d)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^p x \sin^{q-2} x \cos qx\, dx = \sin \frac{(p+q)\pi}{2} \mathrm{B}(p+q-1, 1-p)$$
$$[p+q > 1 > p].$$ ГХ [332] (15b)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^p x \cos^{q-2} x \sin qx\, dx = \cos \frac{p\pi}{2} \mathrm{B}(p+q-1, 1-p)$$
$$[p+q > 1 > p].$$ ГХ [332] (15c)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^p x \cos^{q-2} x \cos qx\, dx = \sin \frac{p\pi}{2} \mathrm{B}(p+q-1,\ 1-p)$$

$[p+q>1>p]$. ГХ [332] (15а)

3.638

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2\mu} x\, dx}{\cos^{\mu+\frac{1}{2}} 2x \cos x} = \frac{\pi}{2} \sec \mu\pi \quad \left[|\operatorname{Re}\mu| < \frac{1}{2}\right],$$

(сравни 3.192 2.). БХ [38] (8)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{\mu-\frac{1}{2}} 2x\, dx}{\cos^{\mu} 2x \cos x} = \frac{2}{2\mu-1} \cdot \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-\mu)}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{2\mu-1}{4}\pi\right)$$

$\left[-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\mu < 1\right]$. БХ [38] (17)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-1} x \sin px}{\sin x}\, dx = \frac{\pi}{2} \quad [p>0].$$ ГХ [332] (17), БХ [45] (5)

3.64—3.65 Степени тригонометрических функций и рациональная функция от тригонометрических функций

3.641

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{p-1} x \cos^{-p} x}{a \cos x + b \sin x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{-p} x \cos^{p-1} x}{a \sin x + b \cos x}\, dx =$$

$$= \frac{\pi \operatorname{cosec} p\pi}{a^{1-p} b^{p}} \quad [ab>0,\ 0<p<1].$$ ГХ [331] (62)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{1-p} x \cos^{p} x}{(\sin x + \cos x)^3}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{p} x \cos^{1-p} x}{(\sin x + \cos x)^3}\, dx =$$

$$= \frac{(1-p)\,p}{2} \pi \operatorname{cosec} p\pi \quad [-1<p<2].$$ БХ [48] (5)

3.642

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2\mu-1} x \cos^{2\nu-1} x\, dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^{\mu+\nu}} = \frac{1}{2a^{2\mu} b^{2\nu}} \mathrm{B}(\mu, \nu)$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$. БХ [48] (28)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{n-1} x \cos^{n-1} x\, dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^n} = \frac{\mathrm{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)}{2(ab)^n} \quad [ab>0].$$ ГХ [331] (59а)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}x\,dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^{n+1}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n}x\,dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^{n+1}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n}x\,dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^{n+1}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\cos^{2n}x\,dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^{n+1}} =$$

$$= \frac{(2n-1)!!\,\pi}{2^{n+1}n!\,ab^{2n+1}} \qquad [ab > 0]. \qquad \text{ГХ [331] (58)}$$

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p+2n}x\cos px\,dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^{n+1}} = \pi\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{n}\binom{p+k-1}{k}\frac{b^{p-1}}{(2a)^{2n-k+1}(a+b)^{p+k}}$$

$$[a>0,\ b>0,\ p>-2n-1]. \qquad \text{ГХ [332] (30)}$$

3.643

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^p x\cos px\,dx}{1-2a\cos 2x+a^2} = \frac{\pi}{2^{p+1}}\cdot\frac{(1+a)^{p-1}}{1-a} \qquad [a^2<1,\ p>-1]. \qquad \text{ГХ [332] (33c)}$$

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}x\cos^{\mu}x\cos\beta x}{(1-2a\cos 2x+a^2)^m}\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^n\pi\,(1-a)^{2n-2m+1}}{2^{2m-\beta-1}\,(1+a)^{2m+\beta+1}}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-k-1}\binom{\beta}{k}\binom{2n}{l}\binom{2m-k-l-2}{m-1}(-2)^l(a-1)^k$$

$$[a^2<1,\ \beta=2m-2n-\mu-2,\ \mu>-1]. \qquad \text{ГХ [332] (33)}$$

3.644 *)

1. $$\int_0^{\pi} \frac{\sin^m x}{p+q\cos x}\,dx =$$

$$= 2^{m-2}\frac{p}{q^2}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{p^2-q^2}{-4q^2}\right)^{\nu-1}\mathrm{B}\left(\frac{m+1-2\nu}{2},\ \frac{m+1-2\nu}{2}\right)+\left(\frac{p^2-q^2}{-q^2}\right)^k A;$$

$$A=\frac{\pi p}{q^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{q^2}{p^2}}\right) \qquad [m=2k+2];$$

$$A=\frac{1}{q}\ln\frac{p+q}{p-q} \qquad [m=2k+1]$$

$$[k\geqslant 1,\ q\neq 0,\ p^2-q^2\geqslant 0].$$

2. $$\int_0^{\pi} \frac{\sin^m x}{1+\cos x}\,dx = 2^{m-1}\mathrm{B}\left(\frac{m-1}{2},\ \frac{m+1}{2}\right) \qquad [m\geqslant 2].$$

---

*) Интегралы **3.644** приведены в статье К. В. Бродовицкого «Об интеграле $\int_0^{\pi}\frac{\sin^m x}{p+q\cos x}\,dx$», ДАН 120, № 6 (1958).

3. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^m x}{1-\cos x}\,dx = 2^{m-1}\mathrm{B}\left(\frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) \quad [m \geqslant 2].$

4. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{p+q\cos x}\,dx = \frac{p\pi}{q^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{q^2}{p^2}}\right).$

5. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{p+q\cos x}\,dx = 2\frac{p}{q^2}+\frac{1}{q}\left(1-\frac{p^2}{q^2}\right)\ln\frac{p+q}{p-q}.$

3.645 $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^n x\,dx}{(a+b\cos x)^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n(a+b)^n\sqrt{a^2-b^2}} \times$

$$\times \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{(2n-2k-1)!!\,(2k-1)!!}{(n-k)!\,k!}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^k \quad [a^2 > b^2].$$ Ли [64] (16)

3.646

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x \sin nx \sin 2x}{1-2a\cos 2x+a^2}\,dx = \frac{\pi}{4a}\left[\left(\frac{1+a}{2}\right)^n - \frac{1}{2^n}\right] \quad [a^2 < 1].$ БХ [50] (6)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-a\cos 2nx}{1-2a\cos 2nx+a^2}\cos^m x\cos mx\,dx =$

$$= \frac{\pi}{2^{m+2}}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{kn}a^k + \frac{\pi}{2^{m+1}} \quad [a^2 < 1].$$ Ли [50] (7)

3.647

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^p x\cos px\,dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{2b}\cdot\frac{a^{p-1}}{(a+b)^p} \quad [p > -1,\ a > 0,\ b > 0].$ БХ [47] (20)

3.648

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}^l x\,dx}{1+\cos\frac{m}{n}\pi\sin 2x} = \frac{1}{2n}\operatorname{cosec}\frac{m}{n}\pi\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}\sin\frac{km}{n}\pi \times$

$$\times\left[\psi\left(\frac{n+l+k}{2n}\right)-\psi\left(\frac{l+k}{2n}\right)\right] \quad [m+n \text{ нечетно}];$$

$$= \frac{1}{n}\operatorname{cosec}\frac{m}{n}\pi\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{k-1}\sin\frac{km}{n}\pi \times$$

$$\times\left[\psi\left(\frac{n+l-k}{n}\right)-\psi\left(\frac{l+k}{n}\right)\right] \quad [m+n \text{ четно}]$$

[l — натуральное число]. БХ [36] (5)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{\pm\mu} x\,dx}{1+\cos t \sin 2x} = \pi \operatorname{cosec} t \sin \mu t \operatorname{cosec}(\mu\pi) \quad [|\operatorname{Re}\mu| < 1,\ t^2 < \pi^2].$$

БХ [47] (4)

3.649

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{\pm\mu} x \sin 2x\,dx}{1 \mp 2a\cos 2x + a^2} = \frac{\pi}{4a} \operatorname{cosec}\frac{\mu\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\mu}\right] \quad [a^2 < 1];$$

$$= \frac{\pi}{4a} \operatorname{cosec}\frac{\mu\pi}{2}\left[1+\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{\mu}\right] \quad [a^2 > 1]$$

$[-2 < \operatorname{Re}\mu < 1]$. БХ [50] (3)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{\pm\mu} x\,(1 \mp a\cos 2x)}{1 \mp 2a\cos 2x + a^2}\,dx = \frac{\pi}{4} \sec\frac{\mu\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\mu}\right] \quad [a^2 < 1];$$

$$= \frac{\pi}{4} \sec\frac{\mu\pi}{2}\left[1-\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{\mu}\right] \quad [a^2 > 1]$$

$[|\operatorname{Re}\mu| < 1]$. БХ [50] (4)

3.651

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^{\mu} x\,dx}{1+\sin x\cos x} = \frac{1}{3}\left[\psi\left(\frac{\mu+2}{3}\right) - \psi\left(\frac{\mu+1}{3}\right)\right] \quad [\operatorname{Re}\mu > -1].$$ БХ [36] (3)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^{\mu} x\,dx}{1-\sin x\cos x} = \frac{1}{3}\left[\beta\left(\frac{\mu+2}{3}\right) + \beta\left(\frac{\mu+1}{3}\right)\right] \quad [\operatorname{Re}\mu > -1].$$

БХ [36] (4) *и*

3.652

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{\mu} x\,dx}{(\sin x+\cos x)\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg}^{\mu} x\,dx}{(\sin x+\cos x)\cos x} = \pi \operatorname{cosec}\mu\pi \quad [0 < \operatorname{Re}\mu < 1].$$

БХ [49] (1)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{\mu} x\,dx}{(\sin x-\cos x)\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg}^{\mu} x\,dx}{(\cos x-\sin x)\cos x} = -\pi \operatorname{ctg}\mu\pi \quad [0 < \operatorname{Re}\mu < 1]$$

БХ [49] (2)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg}^{\mu+\frac{1}{2}} x\,dx}{(\sin x+\cos x)\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{\mu-\frac{1}{2}} x\,dx}{(\sin x+\cos x)\cos x} = \pi \sec\mu\pi \quad \left[|\operatorname{Re}\mu| < \frac{1}{2}\right].$$

БХ [61] (1), БХ [61] (2)

3.653

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{1-2\mu} x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg}^{1-2\mu} x\,dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{\pi}{2a^{2\mu}b^{2-2\mu}\sin\mu\pi}$$

$[0<\operatorname{Re}\mu<1]$. ГХ [331] (59b)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{\mu} x\,dx}{1-a\sin^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg}^{\mu} x\,dx}{1-a\cos^2 x}=\frac{\pi\sec\frac{\mu\pi}{2}}{2\sqrt{(1-a)^{\mu+1}}}$$ $[|\operatorname{Re}\mu|<1,\ a<1]$.

БХ [49] (6)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{\pm\mu} x\,dx}{1-\cos^2 t\sin^2 2x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec} t\sec\frac{\mu\pi}{2}\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mu\right]$$

$[|\operatorname{Re}\mu|<1,\ t^2<\pi^2]$. БХ [49] (7), БХ [47] (21)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{\pm\mu} x\sin 2x}{1-\cos^2 t\sin^2 2x}\,dx=\pi\operatorname{cosec} 2t\operatorname{cosec}\frac{\mu\pi}{2}\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mu\right]$$

$[|\operatorname{Re}\mu|<1,\ t^2<\pi^2]$. БХ [47] (22) и

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{\mu} x\sin^2 x\,dx}{1-\cos^2 t\sin^2 2x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg}^{\mu} x\cos^2 x\,dx}{1-\cos^2 t\sin^2 2x}=$$
$$=\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec} 2t\sec\frac{\mu\pi}{2}\cos\left[\frac{\mu\pi}{2}-(\mu+1)t\right]$$ $[|\operatorname{Re}\mu|<1,\ t^2<\pi^2]$.

БХ [47] (23) и, БХ [49] (10)

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{\mu} x\cos^2 x\,dx}{1-\cos^2 t\sin^2 2x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg}^{\mu} x\sin^2 x\,dx}{1-\cos^2 t\sin^2 2x}=$$
$$=\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec} 2t\sec\frac{\mu\pi}{2}\cos\left[\frac{\mu\pi}{2}-(\mu-1)t\right]$$ $[|\operatorname{Re}\mu|<1,\ t^2<\pi^2]$.

БХ [47] (24) и, БХ [49] (9)

3.654

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{\mu+1} x\cos^2 x\,dx}{(1+\cos t\sin 2x)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg}^{\mu+1} x\sin^2 x\,dx}{(1+\cos t\sin 2x)^2}=\frac{\pi(\mu\sin t\cos\mu t-\cos t\sin\mu t)}{2\sin\mu\pi\sin^3 t}$$

$[|\operatorname{Re}\mu|<1,\ t^2<\pi^2]$. БХ [48] (3), БХ [49] (22)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{\pm\mu} x\,dx}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{\mu\pi}{\sin\mu\pi}$$ $[0<\operatorname{Re}\mu<1]$. БХ [56] (9) и

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{\pm(\mu-1)} x\,dx}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\pm\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\mu\pi}{2}$$ $[0<\operatorname{Re}\mu<2]$. БХ [45] (27 и 29)

3.655 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{2\mu-1} x\, dx}{1-2a(\cos t_1 \sin^2 x+\cos t_2 \cos^2 x)+a^2} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg}^{2\mu-1} x\, dx}{1-2a(\cos t_1 \cos^2 x+\cos t_2 \sin^2 x)+a^2} =$$

$$= \frac{\pi \operatorname{cosec} \mu\pi}{(1-2a\cos t_2+a^2)^{\mu}(1-2a\cos t_1+a^2)^{1-\mu}}$$

$[0 < \operatorname{Re}\mu < 1, \quad t_1^2 < \pi^2, \quad t_2^2 < \pi^2]$. БХ [50] (18)

3.656

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^{\mu} x\, dx}{1-\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{12}\left\{-\psi\left(\frac{\mu+1}{6}\right)-\psi\left(\frac{\mu+2}{6}\right)+\right.$$

$$\left.+\psi\left(\frac{\mu+4}{6}\right)+\psi\left(\frac{\mu+5}{6}\right)+2\psi\left(\frac{\mu+2}{3}\right)-2\psi\left(\frac{\mu+1}{3}\right)\right\}$$

$[\operatorname{Re}\mu > -1]$, (сравни 3.651 1. и 2.). Ли [36] (10)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{\mu-1} x \cos^2 x\, dx}{1-\sin^2 x \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg}^{\mu-1} x \sin^2 x\, dx}{1-\sin^2 x \cos^2 x} =$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \operatorname{cosec}\frac{\mu\pi}{6} \operatorname{cosec}\left(\frac{2+\mu}{6}\pi\right) \quad [0 < \operatorname{Re}\mu < 4].$$ Ли [47] (26)

3.66 Формы, содержащие степени линейных функций от тригонометрических функций

3.661

1. $$\int_0^{2\pi} (a \sin x + b \cos x)^{2n+1}\, dx = 0.$$ БХ [68] (9)

2. $$\int_0^{2\pi} (a \sin x + b \cos x)^{2n}\, dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot 2\pi (a^2+b^2)^n.$$ БХ [68] (8)

3. $$\int_0^{\pi} (a+b\cos x)^n\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a+b\cos x)^n\, dx =$$

$$= \pi (a^2-b^2)^{\frac{n}{2}} P_n\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2^n} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} a^{n-2k} (a^2-b^2)^k \quad [a^2 > b^2].$$ ГХ [332] (37а)

4. $$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n+1}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n+1}} =$$
$$= \frac{\pi}{(a^2-b^2)^{\frac{n+1}{2}}} P_n\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{2^n (a+b)^n \sqrt{a^2-b^2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n-2k-1)!!\,(2k-1)!!}{(n-k)!\,k!} \cdot \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^k$$
$[a > |b|]$. ГХ [332] (38), Ли [64] (14)

3.662

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sec x - 1)^{\mu} \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{cosec} x - 1)^{\mu} \cos x\, dx =$$
$$= \mu\pi \operatorname{cosec} \mu\pi$$
$[|\operatorname{Re}\mu| < 1]$. БХ [55] (13)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{cosec} x - 1)^{\mu} \sin 2x\, dx = (1-\mu)\,\mu\pi \operatorname{cosec} \mu\pi$$
$[-1 < \operatorname{Re}\mu < 2]$. БХ [48] (7)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sec x - 1)^{\mu} \operatorname{tg} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{cosec} x - 1)^{\mu} \operatorname{ctg} x\, dx = -\pi \operatorname{cosec} \mu\pi$$
$[-1 < \operatorname{Re}\mu < 0]$, (сравни 3.192 2.). БХ [46] (4 и 6)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{ctg} x - 1)^{\mu} \frac{dx}{\sin 2x} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{cosec} \mu\pi$$
$[-1 < \operatorname{Re}\mu < 0]$. БХ [38] (22) u

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{ctg} x - 1)^{\mu} \frac{dx}{\cos^2 x} = \mu\pi \operatorname{cosec} \mu\pi$$
$[|\operatorname{Re}\mu| < 1]$. БХ [38] (11) u

3.663

1. $$\int_0^{u} (\cos x - \cos u)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos ax\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu} u\, \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) P_{a-\frac{1}{2}}^{-\nu}(\cos u)$$
$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2};\ a > 0,\ 0 < u < \pi\right]$. ВТФ I 159 (27), ИП I 22 (28)

2. $$\int_0^{u} (\cos x - \cos u)^{\nu-1} \cos[(\nu+\beta)x]\, dx =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(2\nu)\sin^{2\nu-1} u}{2^{\nu}\,\Gamma(\beta+2\nu)\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} C_{\beta}^{\nu}(\cos u)$$
$[\operatorname{Re}\nu > 0,\ \operatorname{Re}\beta > -1,\ 0 < u < \pi]$. ВТФ I 178 (23)

3.664

1. $$\int_0^\pi (z+\sqrt{z^2-1}\cos x)^q\,dx = \pi P_q(z)$$

$$\left[\operatorname{Re} z > 0, \quad \arg(z+\sqrt{z^2-1}\cos x) = \arg z \text{ при } x = \frac{\pi}{2}\right].$$ СМ III 482

2. $$\int_0^\pi \frac{dx}{(z+\sqrt{z^2-1}\cos x)^q} = \pi P_{q-1}(z)$$

$$\left[\operatorname{Re} z > 0, \quad \arg(z+\sqrt{z^2-1}\cos x) = \arg z \quad \text{при} \quad x = \frac{\pi}{2}\right].$$ УВ II 106

3. $$\int_0^\pi (z+\sqrt{z^2-1}\cos x)^q \cos nx\,dx = \frac{\pi}{(q+1)(q+2)\dots(q+n)} P_q^n(z)$$

$[\operatorname{Re} z > 0, \quad \arg(z+\sqrt{z^2-1}\cos x) = \arg z$ при $x = \frac{\pi}{2}$, z лежит вне отрезка $(-1, 1)$ действительной оси]. УВ II 123, СМ III 483 (15)

4. $$\int_0^\pi (z+\sqrt{z^2-1}\cos x)^\mu \sin^{2\nu-1} x\,dx = \frac{2^{2\nu-1}\Gamma(\mu+1)[\Gamma(\nu)]^2}{\Gamma(2\nu+\mu)} C_\mu^\nu(z) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(2\nu)\,\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(2\nu+\mu)\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} C_\mu^\nu(z) = 2^\nu \sqrt{\frac{\pi}{2}}(z^2-1)^{\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}\Gamma(\nu) P^{\frac{1}{2}-\nu}_{\mu+\nu-\frac{1}{2}}(z)$$

$[\operatorname{Re}\nu > 0]$. ВТФ I 155 (6) u, ВТФ I 178 (22)

5. $$\int_0^{2\pi} [\beta+\sqrt{\beta^2-1}\cos(a-x)]^\nu (\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\cos x)^{\nu-1}\,dx =$$

$$= 2\pi P_\nu[\beta\gamma - \sqrt{\beta^2-1}\sqrt{\gamma^2-1}\cos a]$$ $[\operatorname{Re}\beta > 0, \ \operatorname{Re}\gamma > 0]$. ВТФ I 157 (18)

3.665

1. $$\int_0^\pi \frac{\sin^{\mu-1} x\,dx}{(a+b\cos x)^\mu} = \frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{(a^2-b^2)^\mu}} \mathrm{B}\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0, \quad 0 < b < a]$. Ф II 790 u

2. $$\int_0^\pi \frac{\sin^{2\mu-1} x\,dx}{(1+2a\cos x+a^2)^\nu} = \mathrm{B}\left(\mu, \frac{1}{2}\right) F\left(\nu, \nu-\mu+\frac{1}{2}; \mu+\frac{1}{2}; a^2\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0, \quad |a| < 1]$. ВТФ I 81 (9)

3.666

1. $$\int_0^\pi (\beta+\cos x)^{\mu-\nu-\frac{1}{2}} \sin^{2\nu} x\,dx =$$

$$= \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-i\mu\pi} (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) Q^\mu_{\nu-\frac{1}{2}}(\beta)}{\Gamma\left(\nu+\mu+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left[\operatorname{Re}\left(\nu+\mu+\frac{1}{2}\right) > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ВТФ I 155 (5) u

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta\cos x)^{\mu+\nu}\sin^{-2\nu} x\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^\nu}\operatorname{sh}^\nu(\beta)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)P_\mu^\nu(\operatorname{ch}\beta) \quad \left[\operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}\right].$$ ВТФ I 156 (7)

3. $$\int_0^{\pi} (\cos t + i\sin t\cos x)^\mu \sin^{2\nu-1} x\,dx =$$
$$= 2^{\nu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\sin^{\frac{1}{2}-\nu} t\,\Gamma(\nu)\,\mathrm{P}^{\frac{1}{2}-\nu}_{\mu+\nu-\frac{1}{2}}(\cos t) \quad [\operatorname{Re}\nu > 0,\ t^2 < \pi^2].$$ ВТФ I 158 (23)

4 $$\int_0^{2\pi} [\cos t + i\sin t\cos(a-x)]^\nu \cos mx\,dx =$$
$$= \frac{i^{3m}2\pi\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}\cos ma\,\mathrm{P}_\nu^m(\cos t) \quad \left[0 < t < \frac{\pi}{2}\right].$$ ВТФ I 159 (25)

5 $$\int_0^{2\pi} [\cos t + i\sin t\cos(a-x)]^\nu \sin mx\,dx =$$
$$= \frac{i^{2m}2\pi\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}\sin ma\,\mathrm{P}_\nu^m(\cos t) \quad \left[0 < t < \frac{\pi}{2}\right].$$ ВТФ I 159 (26)

3.667

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{\mu-1} 2x\,dx}{(\cos x + \sin x)^{2\mu}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\mu+1}}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} \quad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ БХ [37] (1)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^\mu x\,dx}{(\cos x - \sin x)^{\mu+1}\cos x} = -\pi\operatorname{cosec}\mu\pi$$
$[-1 < \operatorname{Re}\mu < 0]$, (сравни 3.192 2.). БХ [3.] (16)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)^\mu}{\sin^\mu x\sin 2x}\,dx = -\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}\mu\pi$$
$[-1 < \operatorname{Re}\mu < 0]$. БХ [35] (27)

4 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^\mu x\,dx}{(\cos x - \sin x)^\mu \sin 2x} = \frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}\mu\pi \quad [0 < \operatorname{Re}\mu < 1].$$ Ли [37] (20) и

5 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^\mu x\,dx}{(\cos x - \sin x)^\mu \cos^2 x} = \mu\pi\operatorname{cosec}\mu\pi \quad [|\operatorname{Re}\mu| < 1].$$ БХ [37] (17)

6 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^\mu x\,dx}{(\cos x - \sin x)^{\mu-1}\cos^3 x} = \frac{1-\mu}{2}\mu\pi\operatorname{cosec}\mu\pi$$
$[|\operatorname{Re}\mu| < 1]$. БХ [35] (24), БХ [37] (18)

7. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\mu-1} x \cos^{\nu-1} x}{(\sin x + \cos x)^{\mu+\nu}} dx = \mathrm{B}(\mu, \nu) \quad [\operatorname{Re}\mu > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 0].$$

БХ [48] (8)

3.668

1. $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\right)^{\cos 2t} dx = \frac{\pi}{2 \sin(\pi \cos^2 t)}.$$ ФП 788

2. $$\int_u^v \frac{(\cos u - \cos x)^{\mu-1}}{(\cos x - \cos v)^{\mu}} \cdot \frac{\sin x \, dx}{1 - 2a \cos x + a^2} =$$
$$= \frac{(1 - 2a \cos u + a^2)^{\mu-1}}{(1 - 2a \cos v + a^2)^{\mu}} \cdot \frac{\pi}{\sin \mu\pi} \qquad [0 < \operatorname{Re}\mu < 1, \ a^2 < 1].$$

БХ [73] (28)

3.669 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{p-1} x \cos^{q-p-1} x \, dx}{(a \cos x + b \sin x)^q} =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{q-p-1} x \cos^{p-1} x}{(a \sin x + b \cos x)^q} dx = \frac{\mathrm{B}(p, q-p)}{a^{q-p} b^p} \qquad [q > p > 0, \quad ab > 0].$$

ГХ [331] (90)

3.67 Квадратные корни из выражений, содержащих тригонометрические функции

3.671

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \, dx =$$
$$= \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right) F\left(\frac{\alpha+1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{\alpha+\beta+2}{2}; k^2\right)$$
$$[\alpha > -1, \ \beta > -1, \ |k| < 1].$$ ГХ [331] (93)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} dx = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right) F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\alpha+\beta+2}{2}; k^2\right)$$
$$[\alpha > -1, \ \beta > -1, \ |k| < 1].$$ ГХ [331] (92)

3. $$\int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n} x \, dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{\pi}{2^n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j-1)!! \, (2n+2j-1)!!}{2^{2j} j! \, (n+j)!} k^{2j} \quad [k^2 < 1];$$
$$= \frac{(2n-1)!! \, \pi}{2^n \sqrt{1-k^2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[(2j-1)!!]^2}{2^{2j} j! \, (n+j)!} \left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)^j \left[k^2 < \frac{1}{2}\right].$$ Ли [67] (2)

3.672

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x}{\cos^{n+1} x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\cos x\,(\cos x - \sin x)}} = 2 \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$ БХ [39] (5)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x}{\cos^{n+1} x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\sin x\,(\cos x - \sin x)}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi.$$ БХ [39] (6)

3.673 $$\int_u^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x - \sin u}} = \sqrt{2}\, \boldsymbol{K}\left(\sin\frac{\pi - 2u}{4}\right).$$ БХ [74] (11)

3.674

1. $$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 \pm 2p\cos x + p^2}} = 2\boldsymbol{K}(p) \qquad [p^2 < 1].$$ БХ [67] (5)

2. $$\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1 - 2p\cos x + p^2}} = 2 \qquad [p^2 \leqslant 1];$$
$$= \frac{2}{p} \qquad [p^2 \geqslant 1].$$ БХ [67] (6)

3. $$\int_0^{\pi} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1 - 2p\cos x + p^2}} = \frac{2}{p}[\boldsymbol{K}(p) - \boldsymbol{E}(p)] \qquad [p^2 < 1].$$ БХ [67] (7)

3.675

1. $$\int_u^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x\, dx}{\sqrt{2(\cos u - \cos x)}} = \frac{\pi}{2} P_n(\cos u).$$ УВ II 108

2. $$\int_0^{u} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x\, dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos u)}} = \frac{\pi}{2} P_n(\cos u).$$ Ф II 684, УВ II 108

3.676

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1 + p^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{p}\operatorname{arctg} p.$$ БХ [60] (5)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 x \sqrt{1 - p^2 \sin^2 x}\, dx = \infty.$$ БХ [53] (8)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{p^2\cos^2 x + q^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{p}\boldsymbol{K}\left(\frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{p}\right) \qquad [0 < q < p].$$ Ф II 165

3.677

1. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \sqrt{2}\,\boldsymbol{E}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{K}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$ БХ [60] (2)

2. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \sqrt{2}\left[\boldsymbol{K}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \boldsymbol{E}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$$ БХ [60] (3)

3.678

1. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sec^{\frac{1}{2}} 2x - 1\right)\frac{dx}{\operatorname{tg} x} = \ln 2.$$ БХ [38] (23)

2. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^2 x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 2x}} = \sqrt{1-k^2} - \boldsymbol{E}(k) + \frac{1}{2}\boldsymbol{K}(k).$$ БХ [39] (2)

3. $$\int\limits_0^{u} \sqrt{\frac{\cos 2x - \cos 2u}{\cos 2x + 1}}\,dx = \frac{\pi}{2}(1-\cos u) \qquad \left[u^2 < \frac{\pi^2}{4}\right].$$ Ли [74] (6)

4. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)^{n-\frac{1}{2}}}{\cos^{n+1} x}\sqrt{\operatorname{cosec} x}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi.$$ БХ [38] (24)

5. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)^{n-\frac{1}{2}}}{\cos^{n+1} x}\operatorname{tg}^m x\sqrt{\operatorname{cosec} x}\,dx = \frac{(2n-1)!!\,(2m-1)!!}{(2n+2m)!!}\pi.$$

БХ [38] (25)

3.679

1. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2\beta\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} =$$
$$= \frac{1}{\sin\beta\cos\beta\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}}\left\{\frac{\pi}{2} - \boldsymbol{K}E(\beta, k') - \boldsymbol{E}F(\beta, k') + \boldsymbol{K}F(\beta, k')\right\}.$$

МО 138

2. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1-(1-k'^2\sin^2\beta)\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} =$$
$$= \frac{1}{k'^2\sin\beta\cos\beta\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}}\left\{\frac{\pi}{2} - \boldsymbol{K}E(\beta, k') - \boldsymbol{E}F(\beta, k') + \boldsymbol{K}F(\beta, k')\right\}.$$

МО 138

3. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1-k^2\sin^2\beta\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} =$$
$$= \frac{KE(\beta, k) - EF(\beta, k)}{k^2\sin\beta\cos\beta\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}.$$ МО 138

3.68 Различные формы от степеней тригонометрических функций

3.681

1. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2\mu-1}x\cos^{2\nu-1}x\,dx}{(1-k^2\sin^2 x)^{\varrho}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}(\mu, \nu)\,F(\varrho, \mu; \mu+\nu; k^2)$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 0]$. ВТФ I 115 (7)

2. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2\mu-1}x\cos^{2\nu-1}x\,dx}{(1-k^2\sin^2 x)^{\mu+\nu}} = \frac{\mathrm{B}(\mu, \nu)}{2(1-k^2)^{\mu}} \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 0].$$
ВТФ I 10 (20)

3. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\mu}x\,dx}{\cos^{\mu-3}x\,(1-k^2\sin^2 x)^{\frac{\mu}{2}-1}} =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{\mu}{2}\right)}{k^3\sqrt{\pi}\,(\mu-1)(\mu-3)(\mu-5)}\left\{\frac{1+(\mu-3)k+k^2}{(1+k)^{\mu-3}} - \frac{1-(\mu-3)k+k^2}{(1-k)^{\mu-3}}\right\}$$
$[-1 < \operatorname{Re}\mu < 4]$. БХ [54] (10)

4. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\mu+1}x\,dx}{\cos^{\mu}x\,(1-k^2\sin^2 x)^{\frac{\mu+1}{2}}} = \frac{(1-k)^{-\mu}-(1+k)^{-\mu}}{4k\mu\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(1+\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)$$
$[-2 < \operatorname{Re}\mu < 1]$. БХ [61] (5)

3.682 $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\mu}x\cos^{\nu}x}{(a-b\cos^2 x)^{\varrho}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2a^{\varrho}}\,\mathrm{B}\left(\frac{\mu+1}{2}, \frac{\nu+1}{2}\right)F\left(\frac{\nu+1}{2}, \varrho; \frac{\mu+\nu}{2}+1; \frac{b}{a}\right)$$
$[\operatorname{Re}\mu > -1, \operatorname{Re}\nu > -1, a > |b| \geqslant 0]$. ГХ [331] (64)

3.683

1. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^n 2x - 1)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^n 2x - 1)\operatorname{ctg} x\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = -\frac{1}{2}\left[C+\psi(n+1)\right].$$ БХ [34] (8), БХ [35] (11)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^\mu 2x - 1) \operatorname{cosec}^\mu 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^\mu 2x - 1) \sec^\mu 2x \operatorname{ctg} x \, dx = \frac{1}{2}[C + \psi(1 - \mu)];$$

$[\operatorname{Re}\mu < 1]$. БХ [35] (20)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^{2\mu} 2x - 1) \operatorname{cosec}^\mu 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^{2\mu} 2x - 1) \sec^\mu 2x \operatorname{ctg} x \, dx = -\frac{1}{2\mu} + \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \mu\pi.$$ БХ [35] (21)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sec^\mu 2x) \operatorname{ctg} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \operatorname{cosec}^\mu 2x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}[C + \psi(1 - \mu)]$$ $[\operatorname{Re}\mu < 1]$. БХ [35] (13)

3.684 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\operatorname{ctg}^\mu x - 1)\, dx}{(\cos x - \sin x) \sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg}^\mu x - 1)\, dx}{(\sin x - \cos x) \cos x} =$$

$$= -C - \psi(1 - \mu)$$ $[\operatorname{Re}\mu < 1]$. БХ [37] (9)

3.685

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^{\mu-1} 2x - \sin^{\nu-1} 2x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^{\mu-1} 2x - \cos^{\nu-1} 2x) \operatorname{ctg} x \, dx = \frac{1}{2}[\psi(\nu) - \psi(\mu)]$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. БХ [34] (9), БХ [35] (12)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{\mu-1} x - \sin^{\nu-1} x) \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{\mu-1} x - \cos^{\nu-1} x) \frac{dx}{\sin x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{\nu}{2}\right) - \psi\left(\frac{\mu}{2}\right)\right]$$ $[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. БХ [46] (2)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^\mu x - \operatorname{cosec}^\mu x) \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^\mu x - \sec^\mu x) \frac{dx}{\sin x} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\mu\pi}{2}$$ $[|\operatorname{Re}\mu| < 1]$. БХ [46] (1 и 3)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^\mu 2x - \operatorname{cosec}^\mu 2x) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) dx =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^\mu 2x - \sec^\mu 2x) \operatorname{tg} x \, dx = \frac{1}{2\mu} - \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec} \mu\pi$$
$[|\operatorname{Re}\mu| < 1]$. БХ [35] (19 и 22)

5 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^\mu 2x - \operatorname{cosec}^\mu 2x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) dx =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^\mu 2x - \sec^\mu 2x) \operatorname{ctg} x \, dx = -\frac{1}{2\mu} + \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \mu\pi$$
$[|\operatorname{Re}\mu| < 1]$. БХ [35] (14)

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^{\mu-1} 2x + \operatorname{cosec}^\mu 2x) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) dx =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^{\mu-1} 2x + \sec^\mu 2x) \operatorname{tg} x \, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec} \mu\pi$$
$[0 < \operatorname{Re}\mu < 1]$. БХ [35] (18 и 8)

7. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^{\mu-1} 2x - \operatorname{cosec}^\mu 2x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) dx =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^{\mu-1} 2x - \sec^\mu 2x) \operatorname{ctg} x \, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \mu\pi$$
$[0 < \operatorname{Re}\mu < 1]$. БХ [35] (7), Ли [34] (10)

3.686 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{\cos^\mu x + \sec^\mu x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x \, dx}{\sin^\mu x + \operatorname{cosec}^\mu x} = \frac{\pi}{4\mu}.$$
БХ [47] (28), БХ [49] (14)

3.687

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\mu-1} x + \sin^{\nu-1} x}{\cos^{\mu+\nu-1} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\mu-1} x + \cos^{\nu-1} x}{\sin^{\mu+\nu-1} x} dx =$$
$$= \frac{\cos\left(\frac{\nu-\mu}{4}\pi\right)}{2\cos\left(\frac{\nu+\mu}{4}\pi\right)} \mathrm{B}\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$$ $[\operatorname{Re}\mu > 0, \operatorname{Re}\nu > 0]$. БХ [46] (7)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\mu-1} x - \sin^{\nu-1} x}{\cos^{\mu+\nu-1} x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\mu-1} x - \cos^{\nu-1} x}{\sin^{\mu+\nu-1} x}\,dx =$$
$$= \frac{\sin\left(\frac{\nu-\mu}{4}\pi\right)}{2\sin\left(\frac{\nu+\mu}{4}\pi\right)} B\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0].$$ БХ [46] (8)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\mu} x + \sin^{\nu} x}{\sin^{\mu+\nu} x + 1} \operatorname{ctg} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\mu} x + \cos^{\nu} x}{\cos^{\mu+\nu} x + 1} \operatorname{tg} x\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{\mu+\nu} \sec\left(\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0].$$
БХ [49] (15) *и*, БХ [47] (29)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\mu} x - \sin^{\nu} x}{\sin^{\mu+\nu} x - 1} \operatorname{ctg} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\mu} x - \cos^{\nu} x}{\cos^{\mu+\nu} x - 1} \operatorname{tg} x\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{\mu+\nu} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0].$$
БХ [49] (16) *и*, БХ [47] (30)

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\mu} x + \sec^{\mu} x}{\cos^{\nu} x + \sec^{\nu} x} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\pi}{2\nu} \sec\left(\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$[|\operatorname{Re}\nu| > |\operatorname{Re}\mu|]$. БХ [49] (12)

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\mu} x - \sec^{\mu} x}{\cos^{\nu} x - \sec^{\nu} x} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\pi}{2\nu} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$[|\operatorname{Re}\nu| > |\operatorname{Re}\mu|]$. БХ [49] (13)

3.688

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^{\nu} x - \operatorname{tg}^{\mu} x}{\cos x - \sin x}\cdot\frac{dx}{\sin x} = \psi(\mu) - \psi(\nu)$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$ БХ [37] (10)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^{\mu} x - \operatorname{tg}^{1-\mu} x}{\cos x - \sin x}\cdot\frac{dx}{\sin x} = \pi \operatorname{ctg}\mu\pi$$
$[0 < \operatorname{Re}\mu < 1]$. БХ [37] (11)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^{\mu} x + \operatorname{ctg}^{\mu} x)\,dx = \frac{\pi}{2} \sec\frac{\mu\pi}{2} \qquad [|\operatorname{Re}\mu| < 1].$$ БХ [35] (9)

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^\mu x - \operatorname{ctg}^\mu x) \operatorname{tg} x \, dx = \frac{1}{\mu} - \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec} \frac{\mu\pi}{2}$

$[0 < \operatorname{Re} \mu < 2]$. БХ [35] (15)

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^{\mu-1} x - \operatorname{ctg}^{\mu-1} x}{\cos 2x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\mu\pi}{2}$ $[|\operatorname{Re} \mu| < 2]$. БХ [35] (10)

6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^\mu x - \operatorname{ctg}^\mu x}{\cos 2x} \operatorname{tg} x \, dx = -\frac{1}{\mu} + \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\mu\pi}{2}$

$[-2 < \operatorname{Re} \mu < 0]$. БХ [35] (23)

7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^\mu x + \operatorname{ctg}^\mu x}{1 + \cos t \sin 2x} dx = \pi \operatorname{cosec} t \operatorname{cosec} \mu\pi \sin \mu t$

$[t \neq n\pi, \ |\operatorname{Re} \mu| < 1]$. БХ [36] (6)

8. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^{\mu-1} x + \operatorname{ctg}^\mu x}{(\sin x + \cos x) \cos x} dx = \pi \operatorname{cosec} \mu\pi$

$[0 < \operatorname{Re} \mu < 1]$. БХ [37] (3)

9. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^\mu x - \operatorname{ctg}^\mu x}{(\sin x + \cos x) \cos x} dx = -\pi \operatorname{cosec} \mu\pi + \frac{1}{\mu}$

$[0 < \operatorname{Re} \mu < 1]$. БХ [37] (4)

10. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^\nu x - \operatorname{ctg}^\mu x}{(\cos x - \sin x) \cos x} dx = \psi(1-\mu) - \psi(1+\nu)$

$[\operatorname{Re} \mu < 1, \ \operatorname{Re} \nu > -1]$. БХ [37] (5)

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^{\mu-1} x - \operatorname{ctg}^\mu x}{(\cos x - \sin x) \cos x} dx = \pi \operatorname{ctg} \mu\pi$

$[0 < \operatorname{Re} \mu < 1]$. БХ [37] (7)

12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^\mu x - \operatorname{ctg}^\mu x}{(\cos x - \sin x) \cos x} dx = \pi \operatorname{ctg} \mu\pi - \frac{1}{\mu}$

$[0 < \operatorname{Re} \mu < 1]$. БХ [37] (8)

13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\operatorname{tg}^\mu x + \operatorname{ctg}^\mu x} \cdot \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{\pi}{8\mu}$ $[\operatorname{Re} \mu \neq 0]$. БХ [37] (12)

14. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\operatorname{tg}^{\mu} x+\operatorname{ctg}^{\mu} x)^{\nu}} \cdot \frac{dx}{\operatorname{tg} x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\operatorname{tg}^{\mu} x+\operatorname{ctg}^{\mu} x)^{\nu}} \cdot \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\nu+1}\mu} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$$ $[\nu > 0]$. БХ [49] (25), БХ [49] (26)

15. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^{\mu} x - \operatorname{ctg}^{\mu} x)(\operatorname{tg}^{\nu} x - \operatorname{ctg}^{\nu} x)\, dx = \frac{2\pi \sin\frac{\mu\pi}{2} \sin\frac{\nu\pi}{2}}{\cos\mu\pi+\cos\nu\pi}$$ $[|\operatorname{Re}\mu| < 1,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1]$. БХ [35] (17)

16. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^{\mu} x + \operatorname{ctg}^{\mu} x)(\operatorname{tg}^{\nu} x + \operatorname{ctg}^{\nu} x)\, dx = \frac{2\pi \cos\frac{\mu\pi}{2} \cos\frac{\nu\pi}{2}}{\cos\mu\pi+\cos\nu\pi}$$ $[|\operatorname{Re}\mu| < 1,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1]$. БХ [35] (16)

17. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\operatorname{tg}^{\mu} x - \operatorname{ctg}^{\mu} x)(\operatorname{tg}^{\nu} x + \operatorname{ctg}^{\nu} x)}{\cos 2x}\, dx = -\pi \frac{\sin\mu\pi}{\cos\mu\pi+\cos\nu\pi}$$ $[|\operatorname{Re}\mu| < 1,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1]$. БХ [35] (25)

18. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^{\nu} x - \operatorname{ctg}^{\nu} x}{\operatorname{tg}^{\mu} x - \operatorname{ctg}^{\mu} x} \cdot \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{\pi}{4\mu} \operatorname{tg}\frac{\nu\pi}{2\mu}$$ $[0 < \operatorname{Re}\nu < 1]$. БХ [37] (14)

19. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^{\nu} x + \operatorname{ctg}^{\nu} x}{\operatorname{tg}^{\mu} x + \operatorname{ctg}^{\mu} x} \cdot \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{\pi}{4\mu} \sec\frac{\nu\pi}{2\mu}$$ $[0 < \operatorname{Re}\nu < 1]$. БХ [37] (13)

20. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\operatorname{tg} x)^{\nu}-1}{(1+\operatorname{tg} x)^{\mu+\nu}} \frac{dx}{\sin x \cos x} = \psi(\mu+\nu) - \psi(\mu)$$ $[\mu > 0,\ \nu > 0]$. БХ [49] (29)

3.689

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin^{\mu} x + \operatorname{cosec}^{\mu} x) \operatorname{ctg} x\, dx}{\sin^{\nu} x - 2\cos t + \operatorname{cosec}^{\nu} x} = \frac{\pi}{\nu} \operatorname{cosec} t \operatorname{cosec}\frac{\mu\pi}{\nu} \sin\frac{\mu t}{\nu}$$ $[\mu < \nu]$ Ли [50] (14)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\mu} x - 2\cos t_1 + \operatorname{cosec}^{\mu} x}{\sin^{\nu} x + 2\cos t_2 + \operatorname{cosec}^{\nu} x} \cdot \operatorname{ctg} x \cdot dx = \frac{\pi}{\nu} \operatorname{cosec} t_2 \operatorname{cosec}\frac{\mu\pi}{\nu} \sin\frac{\mu t_2}{\nu} - \frac{t_2}{\nu} \operatorname{cosec} t_2 \cos t_1$$

$[\nu > \mu > 0$ или $\nu < \mu < 0$ или $\mu > 0,\ \nu < 0$ и $\mu+\nu < 0$ или $\mu < 0,\ \nu > 0$ и $\mu+\nu > 0]$. БХ [50] (15)

3.69—3.71 Тригонометрические функции от более сложных аргументов

3.691

1. $$\int_0^\infty \sin(ax^2)\,dx = \int_0^\infty \cos ax^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}} \quad [a > 0].$$

Ф II 743 *и*, ИП I 64 (7) *и*

2. $$\int_0^1 \sin(ax^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,S(\sqrt{a}) \quad [a > 0].$$

3. $$\int_0^1 \cos(ax^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,C(\sqrt{a}) \quad [a > 0].$$

ИП I 8 (5) *и*

4. $$\int_0^\infty \sin(ax^2)\sin 2bx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\cos\frac{b^2}{a}\,C\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right) + \sin\frac{b^2}{a}\,S\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\}$$

$[a > 0,\ b > 0]$. ИП I 82 (1) *и*

5. $$\int_0^\infty \sin(ax^2)\cos 2bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\cos\frac{b^2}{a} - \sin\frac{b^2}{a}\right\} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cos\left(\frac{b^2}{a} + \frac{\pi}{4}\right) \quad [a > 0,\ b > 0].$$

ИП I 82 (18), БХ [70] (13), ГХ [334] (5а)

6. $$\int_0^\infty \cos ax^2 \sin 2bx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\sin\frac{b^2}{a}\,C\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \cos\frac{b^2}{a}\,S\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\}$$

$[a > 0,\ b > 0]$. ИП I 83 (3) *и*

7. $$\int_0^\infty \cos ax^2 \cos 2bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\cos\frac{b^2}{a} + \sin\frac{b^2}{a}\right\}$$

$[a > 0,\ b > 0]$. ГХ [334] (5а), БХ [70] (14), ИП I 24 (7)

8. $$\int_0^\infty (\cos ax + \sin ax)\sin(b^2x^2)\,dx = \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left(-\frac{a^2}{2b}\right)$$

$[a > 0,\ b > 0]$. ИП I 85 (22)

9. $$\int_0^\infty (\cos ax + \sin ax)\cos(b^2x^2)\,dx = \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left(-\frac{a^2}{2b}\right)$$

$[a > 0,\ b > 0]$. ИП I 25 (21)

10. $$\int_0^\infty \sin(a^2x^2)\sin 2bx \sin 2cx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\sin\frac{2bc}{a^2}\cos\left(\frac{b^2+c^2}{a^2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$[a > 0,\ b > 0,\ c > 0]$. ИП I 84 (15)

11. $$\int_0^\infty \sin(a^2x^4)\cos 2bx \cos 2cx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\cos\frac{2bc}{a^2}\cos\left(\frac{b^2+c^2}{a^2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$[a > 0,\ b > 0,\ c > 0]$. ИПI 84 (21)

12. $$\int_0^\infty \cos(a^2x^2)\sin 2bx \sin 2cx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\sin\frac{2bc}{a^2}\sin\left(\frac{b^2+c^2}{a^2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$[a > 0,\ b > 0,\ c > 0]$. ИПI 25 (19)

13. $$\int_0^\infty \sin(ax^2)\cos(bx^2)\, dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{a-b}}\right) \quad [a > b > 0];$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{b+a}}-\frac{1}{\sqrt{b-a}}\right) \quad [b > a > 0].,$$

БХ [177] (21)

14. $$\int_0^\infty (\sin^2 ax^2 - \sin^2 bx^2)\, dx = \frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{\pi}{b}}-\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right) \quad [a > 0,\ b > 0].$$

БХ [178] (1)

15. $$\int_0^\infty (\cos^2 ax^2 - \sin^2 bx^2)\, dx = \frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{\pi}{b}}+\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right) \quad [a > 0,\ b > 0].$$

БХ [178] (3)

16. $$\int_0^\infty (\cos^2 ax^2 - \cos^2 bx^2)\, dx = \frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}-\sqrt{\frac{\pi}{b}}\right) \quad [a > 0,\ b > 0].$$

БХ [178] (5)

17. $$\int_0^\infty (\sin^4 ax^2 - \sin^4 bx^2)\, dx = \frac{1}{64}(8-\sqrt{2})\left(\sqrt{\frac{\pi}{b}}-\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)$$

$[a > 0,\ b > 0]$. БХ [178] (2)

18. $$\int_0^\infty (\cos^4 ax^2 - \sin^4 bx^2)\, dx = \frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}+\sqrt{\frac{\pi}{b}}\right)+\frac{1}{32}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2a}}-\sqrt{\frac{\pi}{2b}}\right)$$

$[a > 0,\ b > 0]$. БХ [178] (4).

19. $$\int_0^\infty (\cos^4 ax^2 - \cos^4 bx^2)\, dx = \frac{1}{64}(8+\sqrt{2})\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}-\sqrt{\frac{\pi}{b}}\right)$$

$[a > 0,\ b > 0]$. БХ [178] (6)

20. $$\int_0^\infty \sin^{2n} ax^2\, dx = \int_0^\infty \cos^{2n} ax^2\, dx = \infty.$$ БХ [177] (5 и 6)

21. $$\int_0^\infty \sin^{2n+1}(ax^2)\, dx = \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{2n+1}{k}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2k+1)a}}$$

$[a > 0]$. БХ [70] (9)

22. $$\int\limits_0^\infty \cos^{2n+1}(ax^2)\,dx = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2k+1)a}}$$

$[a>0]$. БХ [177] (7) и, БХ [70] (10)

3.692

1. $$\int\limits_0^\infty [\sin(a-x^2)+\cos(a-x^2)]\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin a.$$

ГХ [333] (30c), БХ [178] (7) и

2. $$\int\limits_0^\infty \cos\left(\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\cos ax\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{a^2}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$$

$[a>0]$. ИП I 24 (8)

3. $$\int\limits_0^\infty \sin[a(1-x^2)]\cos bx\,dx = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cos\left(a+\frac{b^2}{4a}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$[a>0]$. ИП I 23 (2)

4. $$\int\limits_0^\infty \cos[a(1-x^2)]\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sin\left(a+\frac{b^2}{4a}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$[a>0]$. ИП I 24 (10)

5. $$\int\limits_0^\infty \sin\left(ax^2+\frac{b^2}{a}\right)\cos 2bx\,dx = \int\limits_0^\infty \cos\left(ax^2+\frac{b^2}{a}\right)\cos 2bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

$[a>0]$. БХ [70] (19 и 20)

3.693

1. $$\int\limits_0^\infty \sin(ax^2+2bx)\,dx = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{b^2}{a}-\sin\frac{b^2}{a}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

$[a>0]$. БХ [70] (3)

2. $$\int\limits_0^\infty \cos(ax^2+2bx)\,dx = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{b^2}{a}+\sin\frac{b^2}{a}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

$[a>0]$. БХ [70] (4)

3.694

1. $$\int\limits_0^\infty \sin(ax^2+2bx+c)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \sin(ax^2+2bx+c)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ac-b^2}{a}\right) \quad [a>0].$$ ГХ [334] (4а)

2. $$\int\limits_0^\infty \cos(ax^2+2bx+c)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \cos(ax^2+2bx+c)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ac-b^2}{a}\right) \quad [a>0].$$ ГХ [334] (4в)

3.695

1. $$\int\limits_0^\infty \sin(a^3x^3)\sin(bx)\,dx = \frac{\pi}{6a}\sqrt{\frac{b}{3a}}\left\{J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2b}{3a}\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)+\right.$$
$$\left.+J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2b}{3a}\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)-\frac{\sqrt{3}}{\pi}K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2b}{3a}\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)\right\} \quad [a>0,\ b>0].$$ ИПI 83(5)

2. $$\int\limits_0^\infty \cos(a^3x^3)\cos(bx)\,dx = \frac{\pi}{6a}\sqrt{\frac{b}{3a}}\left\{J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2b}{3a}\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)+\right.$$
$$\left.+J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2b}{3a}\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)+\frac{\sqrt{3}}{\pi}K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2b}{3a}\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)\right\} \quad [a>0,\ b>0].$$ ИПI 24(11)

3.696

1. $$\int\limits_0^\infty \sin(ax^4)\sin(bx^2)\,dx = -\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{b}{2a}}\sin\left(\frac{b^2}{8a}-\frac{3}{8}\pi\right)J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{8a}\right)$$
$[a>0,\ b>0]$. ИПI 83(2)

2. $$\int\limits_0^\infty \sin(ax^4)\cos(bx^2)\,dx = -\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{b}{2a}}\sin\left(\frac{b^2}{8a}-\frac{\pi}{8}\right)J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{8a}\right)$$
$[a>0,\ b>0]$. ИПI 84(19)

3. $$\int\limits_0^\infty \cos(ax^4)\sin(bx^2)\,dx = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{b}{2a}}\cos\left(\frac{b^2}{8a}-\frac{3}{8}\pi\right)J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{8a}\right)$$
$[a>0,\ b>0]$. ИПI 83(4), ИПI 25(24)

4. $$\int\limits_0^\infty \cos(ax^4)\cos(bx^2)\,dx = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{b}{2a}}\cos\left(\frac{b^2}{8a}-\frac{\pi}{8}\right)J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{8a}\right)$$
$[a>0,\ b>0]$. ИПI 25(25)

3.697 $$\int\limits_0^\infty \sin\left(\frac{a^2}{x}\right)\sin(bx)\,dx = \frac{a\pi}{2\sqrt{b}}J_1(2a\sqrt{b}) \quad [a>0,\ b>0].$$
ИПI 83(6)

3.698

1. $$\int\limits_0^\infty \sin\left(\frac{a^2}{x^2}\right)\sin(b^2x^2)\,dx = \frac{1}{4b}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\sin 2ab-\cos 2ab+e^{-2ab}\right]$$
$[a>0,\ b>0]$. ИПI 83(9)

2. $$\int\limits_0^\infty \sin\left(\frac{a^2}{x^2}\right)\cos(b^2x^2)\,dx = \frac{1}{4b}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\sin 2ab+\cos 2ab+e^{-2ab}\right]$$
$[a>0;\ b>0]$. ИПI 24(13)

3. $$\int_0^\infty \cos\left(\frac{a^2}{x^2}\right)\sin(b^2x^2)\,dx = \frac{1}{4b}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\sin 2ab + \cos 2ab + e^{-2ab}\right]$$

$[a > 0,\ b > 0].$ ИПI 84 (12)

4. $$\int_0^\infty \cos\left(\frac{a^2}{x^2}\right)\cos(b^2x^2)\,dx = \frac{1}{4b}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\cos 2ab - \sin 2ab + e^{-2ab}\right]$$

$[a > 0,\ b > 0].$ ИПI 24 (14)

3.699

1. $$\int_0^\infty \sin\left(a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}\right)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4a}(\cos 2ab + \sin 2ab)$$

$[a > 0,\ b > 0].$ БХ [70] (27)

2. $$\int_0^\infty \cos\left(a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}\right)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4a}(\cos 2ab - \sin 2ab)$$

$[a > 0,\ b > 0].$ БХ [70] (28)

3. $$\int_0^\infty \sin\left(a^2x^2 - 2ab + \frac{b^2}{x^2}\right)dx = \int_0^\infty \cos\left(a^2x^2 - 2ab + \frac{b^2}{x^2}\right)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4a}$$

$[a > 0,\ b > 0].$ БХ [179] (11 и 12)и, ИПI 83 (6)

4. $$\int_0^\infty \sin\left(a^2x^2 - \frac{b^2}{x^2}\right)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4a}e^{-2ab} \quad [a > 0,\ b > 0].$$ ГХ [334] (9b) и

5. $$\int_0^\infty \cos\left(a^2x^2 - \frac{b^2}{x^2}\right)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4a}e^{-2ab} \quad [a > 0,\ b > 0].$$ ГХ [334] (9b) и

3.711 $$\int_0^u \sin\left(a\sqrt{u^2 - x^2}\right)\cos bx\,dx = \frac{\pi a u}{2\sqrt{a^2+b^2}}J_1\left(u\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

$[a > 0,\ b > 0,\ u > 0].$ ИПI 27 (37)

3.712

1. $$\int_0^\infty \sin(ax^p)\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\sin\frac{\pi}{2p}}{pa^{\frac{1}{p}}} \quad [a > 0,\ p > 1].$$ ВТФI 13 (40)

2. $$\int_0^\infty \cos(ax^p)\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p}}{pa^{\frac{1}{p}}} \quad [a > 0,\ p > 1].$$ ВТФI 13 (39)

3.713

1. $$\int_0^\infty \sin(ax^p + bx^q)\,dx = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-b)^k}{k!}a^{-\frac{kq+1}{p}}\Gamma\left(\frac{kq+1}{p}\right)\times$$
$$\times\sin\left[\frac{k(q-p)+1}{2p}\pi\right] \quad [a > 0,\ b > 0,\ p > 0,\ q > 0].$$ БХ [70] (7)

2. $$\int_0^\infty \cos(ax^p + bx^q)\,dx = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-b)^k}{k!} a^{-\frac{kq+1}{p}} \Gamma\left(\frac{kq+1}{p}\right) \times$$
$$\times \cos\left[\frac{k(q-p)+1}{2p}\pi\right] \quad [a > 0, \quad b > 0, \quad p > 0, \quad q > 0].$$ БХ [70] (8)

3.714

1. $$\int_0^\infty \cos(z \operatorname{sh} x)\,dx = K_0(z) \quad [\operatorname{Re} z > 0].$$ B 202 (14)

2. $$\int_0^\infty \sin(z \operatorname{ch} x)\,dx = \frac{\pi}{2} J_0(z) \quad [\operatorname{Re} z > 0].$$ МО 36

3. $$\int_0^\infty \cos(z \operatorname{ch} x)\,dx = -\frac{\pi}{2} N_0(z) \quad [\operatorname{Re} z > 0].$$ МО 37

4. $$\int_0^\infty \cos(z \operatorname{sh} x) \operatorname{ch} \mu x\,dx = \cos\frac{\mu\pi}{2} K_\mu(z) \quad [\operatorname{Re} z > 0, \quad |\operatorname{Re}\mu| < 1].$$ B 202 (13)

5. $$\int_0^\pi \cos(z \operatorname{ch} x) \sin^{2\mu} x\,dx = \sqrt{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^\mu \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) I_\mu(z)$$
$$\left[\operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2}\right].$$ УВ II 203

3.715

1. $$\int_0^\pi \sin(z \sin x) \sin ax\,dx = \sin a\pi\, s_{0,a}(z) =$$
$$= \sin a\pi \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{(1^2 - a^2)(3^2 - a^2)\ldots[(2k-1)^2 - a^2]} \quad [a > 0].$$ B 338 (13)

2. $$\int_0^\pi \sin(z \sin x) \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \sin(z \sin x) \sin nx\,dx =$$
$$= [1 - (-1)^n] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin x) \sin nx\,dx =$$
$$= [1 - (-1)^n] \frac{\pi}{2} J_n(z) \quad [n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots].$$ B 30 (6), ГХ [334] (53a)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin x) \sin 2x\,dx = \frac{2}{z^2}(\sin z - z\cos z).$$ Ли [43] (14)

4. $\int\limits_0^{\pi} \sin(z \sin x) \cos ax\,dx = (1+\cos a\pi)\, s_{0,a}(z) =$

$$= (1+\cos a\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{(1^2-a^2)(3^2-a^2)\ldots[(2k-1)^2-a^2]} \quad [a>0].$$

В 338 (14)

5. $\int\limits_0^{\pi} \sin(z \sin x) \cos[(2n+1)x]\,dx = 0.$ ГХ [334] (53b)

6. $\int\limits_0^{\pi} \cos(z \sin x) \sin ax\,dx = -a(1-\cos a\pi)\, s_{-1,a}(z) =$

$$= -a(1-\cos a\pi)\left\{-\frac{1}{a^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k}}{a^2(2^2-a^2)(4^2-a^2)\ldots[(2k)^2-a^2]}\right\}$$

$[a>0].$ В 338 (12)

7. $\int\limits_0^{\pi} \cos(z \sin x) \sin 2nx\,dx = 0.$ ГХ [334] (54a)

8. $\int\limits_0^{\pi} \cos(z \sin x) \cos ax\,dx = -a \sin a\pi\, s_{-1,a}(z) =$

$$= -a \sin a\pi\left\{-\frac{1}{a^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k}}{a^2(2^2-a^2)(4^2-a^2)\ldots[(2k)^2-a^2]}\right\} \quad [a>0].$$

В 338 (11)

9. $\int\limits_0^{\pi} \cos(z \sin x) \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(z \sin x) \cos nx\,dx =$

$$= [1+(-1)^n] \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin x) \cos nx\,dx = [1+(-1)^n]\frac{\pi}{2} J_n(z).$$

ГХ [334] (54b)

10. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin x) \cos^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{z^n} J_n(z) \quad \left[\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}\right].$

ФП 486, В 35 u

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \cos x) \sin 2x\,dx = \frac{2}{z^2}(\sin z - z \cos z).$ Ли [43] (15)

12. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z\cos x)\cos ax\,dx = \cos\frac{a\pi}{2}\, s_{0,\,a}(z) =$$
$$= \frac{\pi}{4}\operatorname{cosec}\frac{a\pi}{2}\,[\mathbf{J}_\nu(z) - \mathbf{J}_{-\nu}(z)] =$$
$$= -\frac{\pi}{4}\sec\frac{a\pi}{4}\,[\mathbf{E}_\nu(z) + \mathbf{E}_{-\nu}(z)] =$$
$$= \cos\frac{a\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{(1^2-a^2)(3^2-a^2)\,\ldots\,[(2k-1)^2-a^2]}\quad [a>0].$$ В 339

13. $$\int_0^{\pi} \sin(z\cos x)\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(z\cos x)\cos nx\,dx =$$
$$= \pi\sin\frac{n\pi}{2}J_n(z).$$ ГХ [334] (55b)

14. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z\cos x)\cos[(2n+1)x]\,dx = (-1)^n\frac{\pi}{2}J_{2n+1}(z).$$ В 30 (8)

15. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(a\cos x)\operatorname{tg} x\,dx = \operatorname{si}(a) + \frac{\pi}{2}\qquad [a>0].$$ БХ [43] (17)

16. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z\cos x)\sin^{2\nu} x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\mathbf{H}_\nu(z)$$
$$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ В 358 (1)

17. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\cos x)\cos ax\,dx = -a\sin\frac{a\pi}{2}\, s_{-1,\,a}(z) =$$
$$= \frac{\pi}{4}\sec\frac{a\pi}{2}\,[\mathbf{J}_\nu(z) + \mathbf{J}_{-\nu}(z)] = \frac{\pi}{4}\operatorname{cosec}\frac{a\pi}{2}\,[\mathbf{E}_\nu(z) - \mathbf{E}_{-\nu}(z)] =$$
$$= -a\sin\frac{a\pi}{2}\left\{-\frac{1}{a^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k}}{a^2(2^2-a^2)(4^2-a^2)\,\ldots\,[(2k)^2-a^2]}\right\}\quad [a>0].$$
В 339

18. $$\int_0^{\pi} \cos(z\cos x)\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(z\cos x)\cos nx\,dx =$$
$$= \pi\cos\frac{n\pi}{2}J_n(z).$$ ГХ [334] (56b)

19. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\cos x)\cos 2nx\,dx = (-1)^n\cdot\frac{\pi}{2}J_{2n}(z).$$ В 30 (9)

20. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\cos x)\sin^{2\nu} x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)J_{\nu}(z)$

$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$ В 35, УВ II 178

21 $\int\limits_0^{\pi} \cos(z\cos x)\sin^{2\mu} x\,dx = \sqrt{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^{\mu}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)J_{\mu}(z)$

$\left[\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2}\right].$ УВ II 179

3.716

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(a\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{-a}\,\overline{\operatorname{Ei}}(a) - e^{a}\operatorname{Ei}(-a)\right]$ (сравни **3.723 1.**).

БХ [43] (1)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}.$ БХ [43] (2)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(a\operatorname{tg} x)\sin 2x\,dx = \frac{a\pi}{2}e^{-a}.$ БХ [43] (7)

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\operatorname{tg} x)\sin^2 x\,dx = \frac{1-a}{4}\pi e^{-a}.$ БХ [43] (8)

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\operatorname{tg} x)\cos^2 x\,dx = \frac{1+a}{4}\pi e^{-a}.$ БХ [43] (9)

6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(a\operatorname{tg} x)\operatorname{tg} x\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}.$ БХ [43] (5)

7 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\operatorname{tg} x)\operatorname{tg} x\,dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-a}\,\overline{\operatorname{Ei}}(a) + e^{a}\operatorname{Ei}(-a)\right]$ (сравни 3.723 5.).

БХ [43] (6)

8. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(a\operatorname{tg} x)\sin^2 x\operatorname{tg} x\,dx = \frac{2-a}{4}\pi e^{-a}.$ БХ [43] (11)

9. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(a\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2a}\right)$ (сравни 3.742 1.). БХ [43] (3)

10. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(a \operatorname{tg} x)\, dx = \frac{\pi}{4}(1 + e^{-2a})$ (сравни **3.742** 3.). БХ [43] (4)

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(a \operatorname{tg} x) \operatorname{ctg}^2 x\, dx = \frac{\pi}{4}(e^{-2a} + 2a - 1)$. БХ [43] (19)

12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \sec^2 x \cos(\operatorname{tg} x)] \frac{dx}{\operatorname{tg} x} = C$. БХ [51] (14)

13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(a \operatorname{ctg} x) \sin 2x\, dx = \frac{a\pi}{2} e^{-a}$ (сравни **3.716** 3.),

и вообще формулы **3.716** останутся справедливыми, если в них $\operatorname{tg} x$, входящий в аргумент синуса или косинуса заменить через $\operatorname{ctg} x$, заменив при этом в остальных сомножителях $\sin x$ через $\cos x$, $\cos x$ через $\sin x$ и, следовательно, $\operatorname{tg} x$ через $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg} x$ через $\operatorname{tg} x$, $\sec x$ через $\operatorname{cosec} x$, $\operatorname{cosec} x$ через $\sec x$. Аналогично

3.717 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(a \operatorname{cosec} x) \sin(a \operatorname{ctg} x) \frac{dx}{\cos x} =$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(a \sec x) \sin(a \operatorname{tg} x) \frac{dx}{\sin x} = \frac{\pi}{2} \sin a \qquad [a > 0].$$

БХ [52] (11 и 12)

3.718

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} p - a \operatorname{tg} x\right) \operatorname{tg}^{p-1} x\, dx =$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} p - a \operatorname{tg} x\right) \operatorname{tg}^p x\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \qquad [p^2 < 1].$$

БХ [44] (5 и 6)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(a \operatorname{tg} x - \nu x) \sin^{\nu-2} x\, dx = 0$ $[\operatorname{Re} \nu > 0]$. НГ 157 (15)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(n \operatorname{tg} x + \nu x) \frac{\cos^{\nu-1} x}{\sin x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ $[\operatorname{Re} \nu > 0]$. БХ [51] (15)

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a \operatorname{tg} x - \nu x) \cos^{\nu-2} x\, dx = \frac{\pi e^{-a} a^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}$ $[\operatorname{Re} \nu > 1]$.

Ло V 153 (112), НГ 157 (14)

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a \operatorname{tg} x + \nu x) \cos^{\nu} x\, dx = 2^{-\nu-1} \pi e^{-a}$ $[\operatorname{Re} \nu > -1]$.

БХ [44] (4)

6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a \operatorname{tg} x - \gamma x) \cos^{\nu} x\, dx =$

$$= \frac{\pi a^{\frac{\nu}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}+1}} \cdot \frac{W_{\frac{\gamma}{2}, -\frac{\nu+1}{2}}(2a)}{\Gamma\left(1+\frac{\gamma+\nu}{2}\right)} \quad \left[a > 0,\ \operatorname{Re} \nu > -1,\ \frac{\nu+\gamma}{2} \neq -1, -2, \ldots\right].$$

ВТФ I 274 (13)

7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx - \sin(nx - a \operatorname{tg} x)}{\sin x} \cos^{n-1} x\, dx = \pi.$ Ло V 153 (114)

3.719

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\nu x - z \sin x)\, dx = \pi \mathbf{E}_{\nu}(z).$ В 336 (2)

2. $\int\limits_0^{\pi} \cos(nx - z \sin x)\, dx = \pi J_n(z).$ УВ II 172

3. $\int\limits_0^{\pi} \cos(\nu x - z \sin x)\, dx = \pi \mathbf{J}_{\nu}(z).$ В 336 (1)

3.72—3.74 Тригонометрические и рациональные функции

3.721

1. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} a.$ Ф II 645

2. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x}\, dx = -\operatorname{si}(a).$ БХ 203 (1)

3. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x}\, dx = -\operatorname{ci}(a).$ БХ 203 (5)

3.722

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x+\beta}\,dx = \operatorname{ci}(a\beta)\sin(a\beta) - \cos(a\beta)\operatorname{si}(a\beta)$$

$[|\arg\beta| < \pi,\ a > 0]$. БХ [160] (1): Ф II 646и

2. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(ax)}{x+\beta}\,dx = \pi\cos(a\beta) \qquad [|\arg\beta| < \pi,\ a > 0].$$ БХ [202] (1)

3. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x+\beta}\,dx = -\sin(a\beta)\operatorname{si}(a\beta) - \cos(a\beta)\operatorname{ci}(a\beta)$$

$[|\arg\beta| < \pi,\ a > 0]$. ИП I 8 (7), БХ [160] (2)

4. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(ax)}{x+\beta}\,dx = \pi\sin(a\beta) \qquad [|\arg\beta| < \pi,\ a > 0].$$ БХ [202] (4)

5. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\beta-x}\,dx = \sin(\beta a)\operatorname{ci}(\beta a) - \cos(\beta a)\left[\operatorname{si}(\beta a) + \pi\right]$$

$[a > 0]$. Ф II 646, БХ [161] (1)

6. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(ax)}{\beta-x}\,dx = -\pi\cos(a\beta) \qquad [a > 0].$$ БХ [202] (3)

7. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{\beta-x}\,dx = \cos(a\beta)\operatorname{ci}(a\beta) + \sin(a\beta)\left[\operatorname{si}(a\beta) + \pi\right]$$

$[a > 0]$. ИП I 8 (8), БХ [161] (2)и

8. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(ax)}{\beta-x}\,dx = \pi\sin(a\beta) \qquad [a > 0].$$ БХ [202] (6)

3.723

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\beta^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2\beta}\left[e^{-a\beta}\overline{\operatorname{Ei}}(a\beta) - e^{a\beta}\operatorname{Ei}(-a\beta)\right]$$

$[a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0]$. ИП I 65 (14), БХ [160] (3)

2. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{\beta^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2\beta}e^{-a\beta} \qquad [a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0].$$

Ф II 741 и 750, ИП I 8 (11), УВ I 156

3. $$\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{\beta^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a\beta} \qquad [a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0].$$

Ф II 741 и 750, ИП I 65 (15), УВ I 156

4. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin(ax)}{\beta^2+x^2}\,dx = \pi e^{-a\beta} \qquad [a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0].$$

БХ [202] (10)

5. $\int\limits_0^\infty \frac{x\cos(ax)}{\beta^2+x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-a\beta}\,\overline{\mathrm{Ei}}(a\beta)+e^{a\beta}\,\mathrm{Ei}(-a\beta)\right]$

$[a>0,\ \mathrm{Re}\,\beta>0]$. БХ [160] (6)

6. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\sin[a(b-x)]}{c^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{c}e^{-ac}\sin(ab)$ $[a>0,\ b>0,\ c>0]$.

Ли [202] (9)

7. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\cos[a(b-x)]}{c^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{c}e^{-ac}\cos(ab)$ $[a>0,\ b>0,\ c>0]$.

Ли [202] (11)и

8. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\beta^2-x^2}\,dx = \frac{1}{\beta}\left[\sin(a\beta)\,\mathrm{ci}(a\beta)-\cos(a\beta)\left(\mathrm{si}(a\beta)+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$[|\arg\beta|<\pi,\ a>0]$. БХ [161] (3)

9. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos(ax)}{b^2-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2b}\sin(ab)$ $[a>0,\ b>0]$.

БХ [161] (5), ИПІ 9 (15)

10. $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{b^2-x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\cos(ab)$ $[a>0]$. Ф II 647, ИПІ 252 (45)

11. $\int\limits_0^\infty \frac{x\cos(ax)}{\beta^2-x^2}\,dx = \cos(a\beta)\,\mathrm{ci}(a\beta)+\sin(a\beta)\left[\mathrm{si}(a\beta)+\frac{\pi}{2}\right]$

$[|\arg\beta|<\pi,\ a>0]$. БХ [161] (6)

12. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\sin(ax)}{x(x-b)}\,dx = \pi\,\frac{\cos(ab)-1}{b}$ $[a>0,\ b>0]$. ИПІ 252 (44)

3.724

1. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{b+cx}{p+2qx+x^2}\sin(ax)\,dx = \left(\frac{cq-b}{\sqrt{p-q^2}}\sin(aq)+c\cos(aq)\right)\pi e^{-a\sqrt{p-q^2}}$

$[a>0,\ p>q^2]$. БХ [202] (12)

2. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{b+cx}{p+2qx+x^2}\cos(ax)\,dx = \left(\frac{b-cq}{\sqrt{p-q^2}}\cos(aq)+c\sin(aq)\right)\pi e^{-a\sqrt{p-q^2}}$

$[a>0,\ p>q^2]$. БХ [202] (13)

3. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\cos[(b-1)t]-x\cos(bt)}{1-2x\cos t+x^2}\cos(ax)\,dx = \pi e^{-a\sin t}\sin(bt+a\cos t)$

$[a>0,\ t^2<\pi^2]$. БХ [202] (14)

3.725

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\,dx}{x(\beta^2+x^2)} = \frac{\pi}{2\beta^2}(1-e^{-a\beta}) \qquad [\operatorname{Re}\beta>0,\ a>0].$$ БХ [172] (1)

2. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\,dx}{x(b^2-x^2)} = \frac{\pi}{2b^2}(1-\cos(ab)) \qquad [a>0].$$ БХ [172] (4)

3. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{x(x^2+\beta^2)}\,dx = \frac{\pi}{2\beta^2}e^{-\beta b}\operatorname{sh}(a\beta) \qquad [0<a<b];$$
$$= -\frac{\pi}{2\beta^2}e^{-a\beta}\operatorname{ch}(b\beta)+\frac{\pi}{2\beta^2} \qquad [a>b>0].$$
ИПI 19 (4)

3.726

1. $$\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)\,dx}{b^3\pm b^2x+bx^2\pm x^3} = \pm\frac{1}{4b}\cdot\Big[e^{-ab}\,\overline{\mathrm{Ei}}(ab)-e^{ab}\,\mathrm{Ei}(-ab)-$$
$$-2\operatorname{ci}(ab)\sin(ab)+2\cos(ab)\left(\operatorname{si}(ab)+\frac{\pi}{2}\right)\Big]+\frac{\pi e^{-ab}-\pi\cos(ab)}{4b}$$
[$a>0,\ b>0$; при нижнем знаке указано главное значение интеграла]
ИПI 65 (21)и, БХ [176] (10 и 13)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^2\sin(ax)\,dx}{b^3\pm b^2x+bx^2\pm x^3} = \frac{1}{4}\Big[e^{ab}\,\mathrm{Ei}(-ab)-e^{-ab}\,\overline{\mathrm{Ei}}(ab)+$$
$$+2\operatorname{ci}(ab)\sin(ab)-2\cos(ab)\left(\operatorname{si}(ab)+\frac{\pi}{2}\right)\Big]\pm\pi(e^{-ab}+\cos(ab))$$
[$a>0,\ b>0$; при нижнем знаке указано главное значение интеграла]. ИПI 66 (22), БХ [176] (11 и 14)

3.727

1. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{b^4+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4b^3}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos\frac{ab}{\sqrt{2}}+\sin\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)$$
[$a>0,\ b>0$]. БХ [160] (25)и, ИПI 9 (19)

2. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\,dx}{b^4-x^4} = \frac{1}{4b^3}\Big[2\sin(ab)\operatorname{ci}(ab)-2\cos(ab)\left(\operatorname{si}(ab)+\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+e^{-ab}\,\overline{\mathrm{Ei}}(ab)-e^{ab}\,\mathrm{Ei}(-ab)\Big] \qquad [a>0,\ b>0],$$
(сравни 3.723 1. и 3.723 8.). БХ [161] (12)

3. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{b^4-x^4} = \frac{\pi}{4b^3}[e^{-ab}+\sin(ab)] \qquad [a>0,\ b>0],$$
(сравни 3.723 2. и 3.723 9.). БХ [161] (16)

4. $$\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)\,dx}{b^4+x^4} = \frac{\pi}{2b^2}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\sin\frac{ab}{\sqrt{2}} \qquad [a>0,\ b>0].$$
БХ [160] (23) и

5. $$\int_0^\infty \frac{x \sin(ax)}{b^4-x^4}\,dx = \frac{\pi}{4b^2}\left[e^{-ab}-\cos(ab)\right] \qquad [a>0,\ b>0],$$

(сравни **3.723** 3. и **3.723** 10.). БХ [161] (13)

6. $$\int_0^\infty \frac{x \cos(ax)\,dx}{b^4-x^4} = \frac{1}{4b^2}\left[2\cos(ab)\,\mathrm{ci}(ab)+2\sin(ab)\left(\mathrm{si}(ab)+\frac{\pi}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-e^{-ab}\,\overline{\mathrm{Ei}}(ab)-e^{ab}\,\mathrm{Ei}(-ab)\right] \qquad [a>0,\ b>0],$$

(сравни **3.723** 5. и **3.723** 11.). БХ [161] (17)

7. $$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(ax)\,dx}{b^4+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4b}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos\frac{ab}{\sqrt{2}}-\sin\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)$$

$[a>0,\ b>0]$. БХ [160] (26) и

8. $$\int_0^\infty \frac{x^2 \sin(ax)\,dx}{b^4-x^4} = \frac{1}{4b}\left[2\sin(ab)\,\mathrm{ci}(ab)-\right.$$

$$\left.-2\cos(ab)\left(\mathrm{si}(ab)+\frac{\pi}{2}\right)-e^{-ab}\,\overline{\mathrm{Ei}}(ab)+e^{ab}\,\mathrm{Ei}(-ab)\right]$$

$[a>0,\ b>0]$, (сравни **3.723** 1. и **3.723** 8.). БХ [161] (14)

9. $$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(ax)\,dx}{b^4-x^4} = \frac{\pi}{4b}\left(\sin(ab)-e^{-ab}\right) \qquad [a>0,\ b>0],$$

(сравни **3.723** 2. и **3.723** 9.). БХ [161] (18)

10. $$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin(ax)}{b^4+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2}\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\cos\frac{ab}{\sqrt{2}}$$

$[a>0,\ b>0]$. БХ [160] (24)

11. $$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin(ax)}{b^4-x^4}\,dx = \frac{-\pi}{4}\left[e^{-ab}+\cos(ab)\right] \qquad [a>0,\ b>0],$$

(сравни **3.723** 4. и **3.723** 10.). БХ [161] (15)

12. $$\int_0^\infty \frac{x^3 \cos(ax)\,dx}{b^4-x^4} = \frac{1}{4}\left[2\cos(ab)\,\mathrm{ci}(ab)+2\sin(ab)\left(\mathrm{si}(ab)+\frac{\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+e^{-ab}\,\overline{\mathrm{Ei}}(ab)+e^{ab}\,\mathrm{Ei}(-ab)\right] \qquad [a>0,\ b>0],$$

(сравни **3.723** 5. и **3.723** 11.). БХ [161] (19)

3.728

1. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{(\beta^2+x^2)(\gamma^2+x^2)} = \frac{\pi\left(\beta e^{-a\gamma}-\gamma e^{-a\beta}\right)}{2\beta\gamma(\beta^2-\gamma^2)}$$

$[a>0,\ \mathrm{Re}\,\beta>0,\ \mathrm{Re}\,\gamma>0]$. БХ [175] (1)

2. $$\int_0^\infty \frac{x \sin(ax)\,dx}{(\beta^2+x^2)(\gamma^2+x^2)} = \frac{\pi\left(e^{-a\beta}-e^{-a\gamma}\right)}{2(\gamma^2-\beta^2)}$$
$[a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0]$. БХ [174] (1)

3. $$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(ax)\,dx}{(\beta^2+x^2)(\gamma^2+x^2)} = \frac{\pi\left(\beta e^{-a\beta}-\gamma e^{-a\gamma}\right)}{2(\beta^2-\gamma^2)}$$
$[a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0]$. БХ [175] (2)

4. $$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin(ax)\,dx}{(\beta^2+x^2)(\gamma^2+x^2)} = \frac{\pi\left(\beta^2 e^{-a\beta}-\gamma^2 e^{-a\gamma}\right)}{2(\beta^2-\gamma^2)}$$
$[a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0]$. БХ [174] (2)

5. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{(b^2-x^2)(c^2-x^2)} = \frac{\pi\left(b\sin(ac)-c\sin(ab)\right)}{2bc\,(b^2-c^2)}$$
$[a > 0,\ b > 0,\ c > 0]$. БХ [175] (3)

6. $$\int_0^\infty \frac{x \sin(ax)\,dx}{(b^2-x^2)(c^2-x^2)} = \frac{\pi\left(\cos(ab)-\cos(ac)\right)}{2(b^2-c^2)} \qquad [a > 0].$$ БХ [174] (3)

7. $$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(ax)\,dx}{(b^2-x^2)(c^2-x^2)} = \frac{\pi\left(c\sin(ac)-b\sin(ab)\right)}{2(b^2-c^2)}$$
$[a > 0,\ b > 0,\ c > 0]$. БХ [175] (4)

8. $$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin(ax)\,dx}{(b^2-x^2)(c^2-x^2)} = \frac{\pi\left(b^2\cos(ab)-c^2\cos(ac)\right)}{2(b^2-c^2)}$$
$[a > 0,\ b > 0,\ c > 0]$. БХ [174] (4)

3.729

1. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{(b^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4b^3}(1+ab)\,e^{-ab} \qquad [a > 0,\ b > 0]$$ БХ [170] (7)

2. $$\int_0^\infty \frac{x \sin(ax)\,dx}{(b^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4b}\,a e^{-ab} \qquad [a > 0,\ b > 0].$$ БХ [170] (3)

3. $$\int_0^\infty \cos(px)\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi p}{2}e^{-p}.$$ БХ [43] (10) и

4. $$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin(ax)\,dx}{(b^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}(2-ab)\,e^{-ab} \qquad [a > 0,\ b > 0].$$ БХ [170] (4)

3.731 Обозначения: $2A^2 = \sqrt{b^4+c^2}+b^2,\ 2B^2 = \sqrt{b^4+c^2}-b^2,$

1. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{(x^2+b^2)^2+c^2} = \frac{\pi}{2c}\,\frac{e^{-aA}\left(B\cos(aB)+A\sin(aB)\right)}{\sqrt{b^4+c^2}}$$
$[a > 0,\ b > 0,\ c > 0]$. БХ [176] (3)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin(ax)\,dx}{(x^2+b^2)^2+c^2} = \frac{\pi}{2c} e^{-aA}\sin(aB)$ $[a>0,\ b>0,\ c>0]$. БХ [176] (1)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{(x^2+b^2)\cos(ax)\,dx}{(x^2+b^2)^2+c^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-aA}(A\cos(aB)-B\sin(aB))}{\sqrt{b^4+c^2}}$

$[a>0,\ b>0,\ c>0]$. БХ [176] (4)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{x(x^2+b^2)\sin(ax)\,dx}{(x^2+b^2)^2+c^2} = \frac{\pi}{2} e^{-aA}\cos(aB)$

$[a>0,\ b>0,\ c>0]$. БХ [176] (2)

3.732

1. $\int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{\beta^2+(\gamma-x)^2} - \frac{1}{\beta^2+(\gamma+x)^2}\right]\sin(ax)\,dx = \frac{\pi}{\beta} e^{-a\beta}\sin(a\gamma)$

$[a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \gamma+i\beta$ не является действительным числом$]$. ИП I 65 (16)

2. $\int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{\beta^2+(\gamma-x)^2} + \frac{1}{\beta^2+(\gamma+x)^2}\right]\cos(ax)\,dx =$

$= \frac{\pi}{\beta} e^{-a\beta}\cos(a\gamma)$ $[a>0,\ |\operatorname{Im}\gamma| < \operatorname{Re}\beta]$. ИП I 8 (13)

3. $\int\limits_0^\infty \left[\frac{\gamma+x}{\beta^2+(\gamma+x)^2} - \frac{\gamma-x}{\beta^2+(\gamma-x)^2}\right]\sin(ax)\,dx = \pi e^{-a\beta}\cos(a\gamma)$

$[a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \gamma+i\beta$ не является действительным числом$]$. Ли [175] (17)

4. $\int\limits_0^\infty \left[\frac{\gamma+x}{\beta^2+(\gamma+x)^2} + \frac{\gamma-x}{\beta^2+(\gamma-x)^2}\right]\cos(ax)\,dx = \pi e^{-a\beta}\sin(a\gamma)$

$[a>0,\ |\operatorname{Im} a| < \operatorname{Re}\beta]$. Ли [176] (21)

3.733

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{x^4+2b^2x^2\cos 2t+b^4} = \frac{\pi}{2b^3}\exp(-ab\cos t)\frac{\sin(t+ab\sin t)}{\sin 2t}$

$\left[a>0,\ b>0,\ |t|<\frac{\pi}{2}\right]$. БХ [176] (7)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin(ax)\,dx}{x^4+2b^2x^2\cos 2t+b^4} = \frac{\pi}{2b^2}\exp(-ab\cos t)\frac{\sin(ab\sin t)}{\sin 2t}$

$\left[a>0,\ b>0,\ |t|<\frac{\pi}{2}\right]$. БХ [176] (5), ИП I 66 (23)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2\cos(ax)\,dx}{x^4+2b^2x^2\cos 2t+b^4} = \frac{\pi}{2b}\exp(-ab\cos t)\frac{\sin(t-ab\sin t)}{\sin 2t}$

$\left[a>0,\ b>0,\ |t|<\frac{\pi}{2}\right]$. БХ [176] (8)

4. $$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin(ax)\,dx}{x^4+2b^2x^2\cos 2t+b^4} =$$
$$= \frac{\pi}{2} \exp(-ab\cos t) \frac{\sin(2t-ab\sin t)}{\sin 2t} \qquad \left[a>0,\ b>0,\ |t|<\frac{\pi}{2}\right].$$
БХ [176] (6)

5. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\,dx}{x(x^4+2b^2x^2\cos 2t+b^4)} =$$
$$= \frac{\pi}{2b^4}\left[1-\exp(-ab\cos t)\frac{\sin(2t+ab\sin t)}{\sin 2t}\right]$$
$$\left[a>0,\ b>0,\ |t|<\frac{\pi}{2}\right].$$
БХ [176] (22)

3.734

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\,dx}{x(b^4+x^4)} = \frac{\pi}{2b^4}\left[1-\exp\left(-\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)\cos\frac{ab}{\sqrt{2}}\right]$$
$$[a>0,\ b>0].$$
БХ [172] (7)

2. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\,dx}{x(b^4-x^4)} = \frac{\pi}{4b^4}[2-e^{-ab}-\cos(ab)] \qquad [a>0,\ b>0].$$
БХ [172] (10)

3.735. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\,dx}{x(b^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{2b^4}\left[1-\frac{1}{2}e^{-ab}(2+ab)\right] \qquad [a>0,\ b>0].$$
УВI 156, БХ [172] (22)

3.736

1. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{(b^2+x^2)(b^4-x^4)} = \frac{\pi}{8b^5}[\sin(ab)+(2+ab)e^{-ab}] \qquad [a>0,\ b>0],$$
(сравни **3.723** 2. и 9. и **3.729** 1.). БХ [176] (5)

2. $$\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)\,dx}{(b^2+x^2)(b^4-x^4)} = \frac{\pi}{8b^4}[(1+ab)e^{-ab}-\cos(ab)] \qquad [a>0,\ b>0],$$
(сравни **3.723** 3. и 10. и **3.729** 2.). БХ [174] (5)

3. $$\int_0^\infty \frac{x^2\cos(ax)\,dx}{(b^2+x^2)(b^4-x^4)} = \frac{\pi}{8b^3}[\sin(ab)-abe^{-ab}] \qquad [a>0,\ b>0],$$
(сравни **3.723** 2. и 9. и **3.729** 1.). БХ [175] (6)

4. $$\int_0^\infty \frac{x^3\sin(ax)\,dx}{(b^2+x^2)(b^4-x^4)} = \frac{\pi}{8b^2}[(1-ab)e^{-ab}-\cos(ab)] \qquad [a>0,\ b>0],$$
(сравни **3.723** 3. и 10. и **3.729** 2.). БХ [174] (6)

5. $$\int_0^\infty \frac{x^4 \cos(ax)\,dx}{(b^2+x^2)(b^4-x^4)} = \frac{\pi}{8b}\left[\sin(ab)+(ab-2)e^{-ab}\right] \qquad [a>0,\ b>0],$$

(сравни **3.723** 2. и 9. и **3.729** 1.). БХ [175] (7)

6. $$\int_0^\infty \frac{x^5 \sin(ax)\,dx}{(b^2+x^2)(b^4-x^4)} = \frac{\pi}{8}\left[(ab-3)e^{-ab}-\cos(ab)\right] \qquad [a>0,\ b>0],$$

(сравни **3.723** 3. и 10. и **3.729** 2.). БХ [174] (7)

3.737

1. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{(b^2+x^2)^n} = \frac{\pi e^{-ab}}{(2b)^{2n-1}(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2n-k-2)!\,(2ab)^k}{k!\,(n-k-1)!};$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\pi}{b^{2n-1}(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left(\frac{e^{-ab\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\right)\right]_{p=1};$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\pi}{2b^{2n-1}(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\frac{e^{-abp}}{(1+p)^n}\right]_{p=1} \qquad [a>0,\ b>0].$$

ГХ [333] (67b), B209, B192

2. $$\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)\,dx}{(x^2+\beta^2)^{n+1}} = \frac{\pi a e^{-a\beta}}{2^{2n}n!\,\beta^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2n-k-2)!\,(2a\beta)^k}{k!\,(n-k-1)!} \qquad [a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0].$$

ГХ [333] (66c)

3. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\,dx}{x(\beta^2+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2\beta^{2n+2}}\left[1-\frac{e^{-a\beta}}{2^n n!}F_n(a\beta)\right]$$

$[a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ F_0(z)=1,\ F_1(z)=z+2,\ \ldots,\ F_n(z)=$
$=(z+2n)F_{n-1}(z)-zF'_{n-1}(z)]$. ГХ [333] (66e)

4. $$\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)\,dx}{(b^2+x^2)^3} = \frac{\pi a}{16b^3}(1+ab)e^{-ab} \qquad [a>0,\ b>0].$$

БХ [170] (5), ИП I 67 (35) *и*

5. $$\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)\,dx}{(b^2+x^2)^4} = \frac{\pi a}{96b^5}(3+3ab+a^2b^2)e^{-ab} \qquad [a>0,\ b>0].$$

БХ [170] (6), ИП I 67 (35) *и*

3.738

1. $$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\sin(ax)}{x^{2n}+\beta^{2n}}\,dx = 0 \quad [m \text{ нечетно}];$$

$$= -\frac{\pi\beta^{m-2n}}{2n}\sum_{k=1}^{n}\exp\left[-a\beta\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]\times$$

$$\times\left\{\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n}+a\beta\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right\} \qquad [m \text{ четно}];$$

$$\left[a>0,\ |\arg\beta|<\frac{\pi}{2n},\quad 0\leqslant m<2n\right].$$ ИП I 67 (38)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\cos(ax)}{x^{2n}+\beta^{2n}}\,dx = 0 \qquad [m \text{ четно}],$$

$$= \frac{\pi\beta^{m-2n}}{2n}\sum_{k=1}^{n}\exp\left[-a\beta\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]\times$$

$$\times\left\{\sin\frac{(2k-1)m\pi}{2n}+a\beta\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right\} \qquad [m \text{ нечетно}];$$

$$\left[a>0,\ |\arg\beta|<\frac{\pi}{2n},\ 0<m<2n+1\right]$$ БХ [161] (20) u, ИП I 10 (29)

3.739

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\,dx}{x(x^2+2^2)(x^2+4^2)\ldots(x^2+4n^2)} =$$

$$= \frac{\pi(-1)^n}{(2n)!\,2^{2n+1}}\left[2\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}e^{2(k-n)a}+(-1)^n\binom{2n}{n}\right]$$ Ли [174] (8)

2. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{(x^2+1^2)(x^2+3^2)\ldots[x^2+(2n+1)^2]} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{\pi}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{k}e^{(2k-2n-1)a}.$$ БХ [175] (8)

3. $$\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)\,dx}{(x^2+1^2)(x^2+3^2)\ldots[x^2+(2n+1)^2]} =$$

$$= \frac{\pi(-1)^n}{(2n+1)!\,2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{k}(2n-2k+1)\,e^{(2k-2n-1)a}.$$ Ли [174] (9)

3.741

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \qquad [a>0,\ b>0,\ a\neq b]$$ Ф II 647

2. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad [a>b\geqslant 0];$$

$$= \frac{\pi}{4} \qquad [a=b>0];$$

$$= 0 \qquad [b>a\geqslant 0].$$ Ф II 645

3. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\,dx = \frac{a\pi}{2} \qquad [0<a\leqslant b];$$

$$= \frac{b\pi}{2} \qquad [0<b\leqslant a].$$ БХ [157] (1)

3.742

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{\beta^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4\beta}\left(e^{-|a-b|\beta} - e^{-(a+b)\beta}\right)$$

$[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\beta>0]$. БХ [162] (1) *и*, ГХ [333] (71a)

2. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{\beta^2+x^2}\,dx = \frac{1}{4\beta}e^{-a\beta}\{e^{b\beta}\operatorname{Ei}[\beta(a-b)] + e^{-b\beta}\operatorname{Ei}[\beta(a+b)]\} - \frac{1}{4\beta}e^{a\beta}\{e^{b\beta}\operatorname{Ei}[-\beta(a+\beta)] + e^{-b\beta}\operatorname{Ei}[\beta(b-a)]\}.$$

БХ [162] (3)

3. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\cos(bx)}{\beta^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4\beta}\left[e^{-|a-b|\beta} + e^{-(a+b)\beta}\right]$$

$[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\beta>0]$. БХ [163] (1) *и*, ГХ [333] (71c)

4. $$\int_0^\infty \frac{x\cos(ax)\cos(bx)}{\beta^2+x^2}\,dx = -\frac{1}{4}e^{a\beta}\{e^{b\beta}\operatorname{Ei}[-\beta(a+b)] + e^{-b\beta}\operatorname{Ei}[\beta(b-a)]\} - \frac{1}{4}e^{-a\beta}\{e^{b\beta}\operatorname{Ei}[\beta(a-b)] + e^{-b\beta}\operatorname{Ei}[\beta(a+b)]\} \quad [a \neq b];$$

$$= \infty \quad [a=b].$$

БХ [163] (2)

5. $$\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)\cos(bx)}{x^2+\beta^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a\beta}\operatorname{ch}(b\beta) \qquad [0<b<a];$$

$$= \frac{\pi}{4}e^{-2a\beta} \qquad [0<b=a];$$

$$= -\frac{\pi}{2}e^{-b\beta}\operatorname{sh}(a\beta) \qquad [0<a<b].$$

БХ [162] (4)

6. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{p^2-x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2p}\cos(ap)\sin(bp) \qquad [a>b>0];$$

$$= -\frac{\pi}{4p}\sin(2ap) \qquad [a=b>0];$$

$$= -\frac{\pi}{2p}\sin(ap)\cos(bp) \qquad [0<b<a].$$

БХ [166] (1)

7. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{p^2-x^2}\,x\,dx = -\frac{\pi}{2}\cos(ap)\cos(bp) \qquad [a>b>0];$$

$$= -\frac{\pi}{4}\cos(2ap) \qquad [a=b>0];$$

$$= \frac{\pi}{2}\sin(ap)\sin(bp) \qquad [b>a>0].$$

БХ [166] (2)

8. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\cos(bx)}{p^2-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2p}\sin(ap)\cos(bp) \qquad [a>b>0];$$
$$= \frac{\pi}{4p}\sin(2ap) \qquad [a=b>0];$$
$$= \frac{\pi}{2p}\cos(ap)\sin(bp) \qquad [b>a>0].$$

БХ [166] (3)

3.743

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}\,\frac{dx}{x^2+\beta^2} = \frac{\pi}{2\beta}\,\frac{\operatorname{sh}(a\beta)}{\operatorname{sh}(b\beta)} \qquad [0<a<b \quad \operatorname{Re}\beta>0].$$ ИПІ 80 (21)

2. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\cos(bx)}\,\frac{x\,dx}{x^2+\beta^2} = -\frac{\pi}{2}\,\frac{\operatorname{sh}(a\beta)}{\operatorname{ch}(b\beta)} \qquad [0<a<b,\ \operatorname{Re}\beta>0].$$

ИПІ 81 (30)

3. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{\sin(bx)}\,\frac{x\,dx}{x^2+\beta^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\operatorname{ch}(a\beta)}{\operatorname{sh}(b\beta)} \qquad [0<a<b,\ \operatorname{Re}\beta>0].$$ ИПІ 23 (37)

4. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{\cos(bx)}\,\frac{dx}{x^2+\beta^2} = \frac{\pi}{2\beta}\cdot\frac{\operatorname{ch}(a\beta)}{\operatorname{ch}(b\beta)} \qquad [0<a<b,\ \operatorname{Re}\beta>0].$$ ИПІ 23 (36)

5. $$\int_0^\infty \frac{\sin(2ax)}{\sin x}\cdot\frac{dx}{b^2-x^2} = \frac{\pi}{b}\cdot\frac{\sin^2(ab)}{\sin b} \qquad [0<a<1,\ b>0].$$ БХ [191] (18)

3.744

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\cos(bx)}\,\frac{dx}{x(x^2+\beta^2)} = \frac{\pi}{2\beta^2}\,\frac{\operatorname{sh}(a\beta)}{\operatorname{ch}(b\beta)} \qquad [0<a<b,\ \operatorname{Re}\beta>0]$$

ИПІ 82 (32)

2. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\cos(bx)}\,\frac{dx}{x(c^2-x^2)} = 0 \qquad [0<a<b,\ c>0].$$ ИПІ 82 (31)

3.745

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(2ax)}{\sin x}\cdot\frac{dx}{(b^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4b^3}\left[2\frac{\sin^2(ab)}{\sin b} - ab\frac{\sin(2ab)}{\sin b} + {}\right.$$
$$\left. + 2b\frac{\cos b}{\sin^2 b}\sin^2(ab)\right] \qquad [0<a<1,\ b>0]$$ БХ [199] (1) и

2. $$\int_0^\infty \frac{\sin(2ax)}{\sin x}\,\frac{x^2\,dx}{(b^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4b}\left[-2\frac{\sin^2(ab)}{\sin b} - ab\frac{\sin(2ab)}{\sin b} + {}\right.$$
$$\left. + 2b\frac{\cos b}{\sin^2 b}\sin^2(ab)\right] \qquad [0<a<1,\ b>0].$$ БХ [199] (2)

3.746

1. $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{n+1}} \prod_{k=0}^{n} \sin(a_k x) = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} a_k \qquad \left[a_0 > \sum_{k=1}^{n} a_k,\ a_k > 0 \right].$$

Ф II 646

2. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x^{n+1}} dx \prod_{k=1}^{n} \sin(a_k x) \prod_{j=1}^{m} \cos(b_j x) = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} a_k$$

$$\left[a > \sum_{k=1}^{n} |a_k| + \sum_{j=1}^{m} |b_j| \right].$$ УВ I 164

3.747

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^m}{\sin x} dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \left[\frac{1}{m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}-1}{4^{2k-1}(m+2k)} \zeta(2k) \right].$$ Ли [206] (2)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx}{\cos x} = 2G.$$

БХ [204] (18), БХ [206] (1) ГХ [333] (32)

3. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+b^2)\sin(ax)} = \frac{\pi}{2\,\mathrm{sh}(ab)} \qquad [b > 0].$$ ГХ [333] (79 c)

4. $$\int_0^{\pi} x \operatorname{tg} x\,dx = -\pi \ln 2.$$ БХ [218] (4)

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{tg} x\,dx = \infty.$$ БХ [205] (2)

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg} x\,dx = -\frac{\pi}{8} \ln 2 + \frac{1}{2} G = 0{,}1857845358 \ldots$$ БХ [204] (1)

7. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{ctg} x\,dx = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$ Ф II 623

8. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{ctg} x\,dx = \frac{\pi}{8} \ln 2 + \frac{1}{2} G = 0{,}730\,181\,0584 \ldots$$ БХ [204] (2)

9. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x\,dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

ГХ [333] (33 b), БХ [218] (12)

10. $\int_0^\infty \operatorname{tg} ax \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad [a > 0].$ ЛоV 279(5)

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \operatorname{ctg} x}{\cos 2x} dx = \frac{\pi}{4} \ln 2.$ БХ [206] (12)

3.748

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^m \operatorname{tg} x\, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^m \sum_{k=1}^\infty \frac{(4^k - 1)\zeta(2k)}{4^{2k-1}(m+2k)}.$ Ли [204] (5)

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^p \operatorname{ctg} x\, dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \left\{\frac{1}{p} - 2\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{4^k(p+2k)} \zeta(2k)\right\}.$ Ли [205] (7)

3 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^m \operatorname{ctg} x\, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^m \left[\frac{2}{m} - \sum_{k=1}^\infty \frac{\zeta(2k)}{4^{2k-1}(m+2k)}\right].$ Ли [204] (6)

3.749

1. $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{tg}(ax)\, dx}{x^2+b^2} = \frac{\pi}{e^{2ab}+1} \qquad [a > 0,\ b > 0].$ ГХ [333] (79a)

2. $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{ctg}(ax)\, dx}{x^2+b^2} = \frac{\pi}{e^{2ab}-1} \qquad [a > 0,\ b > 0].$ ГХ [333] (79b)

3. $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{tg}(ax)\, dx}{b^2-x^2} = \int_0^\infty \frac{x \operatorname{ctg}(ax)\, dx}{b^2-x^2} =$

$= \int_0^\infty \frac{x \operatorname{cosec}(ax)\, dx}{b^2-x^2} = \infty.$ БХ [161] (7, 8, 9)

3.75 Тригонометрические и алгебраические функции

3.751

1. $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\, dx}{\sqrt{x+\beta}} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left[\cos(a\beta) - \sin(a\beta) + 2C\left(\sqrt{a\beta}\right)\sin(a\beta) -\right.$

$\left. - 2S\left(\sqrt{a\beta}\right)\cos(a\beta)\right] \qquad [a > 0,\ |\arg\beta| < \pi].$ ИП I 65 (12) и

2. $\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\, dx}{\sqrt{x+\beta}} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left[\cos a\beta + \sin(a\beta) - 2C\left(\sqrt{a\beta}\right)\cos(a\beta) -\right.$

$\left. - 2S\left(\sqrt{a\beta}\right)\sin(a\beta)\right] \qquad [a > 0,\ |\arg\beta| < \pi].$ ИП I 8 (9) и

3. $\int\limits_u^\infty \frac{\sin(ax)}{\sqrt{x-u}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,[\sin(au)+\cos(au)] \qquad [a>0,\ u>0].$

ИП I 65 (13)

4. $\int\limits_u^\infty \frac{\cos(ax)}{\sqrt{x-u}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,[\cos(au)-\sin(au)] \qquad [a>0,\ u>0].$

ИП I 8 (10)

3.752

1. $\int\limits_0^1 \sin(ax)\sqrt{1-x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)!!\,(2k+3)!!} \qquad [a>0].$

БХ [149] (6)

2. $\int\limits_0^1 \cos(ax)\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a} J_1(a).$ Ку 65 (6) и

3.753

1. $\int\limits_0^1 \frac{\sin(ax)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{[(2k+1)!!]^2} \qquad [a>0].$ БХ [149] (9)

2. $\int\limits_0^1 \frac{\cos(ax)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} J_0(a).$ В 30 (7) и

3. $\int\limits_1^\infty \frac{\sin(ax)\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2} J_0(a). \qquad [a>0].$ В 200 (14)

4. $\int\limits_1^\infty \frac{\cos(ax)}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = -\frac{\pi}{2} N_0(a).$ В 200 (15)

5. $\int\limits_0^1 \frac{x\sin(ax)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2} J_1(a) \qquad [a>0].$ В 30 (6)

3.754

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(ax)\,dx}{\sqrt{\beta^2+x^2}} = \frac{\pi}{2}[I_0(a\beta)-\mathbf{L}_0(a\beta)] \qquad [a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0].$

ИП I 66 (26)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{\sqrt{\beta^2+x^2}} = K_0(a\beta) \qquad [a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0].$

В 191 (1), ГХ [333] (78a)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{\sqrt{(\beta^2+x^2)^3}}\,dx = aK_0(a\beta) \qquad [a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0].$

ИП I 66 (27)

3.755

1. $$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta}\sin(ax)\,dx}{\sqrt{x^2+\beta^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,e^{-a\beta} \qquad [a>0].$$

ИП I 66 (31)

2. $$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\sqrt{x^2+\beta^2}+\beta}\cos(ax)\,dx}{\sqrt{x^2+\beta^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,e^{-a\beta} \qquad [a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0].$$

ИП I 10 (25)

3.756

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x^{\frac{n}{2}-1}}\prod_{k=2}^{n}\sin(a_k x)\,dx = 0 \qquad \left[a_k>0,\ a>\sum_{k=2}^{n} a_k\right].$$

ИП I 80 (22)

2. $$\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1}\cos(ax)\prod_{k=1}^{n}\cos(a_k x)\,dx = 0 \qquad \left[a_k>0,\ a>\sum_{k=1}^{n} a_k\right].$$

ИП I 22 (26)

3.757

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,.$$ БХ [177] (1)

2. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,.$$ БХ [177] (2)

3.76 — 3.77 Тригонометрические и степенная функции

3.761

1. $$\int_0^1 x^{\mu-1}\sin(ax)\,dx = \frac{-i}{2\mu}\left[{}_1F_1(\mu;\ \mu+1;\ ia) - {}_1F_1(\mu;\ \mu+1;\ -ia)\right]$$
$$[a>0,\ \operatorname{Re}\mu>-1].$$ ИП I 68 (2) и

2. $$\int_u^\infty x^{\mu-1}\sin x\,dx = \frac{i}{2}\left[e^{-\frac{\pi}{2}i\mu}\Gamma(\mu,\ iu) - e^{\frac{\pi}{2}i\mu}\Gamma(\mu,\ -iu)\right]$$
$$[\operatorname{Re}\mu>-1].$$ ВТФ II 149 (2)

3. $$\int_1^\infty \frac{\sin(ax)}{x^{2n}}\,dx = \frac{a^{2n-1}}{(2n-1)!}\left[\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(2n-k-1)!}{a^{2n-k}}\sin\left(a+(k-1)\frac{\pi}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+(-1)^n\operatorname{ci}(a)\right] \qquad [a>0].$$ Ли [203] (15)

4. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}\sin(ax)\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}\sin\frac{\mu\pi}{2} = \frac{\pi\sec\frac{\mu\pi}{2}}{2a^\mu\Gamma(1-\mu)}$$
$$[a>0;\ 0<|\operatorname{Re}\mu|<1].$$ Ф II 809 и, БХ [150] (1)

5. $$\int_0^{\pi} x^m \sin(nx)\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{m+1}} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{m}{2}\right)} (-1)^k \frac{m!}{(m-2k)!}(n\pi)^{m-2k} - $$
$$-(-1)^{E\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{m!\left[m-2E\left(\frac{m}{2}\right)-1\right]}{n^{m+1}}.$$ ГХ [333] (6)

6. $$\int_0^1 x^{\mu-1}\cos(ax)\,dx = \frac{1}{2\mu}\left[{}_1F_1(\mu;\ \mu+1;\ ia) + {}_1F_1(\mu,\ \mu+1;\ -ia)\right]$$
$[a>0,\ \operatorname{Re}\mu>0]$. ИП I 11 (2)

7. $$\int_u^{\infty} x^{\mu-1}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{\pi}{2}i\mu}\Gamma(\mu,\ iu) + e^{\frac{\pi}{2}i\mu}\Gamma(\mu,\ -iu)\right]$$
$[\operatorname{Re}\mu<1]$. ВТФ II 149 (1)

8. $$\int_1^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^{2n+1}}\,dx = \frac{a^{2n}}{(2n)!}\left[\sum_{k=1}^{2n} \frac{(2n-k)!}{a^{2n-k+1}}\cos\left(a+(k-1)\frac{\pi}{2}\right) + (-1)^{n+1}\operatorname{ci}(a)\right]$$
$[a>0]$. Ли [203] (16)

9. $$\int_0^{\infty} x^{\mu-1}\cos(ax)\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu}}\cos\frac{\mu\pi}{2} = \frac{\pi\operatorname{cosec}\frac{\mu\pi}{2}}{2a^{\mu}\Gamma(1-\mu)}$$
$[a>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<1]$. Ф II 809 u БХ [150] (2)

10. $$\int_0^{\pi} x^m\cos(nx)\,dx = \frac{(-1)^n}{n^{m+1}}\sum_{k=0}^{E\left(\frac{m-1}{2}\right)} (-1)^k \frac{m!}{(m-2k-1)!}(n\pi)^{m-2k-1} +$$
$$+(-1)^{E\left(\frac{m+1}{2}\right)} \frac{2E\left(\frac{m+1}{2}\right)-m}{n^{m+1}}\cdot m!$$ ГХ [333] (7)

11. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^m\cos x\,dx = \sum_{k=0}^{E\left[\frac{m}{2}\right]} (-1)^k \frac{m!}{(m-2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-2k} +$$
$$+(-1)^{E\left(\frac{m}{2}\right)}\left[2E\left(\frac{m}{2}\right)-m\right]m!.$$ ГХ [333] (9c)

12. $$\int_0^{2n\pi} x^m\cos kx\,dx = -\sum_{j=0}^{m-1} \frac{j!}{k^{j+1}}\binom{m}{j}(2n\pi)^{m-j}\cos\frac{j+1}{2}\pi.$$ БХ [226] (2)

3.762

1. $$\int_0^{\infty} x^{\mu-1}\sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{1}{2}\cos\frac{\mu\pi}{2}\,\Gamma(\mu)\left[|b-a|^{-\mu} - (b+a)^{-\mu}\right]$$
$[a>0,\ b>0,\ a\neq b,\ -2<\operatorname{Re}\mu<1]$

(при $\mu=0$ см. 3.741 1., при $\mu=-1$ см. 3.741 3.). БХ [159] (7), ИП I 321 (40)

2. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}\sin(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{1}{2}\sin\frac{\mu\pi}{2}\,\Gamma(\mu)\left[(a+b)^{-\mu} + |a-b|^{-\mu}\operatorname{sign}(a-b)\right] \qquad [a>0,\ b>0,\ |\operatorname{Re}\mu|<1]$$

(при $\mu=0$ см. **3.741** 2.). БХ [159] (8) *и*, ИП I 321 (41)

3. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}\cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{1}{2}\cos\frac{\mu\pi}{2}\,\Gamma(\mu)\left[(a+b)^{-\mu} + |a-b|^{-\mu}\right]$$

$[a>0,\ b>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<1]$. ИП I 20 (17)

3.763

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\sin(bx)\sin(cx)}{x^\nu}\,dx = \frac{1}{4}\cos\frac{\nu\pi}{2}\,\Gamma(1-\nu)\left[(c+a-b)^{\nu-1} - (c+a+b)^{\nu-1} - |c-a+b|^{\nu-1}\operatorname{sign}(a-b-c) + |c-a-b|^{\nu-1}\operatorname{sign}(a+b-c)\right] \qquad [c>0,\ 0<\operatorname{Re}\nu<4,\ \nu\neq 1,\ 2,\ 3,\ a\geqslant b>0].$$

ГХ [333] (26а) *и*, ИП I 79 (13)

2 $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\sin(bx)\sin(cx)}{x}\,dx = 0 \qquad [c<a-b \text{ и } c>a+b];$$

$$= \frac{\pi}{8} \qquad [c=a-b \text{ и } c=a+b];$$

$$= \frac{\pi}{4} \qquad [a-b<c<a+b]$$

$[a\geqslant b>0,\ c>0]$. Ф II 645

3. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\sin(bx)\sin(cx)}{x^2}\,dx = \frac{1}{4}(c+a+b)\ln(c+a+b) - \frac{1}{4}(c+a-b)\ln(c+a-b) - \frac{1}{4}|c-a-b|\ln|c-a-b| \times \operatorname{sign}(a+b-c) + \frac{1}{4}|c-a+b|\ln|c-a+b|\operatorname{sign}(a-b-c)$$

$[a\geqslant b>0,\ c>0]$. БХ [157] (8) *и*, ИП I 79 (11)

4. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\sin(bx)\sin(cx)}{x^3}\,dx = \frac{\pi bc}{2} \qquad [0<c<a-b \text{ и } c>a+b];$$

$$= \frac{\pi bc}{2} - \frac{\pi(a-b-c)^2}{8} \qquad [a-b<c<a+b];$$

$[a\geqslant b>0,\ c>0]$. БХ [157] (20), ИП I 79 (12)

3.764

1. $$\int_0^\infty x^p\sin(ax+b)\,dx = \frac{1}{a^{p+1}}\,\Gamma(1+p)\cos\left(b+\frac{p\pi}{2}\right)$$

$[a>0,\ -1<p<0]$. ГХ [333] (30а)

2. $$\int_0^\infty x^p\cos(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a^{p+1}}\,\Gamma(1+p)\sin\left(b+\frac{\pi p}{2}\right)$$

$[a>0,\ -1<p<0]$. ГХ [333] (30в)

3.765

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)\,dx}{x^\nu (x+\beta)} = \frac{i}{2\beta^\nu}\Gamma(1-\nu)\left[e^{-ia\beta}\Gamma(\nu, -ia\beta) - e^{ia\beta}\Gamma(\nu, ia\beta)\right]$$
$$[a>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<2,\ |\arg\beta|<\pi].$$
ИП I 219 (34)

2. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{x^\nu (x+\beta)} = \frac{\Gamma(1-\nu)}{2\beta^\nu}\left[e^{ia\beta}\Gamma(\nu, ia\beta) + e^{-ia\beta}\Gamma(\nu, -ia\beta)\right]$$
$$[a>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<1,\ |\arg\beta|<\pi].$$
ИП II 221 (52)

3.766

1. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\sin(ax)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\sec\frac{\mu\pi}{2}\operatorname{sh}a +$$
$$+\frac{1}{2}\sin\frac{\mu\pi}{2}\Gamma(\mu)\left\{\exp\left[-a+i\pi(1-\mu)\right]\gamma(1-\mu, -a) - e^a\gamma(1-\mu, a)\right\}$$
$$[a>0,\ -1<\operatorname{Re}\mu<3].$$ ИП I 317 (4)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\cos(ax)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}\frac{\mu\pi}{2}\operatorname{ch}a +$$
$$+\frac{1}{2}\cos\frac{\mu\pi}{2}\Gamma(\mu)\left\{\exp\left[-a+i\pi(1-\mu)\right]\gamma(1-\mu, -a) - e^a\gamma(1-\mu, a)\right\}$$
$$[a>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<3].$$ ИП I 319 (24)

3. $$\int_0^\infty \frac{x^{2\mu+1}\sin(ax)\,dx}{x^2+b^2} = -\frac{\pi}{2}b^{2\mu}\sec(\mu\pi)\operatorname{sh}(ab) -$$
$$-\frac{\sin(\mu\pi)}{a^{2\mu}}\Gamma(2\mu)\left[{}_1F_1(1;\ 1-2\mu;\ ab) + {}_1F_1(1;\ 1-2\mu;\ -ab)\right]$$
$$\left[a>0,\quad -\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 220 (39)

4 $$\int_0^\infty \frac{x^{2\mu+1}\cos(ax)\,dx}{x^2+b^2} = -\frac{\pi}{2}b^{2\mu}\operatorname{cosec}(\mu\pi)\operatorname{ch}(ab) -$$
$$-\frac{\cos(\mu\pi)}{2a^{2\mu}}\Gamma(2\mu)\left[{}_1F_1(1;\ 1-2\mu;\ ab) + {}_1F_1(1;\ 1-2\mu;\ -ab)\right]$$
$$\left[a>0,\ -1<\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 221 (56)

3.767

1. $$\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}\sin\left(ax-\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\gamma^2+x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\gamma^{\beta-2}e^{-a\gamma}$$
$$[a>0,\ \operatorname{Re}\gamma>0,\ 0<\operatorname{Re}\beta<2].$$ БХ [160] (20)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^\beta\cos\left(ax-\frac{\beta\pi}{2}\right)}{\gamma^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\gamma^{\beta-1}e^{-a\gamma}$$
$$[a>0,\ \operatorname{Re}\gamma>0,\ |\operatorname{Re}\beta|<1].$$ БХ [160] (21)

3. $$\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}\sin\left(ax-\frac{\beta\pi}{2}\right)}{x^2-b^2}dx = \frac{\pi}{2}b^{\beta-2}\cos\left(ab-\frac{\pi\beta}{2}\right)$$

$[a>0,\ b>0,\ 0<\operatorname{Re}\beta<2]$. БХ [161] (11)

4. $$\int_0^\infty \frac{x^{\beta}\cos\left(ax-\frac{\beta\pi}{2}\right)}{x^2-b^2}dx = -\frac{\pi}{2}b^{\beta-1}\sin\left(ab-\frac{\beta\pi}{2}\right)$$

$[a>0,\ b>0,\ |\beta|<1]$. ГХ [333] (82)

3.768

1. $$\int_u^\infty (x-u)^{\mu-1}\sin(ax)\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}\sin\left(au+\frac{\mu\pi}{2}\right)$$

$[a>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<1]$. ИП II 203 (19)

2. $$\int_u^\infty (x-u)^{\mu-1}\cos(ax)\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}\cos\left(au+\frac{\mu\pi}{2}\right)$$

$[a>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<1]$. ИП II 204 (24)

3. $$\int_0^1 (1-x)^\nu\sin(ax)\,dx = \frac{1}{a}-\frac{\Gamma(\nu+1)}{a^{\nu+1}}C_\nu(a)$$

$[a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП I 68 (3)

4. $$\int_0^1 (1-u)^\nu\cos(ax)\,dx = \frac{i}{2}a^{-\nu-1}\left\{\exp\left[\frac{i}{2}(\nu\pi-2a)\right]\gamma(\nu+1,-ia)-\right.$$
$$\left.-\exp\left[-\frac{i}{2}(\nu\pi-2a)\right]\gamma(\nu+1,\ ia)\right\}$$ $[a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$.

ИП I 11 (3) u

5. $$\int_0^u x^{\nu-1}(u-x)^{\mu-1}\sin(ax)\,dx =$$
$$=\frac{u^{\mu+\nu-1}}{2i}\mathrm{B}(\mu,\nu)[{}_1F_1(\nu;\ \mu+\nu:\ iau)-{}_1F_1(\nu;\ \mu+\nu:\ -iau)]$$

$[a>0,\ \operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП II 189 (26)

6. $$\int_0^u x^{\nu-1}(u-x)^{\mu-1}\cos(ax)\,dx =$$
$$=\frac{u^{\mu+\nu-1}}{2}\mathrm{B}(\mu,\nu)[{}_1F_1(\nu;\ \mu+\nu;\ iau)+{}_1F_1(\nu;\ \mu+\nu;\ -iau)]$$

$[a>0,\ \operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$ ИП II 189 (32)

7. $$\int_0^u x^{\mu-1}(u-x)^{\mu-1}\sin(ax)\,dx = \sqrt{\pi}\left(\frac{u}{a}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}\sin\frac{au}{2}\Gamma(\mu)J_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu>0]$. ИП II 189 (25)

8. $$\int_u^\infty x^{\mu-1}(x-u)^{\mu-1}\sin(ax)\,dx =$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{u}{a}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}\Gamma(\mu)\left[\cos\frac{au}{2}J_{\frac{1}{2}-\mu}\left(\frac{au}{2}\right)-\sin\frac{au}{2}N_{\frac{1}{2}-\mu}\left(\frac{au}{2}\right)\right]$$

$\left[a>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}\right]$. ИП II 203 (20)

9. $$\int\limits_0^u x^{\mu-1}(u-x)^{\mu-1}\cos(ax)\,dx = \sqrt{\pi}\left(\frac{u}{a}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}\cos\frac{au}{2}\,\Gamma(\mu)\,J_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0]$. ИП II 189 (31)

10. $$\int\limits_u^\infty x^{\mu-1}(x-u)^{\mu-1}\cos(ax)\,dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{u}{a}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}\Gamma(\mu)\left[\sin\frac{au}{2}\,J_{\frac{1}{2}-\mu}\left(\frac{au}{2}\right) - \cos\frac{au}{2}\,N_{\frac{1}{2}-\mu}\left(\frac{au}{2}\right)\right]$$

$\left[a > 0,\quad 0 < \operatorname{Re}\mu < \frac{1}{2}\right]$. ИП II 204 (25)

11 $$\int\limits_0^1 x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}\sin(ax)\,dx = -\frac{i}{2}\,\mathrm{B}(\mu,\nu)\,[{}_1F_1(\nu,\ \nu+\mu;\ ia) -$$

$$- {}_1F_1(\nu;\ \nu+\mu;\ -ia)]$$ $[a > 0;\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$.

ИП I 68 (5) и, ИП I 317 (5)

12 $$\int\limits_0^1 x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}\cos(ax)\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}(\mu,\nu)\,[{}_1F_1(\nu;\ \nu+\mu;\ ia) +$$

$$+ {}_1F_1(\nu;\ \nu+\mu;\ -ia)]$$ $[a > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$.

ИП I 11 (5)

13 $$\int\limits_0^1 x^{\mu}(1-x)^{\mu}\sin(ax)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{(2a)^{\mu+\frac{1}{2}}}\,\Gamma(\mu+1)\sin a\,J_{\mu+\frac{1}{2}}(a)$$

$[a > 0,\ \operatorname{Re}\mu > -1]$. ИП I 68 (4)

14 $$\int\limits_0^1 x^{\mu}(1-x)^{\mu}\cos(ax)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{(2a)^{\mu+\frac{1}{2}}}\,\Gamma(\mu+1)\cos a\,J_{\mu+\frac{1}{2}}(a)$$

$[a > 0.\ \operatorname{Re}\mu > -1]$. ИП I 11 (4)

3.769

1. $$\int\limits_0^\infty [(\beta+ix)^{-\nu} - (\beta-ix)^{-\nu}]\sin(ax)\,dx =$$

$$= \frac{\pi i a^{\nu-1}e^{-a\beta}}{\Gamma(\nu)}$$ $[a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП I 70 (15)

2 $$\int\limits_0^\infty [(\beta+ix)^{-\nu} + (\beta-ix)^{-\nu}]\cos(ax)\,dx = \frac{\pi a^{\nu-1}e^{-a\beta}}{\Gamma(\nu)}$$

$[a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП I 13 (19)

3. $$\int\limits_0^\infty x[(\beta+ix)^{-\nu} + (\beta-ix)^{-\nu}]\sin(ax)\,dx =$$

$$= -\frac{\pi a^{\nu-2}(1-a\beta)}{\Gamma(\nu)}e^{-a\beta}$$ $[a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП I 70 (16)

4 $$\int_0^\infty x^{2n}[(\beta - ix)^{-\nu} - (\beta + ix)^{-\nu}] \sin(ax)\,dx =$$
$$= \frac{(-1)^{n+1} i}{\Gamma(\nu)} (2n)!\, \pi a^{\nu-2n-1} e^{-a\beta} L_{2n}^{\nu-2n-1}(a\beta)$$
$[a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ 0 \leqslant 2n \leqslant \operatorname{Re}\nu]$. ИПI 70(17)

5 $$\int_0^\infty x^{2n}[(\beta + ix)^{-\nu} + (\beta - ix)^{-\nu}] \cos(ax)\,dx =$$
$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\nu)} (2n)!\, \pi a^{\nu-2n-1} e^{-a\beta} L_{2n}^{\nu-2n-1}(a\beta)$$
$[a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ 0 \leqslant 2n < \operatorname{Re}\nu]$. ИПI 13(20)

6. $$\int_0^\infty x^{2n+1}[(\beta + ix)^{-\nu} + (\beta - ix)^{-\nu}] \sin(ax)\,dx =$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(\nu)} (2n+1)!\, \pi a^{\nu-2n-2} e^{-a\beta} L_{2n+1}^{\nu-2n-2}(a\beta)$$
$[a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ -1 \leqslant 2n+1 < \operatorname{Re}\nu]$. ИПI 70(18)

7 $$\int_0^\infty x^{2n+1}[(\beta + ix)^{-\nu} - (\beta - ix)^{-\nu}] \cos(ax)\,dx =$$
$$= \frac{(-1)^{n+1} i}{\Gamma(\nu)} (2n+1)!\, \pi a^{\nu-2n-2} e^{-a\beta} L_{2n+1}^{\nu-2n-2}(a\beta)$$
$[a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ 0 \leqslant 2n < \operatorname{Re}\nu - 1]$. ИПI 13(21)

3.771

1 $$\int_0^\infty (\beta^2 + x^2)^{\nu - \frac{1}{2}} \sin(ax)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2\beta}{a}\right)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)[I_{-\nu}(a\beta) - \mathbf{L}_\nu(a\beta)]$$
$\left[a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}, \nu \neq -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2},\ \ldots\right]$.

ВТФII 38 и, ИПI 68(6)

2 $$\int_0^\infty (\beta^2 + x^2)^{\nu - \frac{1}{2}} \cos(ax)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2\beta}{a}\right)^\nu \cos(\pi\nu)\ \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) K_{-\nu}(a\beta)$$
$\left[a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}\right]$. В 191(1) и, ГХ [333](78) и

3. $$\int_0^u x^{2\nu-1}(u^2 - x^2)^{\mu-1} \sin(ax)\,dx =$$
$$= \frac{a}{2} u^{2\mu+2\nu-1} \mathrm{B}\left(\mu,\ \nu + \frac{1}{2}\right) {}_1F_2\left(\nu + \frac{1}{2};\ \frac{3}{2},\ \mu + \nu + \frac{1}{2};\ -\frac{a^2u^2}{4}\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИПII 189(29)

4. $\int\limits_0^u x^{2\nu-1}(u^2-x^2)^{\mu-1}\cos(ax)\,dx = \frac{1}{2}u^{2\mu+2\nu-2}\mathrm{B}(\mu,\ \nu)\times$

$\times\,{}_1F_2\left(\nu;\ \frac{1}{2},\ \mu+\nu;\ -\frac{a^2u^2}{4}\right)$ [$\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0$]. ИПII 190 (35)

5. $\int\limits_0^\infty x(x^2+\beta^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin(ax)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\beta\left(\frac{2\beta}{a}\right)^\nu\cos\nu\pi\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)K_{\nu+1}(a\beta)$

[$a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\nu>-2$]. ИПI 69 (11)

6. $\int\limits_0^u (u^2-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin(ax)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2u}{a}\right)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\mathbf{H}_\nu(au)$

$\left[a>0,\ u>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$. ИПI 69 (7), В 358 (1) и

7. $\int\limits_u^\infty (x^2-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin(ax)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2u}{a}\right)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)J_{-\nu}(au)$

$\left[a>0,\ u>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right]$. ВТФII 81 (12) и, ИПI 69 (8), В 187 (3) и

8. $\int\limits_0^u (u^2-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(ax)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2u}{a}\right)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)J_\nu(au)$

$\left[a>0,\ u>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$. ИПI 11 (8)

9. $\int\limits_u^\infty (x^2-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(ax)\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2u}{a}\right)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)N_{-\nu}(au)$

$\left[a>0,\ u>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right]$. В 187 (4) и, ВТФII 82 (13) и, ИПI 11 (9)

10. $\int\limits_0^u x(u^2-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin(ax)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}u\left(\frac{2u}{a}\right)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)J_{\nu+1}(au)$

$\left[a>0,\ u>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$. ИПI 69 (9)

11. $\int\limits_u^\infty x(x^2-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin(ax)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}u\left(\frac{2u}{a}\right)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)N_{-\nu-1}(au)$

$\left[a>0,\ u>0,\ -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<0\right]$. ИПI 69 (10)

12. $\int\limits_0^u x(u^2-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(ax)\,dx = -\frac{u^{\nu+1}}{a^\nu}s_{\nu,\,\nu+1}(au) =$

$= \frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)u^{2\nu+1} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}u\left(\frac{2u}{a}\right)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\mathbf{H}_{\nu+1}(au)$

$\left[a>0,\ u>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$. ИПI 12 (10)

13. $$\int_u^\infty x\left(x^2-u^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(ax)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\,u}{2}\left(\frac{2u}{a}\right)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)J_{-\nu-1}(au)$$

$$\left[a>0,\quad u>0,\ 0<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right].$$ ИПI 12(11)

3.772

1 $$\int_0^\infty\left(x^2+2\beta x\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin(ax)\,dx=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2\beta}{a}\right)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left[J_{-\nu}(a\beta)\cos(a\beta)+N_{-\nu}(a\beta)\sin(a\beta)\right]$$

$$\left[a>0,\ |\arg\beta|<\pi,\ \frac{1}{2}>\operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2}\right].$$ ИПI 69(12)

2 $$\int_0^\infty\left(x^2+2\beta x\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(ax)\,dx=$$

$$=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2\beta}{a}\right)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left[N_{-\nu}(a\beta)\cos(a\beta)-J_{-\nu}(a\beta)\sin(a\beta)\right]$$

$$\left[a>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right].$$ ИПI 12(13)

3 $$\int_0^{2u}\left(2ux-x^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin(ax)\,dx=\sqrt{\pi}\left(\frac{2u}{a}\right)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sin(au)J_\nu(au)$$

$$\left[a>0,\ u>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИПI 69(13)u

4 $$\int_{2u}^\infty\left(x^2-2ux\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin(ax)\,dx=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2u}{a}\right)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left[J_{-\nu}(au)\cos(au)-N_{-\nu}(au)\sin(au)\right]$$

$$\left[a>0,\ u>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right].$$ ИПI 70(14)

5 $$\int_0^{2u}\left(2ux-x^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(ax)\,dx=\sqrt{\pi}\left(\frac{2u}{a}\right)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)J_\nu(au)\cos(au)$$

$$\left[a>0,\ u>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИПI 12(14)

6 $$\int_{2u}^\infty\left(x^2-2ux\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(ax)\,dx=$$

$$=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2u}{a}\right)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left[J_{-\nu}(au)\sin(au)+N_{-\nu}(au)\cos(au)\right]$$

$$\left[a>0,\ u>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right].$$ ИПI 12(12)

3.773

1. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2\nu}}{(x^2+\beta^2)^{\mu+1}} \sin(ax)\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\beta^{2\nu-2\mu}a\mathrm{B}(1+\nu,\ \mu-\nu)_1 = F_2\left(\nu+1;\ \nu+1-\mu,\ \frac{3}{2};\ \frac{\beta^2a^2}{4}\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}\,a^{2\mu-2\nu+1}}{4^{\mu-\nu+1}} + \frac{\Gamma(\nu-\mu)}{\Gamma\left(\mu-\nu+\frac{3}{2}\right)}\,{}_1F_2\left(\mu+1;\ \mu-\nu+\frac{3}{2},\ \mu-\nu+1;\frac{\beta^2a^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\mu+1)}\beta^{2\nu-2\mu-1}G_{13}^{21}\left(\frac{a^2\beta^2}{4}\left|\begin{matrix}-\nu+\frac{1}{2}\\ \mu-\nu+\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2},\ 0\end{matrix}\right.\right)$$

$[a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}\mu+1]$. ИП I 71 (28) *u*, ИП II 234 (17)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2m+1}\sin(ax)}{(z+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{(-1)^{n+m}}{n!}\cdot\frac{\pi}{2}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^m e^{-a\sqrt{z}}\right)$

$[a>0,\ 0\leqslant m\leqslant n,\ |\arg z|<\pi]$. ИП I 68 (39)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2m+1}\sin(ax)\,dx}{(\beta^2+x^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}}{2^n\beta^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{d^{2m+1}}{da^{2m+1}}\left[a^nK_n(a\beta)\right]$

$[a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ -1\leqslant m\leqslant n]$. ИП I 67 (37)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2\nu}\cos(ax)\,dx}{(x^2+\beta^2)^{\mu+1}} =$

$$= \frac{1}{2}\beta^{2\nu-2\mu-1}\mathrm{B}\left(\nu+\frac{1}{2},\ \mu-\nu+\frac{1}{2}\right){}_1F_2\left(\nu+\frac{1}{2};\ \nu-\mu+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ \frac{\beta^2a^2}{4}\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}\,a^{2\mu-2\nu+1}}{4^{\mu-\nu+1}}\,\frac{\Gamma\left(\nu-\mu-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu-\nu+1)}\,{}_1F_2\left(\mu+1;\ \mu-\nu+1,\ \mu-\nu+\frac{3}{2};\ \frac{\beta^2a^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\mu+1)}\beta^{2\nu-2\mu-1}G_{13}^{21}\left(\frac{a^2\beta^2}{4}\left|\begin{matrix}-\nu+\frac{1}{2}\\ \mu-\nu+\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right.\right)$$

$\left[a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}\mu+1\right]$. ИП I 14 (29) *u*, ИП II 235 (19)

5. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2m}\cos(ax)\,dx}{(z+x^2)^{n+1}} = (-1)^{m+n}\frac{\pi}{2\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dz^n}\left(z^{m-\frac{1}{2}}e^{-a\sqrt{z}}\right)$

$[a>0,\ n+1>m\geqslant 0,\ |\arg z|<\pi]$. ИП I 10 (28)

6. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2m}\cos(ax)\,dx}{(\beta^2+x^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^m\sqrt{\pi}}{2^n\beta^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{d^{2m}}{da^{2m}}\{a^nK_n(a\beta)\}$

$\left[a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ 0\leqslant m<n+\frac{1}{2}\right]$. ИП I 14 (28)

3.774

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(ax)\,dx}{\sqrt{x^2+b^2}\left(x+\sqrt{x^2+b^2}\right)^\nu} = \frac{\pi}{b^\nu\sin(\nu\pi)}\left[\sin\frac{\nu\pi}{2}I_\nu(ab) + \frac{i}{2}\mathbf{J}_\nu(iab) - \right.$

$\left. - \frac{i}{2}\mathbf{J}_\nu(-iab)\right]$ $[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП I 70 (19)

2. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{\sqrt{x^2+b^2}\,(x+\sqrt{x^2+b^2})^\nu} = \frac{\pi}{b^\nu \sin\nu\pi}\left[\frac{1}{2}\mathbf{J}_\nu(iab) + \frac{1}{2}\mathbf{J}_\nu(-iab) - \cos\frac{\nu\pi}{2} I_\nu(ab)\right] \quad [a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1].$$ ИПІ 12(15)

3. $$\int_0^\infty \frac{(x+\sqrt{x^2+\beta^2})^\nu}{\sqrt{x(x^2+\beta^2)}}\sin(ax)\,dx = \sqrt{\frac{a\pi}{2}}\,\beta^\nu I_{\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a\beta}{2}\right) K_{\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a\beta}{2}\right) \quad \left[a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}\right].$$ ИПІ 71(23)

4. $$\int_0^\infty \frac{(\sqrt{x^2+\beta^2}-x)^\nu}{\sqrt{x(x^2+\beta^2)}}\cos(ax)\,dx = \sqrt{\frac{a\pi}{2}}\,\beta^\nu I_{-\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a\beta}{2}\right) K_{-\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a\beta}{2}\right) \quad \left[a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2}\right].$$ ИПІ 12(17)

5. $$\int_0^\infty \frac{(\beta+\sqrt{x^2+\beta^2})^\nu}{x^{\nu+\frac{1}{2}}\sqrt{x^2+\beta^2}}\sin(ax)\,dx = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2}{a}}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\nu}{2}\right) W_{\frac{\nu}{2},\frac{1}{4}}(a\beta)\,M_{-\frac{\nu}{2},\frac{1}{4}}(a\beta) \quad \left[a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}\right].$$ ИПІ 71(27)

6. $$\int_0^\infty \frac{(\beta+\sqrt{x^2+\beta^2})^\nu}{x^{\nu+\frac{1}{2}}\sqrt{\beta^2+x^2}}\cos(ax)\,dx = \frac{1}{\beta\sqrt{2a}}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}\right) W_{\frac{\nu}{2},-\frac{1}{4}}(a\beta)\,M_{-\frac{\nu}{2},-\frac{1}{4}}(a\beta) \quad \left[a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right].$$ ИПІ 12(18)

3.775

1. $$\int_0^\infty \frac{(\sqrt{x^2+\beta^2}+x)^\nu-(\sqrt{x^2+\beta^2}-x)^\nu}{\sqrt{x^2+\beta^2}}\sin(ax)\,dx = 2\beta^\nu \sin\frac{\nu\pi}{2} K_\nu(a\beta) \quad [a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<1].$$ ИПІ 70(20)

2. $$\int_0^\infty \frac{(\sqrt{x^2+\beta^2}+x)^\nu+(\sqrt{x^2+\beta^2}-x)^\nu}{\sqrt{x^2+\beta^2}}\cos(ax)\,dx = 2\beta^\nu \cos\frac{\nu\pi}{2} K_\nu(a\beta) \quad [a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<1].$$ ИПІ 13(22)

3. $$\int_u^\infty \frac{(x+\sqrt{x^2-u^2})^\nu+(x-\sqrt{x^2-u^2})^\nu}{\sqrt{x^2-u^2}}\sin(ax)\,dx = \pi u^\nu\left[J_\nu(au)\cos\frac{\nu\pi}{2} - N_\nu(au)\sin\frac{\nu\pi}{2}\right] \quad [a>0,\ u>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<1].$$ ИПІ 70(22)

4. $$\int_u^\infty \frac{(x+\sqrt{x^2-u^2})^\nu+(x-\sqrt{x^2-u^2})^\nu}{\sqrt{x^2-u^2}}\cos(ax)\,dx = -\pi u^\nu\left[N_\nu(au)\cos\frac{\nu\pi}{2} + J_\nu(au)\sin\frac{\nu\pi}{2}\right] \quad [a>0,\ u>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<1].$$ ИПІ 13(25)

5. $$\int_0^u \frac{(x+i\sqrt{u^2-x^2})^\nu+(x-i\sqrt{u^2-x^2})^\nu}{\sqrt{u^2-x^2}}\sin(ax)\,dx=$$
$$=\frac{\pi}{2}u^\nu \operatorname{cosec}\frac{\nu\pi}{2}[\mathbf{J}_\nu(au)-\mathbf{J}_{-\nu}(au)] \qquad [a>0,\ u>0].$$
ИПІ 70 (21)

6. $$\int_0^u \frac{(x+i\sqrt{u^2-x^2})^\nu+(x-i\sqrt{u^2-x^2})^\nu}{\sqrt{u^2-x^2}}\cos(ax)\,dx=$$
$$=\frac{\pi}{2}u^\nu \sec\frac{\nu\pi}{2}[\mathbf{J}_\nu(au)+\mathbf{J}_{-\nu}(au)] \qquad [a>0,\ u>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<1].$$
ИПІ 13 (24)

7. $$\int_u^\infty \frac{(x+\sqrt{x^2-u^2})^\nu+(x-\sqrt{x^2-u^2})^\nu}{\sqrt{x(x^2-u^2)}}\sin(ax)\,dx=$$
$$=-\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 a}\,u^\nu\left[J_{\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)N_{\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+J_{\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)N_{\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)\right] \qquad \left[a>0,\ u>0,\ \operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}\right]$$
ИПІ 71 (25)

8. $$\int_u^\infty \frac{(x+\sqrt{x^2-u^2})^\nu+(x-\sqrt{x^2-u^2})^\nu}{\sqrt{x(x^2-u^2)}}\cos(ax)\,dx=$$
$$=-\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 a}\,u^\nu\left[J_{-\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)N_{-\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+J_{-\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)N_{-\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{au}{2}\right)\right] \qquad \left[a>0,\ u>0,\ \operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}\right].$$
ИПІ 13 (26)

9. $$\int_0^\infty \frac{(x+\beta+\sqrt{x^2+2\beta x})^\nu+(x+\beta-\sqrt{x^2+2\beta x})^\nu}{\sqrt{x^2+2\beta x}}\sin(ax)\,dx=$$
$$=\pi\beta^\nu\left[N_\nu(\beta a)\sin\left(\beta a-\frac{\nu\pi}{2}\right)+J_\nu(\beta a)\cos\left(\beta a-\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]$$
$[a>0,\ |\arg\beta|<\pi,\ |\operatorname{Re}\nu|<1]$. ИПІ 71 (26)

10. $$\int_0^\infty \frac{(x+\beta+\sqrt{x^2+2\beta x})^\nu+(x+\beta-\sqrt{x^2+2\beta x})^\nu}{\sqrt{x^2+2\beta x}}\cos(ax)\,dx=$$
$$=\pi\beta^\nu\left[J_\nu(\beta a)\sin\left(\beta a-\frac{\nu\pi}{2}\right)-N_\nu(\beta a)\cos\left(\beta a-\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]$$
$[a>0,\ |\arg\beta|<\pi,\ |\operatorname{Re}\nu|<1]$. ИПІ 13 (23)

11. $$\int_0^{2u} \frac{(\sqrt{2u+x}+i\sqrt{2u-x})^{4\nu}+(\sqrt{2u+x}-i\sqrt{2u-x})^{4\nu}}{\sqrt{4u^2x-x^2}}\cos(ax)\,dx=$$
$$=(4u)^{2\nu}\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{a}{2}}\,J_{\nu-\frac{1}{4}}(au)\,J_{-\nu-\frac{1}{4}}(au) \qquad [a>0,\ u>0].$$
ИПІ 14 (27)

3.776

1. $\int\limits_0^\infty \frac{a^2(b+x)^2+p(p+1)}{(b+x)^{p+2}}\sin(ax)\,dx = \frac{a}{b^p}$ $[a>0,\ b>0,\ p>0]$. БХ [170] (1)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{a^2(b+x)^2+p(p+1)}{(b+x)^{p+2}}\cos(ax)\,dx = \frac{p}{b^{p+1}}$ $[a>0,\ b>0,\ p>0]$. БХ [170] (2)

3.78 — 3.81 Рациональные функции от x и от тригонометрических функций

3.781

1. $\int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x} = 1 - C$ (сравни 3.784 4. и 3.781 2.). БХ [173] (7)

2 $\int\limits_0^\infty \left(\cos x - \frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x} = -C$. БХ [173] (8)

3.782

1. $\int\limits_0^u \frac{1-\cos x}{x}\,dx - \int\limits_u^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = C + \ln u$ $[u>0]$ ГХ [333] (31)

2 $\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x^2}\,dx = \frac{a\pi}{2}$. БХ [158] (1)

3 $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1-\cos ax}{x(x-b)}\,dx = \frac{\sin ab}{b}$ $[a>0]$ ИП II 253 (48)

3.783

1. $\int\limits_0^\infty \left[\frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2(1+x)}\right]\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}C - \frac{3}{4}$. БХ [173] (19)

2 $\int\limits_0^\infty \left(\cos x - \frac{1}{1+x^2}\right)\frac{dx}{x} = -C$. ВТФ I 17, БХ [273] (21)

3.784

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}$ $[ab \neq 0]$ ФII 635, ГХ [333] (20)

2 $\int\limits_0^\infty \frac{a\sin bx - b\sin ax}{x^2}\,dx = ab\ln\frac{a}{b}$ $[a>0,\ b>0]$ ФII 647

3 $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \frac{(b-a)\pi}{2}$ $[a\geqslant 0,\ b\geqslant 0]$ БХ [158] (2), ФII 645

4. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,dx = 1.$ БХ [158] (3)

5. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x(x+\beta)}\,dx = \frac{1}{\beta}\Big[\operatorname{ci}(a\beta)\cos a\beta + \operatorname{si}(a\beta)\sin a\beta -$

$- \operatorname{ci}(b\beta)\cos b\beta - \operatorname{si}(b\beta)\sin b\beta + \ln\frac{b}{a}\Big]$ $[a>0,\ b>0,\ |\arg\beta|<\pi].$

ИПII 221 (49)

6. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax + x\sin ax}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-a}$ $[a>0].$ ГХ [333] (73)

7. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax - ax\cos ax}{x^3}\,dx = \frac{\pi}{4}a^2\operatorname{sign}a.$ Ли [158] (5)

8. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2(x^2+\beta^2)}\,dx = \frac{\pi\left[(b-a)\beta + e^{-b\beta} - e^{-a\beta}\right]}{2\beta^3}$

$[a>0,\ b>0,\ |\arg\beta|<\pi].$ БХ [173] (20) и, ИПII 222 (59)

3.785 $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n} a_k\cos b_k x\,dx = -\sum_{k=1}^{n} a_k\ln b_k$ $\left[b_k>0,\ \sum_{k=1}^{n} a_k = 0\right].$

ФII 649

3.786

1. $\int\limits_0^\infty \frac{(1-\cos ax)\sin bx}{x^2}\,dx = \frac{b}{2}\ln\frac{b^2-a^2}{b^2} + \frac{a}{2}\ln\frac{a+b}{a-b}$ $[a>0,\ b>0].$

ИПI 81 (29)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{(1-\cos ax)\cos bx}{x}\,dx = \ln\frac{\sqrt{|a^2-b^2|}}{b}$ $[a>0,\ b>0,\ a\neq b].$

ФII 647

3. $\int\limits_0^\infty \frac{(1-\cos ax)\cos bx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(a-b)$ $[0<b\leqslant a];$

$=0$ $[0<a\leqslant b].$

ИПI 20 (16)

3.787

1 $\int\limits_0^\infty \frac{(\cos a - \cos nax)\sin mx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}(\cos a - 1)$ $[m>na>0];$

$= \frac{\pi}{2}\cos a$ $[na>m].$

БХ [155] (7)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax - \sin^2 bx}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}$ $[ab\neq 0].$ ГХ [333] (20 b)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{x^3 - \sin^3 x}{x^5}\, dx = \frac{13}{32}\pi.$ БХ [158] (6)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{(3 - 4\sin^2 ax)\sin^2 ax}{x}\, dx = \frac{1}{2}\ln 2.$ БХ [155] (6)

3.788 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right) dx = \ln\frac{\pi}{2}.$ ГХ [333] (61а)

3.789 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4x^2\cos x + (\pi - x)x}{\sin x}\, dx = \pi^2 \ln 2.$ Ли [206] (10)

3.791

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\, dx}{1 + \sin x} = \ln 2.$ ГХ [333] (55а)

2. $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\cos x}{1 + \sin x}\, dx = \pi\ln 2 - 4G.$ ГХ [333] (55с)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{1 + \sin x}\, dx = \pi\ln 2 - 2G.$ ГХ [333] (55b)

4. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x}{1 - \sin x}\, dx = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x}{1 - \sin x}\, dx =$

$= \pi\ln 2 + 4G = 3{,}7404473667\ldots$ БХ [207] (3), ГХ [333] (56с)

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\, dx}{1 - \cos x} = -\frac{\pi^2}{4} + \pi\ln 2 + 4G.$ БХ [207] (3)

6. $\int\limits_0^{\pi} \frac{x^2\, dx}{1 - \cos x} = 4\pi\ln 2.$ БХ [219] (1)

7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{p+1}\, dx}{1 - \cos x} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{p+1} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^p (p+1)\left\{\frac{2}{p} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2k-1}(p+2k)}\zeta(2k)\right\}.$

$[p > 0]$. Ли [207] (4)

8. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{1+\cos x} = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$ ГХ [333] (55a)

9. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x\,dx}{1-\cos x} = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2G.$ ГХ [333] (56a)

10. $\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x\,dx}{1-\cos x} = 2\pi \ln 2.$ ГХ [333] (56b)

11. $\int\limits_0^{\pi} \frac{x-\sin x}{1-\cos x}\,dx = \frac{\pi}{2} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x-\sin x}{1-\cos x}\,dx = 2.$ ГХ [333] (57a)

12 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1+\cos x}\,dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + 2G.$ ГХ [333] (55b)

3.792

1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}$ $[a^2 < 1].$ Ф II 485

2 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x\,dx}{1+2a\sin x+a^2} = \frac{\pi}{2a} \ln(1+a) - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^{2k}}{(2k+1)^2}$

$[a^2 < 1].$ Ли [241] (2)

3. $\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{\pi}{a} \ln(1+a)$ $[a^2 < 1];$

$= \frac{\pi}{a} \ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$ $[a^2 > 1].$ БХ [221] (2)

4. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{x \sin x\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{2\pi}{a} \ln(1-a)$ $[a^2 < 1];$

$= \frac{2\pi}{a} \ln\left(1-\frac{1}{a}\right)$ $[a^2 > 1].$ БХ [223] (4)

5 · $\int\limits_0^{2\pi} \frac{x \sin nx\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}\left[(a^{-n}-a^n)\ln(1-a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a^{-k}-a^k}{n-k}\right]$

$[a^2 < 1].$ БХ [223] (5)

6 $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{1-2a\cos x+a^2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4a}\left[\left|\frac{1+a}{1-a}\right| - 1\right].$ ГХ [333] (62b)

7. $$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{1-2a\cos x+a^2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1+a-2a^{E(b)+1}}{(1-a^2)(1-a)} \qquad [b \neq 0, 1, 2, \ldots];$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{1+a-a^b-a^{b+1}}{(1-a^2)(1-a)} \qquad [b = 0, 1, 2, \ldots]$$

$[0 < a < 1]$. ИП I 81 (26)

8. $$\int_0^\infty \frac{\sin x\cos bx}{1-2a\cos x+a^2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2(1-a)}\,a^{E(b)} \qquad [b \neq 0, 1, 2, \ldots];$$

$$= \frac{\pi}{2(1-a)}\,a^b + \frac{\pi}{4}\,a^{b-1} \qquad [b = 0, 1, 2, \ldots]$$

$[0 < a < 1,\ b > 0]$. ИП I 19 (5)

9 $$\int_0^\infty \frac{(1-a\cos x)\sin bx}{1-2a\cos x+a^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-a^{E(b)+1}}{1-a} \qquad [b \neq 1, 2, 3, \ldots];$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-a^b}{1-a} + \frac{\pi a^b}{4} \qquad [b = 1, 2, 3, \ldots]$$

$[0 < a < 1]$. ИП I 82 (33)

10. $$\int_0^\infty \frac{1}{1-2a\cos bx+a^2}\,\frac{dx}{\beta^2+x^2} = \frac{\pi}{2\beta(1-a^2)}\,\frac{1+ae^{-b\beta}}{1-ae^{-b\beta}} \qquad [a^2 < 1].$$

БХ [192] (1)

11. $$\int_0^\infty \frac{1}{1-2a\cos bx+a^2}\,\frac{dx}{\beta^2-x^2} = \frac{a\pi}{\beta(1-a^2)}\,\frac{\sin b\beta}{1-2a\cos b\beta+a^2} \qquad [a^2 < 1].$$

БХ [193] (1)

12. $$\int_0^\infty \frac{\sin bcx}{1-2a\cos bx+a^2}\,\frac{x\,dx}{\beta^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-\beta bc}-a^c}{(1-ae^{-b\beta})(1-ae^{b\beta})} \qquad [a^2 < 1].$$

БХ [192] (8)

13. $$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{1-2a\cos bx+a^2}\,\frac{x\,dx}{\beta^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{e^{b\beta}-a} \qquad [a^2 < 1];$$

$$= \frac{\pi}{2a}\,\frac{1}{ae^{b\beta}-1} \qquad [a^2 > 1].$$ БХ [192] (2)

14. $$\int_0^\infty \frac{\sin bcx}{1-2a\cos bx+a^2}\,\frac{x\,dx}{\beta^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{a^c-\cos\beta bc}{1-2a\cos\beta b+a^2} \qquad [a^2 < 1].$$ БХ [193] (5)

15. $$\int_0^\infty \frac{\cos bcx}{1-2a\cos bx+a^2}\,\frac{dx}{\beta^2-x^2} = \frac{\pi}{2\beta(1-a^2)}\,\frac{(1-a^2)\sin\beta bc+2a^{c+1}\sin\beta b}{1-2a\cos\beta b+a^2}$$

$[a^2 < 1]$. БХ [193] (9)

16. $$\int_0^\infty \frac{1-a\cos bx}{1-2a\cos bx+a^2}\,\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^b}{e^b-a}.$$ Ф II 719

17. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos bx}{1-2a\cos x+a^2}\cdot\frac{dx}{x^2+\beta^2}=\frac{\pi\left(e^{\beta-\beta b}+ae^{\beta b}\right)}{2\beta\left(1-a^2\right)\left(e^\beta-a\right)}$

$[0\leqslant b<1,\quad |a|<1,\ \operatorname{Re}\beta>0].$ ИП I 21 (21)

18. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin bx\sin x}{1-2a\cos x+a^2}\cdot\frac{dx}{x^2+\beta^2}=$

$=\frac{\pi}{2\beta}\frac{\operatorname{sh} b\beta}{e^\beta-a}\qquad [0\leqslant b<1];$

$=\frac{\pi}{4\beta\left(ae^\beta-1\right)}\left[a^m e^{\beta(m+1-b)}-e^{(1-b)\beta}\right]-$

$-\frac{\pi}{4\beta\left(ae^{-\beta}-1\right)}\left[a^m e^{-(m+1-b)\beta}-e^{-(1-b)\beta}\right]\quad [m\leqslant b\leqslant m+1]$

$[0<a<1,\ \operatorname{Re}\beta>0].$ ИП I 81 (27)

19. $\int\limits_0^\infty \frac{(\cos x-a)\cos bx}{1-2a\cos x+a^2}\cdot\frac{dx}{x^2+\beta^2}=\frac{\pi\operatorname{ch}\beta b}{2\beta\left(e^\beta-a\right)}$

$[0\leqslant b<1,\ |a|<1,\ \operatorname{Re}\beta>0].$ ИП I 21 (23)

20. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{\left(1-2a\cos 2x+a^2\right)^{n+1}}\frac{dx}{x}=\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{\left(1-2a\cos 2x+a^2\right)^{n+1}}\frac{dx}{x}=$

$=\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{\left(1-2a\cos 4x+a^2\right)^{n+1}}\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2\left(1-a^2\right)^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 a^{2k}.$

БХ [187] (14, 15, 16)

3.793

1. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin nx-a\sin[(n+1)x]}{1-2a\cos x+a^2}\,x\,dx=2\pi a^n\left[\ln(1-a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ka^k}\right]$

$[|a|<1].$ БХ [223] (9)

2. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos nx-a\cos[(n+1)x]}{1-2a\cos x+a^2}\,x\,dx=2\pi^2 a^n$

$[a^2<1].$ БХ [223] (13)

3.794

1. $\int\limits_0^\pi \frac{x\,dx}{a\pm\cos x}=\frac{\pi^2}{2\sqrt{a^2-1}}\pm\frac{4}{\sqrt{a^2-1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^{2k+1}}{(2k+1)^2}$

$[a>1].$ Ли [219] (2)

2. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{x\sin nx}{1\pm a\cos x}\,dx=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}\left[(\mp 1)^n\frac{\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)^n-\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)^n}{a^n}\times\right.$

$\left.\times\ln\frac{2\sqrt{1\pm a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\mp 1)^k}{n-k}\frac{\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)^k-\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)^k}{a^k}\right]$

$[a^2<1].$ БХ [223] (2)

3. $$\int_0^{2\pi} \frac{x\cos nx}{1\pm a\cos x}\,dx = \frac{2\pi^2}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{\pm a}\right)^n$$
$[a^2<1]$ БХ [223] (3)

4. $$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x\,dx}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{b}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2(a-b)}$$ $[a>|b|>0]$. ГХ [333] (53a)

5. $$\int_0^{2\pi} \frac{x\sin x\,dx}{a+b\cos x} = \frac{2\pi}{b}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2(a+b)}$$ $[a>|b|>0]$. ГХ [333] (53b)

6. $$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{a\pm b\cos 2x}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2-b^2}}$$ $[a^2>b^2]$;
$$=0$$ $[a^2<b^2]$ БХ [181] (1)

3.795 $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b^2+c^2+x^2)\,x\sin ax-(b^2-c^2-x^2)\,c\,\mathrm{sh}\,ac}{[x^2+(b-c)^2]\,[x^2+(b+c)^2]\,(\cos ax+\mathrm{ch}\,ac)}\,dx = \pi$$ $[c>b>0]$;
$$=\frac{2\pi}{e^{ab}+1}$$ $[b>c>0]$;
$[a>0]$. БХ [202] (18)

3.796

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\pm\sin x}{\cos x\mp\sin x}\,x\,dx = \mp\frac{\pi}{4}\ln 2 - G.$$ БХ [207] (8 и 9)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,x\,dx = \frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{1}{2}G.$$ БХ [204] (23)

3.797

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4}-x\,\mathrm{tg}\,x\right)\mathrm{tg}\,x\,dx = \frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi^2}{32}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\ln 2.$$ БХ [204] (8)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\mathrm{tg}\,x\,dx}{\cos 2x} = -\frac{\pi}{8}\ln 2+\frac{1}{2}G.$$ БХ [204] (19)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4}-x\,\mathrm{tg}\,x}{\cos 2x}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2+\frac{1}{2}G.$$ БХ [204] (20)

3.798

1. $$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{tg}\,x}{a+b\cos 2x}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2-b^2}}$$ $[a^2>b^2]$;
$$=0$$ $[a^2<b^2]$, $[a>0]$ БХ [181] (2)

2 $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{a+b\cos 4x}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2-b^2}}$ $[a^2 > b^2]$;

$= 0$ $[a^2 < b^2]$; $[a > 0]$. БХ [181] (3)

3.799

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{(\sin x + a\cos x)^2} = \frac{a}{1+a^2}\frac{\pi}{2} - \frac{\ln a}{1+a^2}$ $[a > 0]$. БХ [208] (5)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,dx}{(\cos x + a\sin x)^2} = \frac{1}{1+a^2}\ln\frac{1+a}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1-a}{(1+a)(1+a^2)}$ $[a > 0]$.

БХ [204] (24)

3. $\int\limits_0^{\pi} \frac{a\cos x + b}{(a+b\cos x)^2}x^2\,dx = \frac{2\pi}{b}\ln\frac{2(a-b)}{a+\sqrt{a^2-b^2}}$ $[a > |b| > 0]$. ГХ [333] (58а)

3.811

1. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{1-\cos t_1\cos x}\cdot\frac{x\,dx}{1-\cos t_2\cos x} = \pi\operatorname{cosec}\frac{t_1+t_2}{2}\operatorname{cosec}\frac{t_1-t_2}{2}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{t_1}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{t_2}{2}}$

(сравни 3.794 4.). БХ [222] (5)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{(\cos x \pm \sin x)\sin x} = \frac{\pi}{4}\ln 2 \pm G$. БХ [208] (16 и 17)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,dx}{(\cos x + \sin x)\sin x} = -\frac{\pi}{8}\ln 2 + G$. БХ [204] (29)

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,dx}{(\cos x + \sin x)\cos x} = \frac{\pi}{8}\ln 2$. БХ [204] (28)

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\frac{x\,dx}{\cos^2 x} = -\frac{\pi}{8}\ln 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$. БХ [204] (30)

3.812

1. $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x\,dx}{a+b\cos^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}$ $[a > 0,\ b > 0]$;

$= \frac{\pi}{2\sqrt{-ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{-b}}$ $[a > -b > 0]$. ГХ [333] (60а)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin 2x\, dx}{1 + a\cos^2 x} = \frac{\pi}{a} \ln \frac{1+\sqrt{1+a}}{2} \quad [a > -1,\ a \neq 0].$$ БХ [207] (10)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin 2x\, dx}{1 + a\sin^2 x} = \frac{\pi}{a} \ln \frac{2(1+a-\sqrt{1+a})}{a} \quad [a > -1,\ a \neq 0].$$ БХ [207] (2)

4. $$\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 - \cos^2 x} = \frac{\pi^2}{2a\sqrt{a^2-1}} \quad [a^2 > 1];$$
$$= 0 \qquad [a^2 < 1].$$ БХ [219] (10)

5. $$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{a^2 - \cos^2 x} = \frac{\pi}{2a} \ln \frac{1+a}{1-a} \quad [a \neq 1].$$ БХ [219] (13)

6. $$\int_0^{\pi} \frac{x \sin 2x\, dx}{a^2 - \cos^2 x} = \pi \ln \{4(1-a^2)\}, \qquad [a^2 < 1];$$
$$= 2\pi \ln [2(1 - a^2 + a\sqrt{a^2-1})] \quad [a^2 > 1]$$ БХ [219] (19)

7. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x\, dx}{\cos^2 t - \sin^2 x} = -2 \operatorname{cosec} t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin (2k+1)t}{(2k+1)^2}.$$ БХ [207] (1)

8. $$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1 - \cos^2 t \sin^2 x} = \pi(\pi - 2t) \operatorname{cosec} 2t.$$ БХ [219] (12)

9. $$\int_0^{\pi} \frac{x \cos x\, dx}{\cos^2 t - \cos^2 x} = 4 \operatorname{cosec} t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin (2k+1)t}{(2k+1)^2}.$$ БХ [219] (17)

10. $$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{\operatorname{tg}^2 t + \cos^2 x} = \frac{\pi}{2} (\pi - 2t) \operatorname{ctg} t.$$ БХ [219] (14)

11. $$\int_0^{\infty} \frac{x(a\cos x + b)\sin x\, dx}{\operatorname{ctg}^2 t + \cos^2 x} = 2a\pi \ln \cos \frac{t}{2} + \pi b t \operatorname{tg} t.$$ БХ [219] (18)

3.813

1. $$\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$$
$[a > 0,\ b > 0]$ ГХ [333] (36)

2. $$\int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^2 \sin^2 ax + \gamma^2 \cos^2 ax} \cdot \frac{dx}{x^2 + \delta^2} = \frac{\pi \operatorname{sh}(2a\delta)}{4\delta(\beta^2 \operatorname{sh}^2(a\delta) - \gamma^2 \operatorname{ch}^2(a\delta))} \left[\frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{\beta} - \frac{2}{\operatorname{sh}(2a\delta)}\right]$$
$\left[\left|\arg \frac{\beta}{\gamma}\right| < \pi,\ \operatorname{Re} \delta > 0,\ a > 0\right]$. ГХ [333] (81), ИП II 222 (63)

3. $$\int_0^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)} = \frac{\pi}{2ab} \quad [ab > 0].$$ БХ [181] (8)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x\,dx}{x(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)}=\frac{\pi}{2b(a+b)}\quad [a>0,\ b>0].$ БХ [181] (11)

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin 2x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{\pi}{a^2-b^2}\ln\frac{a+b}{2b}\quad [a>0,\ b>0,\ a\neq b].$

ГХ [333] (52a)

6. $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin 2x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{2\pi}{a^2-b^2}\ln\frac{a+b}{2a}\quad [a>0,\ b>0,\ a\neq b].$

ГХ [333] (52b)

7. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin 2x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{a(a+b)}\quad [a>0,\ b>0].$ БХ [182] (3)

8. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin 2ax}{\beta^2\sin^2 ax+\gamma^2\cos^2 ax}\cdot\frac{x\,dx}{x^2+\delta^2}=\frac{\pi}{2(\beta^2\operatorname{sh}^2(a\delta)-\gamma^2\operatorname{ch}^2(a\delta))}\left[\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}-e^{-2a\delta}\right]$

$$\left[a>0,\ \left|\arg\frac{\beta}{\gamma}\right|<\pi,\ \operatorname{Re}\delta>0\right].$$

ИП II 222 (64), ГХ [333] (80)

9. $\int\limits_0^\infty \frac{(1-\cos x)\sin x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2b(a+b)}\quad [a>0,\ b>0].$ БХ [182] (7)и

10. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x\cos^2 x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2a(a+b)}\quad [a>0,\ b>0].$ БХ [182] (4)

11. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2b}\cdot\frac{1}{a+b}\quad [a>0,\ b>0].$ БХ [182] (1)

3.814

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-x\operatorname{ctg} x)\,dx}{\sin^2 x}=\frac{\pi}{4}.$ БХ [206] (9)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\operatorname{tg} x\,dx}{(\sin x+\cos x)\cos x}=-\frac{\pi}{8}\ln 2+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$ БХ [204] (30)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2ab}\quad [a>0,\ b>0].$ БХ [181] (9)

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\operatorname{ctg} x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{\pi}{2a^2}\ln\frac{a+b}{b}\quad [a>0,\ b>0].$ Ли [208] (20)

5 $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x\, dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x\, dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=$$
$$=\frac{\pi}{2b^2}\ln\frac{a+b}{a}\quad [a>0,\ b>0].$$ ГХ [333](59)

6 $$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 x\operatorname{tg} x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2b(a+b)}\quad [a>0,\ b>0]$$ БХ [182](6)

7. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{tg} x}{a^2\cos^2 2x+b^2\sin^2 2x}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2ab}\quad [a>0,\ b>0].$$ БХ [181](10)и

8. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 2x\operatorname{tg} x}{a^2\cos^2 2x+b^2\sin^2 2x}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2b}\cdot\frac{1}{a+b}\quad [a>0,\ b>0].$$ БХ [182](2)и

9. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos^2 2x\operatorname{tg} x}{a^2\cos^2 2x+b^2\sin^2 2x}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{a+b}\quad [a>0,\ b>0].$$ БХ [182](5)и

10. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 x\cos x}{a^2\cos^2 2x+b^2\sin^2 2x}\cdot\frac{dx}{x\cos 4x}=-\frac{\pi}{8b}\,\frac{a}{a^2+b^2}$$
$$[a>0,\ b>0].$$ БХ [186](12)и

11. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{x\cos 2x}=\frac{\pi}{2ab}\cdot\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$$
$$[a>0,\ b>0].$$ БХ [186](4)и

12. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{x\cos 2x}=\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{b}{a^2+b^2}\quad [a>0,\ b>0].$$
БХ [186](7)и

13. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x\cos^2 x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{x\cos 2x}=\frac{\pi}{2ab}\cdot\frac{b^2}{a^2+b^2}\quad [a>0,\ b>0]$$
БХ [186](8)и

14. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{x\cos 2x}=-\frac{\pi}{2b}\,\frac{a}{a^2+b^2}\quad [a>0,\ b>0].$$
БХ [186](10)

15. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{x\sin x}=\frac{\pi}{2ab}\quad [a>0,\ b>0].$$ БХ [186](3)и

3.815

1 $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin 2x\, dx}{(1+a\sin^2 x)(1+b\sin^2 x)}=\frac{\pi}{a-b}\ln\left\{\frac{1+\sqrt{1+b}}{1+\sqrt{1+a}}\ \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+b}}\right\}$$
$[a>0,\ b>0]$, (сравни 3.812 3.). БХ [208](22)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin 2x\, dx}{(1+a\sin^2 x)(1+b\cos^2 x)} = \frac{\pi}{a+ab+b} \ln \frac{(1+\sqrt{1+b})\sqrt{1+a}}{1+\sqrt{1+a}}$$
$[a > 0,\ b > 0]$, (сравни 3.812 2. и 3.). БХ [208] (24)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin 2x\, dx}{(1+a\cos^2 x)(1+b\cos^2 x)} = \frac{\pi}{a-b} \ln \frac{1+\sqrt{1+a}}{1+\sqrt{1+b}}$$
$[a > 0,\ b > 0]$, (сравни 3.812 2.). БХ [208] (23)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin 2x\, dx}{(1-\sin^2 t_1 \cos^2 x)(1-\sin^2 t_2 \cos^2 x)} =$$
$$= \frac{2\pi}{\cos^2 t_1 - \cos^2 t_2} \ln \frac{\cos \frac{t_1}{2}}{\cos \frac{t_2}{2}} \quad [-\pi < t_1 < \pi,\ -\pi < t_2 < \pi].$$ БХ [208] (21)

3.816

1. $$\int_0^{\pi} \frac{x^2 \sin 2x}{(a^2 - \cos^2 x)^2}\, dx = \pi^2 \frac{\sqrt{a^2-1}-a}{a(a^2-1)} \quad [a > 1].$$ Ли [220] (9)

2. $$\int_0^{\pi} \frac{(a^2-1-\sin^2 x)\cos x}{(a^2-\cos^2 x)^2} x^2\, dx = \frac{\pi}{a} \ln \frac{1-a}{1+a} \quad [a > 0,\ a \neq 1],$$
(сравни 3.812 5.). БХ [220] (12)

3. $$\int_0^{\pi} \frac{a\cos 2x - \sin^2 x}{(a+\sin^2 x)^2} x^2\, dx = -2\pi \ln\left[2\left(-a+\sqrt{a(a+1)}\right)\right] \quad [a > 0].$$
Ли [220] (10)

4. $$\int_0^{\pi} \frac{a\cos 2x + \sin^2 x}{(a-\sin^2 x)^2} x^2\, dx = \pi \ln (4a) \quad [a > 1],$$ (сравни 3.812 6.).
Ли [220] (11)

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2 t + \sin^2 x)\cos x}{(\cos^2 t - \sin^2 x)^2} \cdot x^2 dx = -\frac{\pi^2}{4\sin^2 t} + \frac{4}{\sin t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)t]}{(2k+1)^2}$$
(сравни 3.812 7.). БХ [208] (14)

3.817

1. $$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{(a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^3 b^3} \quad [ab > 0].$$ БХ [181] (12)

2. $$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{(a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4a^3 b} \quad [ab > 0].$$ БХ [182] (8)

3. $$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{(a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4ab^3} \quad [ab > 0].$$ БХ [181] (15)

4 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x \cos^2 x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4a^3 b}$ $[ab > 0]$. БХ [182] (9)

5. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3}$ $[ab > 0]$. БХ [181] (13)

6 $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{(a^2 \cos^2 2x + b^2 \sin^2 2x)^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3}$ $[ab > 0]$. БХ [181] (14)

7 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x \operatorname{tg} x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4ab^3}$ $[ab > 0]$. БХ [182] (11)

8. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x \cos^2 2x}{(a^2 \cos^2 2x + b^2 \sin^2 2x)^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4a^3 b}$ $[ab > 0]$. БХ [182] (10)

3.818

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^3} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{16} \frac{3a^4 + 2a^2 b^2 + 3b^4}{a^5 b^5}$ $[ab > 0]$. БХ [181] (16)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x \cos x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^3} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{16} \frac{a^2 + 3b^2}{a^5 b^3}$ $[ab > 0]$. БХ [182] (13)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x \cos^2 x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^3} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{16} \frac{a^2 + 3b^2}{a^5 b^3}$ $[ab > 0]$. БХ [182] (14)

4 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^3} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{16} \frac{3a^2 + b^2}{a^3 b^5}$ $[ab > 0]$. Ли [181] (19)

5 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x \cos x}{(a^2 \cos^2 2x + b^2 \sin^2 2x)^3} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{64} \frac{3a^2 + b^2}{a^3 b^5}$ $[ab > 0]$. БХ [182] (17)

6. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^3} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{16} \frac{3a^4 + 2a^2 b^2 + 3b^4}{a^5 b^5}$ $[ab > 0]$. БХ [181] (17)

7 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x \operatorname{tg} x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^3} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{3a^2 + b^2}{a^3 b^5}$ $[ab > 0]$. БХ [182] (16)

8 $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{(a^2 \cos^2 2x + b^2 \sin^2 2x)^3} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{16} \frac{3a^4 + 2a^2 b^2 + 3b^4}{a^5 b^5}$ $[ab > 0]$ БХ [181] (18)

9 $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x \cos^2 2x}{(a^2 \cos^2 2x + b^2 \sin^2 2x)^3} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{16} \frac{a^2 + 3b^2}{a^5 b^3}$ $[ab > 0]$. БХ [182] (15)

3.819

1 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^4} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{32} \frac{5a^6 + 3a^4 b^2 + 3a^2 b^4 + 5b^6}{a^7 b^7}$ $[ab > 0]$.

БХ [181] (20)

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x \cos x}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^4}\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{a^4+2a^2b^2+5b^4}{a^7b^5}$ $[ab>0]$. БХ [182] (18)

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x \cos^2 x}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^4}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{a^4+2a^2b^2+5b^4}{a^7b^5}$ $[ab>0]$. БХ [182] (19)

4 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^4}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{5a^4+a^2b^2+b^4}{a^5b^7}$ $[ab>0]$. БХ [181] (23)

5 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x \cos x}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^4}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^5b^5}$ $[ab>0]$. БХ [182] (26)

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x \cos^3 x}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^4}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{a^2+5b^2}{a^7b^3}$ $[ab>0]$. БХ [182] (23)

7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^4}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^5b^5}$ $[ab>0]$. БХ [182] (27)

8. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x \cos^4 x}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^4}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{a^2+5b^2}{a^7b^3}$ $[ab>0]$. БХ [182] (24)

9. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^5 x}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^4}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{5a^2+b^2}{a^3b^7}$ $[ab>0]$. БХ [181] (24)

10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x \cos x}{(a^2\cos^2 2x+b^2\sin^2 2x)^4}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{128}\cdot\frac{5a^4+2a^2b^2+b^4}{a^5b^7}$ $[ab>0]$. БХ [182] (22)

11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^5 x \cos^3 x}{(a^2\cos^2 2x+b^2\sin^2 2x)^4}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{512}\cdot\frac{5a^2+b^2}{a^3b^7}$ $[ab>0]$. БХ [182] (30)

12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x \operatorname{tg} x}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^4}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{5a^4+2a^2b^2+b^4}{a^5b^7}$ $[ab>0]$. БХ [182] (21)

13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^4 x \operatorname{tg} x}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^4}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{5a^2+b^2}{a^3b^7}$ $[ab>0]$. БХ [182] (29)

14. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos^2 2x \operatorname{tg} x}{(a^2\cos^2 2x+b^2\sin^2 2x)^4}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{a^4+2a^2b^2+5b^4}{a^7b^5}$ $[ab>0]$. БХ [182] (29)

15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 4x \operatorname{tg} x}{(a^2\cos^2 2x+b^2\sin^2 2x)^4}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^5b^5}$ $[ab>0]$. БХ [182] (28)

16. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos^4 2x \operatorname{tg} x}{(a^2\cos^2 2x+b^2\sin^2 2x)^4}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{a^2+5b^2}{a^7b^3}$ $[ab>0]$. БХ [182] (25)

3.82 – 3.83 Степени тригонометрических функций и степенная функция

3.821

1. $\int_0^{\pi} x \sin^p x\, dx = \frac{\pi^2}{2^{p+1}} \frac{\Gamma(p+1)}{\left[\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\right]^2}$ $[p > -1]$. БХ [218] (7), ЛоV121 (71)

2. $\int_0^{r\pi} x \sin^n x\, dx = \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} r^2$ $[n = 2m]$;

$= (-1)^{r+1}\pi \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} r$ $[n = 2m+1]$,

[r — натуральное число]. ГХ [333] (8c)

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^n x\, dx = -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(n-2k+1)(n-2k+3)\dots(n-1)}{(n-2k)(n-2k+2)\dots n} \frac{1}{n-2k} +$

$+\begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!} & [n = 2m-1]; \\ \frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} & [n = 2m]. \end{cases}$ ГХ [333] (9b)

4. $\int_0^{\pi} x \cos^{2m} x\, dx = \frac{\pi^2}{2} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}$. БХ [218] (10)

5. $\int_{r\pi}^{s\pi} x \cos^{2m} x\, dx = \frac{\pi^2}{2}(s^2 - r^2) \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}$. БХ [226] (3)

6. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^p x}{x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} = 2^{p-2} \mathrm{B}\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right)$;

[p — рациональная дробь с нечетными числителем и знаменателем] ЛоV 278, ФII 808

38 7. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^{2n+1} x}{x}\, dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$. БХ [151] (4)

8. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^{2n} x}{x}\, dx = \infty$. БХ [151] (3)

9. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2}\, dx = \frac{a\pi}{2}$ $[a > 0]$. ЛоV 307 и 312, ФII 632

10. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^{2m} ax}{x^2}\, dx = \frac{(2m-3)!!}{(2m-2)!!} \frac{a\pi}{2}$ $[a > 0]$. ГХ [333] (14b)

11. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{2m+1} ax}{x^3}\,dx = \frac{(2m-3)!!}{(2m)!!}(2m+1)\frac{a^2\pi}{4}\quad [a>0].$ ГХ [333] (14d)

12. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^m}\,dx = \frac{p}{m-1}\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{p-1} x}{x^{m-1}}\cos x\,dx\quad [p>m-1>0];$

$$= \frac{p(p-1)}{(m-1)(m-2)}\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{p-2} x}{x^{m-2}}\,dx - \frac{p^2}{(m-1)(m-2)}\int\limits_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^{m-2}}\,dx$$

$[p>m-1>1].$ ГХ [333] (17)

13. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{2n} px}{\sqrt{x}}\,dx = \infty.$ БХ [177] (5)

14. $\int\limits_0^\infty \sin^{2n+1} px\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2^{2n}}\sqrt{\frac{\pi}{2p}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{n+k+1}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$

БХ [177] (7)

3.822

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^p\cos^m x\,dx = -\frac{p(p-1)}{m^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^{p-2}\cos^m x\,dx + \frac{m-1}{m}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^p\cos^{m-2} x\,dx$

$[m>1,\ p>1].$ ГХ [333] (9a)

2. $\int\limits_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\cos^{2n+1}(px)\,dx = \frac{1}{2^{2n}}\sqrt{\frac{\pi}{2p}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{n+k+1}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$

БХ [177] (8)

3.823

$$\int\limits_0^\infty x^{\mu-1}\sin^2 ax\,dx = -\frac{\Gamma(\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}}{2^{\mu+1}a^\mu}\quad [a>0,\ -2<\operatorname{Re}\mu<0].$$

ИП I 319 (15), ГХ [333] (19c) и

3.824

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2+\beta^2}\,dx = \frac{\pi}{4\beta}(1-e^{-2a\beta})\quad [a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0].$ БХ [160] (10)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos^2 ax}{x^2+\beta^2}\,dx = \frac{\pi}{4\beta}(1+e^{-2a\beta})\quad [a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0].$ БХ [160] (11)

3. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m} x\,\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}}\cdot\frac{\pi}{a}\Big\{2^{2m}\operatorname{sh}^{2m}a -$

$-2\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{2m}{k}\operatorname{sh}[2(m-k)a]\Big\}\quad [a>0].$ БХ [160] (12)

4. $$\int_0^\infty \sin^{2m+1} x \frac{dx}{a^2+x^2} =$$
$$= \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m+2}a} \left\{ e^{(2m+1)a} \sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k \binom{2m+1}{k} e^{-2ka} \operatorname{Ei}[(2k-2m-1)a] + \right.$$
$$\left. + e^{-(2m+1)a} \sum_{k=1}^{2m+1} (-1)^{k-1} \binom{2m+1}{k} e^{2ka} \operatorname{Ei}[(2m+1-2k)a] \right\} \quad [a>0]$$

БХ [160] (14)

5. $$\int_0^\infty \sin^{2m+1} x \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m+2}} e^{-(2m+1)a} \left\{ (1-e^{2(2m+1)a})(1-e^{-2a})^{2m+1} - \right.$$
$$\left. -2\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{2m+1}{k} e^{2ka} \right\} \qquad [a>0].$$ БХ [160] (15)

6. $$\int_0^\infty \cos^{2m} x \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{2m+1}a} \binom{2m}{m} + \frac{\pi}{2^{2m}} \sum_{k=1}^{m} \binom{2m}{m+k} e^{-2ka} \qquad [a>0].$$

БХ [160] (16)

7. $$\int_0^\infty \cos^{2m+1} x \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{2m+1}a} \sum_{k=1}^{m} \binom{2m+1}{m+k+1} e^{-(2k+1)a} \qquad [a>0].$$

БХ [160] (17)

8. $$\int_0^\infty \cos^{2m+1} x \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = -\frac{e^{-(2m+1)a}}{2^{2m+2}} \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} e^{2ka} \operatorname{Ei}[(2m-2k+1)a] -$$
$$- \frac{e^{(2m+1)a}}{2^{2m+2}} \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} e^{-2ka} \operatorname{Ei}[(2k-2m-1)a].$$ БХ [160] (18)

9. $$\int_0^\infty \frac{\cos^2 ax}{b^2-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4b} \sin 2ab \qquad [a>0,\ b>0].$$ БХ [161] (10)

10. $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax \cos^2 bx}{\beta^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8\beta}\left[1 - \frac{1}{2}e^{-2(a+b)\beta} + e^{-2b\beta} - \frac{1}{2}e^{2(b-a)\beta} - e^{-2a\beta}\right]$$
$$[a>b];$$
$$= \frac{\pi}{16\beta}[1-e^{-4a\beta}] \qquad [a=b];$$
$$= \frac{\pi}{8\beta}\left[1 - \frac{1}{2}e^{-2(a+b)\beta} + e^{-2b\beta} - \frac{1}{2}e^{2(a-b)\beta} - e^{-2a\beta}\right] \qquad [a<b];$$
$[a>0,\ b>0]$, (сравни 3.824 1. и 3.). БХ [162] (6)

11. $$\int_0^\infty \frac{x \sin 2ax \cos^2 bx}{\beta^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}[2e^{-2a\beta} + e^{-2(a+b)\beta} + e^{2(b-a)\beta}] \qquad [a>b];$$
$$= \frac{\pi}{8}[e^{-4a\beta} + 2e^{-2a\beta}] \qquad [a=b];$$
$$= \frac{\pi}{8}[2e^{-2a\beta} + e^{-2(a+b)\beta} - e^{2(a-b)\beta}] \qquad [a<b].$$

Ли [162] (5)

3.825

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax\,dx}{(b^2+x^2)(c^2+x^2)} = \frac{\pi\left(b-c+ce^{-2ab}-be^{-2ac}\right)}{4bc\,(b^2-c^2)} \qquad [a>0,\quad b>0,\quad c>0].$$

БХ [174] (15)

2. $$\int_0^\infty \frac{\cos^2 ax\,dx}{(b^2+x^2)(c^2+x^2)} = \frac{\pi\left(b-c+be^{-2ac}-ce^{-2ab}\right)}{4bc\,(b^2-c^2)} \qquad [a>0,\quad b>0,\quad c>0].$$

БХ [175] (14)

3. $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax\,dx}{(b^2-x^2)(c^2-x^2)} = \frac{\pi\,(c\sin 2ab-b\sin 2ac)}{4bc\,(b^2-c^2)} \qquad [a>0,\quad b>0,\quad c>0].$$

Ли [174] (16)

4. $$\int_0^\infty \frac{\cos^2 ax\,dx}{(b^2-x^2)(c^2-x^2)} = \frac{\pi\,(b\sin 2ac-c\sin 2ab)}{4bc\,(b^2-c^2)} \qquad [a>0,\quad b>0,\quad c>0].$$

Ли [175] (15)

3.826

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax\,dx}{x^2\,(b^2+x^2)} = \frac{\pi}{4b^2}\left[2a-\frac{1}{b}\left(1-e^{-2ab}\right)\right] \qquad [a>0,\quad b>0].$$

БХ [172] (13)

2. $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax\,dx}{x^2\,(b^2-x^2)} = \frac{\pi}{4b^2}\left(2a-\frac{1}{b}\sin 2ab\right) \qquad [a>0,\ b>0].$$

БХ [172] (14)

3.827

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin^3 ax}{x^\nu}\,dx = \frac{3-3^{\nu-1}}{4}\,a^{\nu-1}\cos\frac{\nu\pi}{2}\,\Gamma(1-\nu) \qquad [a>0,\quad 0<\operatorname{Re}\nu<2].$$

ГХ [333] (19f)

2. $$\int_0^\infty \frac{\sin^3 ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}\operatorname{sign} a.$$ ЛоV 277

3. $$\int_0^\infty \frac{\sin^3 ax}{x^2}\,dx = \frac{3}{4}\,a\ln 3.$$ БХ [156] (2)

4. $$\int_0^\infty \frac{\sin^3 ax}{x^3}\,dx = \frac{3}{8}\,a^2\pi\operatorname{sign} a.$$ БХ [156] (7) *и*, ЛоV 312

5. $$\int_0^\infty \frac{\sin^4 ax}{x^2}\,dx = \frac{a\pi}{4} \qquad [a>0].$$ БХ [156] (3)

6. $$\int_0^\infty \frac{\sin^4 ax}{x^3}\,dx = a^2\ln 2.$$ БХ [156] (8)

7. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^4 ax}{x^4}\,dx = \frac{a^3\pi}{3} \quad [a > 0].$ БХ [156] (11), Ло V 312

8. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^5 ax}{x^2}\,dx = \frac{5}{16}\,a\,(3\ln 3 - \ln 5).$ БХ [156] (4)

9. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^5 ax}{x^3}\,dx = \frac{5}{32}\,a^2\pi \quad [a > 0].$ БХ [156] (9)

10. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^5 ax}{x^4}\,dx = \frac{5}{96}\,a^3\,(25\ln 5 - 27\ln 3) \quad [a > 0].$ БХ [156] (12)

11. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^5 ax}{x^5}\,dx = \frac{115}{384}\,a^4\pi \quad [a > 0].$ БХ [156] (13), Ло V 312

12. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^6 ax}{x^2}\,dx = \frac{3}{16}\,a\pi \quad [a > 0].$ БХ [156] (5)

13. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^6 ax}{x^3}\,dx = \frac{3}{16}\,a^2\,(8\ln 2 - 3\ln 3).$ БХ [156] (10)

14. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^6 ax}{x^5}\,dx = \frac{1}{16}\,a^4\,(27\ln 3 - 32\ln 2).$ БХ [156] (14)

15. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^6 ax}{x^6}\,dx = \frac{11}{40}\,a^5\pi \quad [a > 0].$ Ло V 312

3.828

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin px \sin qx}{x}\,dx = \ln\sqrt{\frac{p+q}{|p-q|}} \quad [p \neq q].$ Ф II 647

2. $\int\limits_0^\infty \sin qx \sin px\,\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}\,p\pi \quad [p \leqslant q];$

$= \frac{1}{2}\,q\pi \quad [p \geqslant q].$ БХ [157] (1)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax \sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{4} \quad [0 < b < 2a];$

$= \frac{\pi}{8} \quad [b = 2a];$

$= 0 \quad [b > 2a].$ БХ [151] (10)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax \cos bx}{x}\,dx = \frac{1}{4}\ln\frac{4a^2 - b^2}{b^2}.$ БХ [151] (12)

5. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax \cos 2bx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,(a - b) \quad [b < a];$

$= 0 \quad [b > a].$ Ф III 648 и, БХ [157] (5) и

6. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin 2ax \cos^2 bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad [a > b];$

$= \frac{3}{8}\pi \quad [a = b];$

$= \frac{\pi}{4} \quad [a < b].$ БХ [151] (9)

7 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax \sin bx \sin cx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{16}(|b-2a-c| - |2a-b-c| + 2c)$

$[a > 0,\ b > 0,\ c > 0].$ БХ [157] (9) и, ИП I 79 (15)

8. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax \sin bx \sin cx}{x}\,dx = \frac{1}{4}\ln\frac{b+c}{b-c} +$

$+ \frac{1}{8}\ln\frac{(2a-b+c)(2a+b-c)}{(2a+b+c)(2a-b-c)} \quad [a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ b \neq c].$ Ли [152] (2)

9. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax \sin^2 bx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}a \quad [0 \leqslant a \leqslant b];$

$= \frac{\pi}{4}b \quad [0 \leqslant b \leqslant a].$ БХ [157] (3)

10. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax \sin^2 bx}{x^4}\,dx = \frac{1}{6}a^2\pi(3b-a) \quad [0 \leqslant a \leqslant b];$

$= \frac{1}{6}b^2\pi(3a-b) \quad [0 \leqslant b \leqslant a].$ БХ [157] (27)

11. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax \cos^2 bx}{x^2}\,dx = \frac{2a-b}{4}\pi \quad [a \geqslant b > 0];$

$= \frac{a\pi}{4} \quad [0 < a \leqslant b].$ БХ [157] (6)

12. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 ax \sin 3bx}{x^4}\,dx = \frac{a^3\pi}{2} \quad [b > a];$

$= \frac{\pi}{16}[8a^3 - 9(a-b)^3] \quad [a \leqslant 3b \leqslant 3a];$ БХ [157] (28)

$= \frac{9b\pi}{8}(a^2 - b^2) \quad [3b \leqslant a].$ Ли [157] [28]

13 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 ax \cos bx}{x}\,dx = 0 \quad [b > 3a];$

$= -\frac{\pi}{16} \quad [b = 3a];$

$= -\frac{\pi}{8} \quad [3a > b > a];$

$= \frac{\pi}{16} \quad [b = a];$

$= \frac{\pi}{4} \quad [a > b] \quad [a > 0,\ b > 0].$ БХ [151] (15)

14 $$\int_0^\infty \frac{\sin^3 ax \cos 3bx}{x^2}\,dx = \frac{3}{8}\left\{(a+b)\ln[3(a+b)] + (b-a)\ln[3(b-a)] - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{3}(a+3b)\ln(a+3b) - \frac{1}{3}(3b-a)\ln(3b-a)\right\}$$
$[a>0,\ b>0]$. БХ [157] (7) и, ИП I 19 (9)

15. $$\int_0^\infty \frac{\sin^3 ax \cos bx}{x^3}\,dx = \frac{\pi}{8}(3a^2-b^2) \quad [b<a];$$
$$= \frac{\pi b^2}{4} \quad [a=b];$$
$$= \frac{\pi}{16}(3a-b)^2 \quad [a<b<3a];$$
$$= 0 \quad [3a<b]; \quad [a>0,\ b>0]$$
БХ [157] (19), ИП I 19 (10)

16 $$\int_0^\infty \frac{\sin^3 ax \sin bx}{x^4}\,dx = \frac{b\pi}{24}(9a^2-b^2) \quad [0<b\leqslant a];$$
$$= \frac{\pi}{48}[24a^3-(3a-b)^3] \quad [0<a\leqslant b\leqslant 3a];$$
$$= \frac{\pi a^3}{2} \quad [0<3a\leqslant b].$$
ИП I 79 (16)

17 $$\int_0^\infty \frac{\sin^3 ax \sin^2 bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{8} \quad [2b>3a];$$
$$= \frac{5\pi}{32} \quad [2b=3a];$$
$$= \frac{3\pi}{16} \quad [3a>2b>a];$$
$$= \frac{3\pi}{32} \quad [2b=a];$$
$$= 0 \quad [a>2b]; \qquad [a>0,\ b>0]$$
БХ [151] (14)

18 $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax \cos^3 bx}{x}\,dx = \frac{1}{16}\ln\frac{(2a+b)^3(b-2a)^3(2a+3b)(3b-2a)}{9b^8}$$
$[b>2a>0$ или $2a>3b>0]$;
$$= \frac{1}{16}\ln\frac{(2a+b)^3(2a-b)^3(2a+3b)(3b-2a)}{9b^8}$$
$[3b>2a>b]$ БХ [151] (13)

19. $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax \sin^2 bx \sin 2cx}{x}\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{16}[1+\operatorname{sign}(c-a+b)+\operatorname{sign}(c+a-b)-2\operatorname{sign}(c-a)-2\operatorname{sign}(c-b)]$$
$[a>0,\ b>0,\ c>0]$. ИП I 80 (17)

20. $$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax \sin^2 bx \sin 2cx\, dx}{x^2} = \frac{a-b-c}{16}\ln 4(a-b-c)^2 -$$
$$- \frac{a+b+c}{16}\ln 4(a+b+c)^2 + \frac{a+b-c}{16}\ln 4(a+b-c)^2 -$$
$$- \frac{a-b+c}{16}\ln 4(a-b+c)^2 + \frac{a+c}{8}\ln 4(a+c)^2 - \frac{a-c}{8}\ln 4(a-c)^2 +$$
$$+ \frac{b+c}{8}\ln 4(b+c)^2 - \frac{b-c}{8}\ln 4(b-c)^2 - \frac{1}{2}c\ln 2c$$
$[a>0,\ b>0,\ c>0]$. БХ [157] (10)

21 $$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax \sin^3 bx}{x^3}\,dx = \frac{3b^2\pi}{16} \quad [2a>3b];$$
$$= \frac{a^2\pi}{12} \quad [2a=3b];$$
$$= \frac{6b^2-(3b-2a)^2}{32}\pi \quad [3b>2a>b];$$
$$= \frac{a^2\pi}{4} \quad [b>2a]; \qquad [a>0,\ b>0].$$ БХ [157] (18)

3.829

1. $$\int\limits_0^\infty \frac{x^n-\sin^n x}{x^{n+2}}\,dx = \frac{\pi}{2^n(n+1)!}\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}(-1)^k\binom{n}{k}(n-2k)^{n+1}$$ ГХ [333] (63)

2. $$\int\limits_0^\infty (1-\cos^{2m-1}x)\frac{dx}{x^2} = \int\limits_0^\infty (1-\cos^{2m}x)\frac{dx}{x^2} = \frac{m\pi}{2^{2m}}\binom{2m}{m}.$$
БХ [158] (7), БХ [158] (8)

3.831

1. $$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{2n} ax - \sin^{2n} bx}{x}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\ln\frac{b}{a} \quad [a>0,\ b>0].$$ ФП 651

2. $$\int\limits_0^\infty \frac{\cos^{2n} ax - \cos^{2n} bx}{x}\,dx = \left[1-\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]\ln\frac{b}{a} \quad [a>0,\ b>0].$$ ФП 651

3. $$\int\limits_0^\infty \frac{\cos^{2m+1} ax - \cos^{2m+1} bx}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a} \quad [a>0,\ b>0].$$ ФП 651

4. $$\int\limits_0^\infty \frac{\cos^m ax \cos max - \cos^m bx \cos mbx}{x}\,dx = \left(1-\frac{1}{2^m}\right)\ln\frac{b}{a}$$
$[ab>0]$. Ли [155] (8)

3.832

1. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^{p-1}x \sin ax\,dx = \frac{\pi}{2^{p+1}}\Gamma(p)\,\frac{\psi\left(\frac{p+a+1}{2}\right)-\psi\left(\frac{p-a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-a+1}{2}\right)}$$
$[p>0,\ -(p+1)<a<p+1]$. БХ [205] (6)

2. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m+1} x \sin 2mx \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^m \pi}{2^{2m+1}a} [(1-e^{-2a})^{2m} - 1] \operatorname{sh} a \quad [a>0].$

БХ [162] (17)

3. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m-1} x \sin [(2m-1)x] \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^{m+1} \pi}{2^{2m}a} (1-e^{-2a})^{2m-1} \quad [a>0].$

БХ [162] (11)

4. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m-1} x \sin [(2m+1)x] \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^{m-1} \pi}{2^{2m}a} e^{-2a}(1-e^{-2a})^{2m-1} \quad [a>0].$

БХ [162] (12)

5. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m+1} x \sin [3(2m+1)x] \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^m \pi}{2a} e^{-3(2m+1)a} \operatorname{sh}^{2m+1} a$

$[a>0].$ БХ [162] (18)

6. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m} x \sin [(2m-1)x] \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^m \pi}{2^{2m+1}} e^a [(1-e^{-2a})^{2m} - 1] \quad [a>0].$

БХ [162] (13)

7 $\int\limits_0^\infty \sin^{2m} x \sin (2mx) \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^m \pi}{2^{2m+1}} [(1-e^{-2a})^{2m} - 1] \quad [a>0].$

БХ [162] (14)

8. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m} x \sin [(2m+2)x] \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^m \pi}{2^{2m+1}} e^{-2a} (1-e^{-2a})^{2m} \quad [a>0].$

БХ [162] (15)

9. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m} x \sin 4mx \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^m \pi}{2} e^{-4ma} \operatorname{sh}^{2m} a \quad [a>0].$ БХ [162] (16)

10. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m} x \cos x \frac{dx}{x^2} = \frac{(2m-3)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$ ГХ [333] (15а)

11. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m} x \cos [(2m-1)x] \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^m \pi}{2^{2m}a} [(1-e^{-2a})^{2m-1} - 1] \operatorname{sh} a$

$[a>0].$ БХ [162] (25)

12. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m} x \cos (2mx) \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^m \pi}{2^{2m+1}a} (1-e^{-2a})^{2m} \quad [a>0].$

БХ [162] (26)

13 $\int\limits_0^\infty \sin^{2m} x \cos [(2m+2)x] \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^m \pi}{2^{2m+1}a} e^{-2a} (1-e^{-2a})^{2m}$

$[a>0].$ БХ [162] (27)

14. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m} x \cos 4mx \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^m \pi}{2a} e^{-4ma} \operatorname{sh}^{2m} a \quad [a>0].$ БХ [162] (28)

15. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m+1} x \cos x \frac{dx}{x} = \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$ ГХ [333] (15)

16. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m+1} x \cos x \frac{dx}{x^3} = \frac{(2m-3)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$ ГХ [333] (15b)

17. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m-1} x \cos [(2m-1)x] \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^m \pi}{2^{2m}} [(1-e^{-2a})^{2m-1} - 1]$

$[a>0].$ БХ [162] (23)

18. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m+1} x \cos 2mx \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^{m-1} \pi}{2^{2m+2}} e^{-a} [(1-e^{-2a})^{2m+1} - 1]$

$[a>0].$ БХ [162] (29)

19 $\int\limits_0^\infty \sin^{2m-1} x \cos [(2m+1)x] \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{(-1)^m \pi}{2^{2m}} e^{-2a} (1-e^{-2a})^{2m-1}$

$[a>0].$ БХ [162] (24)

20. $\int\limits_0^\infty \sin^{2m+1} x \cos [2(2m+1)x] \frac{x\,dx}{a^2+x^3} = \frac{(-1)^{m-1} \pi}{2} e^{-2(2m+1)a} \operatorname{sh}^{2m+1} a$

$[a>0].$ БХ [162] (30)

21. $\int\limits_0^\infty \cos^m x \sin mx \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2^{m+1} a} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} [e^{-2ka} \operatorname{Ei}(2ka) - e^{2ka} \operatorname{Ei}(-2ka)]$

$[a>0].$ БХ [163] (8)

22. $\int\limits_0^\infty \cos^n sx \sin nsx \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{n+1}} [(1+e^{-2as})^n - 1].$ БХ [163] (9)

23. $\int\limits_0^\infty \cos^n sx \sin nsx \frac{x\,dx}{a^2-x^2} = \frac{\pi}{2} (2^{-n} - \cos^n as \cos nas).$ БХ [166] (10)

24. $\int\limits_0^\infty \cos^{m-1} x \sin [(m+1)x] \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2^m} e^{-2a} (1+e^{-2a})^{m-1} \quad [a>0].$

БХ [163] (6)

25. $\int\limits_0^\infty \cos^m x \sin [(m+1)x] \frac{x\,dx}{a^2+x^3} = \frac{\pi}{2^{m+1}} e^{-a} (1+e^{-2a})^m$

$[a>0].$ БХ [163] (10)

26. $\int\limits_0^\infty \cos^m x \sin [(m-1)x] \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{m+1}} e^{a} (1+e^{-2a})^m$

$[a>0].$ БХ [163] (7)

27. $\int\limits_0^\infty \cos^m x \sin(3mx) \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-3a} \operatorname{ch}^m a \quad [a>0].$ БХ [163] (11)

28. $\int\limits_0^\infty \cos^n sx \cos nsx \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{n+1}a}(1+e^{-2as})^n.$ БХ [163] (16)

29. $\int\limits_0^\infty \cos^n sx \cos nsx \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{\pi}{2a}\cos^n as \sin nas.$ БХ [166] (11)

30. $\int\limits_0^\infty \cos^{m-1} x \cos[(m+1)x] \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2^m a} e^{-2a}(1+e^{-2a})^{m-1}$

$[a>0].$ БХ [163] (14)

31. $\int\limits_0^\infty \cos^m x \cos[(m-1)x] \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{m+1}a} e^{a}(1+e^{-2a})^m$

$[a>0].$ БХ [163] (15)

32. $\int\limits_0^\infty \cos^m x \cos[(m+1)x] \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2^{m+1}a} e^{-a}(1+e^{-2a})^m$

$[a>0].$ БХ [163] (17)

33. $\int\limits_0^\infty \sin^p x \cos x \frac{dx}{x^q} = \frac{p}{q-1}\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{p-1} x}{x^{q-1}}\,dx - \frac{p+1}{q-1}\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{p+1} x}{x^{q-1}}\,dx \quad [p>q-1>0];$

$= \frac{p(p-1)}{(q-1)(q-2)}\int\limits_0^\infty \sin^{p-2} x \cos x \frac{dx}{x^{q-2}} -$

$- \frac{(p+1)^2}{(q-1)(q-2)}\int\limits_0^\infty \sin^p x \cos x \frac{dx}{x^{q-2}} \quad [p>q-1>1].$ ГХ [333] (18)

34. $\int\limits_0^\infty \cos^{2m} x \cos 2nx \sin x \frac{dx}{x} = \int\limits_0^\infty \cos^{2m-1} x \cos 2nx \sin x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{2m+1}}\binom{2m}{m+n}.$

БХ [152] (5 и 6)

35. $\int\limits_0^\infty \cos^p ax \sin bx \cos x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \quad [b>ap,\ p>-1].$ БХ [153] (12)

36. $\int\limits_0^\infty \cos^p ax \sin pax \cos x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2^{p+1}}(2^p-1) \quad [p>-1].$ БХ [153] (2)

37 $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2}\prod_{k=1}^{n} \cos^{p_k} a_k x \cdot \sin bx \sin x = \frac{\pi}{2}$

$\left[b>\sum_{k=1}^{n} a_k p_k;\ a_k>0,\ p_k>0\right].$ БХ [157] (15)

3.833

1 $$\int_0^\infty \sin^{2m+1} x \cos^{2n} x \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \sin^{2m+1} x \cos^{2n-1} x \frac{dx}{x} = \frac{(2m-1)!!\,(2n-1)!!}{2^{m+n+1}\,(m+n)!}\,\pi$$

БХ [151] (24), БХ [151] (25)

$$= \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right).$$ ГХ [333] (24)

2 $$\int_0^\infty \sin^{2m+1} 2x \cos^{2n-1} 2x \cos^2 x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2m-1)!!\,(2n-1)!!}{(2m+2n)!!}.$$ Ли [152] (4)

3.834

1 $$\int_0^\infty \frac{\sin^{2m+1} x}{1-2a\cos x+a^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{(-1)^m \pi (1+a)^{4m}}{2^{2m+2} a^{2m+1}} \left\{\left|\frac{1-a}{1+a}\right|^{2m-1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{m-\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{4a}{(1+a)^2}\right)^k\right\} \quad [|a| \neq 1].$$ ГХ [333] (62а)

2 $$\int_0^\infty \frac{\sin^{2m+1} x \cos^n x}{(1-2a\cos x+a^2)^p}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{n!\,\pi}{2^{n+1}(2m+n+1)!\,(1+a)^{2p}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2m+2n-2k+1)!!\,(2m+2k-1)!!}{k!\,(n-k)!} \times$$

$$\times F\left(m+n-k+\frac{3}{2}, p; 2m+n+2; \frac{4a}{(1+a)^2}\right) \quad [a \neq \pm 1]$$ ГХ [333] (62)

3.835

1 $$\int_0^\infty \frac{\cos^{2m} x \cos 2mx \sin x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\,\frac{b^{2m-1}}{a(a+b)^{2m}} \quad [ab>0].$$ БХ [182] (31) и

2 $$\int_0^\infty \frac{\cos^{2m-1} x \cos 2mx \sin x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2a}\,\frac{b^{2m-1}}{(a+b)^{2m}} \quad [ab>0].$$ БХ [182] (32) и

3.836

1 $$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \frac{\sin mx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad [m \geqslant n].$$ Ли [159] (12)

2 $$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \cos mx\,dx = \frac{n\pi}{2^n} \sum_{0<k<\frac{m+n}{2}} \frac{(-1)^k (n+m-2k)^{n-1}}{k!\,(n-k)!} \quad [0<m<n];$$

$$= 0 \quad [m \geqslant n] \quad [n \geqslant 2].$$ БХ [159] (14), ИП I 20 (11)

3 $$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n-1} \sin nx \cos x\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$ БХ [159] (20)

4. $$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \frac{\sin(anx)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}n!}\sum_{0\leqslant k<\frac{n}{2}(1-a)}(-1)^k\binom{n}{k}(n-an-2k)^n\right] \quad [0<a\leqslant 1].$$ Ло V 341 (15)

5. $$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \cos(anx)\,dx = \frac{\pi}{2^n}\sum_{0\leqslant k<(1\pm a)\frac{n}{2}}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\Gamma(n\pm an-2k+1)}{(n-1)!\,\Gamma(2\pm an-2k)}$$

$[0<a\leqslant 1$, знак в двучленах $1\pm a$, $2\pm an$ можно выбрать произвольный, но одинаковый во всей формуле]. Ло V 340 (14)

3.837

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\,dx}{\sin^2 x} = \pi\ln 2.$$ БХ [206] (9)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2\,dx}{\sin^2 x} = -\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}\ln 2+G = 0{,}8435118417\ldots$$ БХ [204] (10)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2\,dx}{\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}\ln 2-G.$$ ГХ [333] (35а)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^{p+1}}{\sin^2 x}\,dx = -\left(\frac{\pi}{4}\right)^{p+1}+(p+1)\left(\frac{\pi}{4}\right)^p\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{4^{2k-1}(p+2k)}\zeta(2k)\right\}$$ $[p>0]$. Ли [204] (14)

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\cos x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{\pi^2}{4}+4G = 1{,}1964612764\ldots$$ БХ [206] (7)

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^3\cos x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{\pi^3}{16}+\frac{3}{2}\pi\ln 2.$$ БХ [206] (8)

7. $$\int_0^\infty \frac{\cos 2nx}{\cos x}\sin^{2n} x\,\frac{dx}{x^m} = 0 \quad \left[n>\frac{m-1}{2},\ m>0\right].$$ БХ [180] (16)

8. $$\int_0^\infty \frac{\cos 2nx}{\cos x}\sin^{2n+1} x\,\frac{dx}{x^m} = 0 \quad \left[n>\frac{m-2}{2},\ m>0\right].$$ БХ [180] (17)

9. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\cos ax \cos[a(1-x)]} = \frac{1}{a}\operatorname{cosec} a \cdot \ln \sec a \quad \left[a < \frac{\pi}{2}\right].$ БХ [149] (20)

3.838

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos^{p-1} x}{\sin^{p+1} x}\,dx = \frac{\pi}{2p}\sec\frac{\pi p}{2} \qquad [p < 1].$ БХ [206] (13)*u*

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin^{p-1} x}{\cos^{p+1} x}\,dx = \frac{\pi}{4p} - \frac{1}{2p}\,\beta\left(\frac{p+1}{2}\right) \qquad [p > -1].$ Ли [204] (15)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin^{2m-1} x}{\cos^{2m+1} x}\,dx = \frac{\pi}{8m}(1-\cos m\pi) + \frac{1}{2m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{k-1}}{2m-2k-1}.$ БХ [204] (17)

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin^{2m} x}{\cos^{2m+2} x}\,dx = \frac{1}{2(2m+1)}\left[\frac{\pi}{2} + (-1)^{m-1}\ln 2 + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{k-1}}{m-k}\right].$

БХ [204] (16)

3.839

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2}\ln 2.$ БХ [204] (3)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^3 x\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\ln 2 - \frac{1}{2}G.$ БХ [204] (7)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{16}$ (сравни 3.839 1.). БХ [204] (13)

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{16} + G\right)$

(сравни 3.839 2.). БХ [204] (12)

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^p x \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\pi}{2^{p+1}p}\cdot\frac{\Gamma(p+1)}{\left[\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\right]^2} \qquad [p > -1].$ БХ [205] (3)

6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^p x \operatorname{ctg} x\,dx = \frac{\pi}{2p} - \frac{2^{p-1}}{p}\,\mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2}, \frac{p+1}{2}\right)$

$[p > -1].$ БХ [206] (11)

7. $\int\limits_0^\infty \sin^{2n} x \operatorname{tg} x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. ГХ [333] (16)

8. $\int\limits_0^\infty \cos^s rx \operatorname{tg} qx \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad [s > -1]$. БХ [151] (26)

9. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos[(2n-1)x]}{\cos x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2n} dx = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}-1}{(2n)!} \cdot 2^{2n-1}\pi \, |B_{2n}|$.

БХ [180] (15)

10. $\int\limits_0^\infty \operatorname{tg}^r px \frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2q} \sec \frac{r\pi}{2} \operatorname{th}^r pq \qquad [r^2 < 1]$. БХ [160] (19)

3.84 Интегралы, содержащие выражения $\sqrt{1-k^2\sin^2 x}$, $\sqrt{1-k^2\cos^2 x}$ и сходные с ними

3.841

1. $\int\limits_0^\infty \sin x \sqrt{1-k^2\sin^2 x} \frac{dx}{x} = \boldsymbol{E}(k)$. БХ [154] (8)

2. $\int\limits_0^\infty \sin x \sqrt{1-k^2\cos^2 x} \frac{dx}{x} = \boldsymbol{E}(k)$. БХ [154] (20)

3. $\int\limits_0^\infty \operatorname{tg} x \sqrt{1-k^2\sin^2 x} \frac{dx}{x} = \boldsymbol{E}(k)$. БХ [154] (9)

4 $\int\limits_0^\infty \operatorname{tg} x \sqrt{1-k^2\cos^2 x} \frac{dx}{x} = \boldsymbol{E}(k)$. БХ [154] (21)

3.842

1 $$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \frac{dx}{x} = \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \frac{dx}{x} = \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \frac{dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{K}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

БХ [183] (4), БХ [183] (5), БХ [183] (9), БХ [183] (10)

2. $\int\limits_u^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x \, dx}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2 u}} = \frac{\pi}{2} \ln(1+\cos u)$. БХ [226] (4)

3. $$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \frac{dx}{x} = \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \frac{dx}{x} =$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\frac{dx}{x}=\int_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\frac{dx}{x}=\boldsymbol{K}(k).$$

БХ [183] (12), БХ [183] (13), БХ [183] (21), БХ [183] (22)

4 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x\cos x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}dx=\frac{1}{2k^2}[-\pi k'+2\boldsymbol{E}(k)].$ БХ [211] (1)

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x\cos x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}dx=\frac{1}{2k^2}[\pi-2\boldsymbol{E}(k)].$ БХ [214] (1)

6. $\int\limits_0^{\alpha} \frac{x\sin x\,dx}{\cos^2 x\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2 x}}=\frac{\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha}.$ Ло III 284

7. $\int\limits_0^{\beta} \frac{x\sin x\,dx}{(1-\sin^2\alpha\sin^2 x)\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2 x}}=\frac{\pi\ln\dfrac{\cos\alpha+\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\beta}}{2\cos\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{2\cos\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\beta}}.$

Ло III 284

3.843

1. $\int\limits_0^\infty \operatorname{tg} x\sqrt{1-k^2\sin^2 2x}\,\frac{dx}{x}=\boldsymbol{E}(k).$ БХ [154] (10)

2. $\int\limits_0^\infty \operatorname{tg} x\sqrt{1-k^2\cos^2 2x}\,\frac{dx}{x}=\boldsymbol{E}(k).$ БХ [154] (22)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\sin^2 2x}}\frac{dx}{x}=\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}\frac{dx}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{K}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

БХ [183] (6), БХ [183] (11)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 2x}}\frac{dx}{x}=\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 2x}}\frac{dx}{x}=\boldsymbol{K}(k).$

БХ [183] (14), БХ [183] (23)

3.844

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\frac{dx}{x}=\frac{1}{k^2}[\boldsymbol{K}(k)-\boldsymbol{E}(k)].$ БХ [185] (20)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x\cos^2 x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\frac{dx}{x}=\frac{1}{k^2}[\boldsymbol{K}(k)-\boldsymbol{E}(k)].$ БХ [185] (21)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x\cos^3 x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\frac{dx}{x}=\frac{1}{3k^4}[(2+k^2)\boldsymbol{K}(k)-2(1+k^2)\boldsymbol{E}(k)].$

БХ [185] (22)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x \cos^4 x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{3k^4}[(2+k^2)\boldsymbol{K}(k) - 2(1+k^2)\boldsymbol{E}(k)].$

БХ [185] (23)

5. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x \cos x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{3k^4}[(1+k'^2)\boldsymbol{E}(k) - 2k'^2\boldsymbol{K}(k)].$ БХ [185] (24)

6. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{3k^4}[(1+k'^2)\boldsymbol{E}(k) - 2k'^2\boldsymbol{K}(k)].$ БХ [185] (25)

7. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{k^2}[\boldsymbol{E}(k) - k'^2\boldsymbol{K}(k)].$ БХ [184] (16)

8. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^4 x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{3k^4}[(2+3k^2)k'^2\boldsymbol{K}(k) - 2(k'^2-k^2)\boldsymbol{E}(k)].$

БХ [184] (18)

3.845

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \sqrt{2}\left[\boldsymbol{E}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\boldsymbol{K}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$ БХ [185] (6)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x \cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \sqrt{2}\left[\boldsymbol{E}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\boldsymbol{K}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$ БХ [185] (7)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \sqrt{2}\left[\boldsymbol{K}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \boldsymbol{E}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$ БХ [184] (8)

3.846

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{k^2}[\boldsymbol{E}(k) - k'^2\boldsymbol{K}(k)].$ БХ [185] (9)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x \cos^2 x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{k^2}[\boldsymbol{E}(k) - k'^2\boldsymbol{K}(k)].$ БХ [185] (10)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x \cos^3 x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{3k^4}[(2-3k^2)k'^2\boldsymbol{K}(k) - 2(k'^2-k^2)\boldsymbol{E}(k)].$

БХ [185] (11)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x \cos^4 x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{3k^4}[(2-3k^2)k'^2\boldsymbol{K}(k) - 2(k'^2-k^2)\boldsymbol{E}(k)].$

БХ [185] (12)

5. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x \cos x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{3k^4}[(1+k'^2)\boldsymbol{E}(k) - 2k'^2\boldsymbol{K}(k)].$ БХ [185] (13)

6. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{3k^4}\left[(1+k'^2)\boldsymbol{E}(k) - 2k'^2\boldsymbol{K}(k)\right].$ БХ [185] (14)

7. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{k^2}\left[\boldsymbol{K}(k) - \boldsymbol{E}(k)\right].$ БХ [184] (9)

8. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^4 x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{3k^4}\left[(2+k^2)\boldsymbol{K}(k) - 2(1+k^2)\boldsymbol{E}(k)\right].$

БХ [184] (11)

3.847 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x \cos^2 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot \frac{dx}{x} = \sqrt{2}\left[\boldsymbol{K}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \boldsymbol{E}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$

БХ [185] (3 и 4)

3.848

1 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x \cos x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 2x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{4k^2}\left[\boldsymbol{K}(k) - \boldsymbol{E}(k)\right].$ БХ [185] (15)

2 $\int\limits_0^\infty \frac{\cos^2 2x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 2x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{k^2}\left[\boldsymbol{E}(k) - k'^2\boldsymbol{K}(k)\right].$ БХ [184] (12)

3 $\int\limits_0^\infty \frac{\cos^4 2x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 2x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{3k^4}\left[(2-3k^2)k'^2\boldsymbol{K}(k) - 2(k'^2-k^2)\boldsymbol{E}(k)\right].$

БХ [184] (13)

4 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 4x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 2x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{4}{3k^4}\left[(1+k'^2)\boldsymbol{E}(k) - 2k'^2\boldsymbol{K}(k)\right].$ БХ [184] (17)

5 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x \cos x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 2x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{4k^2}\left[\boldsymbol{E}(k) - k'^2\boldsymbol{K}(k)\right].$ БХ [185] (26)

6 $\int\limits_0^\infty \frac{\cos^2 2x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 2x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{k^2}\left[\boldsymbol{K}(k) - \boldsymbol{E}(k)\right].$ БХ [184] (19)

7. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos^4 2x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 2x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{3k^4}\left[(2+k^2)\boldsymbol{K}(k) - 2(1+k^2)\boldsymbol{E}(k)\right].$

БХ [184] (20)

3.849

1 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\boldsymbol{K}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \boldsymbol{E}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$ БХ [185] (8)

2 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x \cos x}{\sqrt{1+\sin^2 2x}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left[2\boldsymbol{E}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \boldsymbol{K}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$ БХ [185] (5)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos^2 2x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\sin^2 2x}} \cdot \frac{dx}{x} = \sqrt{2}\left[\boldsymbol{K}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \boldsymbol{E}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$ БХ [184] (7)

3.85—3.88 Тригонометрические функции от более сложных аргументов и степенная функция

3.851

1. $\int\limits_0^\infty x \sin(ax^2) \sin(2bx)\, dx = \frac{b}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(\cos\frac{b^2}{a} + \sin\frac{b^2}{a}\right)$

$[a > 0,\ b > 0].$ БХ [150] (4)

2. $\int\limits_0^\infty x \sin(ax^2) \cos(2bx)\, dx =$

$= \frac{1}{2a} - \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left[\sin\frac{b^2}{a} C\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \cos\frac{b^2}{a} S\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right].$ БХ [150] (5) и

3. $\int\limits_0^\infty x \cos(ax^2) \sin(2bx)\, dx = \frac{b}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(\sin\frac{b^2}{a} - \cos\frac{b^2}{a}\right)$

$[a > 0,\ b > 0]$, (сравни 3.691 7.). БХ [150] (7)

4. $\int\limits_0^\infty x \cos(ax^2) \cos(2bx)\, dx =$

$= \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left[\cos\frac{b^2}{a} C\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right) + \sin\frac{b^2}{a} S\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right]$ БХ [150] (6) и

5. $\int\limits_0^\infty \sin(ax^2) \cos(bx) \frac{dx}{x^2} = \frac{b\pi}{2}\left\{S\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right) - C\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right) + \right.$

$\left. + \sqrt{a\pi}\sin\left(\frac{b^2}{4a} + \frac{\pi}{4}\right)\right\}$ $[a > 0,\ b > 0]$, (сравни 3.691 7.).

ИП I 23 (3) и

3.852

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(ax^2)}{x^2}\, dx = \sqrt{\frac{a\pi}{2}}.$ БХ [177] (10) и

2. $\int\limits_0^\infty \sin(ax^2) \cos(bx^2) \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}\right)$ $[a > b > 0];$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi a}$ $[b = a \geqslant 0];$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{b-a}\right)$ $[b > a > 0]$,

(сравни 3.852 1.). БХ [177] (23)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2(a^2x^2)}{x^4}\, dx = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} a^3$ $[a \geqslant 0].$ ГХ [333] (19е)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3(a^2x^2)}{x^2}\,dx = \frac{3-\sqrt{3}}{8}\sqrt{\pi}a \qquad [a \geqslant 0].$ ГХ [333] (19g)

5. $\int\limits_0^\infty (\sin x^2 - x^2\cos x^2)\frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$ БХ [178] (8)

6. $\int\limits_0^\infty \left\{\cos x^2 - \frac{1}{1+x^2}\right\}\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}C.$ БХ [173] (22)

3.853

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(ax^2)}{\beta^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2\beta}\left[\sqrt{2}\sin\left(a\beta^2+\frac{\pi}{4}\right)C\left(\sqrt{a}\,\beta\right) - \right.$

$\left. -\sqrt{2}\cos\left(a\beta^2+\frac{\pi}{4}\right)S\left(\sqrt{a}\,\beta\right) - \sin(a\beta^2)\right] \quad [a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0].$ ИПІІ 219 (33) и

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos(ax^2)}{\beta^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2\beta}\left[\cos(a\beta^2) - \sqrt{2}\cos\left(a\beta^2+\frac{\pi}{4}\right)C\left(\sqrt{a}\,\beta\right) - \right.$

$\left. -\sqrt{2}\sin\left(a\beta^2+\frac{\pi}{4}\right)S\left(\sqrt{a}\,\beta\right)\right] \qquad [a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0].$ ИПІІ 221 (51) и

3. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2\sin(ax^2)}{\beta^2+x^2}\,dx = \frac{\beta\pi}{2}\left[\sin(a\beta^2) - \sqrt{2}\sin\left(a\beta^2+\frac{\pi}{4}\right)C\left(\sqrt{a}\,\beta\right) + \right.$

$\left. +\sqrt{2}\cos\left(a\beta^2+\frac{\pi}{4}\right)S\left(\sqrt{a}\,\beta\right)\right] - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}} \quad [a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0].$ ИПІІ 219 (32) и

4. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2\cos(ax^2)}{\beta^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}} - \frac{\beta\pi}{2}\left[\cos(a\beta^2) - \right.$

$\left. -\sqrt{2}\cos\left(a\beta^2+\frac{\pi}{4}\right)C\left(\sqrt{a}\,\beta\right) - \sqrt{2}\sin\left(a\beta^2+\frac{\pi}{4}\right)S\left(\sqrt{a}\,\beta\right)\right]$

$[a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0].$ ИПІІ 221 (50) и

3.854

1. $\int\limits_0^\infty (\cos(ax^2) - \sin(ax^2))\frac{dx}{x^4+b^4} = \frac{\pi e^{-ab^2}}{2b^3\sqrt{2}} \qquad [a>0,\ b>0].$

Ли [178] (11) и, БХ [168] (25)

2. $\int\limits_0^\infty (\cos(ax^2) + \sin(ax^2))\frac{x^2\,dx}{x^4+b^4} = \frac{\pi e^{-ab^2}}{2b\sqrt{2}} \qquad [a>0,\ b>0].$

Ли [178] (12)

3. $\int\limits_0^\infty (\cos(ax^2) + \sin(ax^2))\frac{x^2\,dx}{(x^4+b^4)^2} = \frac{\pi e^{-ab^2}}{4\sqrt{2}b^3}\left(a+\frac{1}{2b^2}\right)$

$[a>0,\ b>0].$ Ли [178] (14)

4. $\int\limits_0^\infty (\cos(ax^2) - \sin(ax^2))\frac{x^4\,dx}{(x^4+b^4)^2} = \frac{\pi e^{-ab^2}}{4\sqrt{2}b}\left(\frac{1}{2b^2}-a\right)$

$[a>0,\ b>0].$ БХ [178] (15)

3.855

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax^2)}{\sqrt{\beta^2+x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a\pi}{2}}\, I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a\beta}{2}\right) K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a\beta}{2}\right)$$
$[a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0]$. ИП I 66 (28)

2. $$\int_0^\infty \frac{\cos(ax^2)}{\sqrt{\beta^2+x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a\pi}{2}}\, I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{a\beta}{2}\right) K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a\beta}{2}\right) \qquad [a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0].$$
ИП I 9 (22)

3. $$\int_0^u \frac{\sin(a^2x^2)}{\sqrt{u^4-x^4}}\,dx = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{\pi^3}{2}}\left[J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2u^2}{2}\right)\right]^2 \qquad [a>0].$$
ИП I 66 (29)

4. $$\int_u^\infty \frac{\sin(a^2x^2)}{\sqrt{x^4-u^4}}\,dx = -\frac{a}{4}\sqrt{\frac{\pi^3}{2}}\, J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2u^2}{2}\right) N_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2u^2}{2}\right) \qquad [a>0].$$
ИП I 66 (30)

5. $$\int_0^u \frac{\cos(a^2x^2)}{\sqrt{u^4-x^4}}\,dx = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{\pi^3}{2}}\left[J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2u^2}{2}\right)\right]^2.$$
ИП I 9 (23)

6. $$\int_u^\infty \frac{\cos(a^2x^2)}{\sqrt{x^4-u^4}}\,dx = -\frac{a}{4}\sqrt{\frac{\pi^3}{2}}\, J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2u^2}{2}\right) N_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2u^2}{2}\right).$$
ИП I 10 (24)

3.856

1. $$\int_0^\infty \frac{\left(\sqrt{\beta^4+x^4}+x^2\right)^\nu}{\sqrt{\beta^4+x^4}}\sin(a^2x^2)\,dx = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\beta^{2\nu} I_{\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2\beta^2}{2}\right) K_{\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2\beta^2}{2}\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2},\ |\arg\beta|<\frac{\pi}{4}\right]$. ИП I 71 (23)

2. $$\int_0^\infty \frac{\left(\sqrt{\beta^4+x^4}+x^2\right)^\nu}{\sqrt{\beta^4+x^4}}\cos(a^2x^2)\,dx = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\beta^{2\nu} I_{-\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2\beta^2}{2}\right) K_{-\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2\beta^2}{2}\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2},\ |\arg\beta|<\frac{\pi}{4}\right]$. ИП I 12 (16)

3. $$\int_0^\infty \frac{\left(\sqrt{\beta^4+x^4}-x^2\right)^\nu}{\sqrt{\beta^4+x^4}}\cos(a^2x^2)\,dx = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\beta^{2\nu} I_{-\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2\beta^2}{2}\right) K_{-\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2\beta^2}{2}\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2},\ |\arg\beta|<\frac{\pi}{4}\right]$. ИП I 12 (17)

4. $$\int_0^\infty \frac{\sin(a^2x^2)\,dx}{\sqrt{\beta^4+x^4}\sqrt{x^2+\sqrt{\beta^4+x^4}}}=\frac{\operatorname{sh}\frac{a^2\beta^2}{2}}{\sqrt{2}\beta^2}K_0\left(\frac{a^2\beta^2}{2}\right) \qquad \left[|\arg\beta|<\frac{\pi}{4}\right].$$

74 ИП I 66(32)

5 $$\int_0^\infty \frac{\cos(a^2x^2)\,dx}{\sqrt{\beta^4+x^4}\sqrt{(x^2+\sqrt{\beta^4+x^4})^3}}=\frac{\operatorname{sh}\frac{a^2\beta^2}{2}}{2\sqrt{2}\beta^4}K_1\left(\frac{a^2\beta^2}{2}\right) \qquad \left[|\arg\beta|<\frac{\pi}{4}\right].$$

ИП I 10(27)

6 $$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\sqrt{\beta^4+x^4}+x^2}}{\sqrt{\beta^4+x^4}}\sin(a^2x^2)\,dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{a^2\beta^2}{2}}I_0\left(\frac{a^2\beta^2}{2}\right)$$

$\left[|\arg\beta|<\frac{\pi}{4}\right]$, ИП I 67(33)

3.857

1. $$\int_0^\infty \frac{x^2}{R_1R_2}\sqrt{\frac{R_2-R_1}{R_2+R_1}}\sin(ax^2)\,dx=\frac{1}{2\sqrt{b}}K_0(ac)\sin ab$$

$$\left[R_1=\sqrt{c^2+(b-x^2)^2},\quad R_2=\sqrt{c^2+(b+x^2)^2},\quad a>0,\ c>0\right].$$

ИП I 67(34)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^2}{R_1R_2}\sqrt{\frac{R_2+R_1}{R_2-R_1}}\cos(ax^2)\,dx=\frac{1}{2\sqrt{b}}K_0(ac)\cos ab$$

$$\left[R_1=\sqrt{c^2+(b-x^2)^2},\quad R_2=\sqrt{c^2+(b+x^2)^2},\quad a>0,\ c>0\right].$$

ИП I 10(26)

3.858

1. $$\int_u^\infty \frac{(x^2+\sqrt{x^4-u^4})^\nu+(x^2-\sqrt{x^4-u^4})^\nu}{\sqrt{x^4-u^4}}\sin(a^2x^2)\,dx=$$

$$=-\frac{a}{4}\sqrt{\frac{\pi^2}{2}}u^{2\nu}\left[J_{\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2u^2}{2}\right)N_{\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2u^2}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+J_{\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2u^2}{2}\right)N_{\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2u^2}{2}\right)\right] \qquad \left[\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}\right].$$

ИП I 71(25)

2. $$\int_u^\infty \frac{(x^2+\sqrt{x^4-u^4})^\nu+(x^2-\sqrt{x^4-u^4})^\nu}{\sqrt{x^4-u^4}}\cos(a^2x^2)\,dx=$$

$$=-\frac{a}{4}\sqrt{\frac{\pi^3}{2}}u^{2\nu}\left[J_{-\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2u^2}{2}\right)N_{-\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2u^2}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+J_{-\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2u^2}{2}\right)N_{-\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2u^2}{2}\right)\right] \qquad \left[\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}\right].$$

ИП I 13(26)

3.859 $$\int_0^\infty \left[\cos(x^{2^n})-\frac{1}{1+x^{2^{n+1}}}\right]\frac{dx}{x}=-\frac{1}{2^n}C.$$ БХ[173](24)

3.861

1. $$\int_0^\infty \sin^{2n+1}(ax^2)\frac{dx}{x^{2m}} = \pm\frac{\sqrt{\pi}\,a^{m-\frac{1}{2}}}{2^{2n-m+\frac{1}{2}}(2m-1)!!}\times \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{2n+1}{n+k}(2k-1)^{m-\frac{1}{2}}$$

[знак $+$ берется при $m\equiv 0 \pmod 4$ или $m\equiv 1 \pmod 4$, знак $-$ берется при $m\equiv 2 \pmod 4$ или $m\equiv 3 \pmod 4$].

БХ [177] (19) *и*

2. $$\int_0^\infty \sin^{2n}(ax^2)\frac{dx}{x^{2m}} = \pm\frac{\sqrt{\pi}\,a^{m-\frac{1}{2}}}{2^{2n-2m+1}(2m-1)!!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{2n}{n+k}k^{m-\frac{1}{2}}$$

[знак $+$ берется при $m\equiv 0 \pmod 4$ или $m\equiv 3 \pmod 4$, знак $-$ берется при $m\equiv 2 \pmod 4$ или $m\equiv 1 \pmod 4$].

БХ [177] (18) *и*, Ли [177] (18)

3.862 $$\int_0^\infty \left[\cos\left(ax^2\sqrt{n}\right)+\sin\left(ax^2\sqrt{n}\right)\right]\left(\frac{\sin x^2}{x^2}\right)^n dx = \frac{\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(n-2k+a\sqrt{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} \quad \left[a>\sqrt{n}>0\right].$$

БХ [178] (9)

3.863

1. $$\int_0^\infty x^2\cos(ax^4)\sin(2bx^2)\,dx = -\frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{b^3}{a^2}}\left[\sin\left(\frac{b^2}{2a}-\frac{\pi}{8}\right)J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{2a}\right)+\cos\left(\frac{b^2}{2a}-\frac{\pi}{8}\right)J_{\frac{3}{4}}\left(\frac{b^2}{2a}\right)\right] \quad [a>0,\quad b>0].$$ ИП I 25 (22)

2. $$\int_0^\infty x^2\cos(ax^4)\cos(2bx^2)\,dx = -\frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{b^3}{a^3}}\left[\sin\left(\frac{b^2}{2a}+\frac{\pi}{8}\right)J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{b^2}{2a}\right)+\cos\left(\frac{b^2}{2a}+\frac{\pi}{8}\right)J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{2a}\right)\right] \quad [a>0,\ b>0].$$ ИП I 25 (23)

3.864

1. $$\int_0^\infty \sin\frac{b}{x}\sin ax\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}N_0\left(2\sqrt{ab}\right)+K_0\left(2\sqrt{ab}\right) \qquad [a>0,\ b>0].$$

В 204 (3) *и*

2. $$\int_0^\infty \cos\frac{b}{x}\cos ax\frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2}N_0\left(2\sqrt{ab}\right)+K_0\left(2\sqrt{ab}\right) \qquad [a>0, \quad b>0].$$

В 204 (4) *и*, ИП I 24 (12)

3.865

1. $$\int_0^u \frac{(u^2-x^2)^{\mu-1}}{x^{2\mu}}\sin\frac{a}{x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2}{a}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} u^{\mu-\frac{3}{2}}\Gamma(\mu) J_{\frac{1}{2}-\mu}\left(\frac{a}{u}\right)$$

$[a>0,\ u>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<1]$. ИП II 189 (30)

2. $$\int_u^\infty \frac{(x-u)^{\mu-1}}{x^{2\mu}}\sin\frac{a}{x}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{u}}\,a^{\frac{1}{2}-\mu}\Gamma(\mu)\sin\frac{a}{2u}J_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2u}\right)$$

$[a>0,\ u>0,\ \operatorname{Re}\mu>0]$. ИП II 203 (21)

3. $$\int_0^u \frac{(u^2-x^2)^{\mu-1}}{x^{2\mu}}\cos\frac{a}{x}\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2}{a}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}\Gamma(\mu)\,u^{\mu-\frac{3}{2}} N_{\frac{1}{2}-\mu}\left(\frac{a}{u}\right)$$

$[a>0,\ u>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<1]$. ИП II 190 (36)

4. $$\int_u^\infty \frac{(x-u)^{\mu-1}}{x^{2\mu}}\cos\frac{a}{x}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{u}}\,a^{\frac{1}{2}-\mu}\Gamma(\mu)\cos\frac{a}{2u}J_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2u}\right)$$

$[a>0,\ u>0,\ \operatorname{Re}\mu>0]$. ИП II 204 (26)

3.866

1. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}\sin\frac{b^2}{x}\sin(a^2x)\,dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^\mu \operatorname{cosec}\frac{\mu\pi}{2}\times$$
$$\times\left[J_\mu(2ab)-J_{-\mu}(2ab)+I_{-\mu}(2ab)-I_\mu(2ab)\right]$$

$[a>0,\ b>0,\ |\operatorname{Re}\mu|<1]$. В 203 (1) *и*, ИП I 322 (42)

2. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}\sin\frac{b^2}{x}\cos(a^2x)\,dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^\mu \sec\frac{\mu\pi}{2}\times$$
$$\times\left[J_\mu(2ab)+J_{-\mu}(2ab)+I_\mu(2ab)-I_{-\mu}(2ab)\right]$$

$[a>0,\ b>0,\ |\operatorname{Re}\mu|<1]$. ИП I 322 (43)

3. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}\cos\frac{b^2}{x}\cos(a^2x)\,dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^\mu \operatorname{cosec}\frac{\mu\pi}{2}\times$$
$$\times\left[J_{-\mu}(2ab)-J_\mu(2ab)+I_{-\mu}(2ab)-I_\mu(2ab)\right]$$

$[a>0,\ b>0,\ |\operatorname{Re}\mu|<1]$. В 204 (2) *и*, ИП I 322 (44)

3.867

1. $$\int_0^1 \frac{\cos ax-\cos\frac{a}{x}}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos ax-\cos\frac{a}{x}}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\sin a$$

$[a>0]$. ГХ [334] (7а)

2. $\int\limits_0^1 \frac{\cos ax + \cos \frac{a}{x}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax + \cos \frac{a}{x}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}$ $[a > 0]$.

ГХ [334] (7b)

3.868

1. $\int\limits_0^\infty \sin\left(a^2x + \frac{b^2}{x}\right)\frac{dx}{x} = \pi J_0(2ab)$ $[a > 0,\ b > 0]$.

ГХ [334] (11a), В 200 (16)

2. $\int\limits_0^\infty \cos\left(a^2x + \frac{b^2}{x}\right)\frac{dx}{x} = -\pi N_0(2ab)$. $[a > 0,\ b > 0]$.

ГХ [334] (11a)

3. $\int\limits_0^\infty \sin\left(a^2x - \frac{b^2}{x}\right)\frac{dx}{x} = 0$ $[a > 0,\ b > 0]$. ГХ [334] (11b)

4. $\int\limits_0^\infty \cos\left(a^2x - \frac{b^2}{x}\right)\frac{dx}{x} = 2K_0(2ab)$ $[a > 0,\ b > 0]$. ГХ [334] (11b)

3.869

1. $\int\limits_0^\infty \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right)\frac{x\,dx}{\beta^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\exp\left(-a\beta - \frac{b}{\beta}\right)$

$[a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0]$. ИП II 220 (42)

2. $\int\limits_0^\infty \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right)\frac{dx}{\beta^2+x^2} = \frac{\pi}{2\beta}\exp\left(-a\beta - \frac{b}{\beta}\right)$

$[a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0]$. ИП II 222 (58)

3.871

1. $\int\limits_0^\infty x^{\mu-1}\sin\left[a\left(x + \frac{b^2}{x}\right)\right]dx = \pi b^\mu\left[J_\mu(2ab)\cos\frac{\mu\pi}{2} - N_\mu(2ab)\sin\frac{\mu\pi}{2}\right]$

$[a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\mu < 1]$. ИП I 319 (47)

2. $\int\limits_0^\infty x^{\mu-1}\cos\left[a\left(x + \frac{b^2}{x}\right)\right]dx = -\pi b^\mu\left[J_\mu(2ab)\sin\frac{\mu\pi}{2} + N_\mu(2ab)\cos\frac{\mu\pi}{2}\right]$

$[a > 0,\ b > 0,\ |\operatorname{Re}\mu| < 1]$. ИП I 321 (35)

3. $\int\limits_0^\infty x^{\mu-1}\sin\left[a\left(x - \frac{b^2}{x}\right)\right]dx = 2b^\mu K_\mu(2ab)\sin\frac{\mu\pi}{2}$

$[a > 0,\ b > 0,\ |\operatorname{Re}\mu| < 1]$. ИП I 319 (16)

4. $\int\limits_0^\infty x^{\mu-1}\cos\left[a\left(x - \frac{b^2}{x}\right)\right]dx = 2b^\mu K_\mu(2ab)\cos\frac{\mu\pi}{2}$

$[a > 0,\ b > 0,\ |\operatorname{Re}\mu| < 1]$. ИП I 321 (36)

3.872

1. $$\int_0^1 \sin\left[a\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]\sin\left[a\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\frac{dx}{1-x^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \sin\left[a\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]\sin\left[a\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\frac{dx}{1-x^2}=-\frac{\pi}{4}\sin 2a$$
$[a \geqslant 0]$ БХ [140] (15), ГХ [334] (8a)

2. $$\int_0^1 \cos\left[a\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]\cos\left[a\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\frac{dx}{1+x^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \cos\left[a\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]\cos\left[a\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}e^{-2a}$$
$[a \geqslant 0]$. ГХ [334] (8b)

3.873

1. $$\int_0^\infty \sin\frac{a^2}{x^2}\cos b^2x^2\frac{dx}{x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2a}}\left[\sin(2ab)+\cos(2ab)+e^{-2ab}\right]$$
$[a>0,\ b>0]$. ИП I 24 (15)

2. $$\int_0^\infty \cos\frac{a^2}{x^2}\cos b^2x^2\frac{dx}{x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2a}}\left[\cos(2ab)-\sin(2ab)+e^{-2ab}\right]$$
$[a>0,\ b>0]$. ИП I 24 (16)

3.874

1. $$\int_0^\infty \sin\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\sin\left(2ab+\frac{\pi}{4}\right)$$
$[a>0,\ b>0]$. БХ [179] (6) *и*, ГХ [334] (10a)

2. $$\int_0^\infty \cos\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\cos\left(2ab+\frac{\pi}{4}\right)\qquad [a>0,\ b>0].$$
БХ [179] (8) *и*, ГХ [334] (10a)

3. $$\int_0^\infty \sin\left(a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x^2}=-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2b}}e^{-2ab}$$
$[a \geqslant 0,\ b>0]$. ГХ [334] (10b)

4. $$\int_0^\infty \cos\left(a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2b}}e^{-2ab}\qquad [a \geqslant 0,\ b>0].$$ ГХ [334] (10b)

5. $$\int_0^\infty \sin\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\frac{dx}{x^2}=\frac{\sqrt{2\pi}}{4b}\qquad [a>0,\ b>0].$$ БХ [179] (13) *и*

6. $$\int_0^\infty \cos\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\frac{dx}{x^2}=\frac{\sqrt{2\pi}}{4b}\qquad [a>0,\ b>0].$$ БХ [179] (14) *и*

3.875

1. $$\int_u^\infty \frac{x\sin\left(p\sqrt{x^2-u^2}\right)}{x^2+a^2}\cos bx\,dx = \frac{\pi}{2}\exp\left(-p\sqrt{a^2+u^2}\right)\operatorname{ch} ab$$

$[0 < b < p]$. ИП I 27 (39)

2. $$\int_u^\infty \frac{x\sin\left(p\sqrt{x^2-u^2}\right)}{a^2+x^2-u^2}\cos bx\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ap}\cos\left(b\sqrt{u^2-a^2}\right)$$

$[0 < b < p,\ a > 0]$. ИП I 27 (38)

3. $$\int_0^\infty \frac{\sin\left(p\sqrt{a^2+x^2}\right)}{(a^2+x^2)^2}\cos bx\,dx = \frac{\pi p}{2a}e^{-ab} \qquad [b > a > 0].$$ ИП I 26 (29)

3.876

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin\left(p\sqrt{x^2+a^2}\right)}{\sqrt{x^2+a^2}}\cos bx\,dx = \frac{\pi}{2}J_0\left(a\sqrt{p^2-b^2}\right) \qquad [0 < b < p];$$

$$= 0 \qquad [b > p > 0];$$

$[a > 0]$. ИП I 26 (30)

2. $$\int_0^\infty \frac{\cos\left(p\sqrt{x^2+a^2}\right)}{\sqrt{x^2+a^2}}\cos bx\,dx = -\frac{\pi}{2}N_0\left(a\sqrt{p^2-b^2}\right) \qquad [0 < b < p];$$

$$= K_0\left(a\sqrt{p^2-b^2}\right) \qquad [p > b > 0];$$

$[a > 0]$. ИП I 26 (34)

3. $$\int_0^\infty \frac{\cos\left(p\sqrt{x^2+a^2}\right)}{x^2+c^2}\cos bx\,dx = \frac{\pi}{2c}e^{-bc}\cos\left(p\sqrt{a^2-c^2}\right)$$

$[c > 0,\ b > p]$. ИП I 26 (33)

4. $$\int_0^\infty \frac{\sin\left(p\sqrt{x^2+a^2}\right)}{(x^2+c^2)\sqrt{x^2+a^2}}\cos bx\,dx = \frac{\pi}{2c}\,\frac{e^{-bc}\sin\left(p\sqrt{a^2-c^2}\right)}{\sqrt{a^2-c^2}} \qquad [c \neq a];$$

$$= \frac{\pi}{2}e^{-ba}\frac{p}{a} \qquad [c = a];$$

$[b > p,\ c > 0]$. ИП I 26 (31)и

5. $$\int_0^\infty \frac{\cos\left(p\sqrt{x^2+a^2}\right)}{x^2+a^2}\cos bx\,dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ab} \qquad [b > a > 0].$$ ИП I 27 (35)и

6. $$\int_0^\infty \frac{x\cos\left(p\sqrt{x^2+a^2}\right)}{x^2+a^2}\sin bx\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ab}$$

$[a > 0,\ b > p > 0]$ ИП I 85 (29)и

7 $$\int_0^u \frac{\cos\left(p\sqrt{u^2-x^2}\right)}{\sqrt{u^2-x^2}}\cos bx\,dx = \frac{\pi}{2}J_0\left(u\sqrt{b^2+p^2}\right).$$ ИП I 28 (42)

8 $$\int_u^\infty \frac{\cos\left(p\sqrt{x^2-u^2}\right)}{\sqrt{x^2-u^2}}\cos bx\,dx = K_0\left(u\sqrt{p^2-b^2}\right) \qquad [0<b<|p|].$$

$$= -\frac{\pi}{2}N_0\left(u\sqrt{b^2-p^2}\right) \qquad [b>|p|].$$

ИП I 28 (43)

3.877

1 $$\int_0^u \frac{\sin\left(p\sqrt{u^2-x^2}\right)}{\sqrt[4]{(u^2-x^2)^3}}\cos bx\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi^3 p}{8}}\,J_{\frac{1}{4}}\left[\frac{u}{2}\left(\sqrt{b^2+p^2}-b\right)\right]J_{\frac{1}{4}}\left[\frac{u}{2}\left(\sqrt{b^2+p^2}+b\right)\right]$$

$[b>0,\ p>0]$. ИП I 27 (40)

2 $$\int_u^\infty \frac{\sin\left(p\sqrt{x^2-u^2}\right)}{\sqrt[4]{(x^2-u^2)^3}}\cos bx\,dx =$$

$$= -\sqrt{\frac{\pi^3 p}{8}}\,J_{\frac{1}{4}}\left[\frac{u}{2}\left(b-\sqrt{b^2-p^2}\right)\right]N_{\frac{1}{4}}\left[\frac{u}{2}\left(b+\sqrt{b^2-p^2}\right)\right]$$

$[b>p>0]$. ИП I 27 (41)

3 $$\int_0^u \frac{\cos\left(p\sqrt{u^2-x^2}\right)}{\sqrt[4]{(u^2-x^2)^3}}\cos bx\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi^3 p}{8}}\,J_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{u}{2}\left(\sqrt{p^2+b^2}-b\right)\right]J_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{u}{2}\left(\sqrt{p^2+b^2}+b\right)\right]$$

$[u>0,\ p>0]$. ИП I 28 (44)

4 $$\int_u^\infty \frac{\cos\left(p\sqrt{x^2-u^2}\right)}{\sqrt[4]{(x^2-u^2)^3}}\cos bx\,dx =$$

$$= -\sqrt{\frac{\pi^3 p}{8}}\,J_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{u}{2}\left(b-\sqrt{b^2-p^2}\right)\right]N_{\frac{1}{4}}\left[\frac{u}{2}\left(b+\sqrt{b^2-p^2}\right)\right]$$

$[b>p>0]$. ИП I 28 (45)

3.878

1 $$\int_0^\infty \frac{\sin\left(p\sqrt{x^4+a^4}\right)}{\sqrt{x^4+a^4}}\cos bx^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 b}\,J_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{a^2}{2}\left(p-\sqrt{p^2-b^2}\right)\right]J_{\frac{1}{4}}\left[\frac{a^2}{2}\left(p+\sqrt{p^2-b^2}\right)\right]$$

$[p>b>0]$. ИП I 26 (32)

2. $$\int_0^\infty \frac{\cos\left(p\sqrt{x^4+a^4}\right)}{\sqrt{x^4+a^4}} \cos bx^2\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 b}\, J_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{a^2}{2}\left(p-\sqrt{p^2-b^2}\right)\right] N_{\frac{1}{4}}\left[\frac{a^2}{2}\left(p+\sqrt{p^2-b^2}\right)\right]$$
$[a > 0,\ p > b > 0]$. ИП I 27 (36)

3 $$\int_0^u \frac{\cos\left(p\sqrt{u^4-x^4}\right)}{\sqrt{u^4-x^4}} \cos bx^2\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 b}\, J_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{u^2}{2}\left(\sqrt{p^2+b^2}-p\right)\right] J_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{u^2}{2}\left(\sqrt{p^2+b^2}+p\right)\right]$$
$[p > 0,\ b > 0]$. ИП I 28 (46)

3.879 $$\int_0^\infty \sin ax^p \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2p} \qquad [a > 0,\ p > 0].$$ ГХ [334] (6)

3.881

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(a \operatorname{tg} x)\,dx = \frac{\pi}{4} e^{-a}\left[C + \ln 2a - e^{2a}\operatorname{Ei}(-2a)\right] \qquad [a > 0].$$ БХ [205] (9)

2. $$\int_0^\infty \sin(a \operatorname{tg} x)\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\left(1-e^{-a}\right) \qquad [a > 0].$$ БХ [151] (6)

3. $$\int_0^\infty \sin(a \operatorname{tg} x)\cos x\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\left(1-e^{-a}\right) \qquad [a > 0].$$ БХ [151] (19)

4. $$\int_0^\infty \cos(a \operatorname{tg} x)\sin x\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} e^{-a} \qquad [a > 0].$$ БХ [151] (20)

5. $$\int_0^\infty \sin(a \operatorname{tg} x)\sin 2x\frac{dx}{x} = \frac{1+a}{2}\pi e^{-a} \qquad [a > 0].$$ БХ [152] (11)

6. $$\int_0^\infty \cos(a \operatorname{tg} x)\sin^3 x\frac{dx}{x} = \frac{1-a}{4}\pi e^{-a} \qquad [a > 0].$$ БХ [151] (23)

7. $$\int_0^\infty \sin(a \operatorname{tg} x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2 x\frac{dx}{x} = \frac{1+a}{4}\pi e^{-a} \qquad [a > 0].$$ БХ [152] (13)

8. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a \operatorname{tg} x)\frac{x\,dx}{\sin 2x} = -\frac{\pi}{4}\operatorname{Ei}(-a) \qquad [a > 0].$$ БХ [206] (15)

9. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(a \operatorname{ctg} x)\frac{x\,dx}{\sin^2 x} = \frac{1-e^{-a}}{2a}\pi \qquad [a > 0].$$ Ли [206] (14)

10. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(a\operatorname{tg}x)\operatorname{tg}x\,dx = -\frac{\pi}{4}e^{-a}[C+\ln 2a + e^{2a}\operatorname{Ei}(-2a)]\quad [a>0].$

БХ [205] (10)

11. $\int\limits_0^{\infty} \cos(a\operatorname{tg}x)\operatorname{tg}x\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}e^{-a}\quad [a>0].$ БХ [151] (21)

12. $\int\limits_0^{\infty} \cos(a\operatorname{tg}x)\sin^2 x\operatorname{tg}x\frac{dx}{x} = \frac{1-a}{16}\pi e^{-a}\quad [a>0].$ БХ [152] (15)

13. $\int\limits_0^{\infty} \sin(a\operatorname{tg}x)\operatorname{tg}^2 x\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}e^{-a}\quad [a>0].$ БХ [152] (9)

14. $\int\limits_0^{\infty} \cos(a\operatorname{tg}2x)\operatorname{tg}x\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}e^{-a}\quad [a>0].$ БХ [151] (22)

15. $\int\limits_0^{\infty} \sin(a\operatorname{tg}2x)\cos^2 2x\operatorname{tg}x\frac{dx}{x} = \frac{1+a}{4}\pi e^{-a}\quad [a>0].$ БХ [152] (13)

16. $\int\limits_0^{\infty} \sin(a\operatorname{tg}2x)\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}e^{-a}\quad [a>0].$ БХ [152] (10)

17. $\int\limits_0^{\infty} \sin(a\operatorname{tg}2x)\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}2x\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}(1-e^{-a})\quad [a>0].$ БХ [180] (6)

3.882

1. $\int\limits_0^{\infty} \sin(a\operatorname{tg}^2 x)\frac{x\,dx}{b^2+x^2} = \frac{\pi}{2}[\exp(-a\operatorname{th}b)-e^{-a}]\quad [a>0,\ b>0].$

БХ [160] (22)

2. $\int\limits_0^{\infty} \cos(a\operatorname{tg}^2 x)\cos x\frac{dx}{b^2+x^2} = \frac{\pi}{2b}[\operatorname{ch}b\exp(-a\operatorname{th}b)-e^{-a}\operatorname{sh}b]$

$[a>0,\ b>0].$ БХ [163] (3)

3. $\int\limits_0^{\infty} \cos(a\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{cosec}2x\frac{x\,dx}{b^2+x^2} = \frac{\pi}{2\operatorname{sh}2b}\exp(-a\operatorname{th}b)\quad [a>0,\ b>0].$

БХ [191] (10)

4. $\int\limits_0^{\infty} \cos(a\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg}x\frac{x\,dx}{b^2+x^2} = \frac{\pi}{2\operatorname{ch}b}[e^{-a}\operatorname{ch}b-\exp(-a\operatorname{th}b)\operatorname{sh}b]$

$[a>0,\ b>0].$ БХ [163] (4)

5. $\int\limits_0^{\infty} \cos(a\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{ctg}x\frac{x\,dx}{b^2+x^2} = \frac{\pi}{2}[\operatorname{cth}b\exp(-a\operatorname{th}b)-e^{-a}]$

$[a>0,\ b>0].$ БХ [163] (5)

6. $$\int_0^\infty \cos(a\,\mathrm{tg}^2 x)\,\mathrm{ctg}\,2x\,\frac{x\,dx}{b^2+x^2}=\frac{\pi}{2}\left[\mathrm{cth}\,2b\exp(-a\,\mathrm{th}\,b)-e^{-a}\right]$$

$[a>0,\ b>0]$ БХ [191] (11)

3.883

1. $$\int_0^1 \cos(a\ln x)\frac{dx}{(1+x)^2}=\frac{a\pi}{2\,\mathrm{sh}\,a\pi}.$$ БХ [404] (4)

2 $$\int_0^1 x^{\mu-1}\sin(\beta\ln x)\,dx=-\frac{\beta}{\beta^2+\mu^2}\quad[\mathrm{Re}\,\mu>|\mathrm{Im}\,\beta|].$$ ИПI 319 (19)

3 $$\int_0^1 x^{\mu-1}\cos(\beta\ln x)\,dx=\frac{\mu}{\beta^2+\mu^2}\quad[\mathrm{Re}\,\mu>|\mathrm{Im}\,\beta|].$$ ИПI 321 (38)

3.884 $$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin a\sqrt{|x|}}{x-b}\,\mathrm{sign}\,x\,dx=\cos a\sqrt{|b|}+\exp\left(-a\sqrt{|b|}\right)$$

$[a>0]$. ИПII 253 (46)

3.89—3.91 Тригонометрические и показательная функции

3.891

1. $$\int_0^{2\pi} e^{imx}\sin nx\,dx=0\quad[m\neq n;\ m=n=0];$$
$$=\pi i\quad[m=n\neq 0].$$

2 $$\int_0^{2\pi} e^{imx}\cos nx\,dx=0\qquad[m\neq n];$$
$$=\pi\qquad[m=n\neq 0];$$
$$=2\pi\qquad[m=n=0].$$

3.892

1 $$\int_0^\pi e^{i\beta x}\sin^{\nu-1}x\,dx=\frac{\pi e^{i\beta\frac{\pi}{2}}}{2^{\nu-1}\nu\mathrm{B}\left(\frac{\nu+\beta+1}{2},\ \frac{\nu-\beta+1}{2}\right)}$$

$[\mathrm{Re}\,\nu>-1]$. НГ 158, ВТФI 12 (29)

2. $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\beta x}\cos^{\nu-1}x\,dx=\frac{\pi}{2^{\nu-1}\nu\mathrm{B}\left(\frac{\nu+\beta+1}{2},\ \frac{\nu-\beta+1}{2}\right)}$$

$[\mathrm{Re}\,\nu>-1]$. ГХ [335] (19)

3 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i2\beta x}\sin^{2\mu}x\cos^{2\nu}x\,dx=$$

$$= \frac{1}{2^{2\mu+2\nu+1}} \left\{ \exp\left[i\pi\left(\beta-\nu-\frac{1}{2}\right)\right] \mathrm{B}(\beta-\mu-\nu,\ 2\nu+1) \times \right.$$
$$\times F(-2\mu,\ \beta-\mu-\nu;\ 1+\beta-\mu+\nu;\ -1) + \exp\left[i\pi\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\right] \times$$
$$\left. \times \mathrm{B}(\beta-\mu-\nu,\ 2\mu+1) F(-2\nu,\ \beta-\mu-\nu;\ 1+\beta+\mu-\nu;\ -1) \right\}$$
$$\left[\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ВТФІ 80(6)

4. $$\int_0^\pi e^{i2\beta x} \sin^{2\mu} x \cos^{2\nu} x\, dx =$$
$$= \frac{\pi \exp[i\pi(\beta-\nu)] F(-2\nu,\ \beta-\mu-\nu;\ 1+\beta+\mu-\nu;\ -1)}{4^{\mu+\nu}(2\mu+1)\mathrm{B}(1-\beta+\mu+\nu,\ 1+\beta+\mu-\nu)}.$$ ВТФІ 80(8)

5 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i(\mu+\nu)x} \sin^{\mu-1} x \cos^{\nu-1} x\, dx = e^{i\mu\frac{\pi}{2}} \mathrm{B}(\mu,\nu) =$$
$$= \frac{1}{2^{\mu+\nu-1}} e^{i\mu\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{\mu} F(1-\nu,\ 1;\mu+1;\ -1) + \frac{1}{\nu} F(1-\mu,\ 1,\nu+1;\ -1) \right\}$$
$$[\operatorname{Re}\mu > 0,\quad \operatorname{Re}\nu > 0].$$ ВТФІ 80(7)

3.893

1. $$\int_0^\infty e^{-px} \sin(qx+\lambda)\, dx = \frac{1}{p^2+q^2}(q\cos\lambda + p\sin\lambda)$$
$$[p>0].$$ БХ [261] (3)

2 $$\int_0^\infty e^{-px} \cos(qx+\lambda)\, dx = \frac{1}{p^2+q^2}(p\cos\lambda - q\sin\lambda)$$
$$[p>0].$$ БХ [261] (4)

3 $$\int_0^\infty e^{-x\cos t} \cos(t - x\sin t)\, dx = 1.$$ БХ [261] (7)

4. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}\sin ax}{\sin bx}\, dx = \frac{1}{2bi}\left[\psi\left(\frac{a+b}{2b} - i\frac{\beta}{2b}\right) - \right.$$
$$\left. -\psi\left(\frac{b-a}{2b} - i\frac{\beta}{2b}\right)\right] \quad [\operatorname{Re}\beta > 0,\ b \neq 0].$$ ГХ [335] (15)

5. $$\int_0^\infty \frac{e^{-2px}\sin[(2n+1)x]}{\sin x}\, dx = \frac{1}{2p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{p}{p^2+k^2} \quad [p>0].$$ БХ [267] (15)

6. $$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\sin 2nx}{\sin x}\, dx = 2p\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p^2+(2k+1)^2} \quad [p>0].$$ ГХ [335] (15c)

7. $$\int_0^\infty e^{-px}\cos[(2n+1)x] \operatorname{tg} x\, dx = \frac{2n+1}{p^2+(2n+1)^2} +$$
$$+ (-1)^n 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k(2k+1)}{p^2+(2k+1)^2} \quad [p>0].$$ Ли [267] (16)

3.894 $$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}\cos x\right]^{\nu} e^{inx}\,dx = \frac{2\pi\Gamma(\nu+1)\,P_\nu^m(\beta)}{\Gamma(\nu+m+1)}$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0]$. ВТФ I 157 (15)

3.895

1. $$\int_0^\infty e^{-\beta x}\sin^{2m} x\,dx = \frac{(2m)!}{\beta(\beta^2+2^2)(\beta^2+4^2)\dots[\beta^2+(2m)^2]};$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0]$. ФII 615, В 620*u*

2. $$\int_0^\pi e^{-px}\sin^{2m} x\,dx = \frac{(2m)!\,(1-e^{-p\pi})}{p(p^2+2^2)(p^2+4^2)\dots[p^2+(2m)^2]}$$

$[p \neq 0]$. ГХ [335] (4a)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-px}\sin^{2m} x\,dx = \frac{(2m)!}{p(p^2+2^2)(p^2+4^2)\dots[p^2+(2m)^2]}\times$$
$$\times\left\{1 - e^{-\frac{p\pi}{2}}\left[1 + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^2(p^2+2^2)}{4!} + \dots + \frac{p^2(p^2+2^2)\dots[p^2+(2m-2)^2]}{(2m)!}\right]\right\}$$

$[p \neq 0]$. БХ [270] (4)

4. $$\int_0^\infty e^{-\beta x}\sin^{2m+1} x\,dx = \frac{(2m+1)!}{(\beta^2+1^2)(\beta^2+3^2)\dots[\beta^2+(2m+1)^2]}$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0]$. ФII 615, В 620*u*

5. $$\int_0^\pi e^{-px}\sin^{2m+1} x\,dx = \frac{(2m+1)!\,(1+e^{-p\pi})}{(p^2+1^2)(p^2+3^2)\dots[p^2+(2m+1)^2]}$$

$[p \neq 0]$. ГХ [335] (4b)

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-px}\sin^{2m+1} x\,dx = \frac{(2m+1)!}{(p^2+1^2)(p^2+3^2)\dots[p^2+(2m+1)^2]}\times$$
$$\times\left\{1 - pe^{\frac{p\pi}{2}}\left[1 + \frac{p^2+1^2}{3!} + \dots + \frac{(p^2+1^2)(p^2+3^2)\dots[p^2+(2m-1)^2]}{(2m+1)!}\right]\right\}.$$

$[p \neq 0]$. БХ [270] (5)

7. $$\int_0^\infty e^{-px}\cos^{2m} x\,dx = \frac{(2m)!}{p(p^2+2^2)\dots[p^2+(2m)^2]}\times$$
$$\times\left\{1 + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^2(p^2+2^2)}{4!} + \dots + \frac{p^2(p^2+2^2)\dots[p^2+(2m-2)^2]}{(2m)!}\right\}$$

$[p > 0]$. БХ [262] (3)

8. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-px} \cos^{2m} x\, dx = \frac{(2m)!}{p\,(p^2+2^2)\,\ldots\,[p^2+(2m)^2]} \times$$
$$\times \left\{ -e^{-p\frac{\pi}{2}} + 1 + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^2(p^2+2^2)}{4!} + \ldots + \frac{p^2(p^2+2^2)\,\ldots\,[p^2+(2m-2)^2]}{(2m)!} \right\}$$
$[p \neq 0]$. БХ [270] (6)

9. $$\int_0^{\infty} e^{-px} \cos^{2m+1} x\, dx = \frac{(2m+1)!\,p}{(p^2+1^2)(p^2+3^2)\,\ldots\,[p^2+(2m+1)^2]} \times$$
$$\times \left\{ 1 + \frac{p^2+1^2}{3!} + \frac{(p^2+1^2)(p^2+3^2)}{5!} + \ldots + \frac{(p^2+1^2)(p^2+3^2)\,\ldots\,[p^2+(2m-1)^2]}{(2m+1)!} \right\}$$
$[p > 0]$. БХ [262] (4)

10. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-px} \cos^{2m+1} x\, dx = \frac{(2m+1)!}{(p^2+1^2)(p^2+3^2)\,\ldots\,[p^2+(2m+1)^2]} \times$$
$$\times \left\{ e^{-p\frac{\pi}{2}} + p\left[1 + \frac{p^2+1^2}{3!} + \ldots + \frac{(p^2+1)(p^2+3^2)\,\ldots\,[p^2+(2m-1)^2]}{(2m+1)!} \right] \right\}$$
$[p \neq 0]$. БХ [270] (7)

11. $$\int_0^{\infty} e^{-\beta x} \sin^{2n} x \sin ax\, dx =$$
$$= -\frac{1}{(-4)^{n+1}(2n+1)} \left\{ \frac{1}{\binom{\frac{a}{2}+i\frac{\beta}{2}+n}{2n+1}} + \frac{1}{\binom{\frac{a}{2}-i\frac{\beta}{2}+n}{2n+1}} \right\}$$
$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0]$. ИП I 80 (19)

12 $$\int_0^{\infty} e^{-\beta x} \sin^{2n-1} x \sin ax\, dx =$$
$$= \frac{-i}{(-4)^{n+1} n} \left\{ \frac{1}{\binom{\frac{a}{2}-i\frac{\beta}{2}+n-\frac{1}{2}}{2n}} - \frac{1}{\binom{\frac{a}{2}+i\frac{\beta}{2}+n-\frac{1}{2}}{2n}} \right\}$$
$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0]$. ИП I 80 (20) и

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x} \sin^{2n} x \cos ax\, dx = \frac{(-1)^n i}{(2n+1)\,2^{2n+2}} \left\{ \frac{1}{\binom{\frac{a}{2}+i\frac{\beta}{2}+n}{2n+1}} - \frac{1}{\binom{\frac{a}{2}-i\frac{\beta}{2}+n}{2n+1}} \right\}$$
$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0]$. ИП I 20 (12) и

14. $$\int_0^{\infty} e^{-\beta x} \sin^{2n-1} x \cos ax\, dx =$$
$$= \frac{(-1)^n}{2^{2n+2} n} \left\{ \frac{1}{\binom{\frac{a}{2}-i\frac{\beta}{2}+n-\frac{1}{2}}{2n}} + \frac{1}{\binom{\frac{a}{2}+i\frac{\beta}{2}+n-\frac{1}{2}}{2n}} \right\}$$
$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0]$. ИП I 20 (13) и

3.896

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2x^2} \sin [p(x+\lambda)]\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q} e^{-\frac{p^2}{4q^2}} \sin p\lambda.$ БХ [269] (2)

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2x^2} \cos [p(x+\lambda)]\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q} e^{-\frac{p^2}{4q^2}} \cos p\lambda.$ БХ [269] (3)

3. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax^2} \sin bx\, dx = \frac{b}{2a} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right) {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{b^2}{4a}\right) =$

$= \frac{b}{2a} {}_1F_1\left(1; \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{4a}\right);$ ИПI (73) (18)

$= \frac{b}{2a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!!} \left(-\frac{b^2}{2a}\right)^{k-1}$ $[a>0]$. ФII 720

4. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\beta x^2} \cos bx\, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{b^2}{4\beta}\right)$ $[\operatorname{Re}\beta > 0]$. БХ [263] (2)

3.897

1. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\beta x^2 - \gamma x} \sin bx\, dx = -\frac{i}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left\{ \exp\frac{(\gamma - ib)^2}{4\beta} \left[1 - \Phi\left(\frac{\gamma - ib}{2\sqrt{\beta}}\right)\right] - \right.$

$\left. - \exp\frac{(\gamma + ib)^2}{4\beta} \left[1 - \Phi\left(\frac{\gamma + ib}{2\sqrt{\beta}}\right)\right]\right\}$ $[\operatorname{Re}\beta > 0,\ b > 0]$. ИПI 74 (27)

2. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\beta x^2 - \gamma x} \cos bx\, dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left\{ \exp\frac{(\gamma - ib)^2}{4\beta} \left[1 - \Phi\left(\frac{\gamma - ib}{2\sqrt{\beta}}\right)\right] + \right.$

$\left. + \exp\frac{(\gamma + ib)^2}{4\beta} \left[1 - \Phi\left(\frac{\gamma + ib}{2\sqrt{\beta}}\right)\right]\right\}$ $[\operatorname{Re}\beta > 0,\ b > 0]$. ИПI 15 (16)

3.898

1. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\beta x^2} \sin ax \sin bx\, dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left\{ e^{-\frac{(a-b)^2}{4\beta}} - e^{-\frac{(a+b)^2}{4\beta}} \right\}$

$[a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0]$. БХ [263] (4)

2. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\beta x^2} \cos ax \cos bx\, dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left\{ e^{-\frac{(a-b)^2}{4\beta}} + e^{-\frac{(a+b)^2}{4\beta}} \right\}$ $[\operatorname{Re}\beta > 0]$.

БХ [263] (5)

3. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-px^2} \sin^2 ax\, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(1 - e^{-\frac{a^2}{p}}\right)$ $[p > 0]$. БХ [263] (6)

3.899

1. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-p^2x^2} \sin [(2n+1)x]}{\sin x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} e^{-\left(\frac{k}{p}\right)^2}\right]$ $[p > 0]$.

БХ [267] (17)

2. $$\int_0^\infty \frac{e^{-p^2x^2}\sin[(4n+1)x]}{\cos x}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{p}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k e^{\left(\frac{k}{p}\right)^2}\right] \quad [p>0].$$

БХ [267] (18)

3. $$\int_0^\infty \frac{e^{-px^2}\,dx}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{\sqrt{\frac{\pi}{p}}}{1-a^2}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a^k\exp\left(-\frac{k^2}{4p}\right)\right\} \quad [a^2<1,\ p>0];$$

БХ [266] (1)

$$=\frac{\sqrt{\frac{\pi}{p}}}{a^2-1}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a^{-k}\exp\left(-\frac{k^2}{4p}\right)\right\} \quad [a^2>1,\ p>0].$$

Ли [266] (1)

3.911

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{\beta x}+1}\,dx=\frac{1}{2a}-\frac{\pi}{2\beta\,\operatorname{sh}\frac{a\pi}{\beta}} \quad [a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0].$$ БХ [264] (1)

2. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{\beta x}-1}\,dx=\frac{\pi}{2\beta}\operatorname{cth}\left(\frac{\pi a}{\beta}\right)-\frac{1}{2a} \quad [a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0].$$

БХ [264] (2), УВI 164 *u*

3. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^x-1}e^{\frac{x}{2}}\,dx=-\frac{1}{2}\operatorname{th}(a\pi) \quad [a>0].$$ ИПI 73 (13)

4. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{1-e^{-x}}e^{-nx}\,dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2a}+\frac{\pi}{e^{2\pi a}-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a}{a^2+k^2} \quad [a>0].$$

БХ [264] (8)

5. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{\beta x}-e^{\gamma x}}\,dx=\frac{1}{2i(\beta-\gamma)}\left[\psi\left(\frac{\beta+ia}{\beta-\gamma}\right)-\psi\left(\frac{\beta-ia}{\beta-\gamma}\right)\right]$$

$[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\gamma>0].$ ГХ [335] (8)

6. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax\,dx}{e^{\beta x}(e^{-x}-1)}=\frac{i}{2}[\psi(\beta+ia)-\psi(\beta-ia)] \quad [\operatorname{Re}\beta>-1].$$ ИПI 73 (15)

3.912

1. $$\int_0^\infty e^{-\beta x}(1-e^{-\gamma x})^{\nu-1}\sin ax\,dx=-\frac{i}{2\gamma}\left[\mathrm{B}\left(\nu,\frac{\beta-ia}{\gamma}\right)-\mathrm{B}\left(\nu,\frac{\beta+ia}{\gamma}\right)\right]$$

$[\operatorname{Re}\beta>0,\quad \operatorname{Re}\gamma>0,\quad \operatorname{Re}\nu>0,\ a>0].$ ИПI 73 (17)

2. $$\int_0^\infty e^{-\beta x}(1-e^{-\gamma x})^{\nu-1}\cos ax\,dx=\frac{1}{2\gamma}\left[\mathrm{B}\left(\nu,\frac{\beta-ia}{\gamma}\right)+\mathrm{B}\left(\nu,\frac{\beta+ia}{\gamma}\right)\right]$$

$[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\gamma>0,\ \operatorname{Re}\nu>0,\ a>0].$ ИПI 15 (10)

3.913

1. $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\beta x}\cos^{\nu} x\,(\beta^2 e^{ix}+\nu^2 e^{-ix})^{\mu}\,dx =$$
$$= \frac{\pi\,{}_2F_1\left(-\mu,\ \frac{\beta}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2};\ 1+\frac{\beta}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2};\ \frac{\beta^2}{\nu^2}\right)}{2^{\nu}(\nu+1)\,\mathrm{B}\left(1+\frac{\beta}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2},\ 1-\frac{\beta}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}\right)}$$
$[\operatorname{Re}\nu > -1,\ |\nu| > |\beta|]$. ВТФ I 81 (11) u

2. $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-iux}\cos^{\mu} x\,(a^2 e^{ix}+b^2 e^{-ix})^{\nu}\,dx =$$
$$= \frac{\pi b^{2\nu}\,{}_2F_1\left(-\nu,\ \frac{u+\mu+\nu}{2};\ 1+\frac{\mu-\nu-u}{2};\ \frac{a^2}{b^2}\right)}{2^{\mu}(\mu+1)\,\mathrm{B}\left(1-\frac{u+\nu-\mu}{2},\ 1+\frac{u+\mu+\nu}{2}\right)} \quad \text{при } a^2 < b^2;$$
$$= \frac{\pi a^{2\nu}\,{}_2F_1\left(-\nu,\ \frac{\mu+\nu-u}{2};\ 1+\frac{\mu-\nu+u}{2};\ \frac{b^2}{a^2}\right)}{2^{\mu}(\mu+1)\,\mathrm{B}\left(1+\frac{u+\mu-\nu}{2},\ 1+\frac{\mu+\nu-u}{2}\right)} \quad \text{при } b^2 < a^2$$
$[\operatorname{Re}\mu > -1]$. ИП I 122 (31) u

3.914 $$\int_0^{\infty} e^{-\beta\sqrt{\gamma^2+x^2}}\cos bx\,dx = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2+b^2}}K_1\left(\gamma\sqrt{\beta^2+b^2}\right)$$
$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0]$. ИП I 16 (26)

3.915

1. $$\int_0^{\pi} e^{a\cos x}\sin x\,dx = \frac{2}{a}\operatorname{sh} a.$$ ГХ [337] (15c)

2. $$\int_0^{\pi} e^{i\beta\cos x}\cos nx\,dx = i^n\pi J_n(\beta).$$ ВТФ II 81 (2)

3. $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\beta\cos x}\cos^{2\nu} x\,dx = \sqrt{\pi}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)J_{\nu}(\beta) \qquad \left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$
ВТФ II 81 (6)

4. $$\int_0^{\pi} e^{\pm\beta\cos x}\sin^{2\nu} x\,dx = \sqrt{\pi}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)I_{\nu}(\beta) \qquad \left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$
ГХ [337] (15b)

5. $$\int_0^{\pi} e^{i\beta\cos x}\sin^{2\nu} x\,dx = \sqrt{\pi}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)J_{\nu}(\beta) \qquad \left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$
В 34 (2), В 60 (6)

3.916

1 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-p^2 \operatorname{tg} x} \frac{\sin \frac{x}{2} \sqrt{\cos x}}{\sin 2x}\, dx = \left[C(p) - \frac{1}{2} \right]^2 + \left[S(p) - \frac{1}{2} \right]^2.$$

НИ 33(18)и

2 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-p \operatorname{tg} x)\, dx}{\sin 2x + a \cos 2x + a} = -\frac{1}{2} e^{ap} \operatorname{Ei}(-ap) \quad [p > 0],$$ (сравни 3.552 4. и 6.).

БХ [273] (11)

3 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-p \operatorname{ctg} x)\, dx}{\sin 2x + a \cos 2x - a} = -\frac{1}{2} e^{-ap} \operatorname{Ei}(ap) \quad [p > 0],$$ (сравни 3.552 4. и 6.).

БХ [273] (12)

4 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-p \operatorname{tg} x) \sin 2x\, dx}{(1-a^2) - 2a^2 \cos 2x - (1+a^2) \cos^2 2x} = -\frac{1}{4} \left[e^{-ap} \operatorname{Ei}(ap) + e^{ap} \operatorname{Ei}(-ap) \right]$$

$[p > 0]$. БХ [273] (13)

5 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-p \operatorname{ctg} x) \sin 2x\, dx}{(1-a^2) + 2a^2 \cos 2x - (1+a^2) \cos^2 2x} = -\frac{1}{4} \left[e^{-ap} \operatorname{Ei}(ap) + e^{ap} \operatorname{Ei}(-ap) \right]$$

$[p > 0]$. БХ [273] (14)

3.917

38 1 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\beta \operatorname{ctg} x} \cos^{\nu - \frac{1}{2}} x \sin^{-(\nu+1)} x \sin \left[\beta - \left(\nu - \frac{1}{2} \right) x \right] dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot (2\beta)^{\nu}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} \right) J_{\nu}(\beta) \quad \left[\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2} \right].$$ В 186 (7)

2 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\beta \operatorname{ctg} x} \cos^{\nu - \frac{1}{2}} x \sin^{-(\nu+1)} x \cos \left[\beta - \left(\nu - \frac{1}{2} \right) x \right] dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot (2\beta)^{\nu}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} \right) N_{\nu}(\beta) \quad \left[\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2} \right]$$ В 186 (8)

3.918

1 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\mu} x}{\sin^{2\mu+2} x} e^{i\gamma(\beta - \mu x) - 2\beta \operatorname{ctg} x}\, dx = \frac{i\gamma}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} (2\beta)^{-\mu} \Gamma(\mu + 1) H^{(\varepsilon)}_{\mu + \frac{1}{2}}(\beta)$$

$[\varepsilon = 1, 2;\ \gamma = (-1)^{\varepsilon+1};\quad \operatorname{Re} \beta > 0,\ \operatorname{Re} \mu > -1]$. ГХ [337] (16)

2 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\mu} x \sin(\beta - \mu x)}{\sin^{2\mu+2} x} e^{-2\beta \operatorname{ctg} x}\, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} (2\beta)^{-\mu} \Gamma(\mu + 1) J_{\mu + \frac{1}{2}}(\beta)$$

$[\operatorname{Re} \beta > 0,\ \operatorname{Re} \mu > -1]$. УВII 183

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^\mu x \cos(\beta-\mu x)}{\sin^{2\mu+2} x} e^{-2\beta \operatorname{ctg} x}\, dx = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}(2\beta)^{-\mu}\Gamma(\mu+1) N_{\mu+\frac{1}{2}}(\beta)$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\mu > -1]$. ГХ [337] (17b)

3.919

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin^{2n+2} x}\cdot\frac{dx}{\exp(2\pi \operatorname{ctg} x)-1} = (-1)^{n-1}\frac{2n-1}{4(2n+1)}.$$ БХ [275] (6), Ли [275] (6)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin^{2n+2} x}\,\frac{dx}{\exp(\pi \operatorname{ctg} x)-1} = (-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}.$$ БХ [275] (7), Ли [275] (7)

3.92 Тригонометрические функции от более сложных аргументов и показательная функция

3.921 $$\int_0^\infty e^{-\beta x}\cos ax^2(\cos\gamma x-\sin\gamma x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8a}}\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2a}\right)$$

$[\operatorname{Re}\gamma \geqslant |\operatorname{Im}\beta|]$. ИПІ 26 (28)

3.922

1. $$\int_0^\infty e^{-\beta x^2}\sin ax^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-\beta x^2}\sin ax^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{\sqrt{\beta^2+a^2}-\beta}{\beta^2+a^2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{\beta^2+a^2}}\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a}{\beta}\right)$$ $[\operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0]$. Ф II 750, БХ [263] (8)

2. $$\int_0^\infty e^{-\beta x^2}\cos ax^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-\beta x^2}\cos ax^2\,dx =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{\sqrt{\beta^2+a^2}+\beta}{\beta^2+a^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{\beta^2+a^2}}\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a}{\beta}\right)$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0]$. Ф II 750, БХ [263] (9)

3. $$\int_0^\infty e^{-\beta x^2}\sin ax^2\cos bx\,dx = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta^2+a^2}}e^{-A\beta}(B\sin Aa - C\cos Aa) =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{\beta^2+a^2}}\exp\left(-\frac{\beta b^2}{4(\beta^2+a^2)}\right)\sin\left\{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a}{\beta}-\frac{ab^2}{4(\beta^2+a^2)}\right\}.$$

Ли [263] (10), ГХ [337] (5)

4. $$\int_0^\infty e^{-\beta x^2}\cos ax^2\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta^2+a^2}}e^{-A\beta}(B\cos Aa + C\sin Aa) =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{\beta^2+a^2}}\exp\left(-\frac{\beta b^2}{4(\beta^2+a^2)}\right)\cos\left\{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a}{\beta}-\frac{ab^2}{4(\beta^2+a^2)}\right\}.$$

Ли [263] (11), ГХ [337] (5)

[В формулах 3.922 3. и 4. $a>0$, $b>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$, $A=\frac{b^2}{4(a^2+\beta^2)}$, $B=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\beta^2+a^2}+\beta\right)}$, $C=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\beta^2+a^2}-\beta\right)}$.
Если a комплексно, то $\operatorname{Re}\beta>|\operatorname{Im}a|$.]

3.923

1. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-(ax^2+2bx+c)\right]\sin(px^2+2qx+r)\,dx=$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{a^2+p^2}}\exp\frac{a(b^2-ac)-(aq^2-2bpq+cp^2)}{a^2+p^2}\times$$
$$\times\sin\left\{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{p}{a}-\frac{p(q^2-pr)-(b^2p-2abq+a^2r)}{a^2+p^2}\right\}\quad[a>0].$$
ГХ [337] (3), БХ [269] (6)

2 $$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-(ax^2+2bx+c)\right]\cos(px^2+2qx+r)\,dx=$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{a^2+p^2}}\exp\frac{a(b^2-ac)-(aq^2-2bpq+cq^2)}{a^2+p^2}\times$$
$$\times\cos\left\{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{p}{a}-\frac{p(q^2-pr)-(b^2p-2abq+a^2r)}{a^2+p^2}\right\}\quad[a>0].$$
ГХ [337] (3), БХ [269] (7)

3.924

1. $$\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\beta x^4}\sin bx^2\,dx=\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{b}{2\beta}}\exp\left(-\frac{b^2}{8\beta}\right)I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{8\beta}\right)\quad[\operatorname{Re}\beta>0,\ b>0].$$
ИП I 73 (22)

2 $$\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\beta x^4}\cos bx^2\,dx=\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{b}{2\beta}}\exp\left(-\frac{b^2}{8\beta}\right)I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{8\beta}\right)\quad[\operatorname{Re}\beta>0,\ b>0].$$
ИП I 15 (12)

3.925

1. $$\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\frac{p^2}{x^2}}\sin 2a^2x^2\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{p^2}{x^2}}\sin 2a^2x^2\,dx=$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{4a}e^{-2ap}(\cos 2ap+\sin 2ap)\quad[a>0,\ b>0].$$ БХ [268] (12)

2. $$\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\frac{p^2}{x^2}}\cos 2a^2x^2\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{p^2}{x^2}}\cos 2a^2x^2\,dx=$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{4a}e^{-2ap}(\cos 2ap-\sin 2ap)\quad[a>0,\ b>0].$$ БХ [268] (13)

3.926

1. $$\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\left(\beta x^2+\frac{\gamma}{x^2}\right)}\sin ax^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^2+\beta^2}}e^{-2u\sqrt{\gamma}}\times$$
$$\times\left[v\cos\left(2v\sqrt{\gamma}\right)+u\sin\left(2v\sqrt{\gamma}\right)\right]\quad[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\gamma>0].$$ БХ [268] (14)

2. $\int\limits_0^\infty e^{-\left(\beta x^2+\frac{\gamma}{x^2}\right)} \cos ax^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^2+\beta^2}}\, e^{-2u\sqrt{\gamma}} \times$

$\times \left[u \cos\left(2v\sqrt{\gamma}\right) - v \sin\left(2v\sqrt{\gamma}\right)\right]$ $[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0]$. БХ [268] (15)

[В формулах 3.926 1., 3.926 2.

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+\beta^2}+\beta}{2}}, \quad v = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+\beta^2}-\beta}{2}}.\ ]$$

3.927 $\int\limits_0^\infty e^{-\frac{p}{x}} \sin^2\frac{a}{x}\, dx = a \operatorname{arctg}\frac{2a}{p} + \frac{p}{4}\ln\frac{p^2}{p^2+4a^2}$ $[a > 0,\ p > 0]$.

Ли [268] (4)

3.928

1. $\int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(p^2x^2+\frac{q^2}{x^2}\right)\right] \sin\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right) dx =$

$= \frac{\sqrt{\pi}}{2r} e^{-2rs\cos(A+B)} \sin\{A + 2rs\sin(A+B)\}$. БХ [268] (22)

2. $\int\limits_0^\infty \exp\left[-\left(p^2x^2+\frac{q^2}{x^2}\right)\right] \cos\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right) dx =$

$= \frac{\sqrt{\pi}}{2r} e^{-2rs\cos(A+B)} \cos\{A + 2rs\sin(A+B)\}$. БХ [268] (23)

[В формулах 3.928 1., 3.928 2. $a^2+p^2 > 0$ и

$$r = \sqrt[4]{a^4+p^4}, \quad s = \sqrt[4]{b^4+q^4}, \quad A = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a^2}{p^2}, \quad B = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b^2}{q^2}.\ ]$$

3.929 $\int\limits_0^\infty \left[e^{-x}\cos\left(p\sqrt{x}\right) + pe^{-x^2}\sin px\right] dx = 1$. Ли [268] (3)

3.93 Тригонометрические и показательные функции от тригонометрических функций

3.931

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-p\cos x}\sin(p\sin x)\, dx = \operatorname{Ei}(-p) - \operatorname{ci}(p)$. НИ 13 (27)

2. $\int\limits_0^{\pi} e^{-p\cos x}\sin(p\sin x)\, dx = -\int\limits_{-\pi}^{0} e^{-p\cos x}\sin(p\sin x)\, dx = -2\operatorname{shi}(p)$.

ГХ [337] (11b)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-p\cos x}\cos(p\sin x)\, dx = -\operatorname{si}(p)$. НИ 13 (26)

4. $$\int_0^{\pi} e^{-p\cos x}\cos(p\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-p\cos x}\cos(p\sin x)\,dx = \pi.$$

ГХ [337] (11а)

3.932

1. $$\int_0^{\pi} e^{p\cos x}\sin(p\sin x)\sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{p\cos x}\sin(p\sin x)\sin mx\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{p^m}{m!}.$$

БХ [277] (7), ГХ [337] (13а)

2 $$\int_0^{\pi} e^{p\cos x}\cos(p\sin x)\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{p\cos x}\cos(p\sin x)\cos mx\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{p^m}{m!}.$$

БХ [277] (8), ГХ [337] (13b)

3.933 $$\int_0^{\pi} e^{p\cos x}\sin(p\sin x)\operatorname{cosec} x\,dx = \pi\operatorname{sh} p.$$ БХ [278] (1)

3.934

1. $$\int_0^{\pi} e^{p\cos x}\sin(p\sin x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx = \pi(1-e^p).$$ БХ [271] (8)

2. $$\int_0^{\pi} e^{p\cos x}\sin(p\sin x)\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,dx = \pi(e^p-1).$$ БХ [272] (5)

3.935 $$\int_0^{\pi} e^{p\cos x}\cos(p\sin x)\frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx = \pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad [p>0].$$ Ли [278] (3)

3.936

1 $$\int_0^{2\pi} e^{p\cos x}\cos(p\sin x - mx)\,dx = 2\int_0^{\pi} e^{p\cos x}\cos(p\sin x - mx)\,dx = \frac{2\pi p^m}{m!}.$$

БХ [277] (9), ГХ [337] (14а)

2 $$\int_0^{2\pi} e^{p\sin x}\sin(p\cos x + mx)\,dx = \frac{2\pi p^m}{m!}\sin\frac{m\pi}{2} \quad [p>0].$$ ГХ [337] (14b)

3 $$\int_0^{2\pi} e^{p\sin x}\cos(p\cos x + mx)\,dx = \frac{2\pi p^m}{m!}\cos\frac{m\pi}{2} \quad [p>0].$$ ГХ [337] (14b)

4. $$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\sin(mx - \sin x)\,dx = 0.$$ УВI 152

5. $$\int_0^{\pi} e^{\beta\cos x}\cos(ax+\beta\sin x)\,dx = \beta^{-a}\sin(a\pi)\,\gamma(a,\beta).$$ ВТФ II 137 (2)

3.937

1. $$\int_0^{2\pi}\exp(p\cos x+q\sin x)\sin(a\cos x+b\sin x-mx)\,dx =$$
$$= i\pi\left[(b-p)^2+(a+q)^2\right]^{-\frac{m}{2}}\left\{(A+iB)^{\frac{m}{2}} I_m\left(\sqrt{C-iD}\right) - (A-iB)^{\frac{m}{2}} I_m\left(\sqrt{C+iD}\right)\right\}$$ ГХ [337] (9b)

2. $$\int_0^{2\pi}\exp(p\cos x+q\sin x)\cos(a\cos x+b\sin x-mx)\,dx =$$
$$= \pi\left[(b-p)^2+(a+q)^2\right]^{-\frac{m}{2}}\left\{(A+iB)^{\frac{m}{2}} I_m\left(\sqrt{C-iD}\right) + (A-iB)^{\frac{m}{2}} I_m\left(\sqrt{C+iD}\right)\right\}$$

[В формулах 3.937 1. и 3.937 2. $(b-p)^2+(a+q)^2>0$, $m=0, 1, 2, \ldots$, $A=p^2-q^2+a^2-b^2$, $B=2(pq+ab)$, $C=p^2+q^2-a^2-b^2$, $D=-2(ap+bq)$]

ГХ [337] (9a)

3. $$\int_0^{2\pi}\exp(p\cos x+q\sin x)\sin(q\cos x-p\sin x+mx)\,dx =$$
$$= \frac{2\pi}{m!}(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}\sin\left(m\operatorname{arctg}\frac{q}{p}\right).$$ ГХ [337] (12)

4. $$\int_0^{2\pi}\exp(p\cos x+q\sin x)\cos(q\cos x-p\sin x+mx)\,dx =$$
$$= \frac{2\pi}{m!}(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}\cos\left(m\operatorname{arctg}\frac{q}{p}\right).$$ ГХ [337] (12)

3.938

1 $$\int_0^{\pi} e^{r(\cos px+\cos qx)}\sin(r\sin px)\sin(r\sin qx)\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(pk+1)\Gamma(qk+1)}r^{(p+q)k}.$$ БХ [277] (14)

2 $$\int_0^{\pi} e^{r(\cos px+\cos qx)}\cos(r\sin px)\cos(r\sin qx)\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{(p+q)k}}{\Gamma(pk+1)\Gamma(qk+1)}\right).$$ БХ [277] (15)

3.939

1. $$\int_0^{\pi} e^{q\cos x}\frac{\sin rx}{1-2p^r\cos rx+p^{2r}}\sin(q\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2pr}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(pq)^{kr}}{\Gamma(kr+1)} \quad [p^2<1].$$

БХ [278] (15)

2. $\int\limits_0^{\pi} e^{q\cos x}\frac{1-p^r\cos rx}{1-2p^r\cos rx+p^{2r}}\cos(q\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\left[2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(pq)^{kr}}{\Gamma(kr+1)}\right]$ $[p^2<1]$. БХ [278] (16)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{p\cos 2x}\cos(p\sin 2x)\,dx}{\cos^2 x+q^2\sin^2 x}=\frac{\pi}{2q}\exp\left(p\frac{q-1}{q+1}\right).$ БХ [273] (8)

3.94—3.97 Тригонометрические, показательная и степенная функции

3.941

1. $\int\limits_0^{\infty} e^{-px}\sin qx\frac{dx}{x}=\operatorname{arctg}\frac{q}{p}$ $[p>0]$. БХ [365] (1)

2. $\int\limits_0^{\infty} e^{-px}\cos qx\frac{dx}{x}=\infty.$ БХ [365] (2)

3.942

1. $\int\limits_0^{\infty} e^{-px}\cos px\frac{x\,dx}{b^4+x^4}=\frac{\pi}{4b^2}\exp\left(-bp\sqrt{2}\right)$ $[p>0,\ b>0]$. БХ [386] (6) и

2. $\int\limits_0^{\infty} e^{-px}\cos px\frac{x\,dx}{b^4-x^4}=\frac{\pi}{4b^2}e^{-bp}\sin bp$ $[p>0,\ b>0]$. БХ [386] (7) и

3.943 $\int\limits_0^{\infty} e^{-\beta x}(1-\cos ax)\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+\beta^2}{\beta^2}$ $[\operatorname{Re}\beta>0]$. БХ [367] (6)

3.944

1. $\int\limits_0^{u} x^{\mu-1}e^{-\beta x}\sin\delta x\,dx=\frac{i}{2}(\beta+i\delta)^{-\mu}\gamma[\mu,\ (\beta+i\delta)u]-$
$-\frac{i}{2}(\beta-i\delta)^{-\mu}\gamma[\mu,\ (\beta-i\delta)u]$ $[\operatorname{Re}\mu>-1]$. ИПI 318 (8)

2. $\int\limits_u^{\infty} x^{\mu-1}e^{-\beta x}\sin\delta x\,dx=\frac{i}{2}(\beta+i\delta)^{-\mu}\Gamma[\mu,\ (\beta+i\delta)u]-$
$-\frac{i}{2}(\beta-i\delta)^{-\mu}\Gamma[\mu,\ (\beta-i\delta)u]$ $[\operatorname{Re}\beta>|\operatorname{Im}\delta|]$. ИПI 318 (9)

3. $\int\limits_0^{u} x^{\mu-1}e^{-\beta x}\cos\delta x\,dx=\frac{1}{2}(\beta+i\delta)^{-\mu}\gamma[\mu,\ (\beta+i\delta)u]+$
$+\frac{1}{2}(\beta-i\delta)^{-\mu}\gamma[\mu,\ (\beta-i\delta)u]$ $[\operatorname{Re}\mu>0]$. ИПI 320 (28)

4. $\int\limits_u^{\infty} x^{\mu-1}e^{-\beta x}\cos\delta x\,dx=\frac{1}{2}(\beta+i\delta)^{-\mu}\Gamma[\mu,\ (\beta+i\delta)u]+$
$+\frac{1}{2}(\beta-i\delta)^{-\mu}\Gamma[\mu,\ (\beta-i\delta)u]$ $[\operatorname{Re}\beta>|\operatorname{Im}\delta|]$. ИПI 320 (29)

5. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-\beta x}\sin\delta x\,dx=\frac{\Gamma(\mu)}{(\beta^2+\delta^2)^{\frac{\mu}{2}}}\sin\left(\mu\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\beta}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu>-1,\ \operatorname{Re}\beta>|\operatorname{Im}\delta|]$. Ф II 812, БХ [361] (9)

6. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-\beta x}\cos\delta x\,dx=\frac{\Gamma(\mu)}{(\delta^2+\beta^2)^{\frac{\mu}{2}}}\cos\left(\mu\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\beta}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\beta>|\operatorname{Im}\delta|]$. Ф II 812, БХ [361] (10)

7. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}\exp(-ax\cos t)\sin(ax\sin t)\,dx=\Gamma(\mu)\,a^{-\mu}\sin(\mu t)$$

$\left[\operatorname{Re}\mu>-1,\ a>0,\ |t|<\frac{\pi}{2}\right]$. ВТФ I 13 (36)

8. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}\exp(-ax\cos t)\cos(ax\sin t)\,dx=\Gamma(\mu)\,a^{-\mu}\cos(\mu t)$$

$\left[\operatorname{Re}\mu>-1,\ a>0,\ |t|<\frac{\pi}{2}\right]$. ВТФ I 13 (35)

9 $$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-qx}\sin(qx\operatorname{tg}t)\,dx=\frac{1}{q^p}\Gamma(p)\cos^p t\sin pt\ \left[|t|<\frac{\pi}{2},\ q>0\right].$$

Ло V 288 (16)

10. $$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-qx}\cos(qx\operatorname{tg}t)\,dx=\frac{1}{q^p}\Gamma(p)\cos^p(t)\cos pt\quad\left[|t|<\frac{\pi}{2},\ q>0\right].$$

Ло V 288 (15)

11. $$\int_0^\infty x^n e^{-\beta x}\sin bx\,dx=n!\left(\frac{\beta}{\beta^2+b^2}\right)^{n+1}\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}(-1)^k\binom{n+1}{2k+1}\left(\frac{b}{\beta}\right)^{2k+1}=$$
$$=(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial\beta^n}\left(\frac{b}{b^2+\beta^2}\right)\ [\operatorname{Re}\beta>0,\ b>0].$$ ГХ [336] (3), ИПI 72 (3)

12. $$\int_0^\infty x^n e^{-\beta x}\cos bx\,dx=n!\left(\frac{\beta}{\beta^2+b^2}\right)^{n+1}\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n+1}(-1)^k\binom{n+1}{2k}\left(\frac{b}{\beta}\right)^{2k}=$$
$$=(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial\beta^n}\left(\frac{\beta}{b^2+\beta^2}\right)\quad[\operatorname{Re}\beta>0,\ b>0].$$ ГХ [336] (4), ИПI 14 (5)

13. $$\int_0^\infty x^{n-\frac{1}{2}}e^{-\beta x}\sin bx\,dx=(-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{d^n}{d\beta^n}\frac{\sqrt{\sqrt{\beta^2+b^2}-\beta}}{\sqrt{\beta^2+b^2}}$$

$[\operatorname{Re}\beta>0,\ b>0]$. ИПI 72 (6)

14 $$\int_0^\infty x^{n-\frac{1}{2}}e^{-\beta x}\cos bx\,dx=(-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{d^n}{d\beta^n}\frac{\sqrt{\sqrt{\beta^2+b^2}+\beta}}{\sqrt{\beta^2+b^2}}.$$

$[\operatorname{Re}\beta>0,\ b>0]$. ИПI 15 (6)

3.945

1. $$\int_0^\infty (e^{-\beta x}\sin ax - e^{-\gamma x}\sin bx)\frac{dx}{x^r} =$$
$$= \Gamma(1-r)\left\{(b^2+\gamma^2)^{\frac{r-1}{2}}\sin\left[(r-1)\operatorname{arctg}\frac{b}{\gamma}\right] - (a^2+\beta^2)^{\frac{r-1}{2}}\sin\left[(r-1)\operatorname{arctg}\frac{a}{\beta}\right]\right\}$$
$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0,\ r < 2,\ r \neq 1]$. БХ [371] (6)

2. $$\int_0^\infty (e^{-\beta x}\cos ax - e^{-\gamma x}\cos bx)\frac{dx}{x^r} =$$
$$= \Gamma(1-r)\left\{(a^2+\beta^2)^{\frac{r-1}{2}}\cos\left[(r-1)\operatorname{arctg}\frac{a}{\beta}\right] - (b^2+\gamma^2)^{\frac{r-1}{2}} \times \cos\left[(r-1)\operatorname{arctg}\frac{b}{\gamma}\right]\right\}$$
$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0,\ r < 2,\ r \neq 1]$. БХ [371] (7)

3. $$\int_0^\infty (ae^{-\beta x}\sin bx - be^{-\gamma x}\sin ax)\frac{dx}{x^2} =$$
$$= ab\left[\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+\gamma^2}{b^2+\beta^2} + \frac{\gamma}{a}\operatorname{arcctg}\frac{\gamma}{a} - \frac{\beta}{b}\operatorname{arcctg}\frac{\beta}{b}\right]$$
$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0]$. БХ [368] (22)

3.946

1. $$\int_0^\infty e^{-px}\sin^{2m+1}ax\,\frac{dx}{x} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{2m+1}{k}\operatorname{arctg}\frac{(2m-2k+1)a}{p}$$
$[p > 0]$. ГХ [336] (9а)

2. $$\int_0^\infty e^{-px}\sin^{2m}ax\,\frac{dx}{x} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{2m}{k}\ln\left[p^2+(2m-2k)^2a^2\right] - \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}\ln p$$
$[p > 0]$. ГХ [336] (9b)

3.947

1. $$\int_0^\infty e^{-\beta x}\sin\gamma x\sin ax\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\ln\frac{\beta^2+(a+\gamma)^2}{\beta^2+(a-\gamma)^2}$$
$[\operatorname{Re}\beta > |\operatorname{Im}\gamma|,\ a > 0]$. БХ [365] (5)

2. $$\int_0^\infty e^{-px}\sin ax\sin bx\,\frac{dx}{x^2} = \frac{a}{2}\operatorname{arctg}\frac{2pb}{p^2+a^2-b^2} + \frac{b}{2}\operatorname{arctg}\frac{2pa}{p^2+b^2-a^2} + \frac{p}{4}\ln\frac{p^2+(a-b)^2}{p^2+(a+b)^2}$$
$[p > 0]$. БХ [368] (1), ФII 744

3. $$\int_0^\infty e^{-px} \sin ax \cos bx \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2pa}{p^2 - a^2 + b^2} + s \frac{\pi}{2}$$

$[a \geqslant 0,\ p > 0,\ s = 0$ при $p^2 - a^2 + b^2 \geqslant 0$ и $s = 1$ при $p^2 - a^2 + b^2 < 0]$. ГХ [336] (10b)

3.948

1. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} (\sin ax - \sin bx) \frac{dx}{x} = \operatorname{arctg} \frac{(a-b)\beta}{ab + \beta^2}$$

$[\operatorname{Re} \beta > 0]$, (сравни **3.951** 2.). БХ [367] (7)

2. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} (\cos ax - \cos bx) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + \beta^2}{a^2 + \beta^2}$$

$[\operatorname{Re} \beta > 0]$, (сравни **3.951** 3.). БХ [367] (8), Ф II 748 *и*

3. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} (\cos ax - \cos bx) \frac{dx}{x^2} = \frac{\beta}{2} \ln \frac{a^2 + \beta^2}{b^2 + \beta^2} + b \operatorname{arctg} \frac{b}{\beta} - a \operatorname{arctg} \frac{a}{\beta}$$

$[\operatorname{Re} p > 0]$. БХ [368] (20)

4. $$\int_0^\infty e^{-px} (\sin^2 ax - \sin^2 bx) \frac{dx}{x^2} = a \operatorname{arctg} \frac{2a}{p} - b \operatorname{arctg} \frac{2b}{p} - \frac{p}{4} \ln \frac{p^2 + 4a^2}{p^2 + 4b^2}$$

$[p > 0]$. БХ [368] (25)

5. $$\int_0^\infty e^{-px} (\cos^2 ax - \cos^2 bx) \frac{dx}{x^2} = -a \operatorname{arctg} \frac{2a}{p} + b \operatorname{arctg} \frac{2b}{p} + \frac{p}{4} \ln \frac{p^2 + 4a^2}{p^2 + 4b^2}$$

$[p > 0]$. БХ [368] (26)

3.949

1. $$\int_0^\infty e^{-px} \sin ax \sin bx \sin cx \frac{dx}{x} = -\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{a+b+c}{p} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{a+b-c}{p} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{a-b+c}{p} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{-a+b+c}{p}$$

$[p > 0]$ БХ [365] (11)

2. $$\int_0^\infty e^{-px} \sin^2 ax \sin bx \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b}{p} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2pb}{p^2 + a^2 - b^2}$$

$[p > 0]$. БХ [365] (8)

3. $$\int_0^\infty e^{-px} \sin^2 ax \cos bx \frac{dx}{x} = \frac{1}{8} \ln \frac{[p^2 + (2a+b)^2][p^2 + (2a-b)^2]}{(p^2 + b^2)^2}$$

$[p > 0]$. БХ [365] (9)

4. $$\int_0^\infty e^{-px}\sin ax\cos^2 bx\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a}{p}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2pa}{p^2+b^2-a^2}$$
$[p>0]$. БХ [365] (10)

5. $$\int_0^\infty e^{-px}\sin^2 ax\sin bx\sin cx\frac{dx}{x}=\frac{1}{8}\ln\frac{p^2+(b+c)^2}{p^2+(b-c)^2}+$$
$$+\frac{1}{16}\ln\frac{[p^2+(2a-b+c)^2]\,[p^2+(2a+b-c)^2]}{[p^2+(2a+b+c)^2]\,[p^2+(2a-b-c)^2]}$$
$[p>0]$. БХ [365] (15)

3.951

1. $$\int_0^\infty (1-e^{-x})\cos x\frac{dx}{x}=\ln\sqrt{2}.$$
ФII 745

2. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\gamma x}-e^{-\beta x}}{x}\sin bx\,dx=\operatorname{arctg}\frac{(\beta-\gamma)\,b}{b^2+\beta\gamma}$$
$[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\gamma\geqslant 0]$. БХ [367] (3)

3. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\gamma x}-e^{-\beta x}}{x}\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+\beta^2}{b^2+\gamma^2}$$
$[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\gamma\geqslant 0]$. БХ [367] (4)

4. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\gamma x}-e^{-\beta x}}{x^2}\sin bx\,dx=\frac{b}{2}\ln\frac{b^2+\beta^2}{b^2+\gamma^2}+$$
$$+\beta\operatorname{arctg}\frac{b}{\beta}-\gamma\operatorname{arctg}\frac{b}{\gamma}$$
$[\operatorname{Re}\beta>0.\ \operatorname{Re}\gamma>0]$. БХ [368] (21) *и*

5 $$\int_0^\infty \frac{x}{e^{\beta x}-1}\cos bx\,dx=\frac{1}{2b^2}-\frac{\pi^2}{2\beta^2}\operatorname{cosech}^2\frac{b\pi}{\beta}$$
$[\operatorname{Re}\beta>0]$.

ИПI 15 (8)

6. $$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)\cos bx\,dx=\ln b-\frac{1}{2}[\psi(ib)+\psi(-ib)]$$
$[b>0]$.

ИПI 15 (9)

7. $$\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{e^{2\pi x}-1}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{a}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-e^{-a}}{a}$$
$[a>0]$. БХ [387] (10)

8 $$\int_0^\infty (e^{-\beta x}-e^{-\gamma x}\cos ax)\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+\gamma^2}{\beta^2}$$
$[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\gamma>0]$.

БХ [367] (10)

9. $$\int_0^\infty \frac{\cos px-e^{-px}}{b^4+x^4}\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2b^4}\exp\left(-\frac{1}{2}bp\sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}bp\sqrt{2}\right)$$
$[p>0]$.

БХ [390] (6)

10. $\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{\cos x}{x}\right)dx = C.$ НИ 65 (8)

11. $\int\limits_0^\infty \left(ae^{-px}-\frac{e^{-qx}}{x}\sin ax\right)\frac{dx}{x}=\frac{a}{2}\ln\frac{a^2+q^2}{p^2}+q\operatorname{arctg}\frac{a}{q}-a$

$[p>0,\ q>0].$ БХ [368] (24)

12. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2m}\sin bx}{e^x-1}dx=(-1)^m\frac{\partial^{2m}}{\partial b^{2m}}\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{cth} b\pi-\frac{1}{2b}\right]$ $[b>0].$ ГХ [336] (15a)

13. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2m+1}\cos bx}{e^x-1}dx=(-1)^m\frac{\partial^{2m+1}}{\partial b^{2m+1}}\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{cth} b\pi-\frac{1}{2b}\right]$ $[b>0].$

ГХ [336] (15b)

14. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2m}\sin bx\,dx}{e^{(2n+1)cx}-e^{(2n-1)cx}}=(-1)^m\frac{\partial^{2m}}{\partial b^{2m}}\left[\frac{\pi}{4c}\operatorname{th}\frac{b\pi}{2c}-\right.$

$\left.-\sum_{k=1}^{n}\frac{b}{b^2+(2k-1)^2c^2}\right]$ *) $[b>0].$ ГХ [336] (14a)

15. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2m+1}\cos bx\,dx}{e^{(2n+1)cx}-e^{(2n-1)cx}}=(-1)^m\frac{\partial^{2m+1}}{\partial b^{2m+1}}\left[\frac{\pi}{4c}\operatorname{th}\frac{b\pi}{2c}-\right.$

$\left.-\sum_{k=1}^{n}\frac{b}{b^2+(2k-1)^2c^2}\right]$ *) $[b>0].$ ГХ [336] (14b)

16 $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2m}\sin bx\,dx}{e^{2ncx}-e^{(2n-2)cx}}=(-1)^m\frac{\partial^{2m}}{\partial b^{2m}}\left[\frac{\pi}{4c}\operatorname{cth}\frac{b\pi}{2c}-\right.$

$\left.-\frac{1}{2b}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b}{b^2+(2k)^2c^2}\right]$ **) $[b>0,\ c>0].$ ГХ [336] (14c)

17. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2m+1}\cos bx\,dx}{e^{2ncx}-e^{(2n-2)cx}}=(-1)^m\frac{\partial^{2m+1}}{\partial b^{2m+1}}\left[\frac{\pi}{4c}\operatorname{cth}\frac{b\pi}{2c}-\right.$

$\left.-\frac{1}{2b}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b}{b^2+(2k)^2c^2}\right]$ **) $[b>0,\ c>0].$ ГХ [336] (14d)

18. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{e^{(2m+1)px}-e^{(2m-1)px}}\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{b\pi}{2p}}{\operatorname{ch}\frac{a\pi}{2p}}-$

$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\ln\frac{b^2+(2k-1)^2p^2}{a^2+(2k-1)^2p^2}$ ***) $[p>0].$ ГХ [336] (16a)

*) При $n=0$ сумма исчезает.
**) При $n=1$ сумма исчезает.
***) При $m=0$ сумма исчезает.

19. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{e^{2mpx} - e^{(2m-2)px}} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{a \operatorname{sh} \frac{b\pi}{2p}}{b \operatorname{sh} \frac{a\pi}{2p}} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \ln \frac{b^2+4k^2p^2}{a^2+4k^2p^2} \text{*)} \quad [p>0].$$ ГХ [336] (16b)

20. $$\int_0^\infty \frac{\sin x \sin bx}{1-e^x} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} \ln \frac{(b+1) \operatorname{sh}[(b-1)\pi]}{(b-1) \operatorname{sh}[(b+1)\pi]} \quad [b^2 \neq 1].$$ Ло V 305

21. $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{1-e^x} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} \ln \frac{2a\pi}{\operatorname{sh} 2a\pi}.$$ Ло V 306, БХ [387] (5)

3.952

1. $$\int_0^\infty xe^{-p^2x^2} \sin ax\, dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{4p^3} \exp\left(-\frac{a^2}{4p^2}\right).$$ БХ [362] (1)

2. $$\int_0^\infty xe^{-p^2x^2} \cos ax\, dx = \frac{1}{2p^2} - \frac{a}{4p^3} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k k!}{(2k+1)!} \left(\frac{a}{p}\right)^{2k+2} \quad [a>0].$$ БХ [362] (2)

3. $$\int_0^\infty x^2e^{-p^2x^2} \sin ax\, dx = \frac{a}{4p^4} + \frac{2p^2-a^2}{8p^5} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k k!}{(2k+1)!} \left(\frac{a}{p}\right)^{2k+2} \quad [a>0].$$ БХ [362] (4)

4. $$\int_0^\infty x^2e^{-p^2x^2} \cos ax\, dx = \sqrt{\pi} \frac{2p^2-a^2}{8p^5} \exp\left(-\frac{a^2}{4p^2}\right).$$ БХ [362] (5)

5. $$\int_0^\infty x^3e^{-p^2x^2} \sin ax\, dx = \sqrt{\pi} \frac{6ap^2-a^3}{16p^7} \exp\left(-\frac{a^2}{4p^2}\right).$$ БХ [362] (6)

6. $$\int_0^\infty e^{-p^2x^2} \sin ax \frac{dx}{x} = \frac{a\sqrt{\pi}}{2p} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \left(\frac{a}{2p}\right)^{2k}.$$ БХ [365] (21)

7. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-\beta x^2} \sin \gamma x\, dx = \frac{\gamma e^{-\frac{\gamma^2}{4\beta}}}{2\beta^{\frac{\mu+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right) {}_1F_1\left(-\frac{\mu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\gamma^2}{4\beta}\right)$$ $[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\mu > -1]$. ИПI 318 (10)

8. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-\beta x^2} \cos ax\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{2\beta^{\frac{\mu}{2}}} {}_1F_1\left(\frac{\mu}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{a^2}{4\beta}\right)$$ $[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\mu>0,\ a>0]$. ИПI 15 (14)

*) При $m=1$ сумма исчезает.

9 $$\int_0^\infty x^{2n} e^{-\beta^2 x^2} \cos ax\, dx = (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\beta^{2n+1}} \exp\left(-\frac{a^2}{8\beta^2}\right) D_{2n}\left(\frac{a}{\beta\sqrt{2}}\right) =$$
$$= (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta^{2n+1}} \exp\left(-\frac{a^2}{4\beta^2}\right) \mathrm{H}_{2n}\left(\frac{a}{2\beta}\right)$$
$$\left[|\arg\beta| < \frac{\pi}{4},\ a > 0\right].$$ УВ II 162и, ИП I 15 (13)

10 $$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\beta^2 x^2} \sin ax\, dx = (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+\frac{3}{2}}\beta^{2n+2}} \exp\left(-\frac{a^2}{8\beta^2}\right) D_{2n+1}\left(\frac{a}{\beta\sqrt{2}}\right) =$$
$$= (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta^{2n+2}} \exp\left(-\frac{a^2}{4\beta^2}\right) \mathrm{H}_{2n+1}\left(\frac{a}{2\beta}\right)$$
$$\left[|\arg\beta| < \frac{\pi}{4},\ a > 0\right].$$ УВ II 162и, ИП I 74 (23)

3.953

1. $$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-\gamma x-\beta x^2} \sin ax\, dx = -\frac{i}{2(2\beta)^{\frac{\mu}{2}}} \exp\frac{\gamma^2-a^2}{8\beta} \times$$
$$\times \Gamma(\mu) \left\{\exp\left(-\frac{ia\gamma}{4\beta}\right) D_{-\mu}\left(\frac{\gamma-ia}{\sqrt{2\beta}}\right) - \exp\frac{ia\gamma}{4\beta} D_{-\mu}\left(\frac{\gamma+ia}{\sqrt{2\beta}}\right)\right\}$$
$[\operatorname{Re}\mu > -1,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0].$ ИП I 318 (11)

2 $$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-\gamma x-\beta x^2} \cos ax\, dx = \frac{1}{2(2\beta)^{\frac{\mu}{2}}} \exp\frac{\gamma^2-a^2}{8\beta} \times$$
$$\times \Gamma(\mu) \left\{\exp\left(-\frac{ia\gamma}{4\beta}\right) D_{-\mu}\left(\frac{\gamma-ia}{\sqrt{2\beta}}\right) + \exp\frac{ia\gamma}{4\beta} D_{-\mu}\left(\frac{\gamma+ia}{\sqrt{2\beta}}\right)\right\}$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0].$ ИП I 16 (18)

3 $$\int_0^\infty x e^{-\gamma x-\beta x^2} \sin ax\, dx =$$
$$= \frac{i\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\beta^3}} \left\{(\gamma - ia) \exp\left[-\frac{(\gamma-ia)^2}{4\beta}\right] \left[1 - \Phi\left(\frac{\gamma-ia}{2\sqrt{\beta}}\right)\right] -\right.$$
$$\left. - (\gamma+ia) \exp\left[-\frac{(\gamma+ia)^2}{4\beta}\right] \left[1 - \Phi\left(\frac{\gamma+ia}{2\sqrt{\beta}}\right)\right]\right\} \quad [\operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0]$$
ИП I 74 (28)

4. $$\int_0^\infty x e^{-\gamma x-\beta x^2} \cos ax\, dx =$$
$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\beta^3}} \left\{(\gamma - ia) \exp\frac{(\gamma-ia)^2}{4\beta} \left[1 - \Phi\left(\frac{\gamma-ia}{2\sqrt{\beta}}\right)\right] +\right.$$
$$\left. + (\gamma+ia) \exp\frac{(\gamma+ia)^2}{4\beta} \left[1 - \Phi\left(\frac{\gamma+ia}{2\sqrt{\beta}}\right)\right]\right\} + \frac{1}{2\beta} \quad [\operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0]$$
ИП I 16 (17)

3.954

1. $$\int_0^\infty e^{-\beta x^2}\sin ax\,\frac{x\,dx}{\gamma^2+x^2}=$$
$$=-\frac{\pi}{4}e^{\beta\gamma^2}\left[2\operatorname{sh}a\gamma+\Phi\left(\gamma\sqrt{\beta}-\frac{a}{2\sqrt{\beta}}\right)-\Phi\left(\gamma\sqrt{\beta}+\frac{a}{2\sqrt{\beta}}\right)\right]$$
$[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\gamma>0,\ a>0].$ ИП I 74(26) и

2 $$\int_0^\infty e^{-\beta x^2}\cos ax\,\frac{dx}{\gamma^2+x^2}=\frac{\pi e^{\beta\gamma^2}}{4\gamma}\left[2\operatorname{ch}a\gamma-\Phi\left(\gamma\sqrt{\beta}-\frac{a}{2\sqrt{\beta}}\right)-\right.$$
$$\left.-\Phi\left(\gamma\sqrt{\beta}+\frac{a}{2\sqrt{\beta}}\right)\right]$$ $[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\gamma>0,\ a>0].$ ИП I 15(15)

3.955 $$\int_0^\infty x^\nu e^{-\frac{x^2}{2}}\cos\left(\beta x-\nu\frac{\pi}{2}\right)dx=$$
$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\beta^2}{4}}D_\nu(\beta)$$ $[\operatorname{Re}\nu>-1].$ ВТФ II 120(4)

3.956 $$\int_0^\infty e^{-x^2}(2x\cos x-\sin x)\sin x\,\frac{dx}{x^2}=\sqrt{\pi}\,\frac{e-1}{2e}.$$ БХ [369] (19)

3.957

1 $$\int_0^\infty x^{\mu-1}\exp\left(\frac{-\beta^2}{4x}\right)\sin ax\,dx=\frac{i}{2^\mu}\beta^\mu a^{-\frac{\mu}{2}}\times$$
$$\times\left[\exp\left(-\frac{i}{4}\mu\pi\right)K_\mu\left(\beta e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{a}\right)-\exp\left(\frac{i}{4}\mu\pi\right)K_\mu\left(\beta e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{a}\right)\right]$$
$[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\mu<1,\ a>0].$ ИП I 318(12)

2 $$\int_0^\infty x^{\mu-1}\exp\left(\frac{-\beta^2}{4x}\right)\cos ax\,dx=$$
$$=\frac{1}{2^\mu}\beta^\mu a^{-\frac{\mu}{2}}\left[\exp\left(-\frac{i}{4}\mu\pi\right)K_\mu\left(\beta e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{a}\right)+\right.$$
$$\left.+\exp\left(\frac{i}{4}\mu\pi\right)K_\mu\left(\beta e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{a}\right)\right]$$
$[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\mu<1,\ a>0].$ ИП I 320(32) и

3.958

1 $$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-(ax^2+bx+c)}\sin(px+q)\,dx=$$
$$=-\left(\frac{-1}{2a}\right)^n\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{b^2-p^2}{4a}-c\right)\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{n!}{(n-2k)!\,k!}a^k\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{n-2k}\binom{n-2k}{j}b^{n-2k-j}p^j\sin\left(\frac{pb}{2a}-q+\frac{\pi}{2}j\right)$$
$[a>0].$ ГХ [337] (1b)

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-(ax^2+bx+c)} \cos(px+q)\,dx =$$
$$= \left(\frac{-1}{2a}\right)^n \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2-p^2}{4a}-c\right) \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{n!}{(n-2k)!\,k!} a^k \times$$
$$\times \sum_{j=0}^{n-2k} \binom{n-2k}{j} b^{\,n-2k-j} p^j \cos\left(\frac{pb}{2a}-q+\frac{\pi}{2}j\right)$$
$[a > 0]$. ГХ [337] (1a)

3.959 $$\int_0^{\infty} xe^{-p^2x^2} \operatorname{tg} ax\,dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{p^3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k \exp\left(-\frac{a^2k^2}{p^2}\right)$$
$[p > 0]$. БХ [362] (15)

3.961

1. $$\int_0^{\infty} \exp\left(-\beta\sqrt{\gamma^2+x^2}\right) \sin ax \frac{x\,dx}{\sqrt{\gamma^2+x^2}} =$$
$$= \frac{a\gamma}{\sqrt{a^2+\beta^2}} K_1\left(\gamma\sqrt{a^2+\beta^2}\right)$$ $[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0,\ a > 0]$.
ИП I 75 (36)

2. $$\int_0^{\infty} \exp\left[-\beta\sqrt{\gamma^2+x^2}\right] \cos ax \frac{dx}{\sqrt{\gamma^2+x^2}} = K_0\left(\gamma\sqrt{a^2+\beta^2}\right)$$
$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0,\ a > 0]$. ИП I 17 (27)

3.962

1. $$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{\gamma^2+x^2}-\gamma}\,\exp\left(-\beta\sqrt{\gamma^2+x^2}\right)}{\sqrt{\gamma^2+x^2}} \sin ax\,dx =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a\exp\left(-\gamma\sqrt{a^2+\beta^2}\right)}{\sqrt{\beta^2+a^2}\sqrt{\beta+\sqrt{a^2+\beta^2}}}$$
$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0,\ a > 0]$. ИП I 75 (38)

2 $$\int_0^{\infty} \frac{x\exp\left(-\beta\sqrt{\gamma^2+x^2}\right)}{\sqrt{\gamma^2+x^2}\sqrt{\sqrt{\gamma^2+x^2}-\gamma}} \cos ax\,dx =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\beta+\sqrt{a^2+\beta^2}}}{\sqrt{a^2+\beta^2}} \exp\left[-\gamma\sqrt{a^2+\beta^2}\right]$$
$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0,\ a > 0]$. ИП I 17 (29)

3.963

1. $$\int_0^{\infty} e^{-\operatorname{tg}^2 x} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \frac{dx}{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$ БХ [391] (1)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-p\,\mathrm{tg}\,x} \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{p}[\mathrm{ci}(p)\sin p - \cos p\,\mathrm{si}(p)]$

$[p>0]$; (сравни **3.339**). БХ [396] (3)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xe^{-\mathrm{tg}^2 x} \sin 4x \frac{dx}{\cos^2 x} = -\frac{3}{2}\sqrt{\pi}.$ БХ [396] (5)

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xe^{-\mathrm{tg}^2 x} \sin^2 2x \frac{dx}{\cos^4 x} = 2\sqrt{\pi}.$ БХ [396] (6)

3.964

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xe^{-p\,\mathrm{tg}\,x} \frac{p\sin x - \cos x}{\cos^3 x}\,dx = -\sin p\,\mathrm{si}(p) - \mathrm{ci}(p)\cos p \quad [p>0].$

Ли [396] (4)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xe^{-p\,\mathrm{tg}^2 x} \frac{p-\cos^2 x}{\cos^4 x\,\mathrm{ctg}\,x}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad [p>0].$ БХ [396] (7)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xe^{-p\,\mathrm{tg}^2 x} \frac{p-2\cos^2 x}{\cos^6 x\,\mathrm{ctg}\,x}\,dx = \frac{1+2p}{8}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad [p>0].$ БХ [396] (8)

3.965

1. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-\beta x} \sin ax^2 \sin \beta x\,dx = \frac{\beta}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2a^3}}\, e^{-\frac{\beta^2}{2a}} \quad \left[|\arg\beta| < \frac{\pi}{4},\ a>0\right].$

ИПІ 84 (17)

2. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-\beta x} \cos ax^2 \cos \beta x\,dx = \frac{\beta}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2a^3}}\, e^{-\frac{\beta^2}{2a}} \quad [a>0,\ \mathrm{Re}\,\beta > |\mathrm{Im}\,\beta|]$

ИПІ 26 (27)

3.966

1. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-px} \cos(2x^2 + px)\,dx = 0 \quad [p>0].$ БХ [361] (16)

2. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-px} \cos(2x^2 - px)\,dx = \frac{p\sqrt{\pi}}{8}\exp\left(-\frac{1}{4}p^2\right) \quad [p>0].$ БХ [361] (17)

3. $\int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-px} [\sin(2x^2+px) + \cos(2x^2+px)]\,dx = 0 \quad [p>0].$ БХ [361] (18)

4. $\int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-px} [\sin(2x^2-px) - \cos(2x^2-px)]\,dx =$

$= \frac{\sqrt{\pi}}{16}(2-p^2)\exp\left(-\frac{1}{4}p^2\right).$ БХ [361] (19)

5. $$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \cos(x + ax^2)\, dx = \frac{e^{-\frac{2}{a}} \Gamma(\mu)}{(2a)^{\frac{\mu}{2}}} \cos\frac{\mu\pi}{2} D_{-\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ a > 0].$ ИП I 321 (37)

6. $$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \sin(x + ax^2)\, dx = \frac{e^{-\frac{2}{a}} \Gamma(\mu)}{(2a)^{\frac{\mu}{2}}} \sin\frac{\mu\pi}{4} D_{-\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ a > 0].$ ИП I 319 (18)

3.967

1. $$\int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{x^2}} \sin a^2x^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} e^{-\sqrt{2}a\beta} \sin\left(\sqrt{2}a\beta\right) \quad [\operatorname{Re}\beta > 0,\quad a > 0].$$

ИП I 75 (30) и, БХ [369] (3) и

2. $$\int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{x^2}} \cos a^2x^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} e^{-\sqrt{2}a\beta} \cos\left(\sqrt{2}a\beta\right) \quad [\operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0].$$

БХ [369] (4), ИП I 16 (20)

3. $$\int_0^\infty x^2 e^{-\beta x^2} \cos ax^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt[4]{(a^2+\beta^2)^3}} \cos\left(\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{a}{\beta}\right) \quad [\operatorname{Re}\beta > 0].$$

ИП I 14 (3) и

3.968

1 $$\int_0^\infty e^{-\beta x^2} \sin ax^4\, dx = -\frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{\beta}{a}}\left[J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\beta^2}{8a}\right)\cos\left(\frac{\beta^2}{8a} + \frac{\pi}{8}\right) + \right.$$

$$\left. + N_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\beta^2}{8a}\right)\sin\left(\frac{\beta^2}{8a} + \frac{\pi}{8}\right)\right] \quad [\operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0].$$ ИП I 75 (34)

2. $$\int_0^\infty e^{-\beta x^2} \cos ax^4\, dx = \frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{\beta}{a}}\left[J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\beta^2}{8a}\right)\sin\left(\frac{\beta^2}{8a} + \frac{\pi}{8}\right) - \right.$$

$$\left. - N_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\beta^2}{8a}\right)\cos\left(\frac{\beta^2}{8a} + \frac{\pi}{8}\right)\right] \quad [\operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0].$$ ИП I 16 (24)

3.969

1. $$\int_0^\infty e^{-p^2x^4+q^2x^2}\left[2px\cos(2pqx^3) + q\sin(2pqx^3)\right] dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$ БХ [363] (7)

2. $$\int_0^\infty e^{-p^2x^4+q^2x^2}\left[2px\sin(2pqx^3) - q\cos(2pqx^3)\right] dx = 0.$$ БХ [363] (8)

3.971

1 $$\int_0^\infty \exp\left(-px^2 - \frac{q}{x^2}\right)\sin\left(ax^2 + \frac{b}{x^2}\right)\frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-px^2 - \frac{q}{x^2}\right)\sin\left(ax^2 + \frac{b}{x^2}\right)\frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2s}\exp\left[-2rs\cos(A + B)\right]\sin\left[A + 2rs\sin(A + B)\right]$$

БХ [369] (16 и 17)

2 $$\int_0^\infty \exp\left(-px^2-\frac{q}{x^2}\right)\cos\left(ax^2+\frac{b}{x^2}\right)\frac{dx}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-px^2-\frac{q}{x^2}\right)\cos\left(ax^2+\frac{b}{x^2}\right)\frac{dx}{x^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2s}\exp[-2rs\cos(A+B)]\cos[A+2rs\sin(A+B)].$$

$\Bigl[$В формулах 3.971 1. и 2. $p\geqslant 0,\ q\geqslant 0,\ r=\sqrt[4]{a^2+p^2},\ s=\sqrt[4]{b^2+q^2},$

$A=\operatorname{arctg}\frac{a}{p},\quad B=\operatorname{arctg}\frac{b}{q}\ .\Bigr]$ БХ [369] (15 и 18)

3.972

1 $$\int_0^\infty \exp\left[-\beta\sqrt{\gamma^4+x^4}\right]\sin ax^2\frac{dx}{\sqrt{\gamma^4+x^4}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a\pi}{8}}\,I_{\frac{1}{4}}\left[\frac{\gamma^2}{2}\left(\sqrt{\beta^2+a^2}-\beta\right)\right]K_{\frac{1}{4}}\left[\frac{\gamma^2}{4}\left(\sqrt{\beta^2+a^2}+\beta\right)\right]$$

$\left[\operatorname{Re}\beta>0,\ |\arg\gamma|<\frac{\pi}{4},\ a>0\right].$ ИП I 75 (37)

2 $$\int_0^\infty \exp\left[-\beta\sqrt{\gamma^4+x^4}\right]\cos ax^2\frac{dx}{\sqrt{\gamma^4+x^4}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a\pi}{8}}\,I_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{\gamma^2}{2}\left(\sqrt{\beta^2+a^2}-\beta\right)\right]K_{\frac{1}{4}}\left[\frac{\gamma^2}{4}\left(\sqrt{\beta^2+a^2}+\beta\right)\right]$$

$\left[\operatorname{Re}\beta>0,\ |\arg\gamma|<\frac{\pi}{4},\ a>0\right].$ ИП I 17 (28)

3.973

1. $$\int_0^\infty \exp(p\cos ax)\sin(p\sin ax)\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}(e^p-1)$$

$[p>0,\ a>0].$ УВ I 164, Ф II 725

2 $$\int_0^\infty \exp(p\cos ax)\sin(p\sin ax+bx)\frac{x\,dx}{c^2+x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\exp(-cb+pe^{-ac})\qquad [a>0,\ b>0,\ c>0,\ p>0].$$

БХ [372] (3)

3 $$\int_0^\infty \exp(p\cos ax)\cos(p\sin ax+bx)\frac{dx}{c^2+x^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2c}\exp(-cb+pe^{-ac})\qquad [a>0,\ b>0,\ c>0,\ p>0].$$

БХ [372] (4)

4. $$\int_0^\infty \exp(p\cos x)\sin(p\sin x + nx)\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}e^p$$

$[p > 0]$. БХ [366] (2)

5. $$\int_0^\infty \exp(p\cos x)\sin(p\sin x)\cos nx\frac{dx}{x} = $$

$$= \frac{p^n}{n!}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{p^k}{k!}$$ $[p > 0]$. Ли [366] (3)

6. $$\int_0^\infty \exp(p\cos x)\cos(p\sin x)\sin nx\frac{dx}{x} = $$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p^k}{k!} + \frac{p^n}{n!}\frac{\pi}{4}$$ $[p > 0]$. Ли [366] (4)

3.974

1. $$\int_0^\infty \exp(p\cos ax)\sin(p\sin ax)\operatorname{cosec} ax\frac{dx}{b^2+x^2} = \frac{\pi\left[e^p - \exp\left(pe^{-ab}\right)\right]}{2b\operatorname{sh} ab}$$

$[a > 0,\ b > 0,\ p > 0]$. БХ [391] (4)

2. $$\int_0^\infty \left[1 - \exp(p\cos ax)\cos(p\sin ax)\right]\operatorname{cosec} ax\frac{x\,dx}{b^2+x^2} = \frac{\pi\left[e^p - \exp\left(pe^{-ab}\right)\right]}{2\operatorname{sh} ab}$$

$[a > 0,\ b > 0,\ p > 0]$. БХ [391] (5)

3. $$\int_0^\infty \exp(p\cos ax)\sin(p\sin ax + ax)\operatorname{cosec} ax\frac{dx}{b^2+x^2} = $$

$$= \frac{\pi\left[e^p - \exp\left(pe^{-ab} - ab\right)\right]}{2b\operatorname{sh} ab}$$ $[a > 0,\ b > 0,\ p > 0]$. БХ [391] (6)

4. $$\int_0^\infty \exp(p\cos ax)\cos(p\sin ax + ax)\operatorname{cosec} ax\frac{x\,dx}{b^2+x^2} = $$

$$= \frac{\pi\left[e^p - \exp\left(pe^{-ab} - ab\right)\right]}{2\operatorname{sh} ab}$$ $[a > 0,\ b > 0,\ p > 0]$. БХ [391] (7)

5. $$\int_0^\infty \exp(p\cos ax)\sin(p\sin ax)\frac{x\,dx}{b^2-x^2} = $$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 - \exp(p\cos ab)\cos(p\sin ab)\right]$$ $[p > 0,\ a > 0]$ БХ [378] (1)

6. $$\int_0^\infty \exp(p\cos ax)\cos(p\sin ax)\frac{dx}{b^2-x^2} = $$

$$= \frac{\pi}{2b}\exp(p\cos ab)\sin(p\sin ab)$$ $[a > 0,\ b > 0,\ p > 0]$. БХ [378] (2)

7. $\int\limits_0^\infty \exp(p\cos ax)\sin(p\sin ax)\,\mathrm{tg}\,ax\,\frac{dx}{b^2+x^2} =$

$= \frac{\pi}{2b}\cdot \mathrm{th}\,ab\,[\exp(pe^{-ab}) - e^p] \quad [a>0,\ b>0,\ p>0].$ БХ [372] (14)

8. $\int\limits_0^\infty \exp(p\cos ax)\sin(p\sin ax)\,\mathrm{ctg}\,ax\,\frac{dx}{b^2+x^2} =$

$= \frac{\pi}{2b}\,\mathrm{cth}\,ab\,[e^p - \exp(pe^{-ab})] \quad [a>0,\ b>0,\ p>0].$ БХ [372] (15)

9. $\int\limits_0^\infty \exp(p\cos ax)\sin(p\sin ax)\,\mathrm{cosec}\,ax\,\frac{dx}{b^2-x^2} =$

$= \frac{\pi}{2b}\,\mathrm{cosec}\,ab\,[e^p - \exp(p\cos ab)\cos(p\sin ab)]$

$[a>0,\ b>0,\ p>0].$ БХ [391] (12)

10. $\int\limits_0^\infty [1-\exp(p\cos ax)\cos(p\sin ax)]\,\mathrm{cosec}\,ax\,\frac{x\,dx}{b^2-x^2} =$

$= -\frac{\pi}{2}\exp(p\cos ab)\sin(p\sin ab)\,\mathrm{cosec}\,ab$

$[a>0,\ b>0,\ p>0].$ БХ [391] (13)

3.975

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\left(\beta\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\gamma}\right)}{(\gamma^2+x^2)^{\frac{\beta}{2}}}\cdot\frac{dx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{1}{2}\zeta(\beta,\ \gamma) - \frac{1}{4\gamma^\beta} - \frac{\gamma^{1-\beta}}{2(\beta-1)}$

$[\mathrm{Re}\,\beta>1,\ \mathrm{Re}\,\gamma>0].$ УВII 50, ВТФI 26 (7)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\beta\,\mathrm{arctg}\,x)}{(1+x^2)^{\frac{\beta}{2}}}\cdot\frac{dx}{e^{2\pi x}+1} = \frac{1}{2(\beta-1)} - \frac{\zeta(\beta)}{2^\beta} \quad [\mathrm{Re}\,\beta>1].$ ВТФI 33 (13)

3.976 $\int\limits_0^\infty (1+x^2)^{\beta-\frac{1}{2}} e^{-px^2}\cos[2px+(2\beta-1)\,\mathrm{arctg}\,x]\,dx = \frac{e^{-p}}{2p^\beta}\sin\pi\beta\,\Gamma(\beta)$

$[\mathrm{Re}\,\beta>0,\ p>0].$ УВII 19

3.98—3.99 Тригонометрические и гиперболические функции

3.981

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{\mathrm{sh}\,\beta x}\,dx = \frac{\pi}{2\beta}\,\mathrm{th}\,\frac{a\pi}{2\beta} \quad [\mathrm{Re}\,\beta>0,\ a>0].$ БХ [264] (6)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{\mathrm{ch}\,\beta x}\,dx = -\frac{\pi}{2\beta}\,\mathrm{th}\,\frac{a\pi}{2\beta} - \frac{i}{2\beta}\left[\psi\left(\frac{\beta+ai}{4\beta}\right) - \psi\left(\frac{\beta-ai}{4\beta}\right)\right]$

$[\mathrm{Re}\,\beta>0,\ a>0].$ ГХ [335] (12), ИПI 88 (1)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{\mathrm{ch}\,\beta x}\,dx = \frac{\pi}{2\beta}\,\mathrm{sech}\,\frac{a\pi}{2\beta} \quad [\mathrm{Re}\,\beta>0,\ a>0].$ БХ [264] (14)

4. $$\int_0^\infty \sin ax \frac{\operatorname{sh}\beta x}{\operatorname{sh}\gamma x}\,dx = \frac{\pi}{2\gamma}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{a\pi}{\gamma}}{\operatorname{ch}\frac{a\pi}{\gamma}+\cos\frac{\beta\pi}{\gamma}} + \frac{i}{2\gamma}\left[\psi\left(\frac{\beta+\gamma+ia}{2\gamma}\right)-\psi\left(\frac{\beta+\gamma-ia}{2\gamma}\right)\right]$$ $[|\operatorname{Re}\beta|<\operatorname{Re}\gamma,\ a>0]$. ИПI 88 (5)

5. $$\int_0^\infty \cos ax \frac{\operatorname{sh}\beta x}{\operatorname{sh}\gamma x}\,dx = \frac{\pi}{2\gamma}\,\frac{\sin\frac{\pi\beta}{\gamma}}{\operatorname{ch}\frac{a\pi}{\gamma}+\cos\frac{\beta\pi}{\gamma}}$$ $[|\operatorname{Re}\beta|<\operatorname{Re}\gamma,\ a>0]$. БХ [265] (7)

6. $$\int_0^\infty \sin ax \frac{\operatorname{sh}\beta x}{\operatorname{ch}\gamma x}\,dx = \frac{\pi}{\gamma}\,\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2\gamma}\operatorname{sh}\frac{a\pi}{2\gamma}}{\operatorname{ch}\frac{a\pi}{\gamma}+\cos\frac{\beta\pi}{\gamma}}$$ $[|\operatorname{Re}\beta|<\operatorname{Re}\gamma;\ a>0]$. БХ [265] (2)

7. $$\int_0^\infty \cos ax \frac{\operatorname{sh}\beta x}{\operatorname{ch}\gamma x}\,dx = \frac{1}{4\gamma}\left\{\psi\left(\frac{3\gamma-\beta+ia}{4\gamma}\right)+\psi\left(\frac{3\gamma-\beta-ia}{4\gamma}\right)-\psi\left(\frac{3\gamma+\beta-ia}{4\gamma}\right)-\psi\left(\frac{3\gamma+\beta+ia}{4\gamma}\right)+\frac{2\pi\sin\frac{\pi\beta}{\gamma}}{\cos\frac{\pi\beta}{\gamma}+\operatorname{ch}\frac{\pi a}{\gamma}}\right\}$$ $[|\operatorname{Re}\beta|<\operatorname{Re}\gamma,\ a>0]$. ИПI 31 (13)

8. $$\int_0^\infty \sin ax \frac{\operatorname{ch}\beta x}{\operatorname{sh}\gamma x}\,dx = \frac{\pi}{2\gamma}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi a}{\gamma}}{\operatorname{ch}\frac{\pi a}{\gamma}+\cos\frac{\pi\beta}{\gamma}}$$ $[|\operatorname{Re}\beta|<\operatorname{Re}\gamma,\ a>0]$. БХ [265] (4)

9. $$\int_0^\infty \sin ax \frac{\operatorname{ch}\beta x}{\operatorname{ch}\gamma x}\,dx = \frac{i}{4\gamma}\left[\psi\left(\frac{3\gamma+\beta+ai}{4\gamma}\right)-\psi\left(\frac{3\gamma+\beta-ai}{4\gamma}\right)+\psi\left(\frac{3\gamma-\beta+ia}{4\gamma}\right)-\psi\left(\frac{3\gamma-\beta-ai}{4\gamma}\right)-\frac{2\pi i\operatorname{sh}\frac{\pi a}{\gamma}}{\operatorname{ch}\frac{a\pi}{\gamma}+\cos\frac{\beta\pi}{\gamma}}\right]$$ $[|\operatorname{Re}\beta|<\operatorname{Re}\gamma,\ a>0]$. ИПI 88 (6)

10. $$\int_0^\infty \cos ax \frac{\operatorname{ch}\beta x}{\operatorname{ch}\gamma x}\,dx = \frac{\pi}{\gamma}\,\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2\gamma}\operatorname{ch}\frac{a\pi}{2\gamma}}{\operatorname{ch}\frac{a\pi}{\gamma}+\cos\frac{\beta\pi}{\gamma}}$$ $[|\operatorname{Re}\beta|<\operatorname{Re}\gamma,\ a>0]$. БХ [265] (6)

11. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m}x\operatorname{ch}\beta x\,dx = \frac{(2m)!\operatorname{sh}\frac{\pi\beta}{2}}{\beta(\beta^2+2^2)\ldots[\beta^2+(2m)^2]}$$ $[\operatorname{Re}\beta>0]$. В 620 и

12. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1} x \operatorname{ch} \beta x \, dx = \frac{(2m-1)! \operatorname{ch} \frac{\pi\beta}{2}}{(\beta^2+1^2)(\beta^2+3^2)\ldots[\beta^2+(2m+1)^2]}$$

[$\operatorname{Re}\beta > 0$]. В 620 u

3.982

1 $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\operatorname{ch}^2 \beta x} dx = \frac{a\pi}{2\beta^2 \operatorname{sh} \frac{a\pi}{2\beta}}$$ [$\operatorname{Re}\beta > 0$, $a > 0$]. БХ [264] (16)

2 $$\int_0^\infty \sin ax \frac{\operatorname{sh} \beta x}{\operatorname{ch}^2 \gamma x} dx = \frac{\pi \left(a \sin \frac{\beta\pi}{2\gamma} \operatorname{ch} \frac{a\pi}{2\gamma} - \beta \cos \frac{\beta\pi}{2\gamma} \operatorname{sh} \frac{a\pi}{2\gamma} \right)}{\gamma^2 \left(\operatorname{ch} \frac{a\pi}{\gamma} - \cos \frac{\beta\pi}{\gamma} \right)}$$

[$|\operatorname{Re}\beta| < 2\operatorname{Re}\gamma$, $a > 0$]. ИПI 88 (9)

3.983

1. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax \, dx}{b \operatorname{ch} \beta x + c} = \frac{\pi \sin\left(\frac{a}{\beta} \operatorname{arch} \frac{c}{b} \right)}{\beta \sqrt{c^2 - b^2} \operatorname{sh} \frac{a\pi}{\beta}}$$ [$c > b > 0$];

$$= \frac{\pi \operatorname{sh}\left(\frac{a}{\beta} \arccos \frac{c}{b} \right)}{\beta \sqrt{b^2 - c^2} \operatorname{sh} \frac{a\pi}{\beta}}$$ [$b > |c| > 0$];

[$\operatorname{Re}\beta > 0$. $a > 0$]. ГХ [335] (13а)

2 $$\int_0^\infty \frac{\cos ax \, dx}{\operatorname{ch} \beta x + \cos \gamma} = \frac{\pi}{\beta} \frac{\operatorname{sh} \frac{a\gamma}{\beta}}{\sin \gamma \operatorname{sh} \frac{a\pi}{\beta}}$$ [$\pi \operatorname{Re}\beta < \operatorname{Im}\bar{\beta}\gamma$, $a > 0$]. БХ [267] (3)

3 $$\int_0^\infty \frac{\cos ax \, dx}{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} b} = -\pi \operatorname{ch} a\pi \frac{\sin ab}{\operatorname{sh} b}$$ [$a > 0$, $b > 0$].

БХ [267] (4), ИПI 30 (8)

4 $$\int_0^\infty \frac{\cos ax \, dx}{1 + 2 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \pi x \right)} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{1 + 2 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \pi a \right)}$$ [$a > 0$]. ИПI 30 (9)

5. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax \operatorname{sh} \beta x}{\operatorname{ch} \gamma x + \cos \delta} dx =$$

$$= \frac{\pi \left\{ \sin \left[\frac{\beta}{\gamma} (\pi - \delta) \right] \operatorname{sh} \left[\frac{a}{\gamma} (\pi + \delta) \right] - \sin \left[\frac{\beta}{\gamma} (\pi + \delta) \right] \operatorname{sh} \left[\frac{a}{\gamma} (\pi - \delta) \right] \right\}}{\gamma \sin \delta \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi a}{\gamma} - \cos \frac{2\pi\beta}{\gamma} \right)}$$

[$\pi \operatorname{Re}\gamma > |\operatorname{Re} \bar{\gamma}\delta|$, $|\operatorname{Re}\beta| < \operatorname{Re}\gamma$, $a > 0$]. БХ [267] (2)

6. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax \operatorname{ch} \beta x}{\operatorname{ch} \gamma x + \cos b} dx =$$
$$= \frac{\pi \left\{ \cos \left[\frac{\beta}{\gamma} (\pi - b) \right] \operatorname{ch} \left[\frac{a}{\gamma} (\pi + b) \right] - \cos \left[\frac{\beta}{\gamma} (\pi + b) \right] \operatorname{ch} \left[\frac{a}{\gamma} (\pi - b) \right] \right\}}{\gamma \sin b \left(\operatorname{ch} \frac{2\pi a}{\gamma} - \cos \frac{2\pi\beta}{\gamma} \right)}$$
$[|\operatorname{Re} \beta| < \operatorname{Re} \gamma,\ 0 < b < \pi,\ a > 0]$. БХ [267] (6)

7. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1} \operatorname{ch} x)^{\nu+1}} = \Gamma(\nu + 1 - ai)\, e^{a\pi} \frac{Q_\nu^{ai}(\beta)}{\Gamma(\nu+1)}$$
$[\operatorname{Re} \nu > -1,\ |\arg(\beta \pm 1)| < \pi,\ a > 0]$. ИП I 30 (10)

3.984

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + \cos b} dx = \pi \frac{\operatorname{ch} ab}{\operatorname{ch} a\pi} \qquad [b \leqslant \pi,\ a > 0].$$ БХ [267] (1)

2. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x + \cos b} dx = -\pi \operatorname{ctg} b \frac{\operatorname{sh} ab}{\operatorname{sh} a\pi} \qquad [b \leqslant \pi].$$ БХ [267] (5)

3. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax \operatorname{sh} \frac{x}{2}}{\operatorname{ch} x + \cos \beta} dx = \frac{\operatorname{sh} a\beta}{2 \sin \frac{\beta}{2} \operatorname{ch} a\pi} \qquad [\operatorname{Re} \beta < \pi,\ a > 0].$$ ИП I 89 (10)

4. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} x}{\operatorname{ch} \beta x + \operatorname{ch} \gamma} dx = \frac{\pi \cos \frac{a\gamma}{\beta}}{2\beta \operatorname{ch} \frac{\gamma}{2} \operatorname{ch} \frac{a\pi}{\beta}} \qquad [\pi \operatorname{Re} \beta > |\operatorname{Im}(\bar{\beta}\gamma)|].$$ ИП I 31 (16)

5. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax \operatorname{sh} \beta x}{\operatorname{ch} 2\beta x + \cos 2ax} dx = \frac{a\pi}{4(a^2 + \beta^2)} \qquad [a > 0,\ \operatorname{Re} \beta > 0].$$ БХ [267] (7)

6. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax \operatorname{ch} \beta x}{\operatorname{ch} 2\beta x + \cos 2ax} dx = \frac{\beta\pi}{4(a^2 + \beta^2)} \qquad [\operatorname{Re} \beta > 0,\ a > 0].$$ БХ [267] (8)

7. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^{2\mu-1} x \operatorname{ch}^{2\varrho - 2\nu + 1} x}{(\operatorname{ch}^2 x - \beta \operatorname{sh}^2 x)^\varrho} dx = \frac{1}{2} \mathrm{B}(\mu, \nu - \mu)\, {}_2F_1(\varrho, \mu; \nu; \beta)$$
$[\operatorname{Re} \nu > \operatorname{Re} \mu > 0]$. ВТФ I 115 (12)

3.985

1. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{\operatorname{ch}^\nu \beta x} = \frac{2^{\nu-2}}{\beta \Gamma(\nu)} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{ai}{2\beta} \right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \frac{ai}{2\beta} \right)$$
$[\operatorname{Re} \beta > 0,\ \operatorname{Re} \nu > 0,\ a > 0]$. ИП I 30 (5)

2. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{\operatorname{ch}^{2n} \beta x} = \frac{4^{n-1} \pi a}{2(2n-1)!\, \beta^2 \operatorname{sh} \frac{a\pi}{2\beta}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{a^2}{4\beta^2} + k^2 \right);$$
$$= \frac{\pi a (a^2 + 2^2\beta^2)(a^2 + 4^2\beta^2) \ldots [a^2 + (2n-2)^2\beta^2]}{2(2n-1)!\, \beta^{2n} \operatorname{sh} \frac{a\pi}{2\beta}} \qquad [n \geqslant 2,\ a > 0].$$
ИП I 30 (3)

3. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{\operatorname{ch}^{2n+1}\beta x} = \frac{\pi\cdot 2^{2n-1}}{(2n)!\,\beta\operatorname{ch}\frac{a\pi}{2\beta}}\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{a^2}{4\beta^2}+\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2\right];$$
$$= \frac{\pi(a^2+\beta^2)(a^2+3^2\beta^2)\dots[a^2+(2n-1)^2\beta^2]}{2(2n)!\,\beta^{2n+1}\operatorname{ch}\frac{a\pi}{2\beta}} \qquad [a>0].$$ ИПI 30 (4)

3.986

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin\beta x\sin\gamma x}{\operatorname{ch}\delta x}dx = \frac{\pi}{\delta}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{\beta\pi}{2\delta}\operatorname{sh}\frac{\gamma\pi}{2\delta}}{\operatorname{ch}\frac{\beta}{\delta}\pi+\operatorname{ch}\frac{\gamma}{\delta}\pi}$$
$[|\operatorname{Im}(\beta+\gamma)|<\operatorname{Re}\delta]$. БХ [264] (19)

2. $$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{\operatorname{sh}\gamma x}dx = \frac{\pi\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{\gamma}}{2\gamma\left(\operatorname{ch}\frac{\alpha\pi}{\gamma}+\operatorname{ch}\frac{\beta\pi}{\gamma}\right)}$$
$[|\operatorname{Im}(\alpha+\beta)|<\operatorname{Re}\gamma]$. Ли [264] (20)

3. $$\int_0^\infty \frac{\cos\beta x\cos\gamma x}{\operatorname{ch}\delta x}dx = \frac{\pi}{\delta}\,\frac{\operatorname{ch}\frac{\beta\pi}{2\delta}\operatorname{ch}\frac{\gamma\pi}{2\delta}}{\operatorname{ch}\frac{\beta\pi}{\delta}+\operatorname{ch}\frac{\gamma\pi}{\delta}} \qquad [|\operatorname{Im}(\beta+\gamma)|<\operatorname{Re}\delta].$$
БХ [264] (21)

4. $$\int_0^\infty \frac{\sin^2\beta x}{\operatorname{sh}^2\pi x}dx = \frac{\beta}{\pi(e^{2\beta}-1)}+\frac{\beta-1}{2\pi} \qquad [|\operatorname{Im}\beta|<\pi].$$ ВТФ I 44 (3)

3.987

1. $$\int_0^\infty \sin ax(1-\operatorname{th}\beta x)\,dx = \frac{1}{a}-\frac{\pi}{2\beta\operatorname{sh}\frac{a\pi}{2\beta}} \qquad [\operatorname{Re}\beta>0].$$ ИПI 88 (4) u

2. $$\int_0^\infty \sin ax(\operatorname{cth}\beta x-1)\,dx = \frac{\pi}{2\beta}\operatorname{cth}\frac{a\pi}{2\beta}-\frac{1}{a} \qquad [\operatorname{Re}\beta>0].$$ ИПI 88 (3)

3.988

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos ax\operatorname{sh}(2b\cos x)}{\sqrt{\cos x}}dx = \frac{\pi}{2}\sqrt{\pi b}\,I_{\frac{a}{2}+\frac{1}{4}}(b)\,J_{-\frac{a}{2}+\frac{1}{4}}(b) \qquad [a>0].$$
ИПI 37 (66)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos ax\operatorname{ch}(2b\cos x)}{\sqrt{\cos x}}dx = \frac{\pi}{2}\sqrt{\pi b}\,I_{\frac{a}{2}-\frac{1}{4}}(b)\,J_{-\frac{a}{2}-\frac{1}{4}}(b) \qquad [a>0].$$
ИПI 37 (67)

3. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{\sqrt{\operatorname{ch}x+\cos b}} = \frac{\pi P_{-\frac{1}{2}+ia}(\cos b)}{\sqrt{2}\operatorname{ch}a\pi} \qquad [a>0,\ b>0].$$ ИПI 30 (7)

3.989

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin \frac{a^2x^2}{\pi} \sin bx}{\operatorname{sh} ax}\, dx = \frac{\pi}{2a} \sin \frac{\pi b^2}{4a^2} \operatorname{cosech} \frac{\pi b}{2a} \qquad [a > 0,\ b > 0].$$ ИП I 93 (44)

2. $$\int_0^\infty \frac{\cos \frac{a^2x^2}{\pi} \sin bx}{\operatorname{sh} ax}\, dx = \frac{\pi}{2a} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi b}{a} - \cos \frac{\pi b^2}{4a^2}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{2a}} \qquad [a > 0,\ b > 0].$$ ИП I 93 (45)

3. $$\int_0^\infty \frac{\sin \frac{x^2}{\pi} \cos ax}{\operatorname{ch} x}\, dx = \frac{\pi}{2} \frac{\cos \frac{a^2\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\operatorname{ch} \frac{a\pi}{2}} \qquad [a > 0].$$ ИП I 36 (54)

4. $$\int_0^\infty \frac{\cos \frac{x^2}{\pi} \cos ax}{\operatorname{ch} x}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \frac{a^2\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\operatorname{ch} \frac{a\pi}{2}} \qquad [a > 0].$$ ИП I 36 (55)

5. $$\int_0^\infty \frac{\sin (\pi a x^2) \cos bx}{\operatorname{ch} \pi x}\, dx = - \sum_{k=0}^\infty \exp \left[-\left(k + \frac{1}{2}\right) b \right] \sin \left[\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi a \right] +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{k=0}^\infty \exp \left[-\frac{b\left(k + \frac{1}{2}\right)}{a} \right] \sin \left[\frac{\pi}{4} - \frac{b^2}{4\pi a} + \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi}{a} \right]$$
$$[a > 0,\ b > 0].$$ ИП I 36 (56)

6. $$\int_0^\infty \frac{\cos (\pi a x^2) \cos bx}{\operatorname{ch} \pi x}\, dx =$$
$$= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \exp \left[-\left(k + \frac{1}{2}\right) b \right] \cos \left[\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi a \right] +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{k=0}^\infty \exp \left[-\frac{b\left(k + \frac{1}{2}\right)}{a} \right] \cos \left[\frac{\pi}{4} - \frac{b^2}{4\pi a} + \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi}{a} \right]$$
$$[a > 0,\ b > 0].$$ ИП I 36 (57)

3.991

1. $$\int_0^\infty \sin \pi x^2 \sin ax \operatorname{cth} \pi x\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{a}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a^2}{4\pi} \right) \qquad [a > 0].$$ ИП I 93 (42)

2. $$\int_0^\infty \cos \pi x^2 \sin ax \operatorname{cth} \pi x\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{a}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a^2}{4\pi} \right) \right] \qquad [a > 0].$$ ИП I 93 (43)

3.992

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin \pi x^2 \cos ax}{1 + 2 \operatorname{ch} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \pi x \right)}\, dx = -\sqrt{3} + \frac{\cos \left(\frac{\pi}{12} - \frac{a^2}{4\pi} \right)}{4 \operatorname{ch} \frac{a}{\sqrt{3}} - 2} \qquad [a > 0].$$ ИП I 37 (60)

2. $$\int_0^\infty \frac{\cos \pi x^2 \cos ax}{1+2 \operatorname{ch}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \pi x\right)} dx = 1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{a^2}{4\pi}\right)}{4 \operatorname{ch} \frac{a}{\sqrt{3}} - 2} \quad [a > 0].$$ ИПI 37 (61)

3.993 $$\int_0^\infty \frac{\sin x^2 + \cos x^2}{\operatorname{ch}(\sqrt{\pi}\, x)} \cos ax \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sin a^2 + \cos a^2}{\operatorname{ch}(\sqrt{\pi}\, a)} \quad [a > 0].$$

ИПI 37 (58)

3.994

1 $$\int_0^\infty \frac{\sin(2a \operatorname{ch} x) \cos bx}{\sqrt{\operatorname{ch} x}} dx = -\frac{\pi}{4} \sqrt{a\pi} \left[J_{\frac{1}{4}+\frac{ib}{2}}(a) N_{\frac{1}{4}-\frac{ib}{2}}(a) + J_{\frac{1}{4}-\frac{ib}{2}}(a) N_{\frac{1}{4}+\frac{ib}{2}}(a)\right] \quad [a > 0,\ b > 0].$$ ИПI 37 (62)

2 $$\int_0^\infty \frac{\cos(2a \operatorname{ch} x) \cos bx}{\sqrt{\operatorname{ch} x}} dx = -\frac{\pi}{4} \sqrt{a\pi} \left[J_{-\frac{1}{4}+\frac{ib}{2}}(a) N_{-\frac{1}{4}-\frac{ib}{2}}(a) + J_{-\frac{1}{4}-\frac{ib}{2}}(a) N_{-\frac{1}{4}+\frac{ib}{2}}(a)\right] \quad [a > 0,\ b > 0].$$ ИПI 37 (63)

3 $$\int_0^\infty \frac{\sin(2a \operatorname{sh} x) \sin bx}{\sqrt{\operatorname{sh} x}} dx = -\frac{i}{2} \sqrt{\pi a} \left[I_{\frac{1}{4}-\frac{ib}{2}}(a) K_{\frac{1}{4}+\frac{ib}{2}}(a) - I_{\frac{1}{4}+\frac{ib}{2}}(a) K_{\frac{1}{4}-\frac{ib}{2}}(a)\right] \quad [a > 0,\ b > 0].$$ ИПI 93 (47)

4 $$\int_0^\infty \frac{\cos(2a \operatorname{sh} x) \sin bx}{\sqrt{\operatorname{sh} x}} dx = -\frac{i}{2} \sqrt{\pi a} \left[I_{-\frac{1}{4}-\frac{ib}{2}}(a) K_{-\frac{1}{4}+\frac{ib}{2}}(a) - I_{-\frac{1}{4}+\frac{ib}{2}}(a) K_{-\frac{1}{4}-\frac{ib}{2}}(a)\right] \quad [a > 0,\ b > 0].$$ ИПI 93 (48)

5 $$\int_0^\infty \frac{\sin(2a \operatorname{sh} x) \cos bx}{\sqrt{\operatorname{sh} x}} dx = \frac{\sqrt{\pi a}}{2} \left[I_{\frac{1}{4}-\frac{ib}{2}}(a) K_{\frac{1}{4}+\frac{ib}{2}}(a) + I_{\frac{1}{4}+\frac{ib}{2}}(a) K_{\frac{1}{4}-\frac{ib}{2}}(a)\right] \quad [a > 0,\ b > 0].$$ ИПI 37 (64)

6. $$\int_0^\infty \frac{\cos(2a \operatorname{sh} x) \cos bx}{\sqrt{\operatorname{sh} x}} dx = \frac{\sqrt{\pi a}}{2} \left[I_{-\frac{1}{4}-\frac{ib}{2}}(a) K_{-\frac{1}{4}+\frac{ib}{2}}(a) + I_{-\frac{1}{4}+\frac{ib}{2}}(a) K_{-\frac{1}{4}-\frac{ib}{2}}(a)\right] \quad [a > 0,\ b > 0].$$ ИПI 37 (65)

7. $$\int_0^\infty \sin(a \operatorname{ch} x) \sin(a \operatorname{sh} x) \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \frac{\pi}{2} \sin a \quad [a > 0].$$

БХ [264] (22)

3.995

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2a\cos^2 x)\operatorname{ch}(a\sin 2x)}{b^2\cos^2 x + c^2\sin^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2bc}\sin\frac{2ac}{b+c}$$

$[b > 0,\ c > 0]$. БХ [273] (9)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2a\cos^2 x)\operatorname{ch}(a\sin 2x)}{b^2\cos^2 x + c^2\sin^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2bc}\cos\frac{2ac}{b+c}$$

$[b > 0,\ c > 0]$. БХ [273] (10)

3.996

1. $$\int_0^{\infty} \sin(a\operatorname{sh} x)\operatorname{sh}\beta x\,dx = \sin\frac{\beta\pi}{2}K_\beta(a)$$

$[|\operatorname{Re}\beta| < 1,\ a > 0]$. ВТФII 82 (26)

2. $$\int_0^{\infty} \cos(a\operatorname{sh} x)\operatorname{ch}\beta x\,dx = \cos\frac{\beta\pi}{2}K_\beta(a)$$

$[|\operatorname{Re}\beta| < 1,\ a > 0]$. В 202 (13)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\sin x)\operatorname{ch}(\beta\cos x)\,dx = \frac{\pi}{2}J_0\left(\sqrt{a^2-\beta^2}\right).$$

Мо 40

4. $$\int_0^{\infty} \sin\left(a\operatorname{ch} x - \frac{1}{2}\beta\pi\right)\operatorname{ch}\beta x\,dx = \frac{\pi}{2}J_\beta(a)$$

$[|\operatorname{Re}\beta| < 1,\ a > 0]$. В 199 (12)

5. $$\int_0^{\infty} \cos\left(a\operatorname{ch} x - \frac{1}{2}\beta\pi\right)\operatorname{ch}\beta x\,dx = -\frac{\pi}{2}N_\beta(a)$$

$[|\operatorname{Re}\beta| < 1,\ a > 0]$. В 199 (13)

3.997

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\nu x\operatorname{sh}(\beta\cos x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\mathbf{L}_{\frac{\nu}{2}}(\beta)$$

$[\operatorname{Re}\nu > -1]$. ВТФII 38 (53)

2. $$\int_0^{\pi} \sin^\nu x\operatorname{ch}(\beta\cos x)\,dx = \sqrt{\pi}\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)I_{\frac{\nu}{2}}(\beta)$$

$[\operatorname{Re}\nu > -1]$. УВII 188 *и*

3 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\operatorname{ch}(\operatorname{tg} x)\cos x\sqrt{\sin 2x}} = \sqrt{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}.$ БХ [276] (13)

4 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^q x}{\operatorname{ch}(\operatorname{tg} x)+\cos\lambda}\,\frac{dx}{\sin 2x} = \frac{\Gamma(q)}{\sin\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin k\lambda}{k^q}$

$[q > 0]$. БХ [275] (20)

4.11—4.12 Тригонометрические, гиперболические и степенная функции

4.111

1. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh}\beta x}\cdot x^{2m}dx = (-1)^m\frac{\pi}{2\beta}\cdot\frac{\partial^{2m}}{\partial a^{2m}}\left(\operatorname{th}\frac{a\pi}{2\beta}\right)$

   $[\operatorname{Re}\beta > 0]$ (**сравни 3.981 1.**). ГХ [336] (17a)

2. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\operatorname{sh}\beta x}\cdot x^{2m+1}\,dx = (-1)^m\frac{\pi}{2\beta}\,\frac{\partial^{2m+1}}{\partial a^{2m+1}}\left(\operatorname{th}\frac{a\pi}{2\beta}\right)$

   $[\operatorname{Re}\beta > 0]$ (**сравни 3.981 1.**). ГХ [336] (17b)

3. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\operatorname{ch}\beta x}\cdot x^{2m+1}\,dx = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{2\beta}\cdot\frac{\partial^{2m+1}}{\partial a^{2m+1}}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{a\pi}{2\beta}}\right)$

   $[\operatorname{Re}\beta > 0]$ (**сравни 3.981 3.**). ГХ [336] (18b)

4. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\operatorname{ch}\beta x}\cdot x^{2m}\,dx = (-1)^m\frac{\pi}{2\beta}\cdot\frac{\partial^{2m}}{\partial a^{2m}}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{a\pi}{2\beta}}\right)$

   $[\operatorname{Re}\beta > 0]$ (**сравни 3.981 3.**). ГХ [336] (18a)

5. $\int\limits_0^{\infty} x\,\frac{\sin 2ax}{\operatorname{ch}\beta x}\,dx = \frac{\pi^2}{4\beta^2}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{a\pi}{\beta}}{\operatorname{ch}^2\frac{a\pi}{\beta}}$ $[\operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0]$.

   БХ [364] (6) и

6. $\int\limits_0^{\infty} x\,\frac{\cos 2ax}{\operatorname{s}\ \beta x}\,dx = \frac{\pi^2}{4\beta^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{a\pi}{\beta}}$ $[\operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0]$. БХ [364] (1) и

7. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\operatorname{ch}\beta x}\cdot\frac{dx}{x} = 2\operatorname{arctg}\left(\exp\frac{\pi a}{2\beta}\right) - \frac{\pi}{2}$

   $[\operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0]$. БХ [387] (1), ИПI 89 (13), Ли [298] (17)

4.112

1. $\int\limits_0^{\infty} (x^2+\beta^2)\,\frac{\cos ax}{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2\beta}}\,dx = \frac{2\beta^3}{\operatorname{ch}^3 a\beta}$ $[\operatorname{Re}\beta > 0,\ a > 0]$. ИПI 32 (19)

2. $\int\limits_0^\infty x(x^2+4\beta^2)\frac{\cos ax}{\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2\beta}}dx=\frac{6\beta^4}{\operatorname{ch}^4 a\beta}$ $[\operatorname{Re}\beta>0,\ a>0]$. ИП I 32 (20)

4.113

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{\operatorname{sh}\pi x}\cdot\frac{dx}{x^2+\beta^2}=-\frac{1}{2\beta^2}-\frac{\pi e^{-a\beta}}{\beta\sin\pi\beta}+$

$+\frac{1}{2\beta^2}[{}_2F_1(1,\ -\beta;\ 1-\beta;\ -e^{-a})+{}_2F_1(1,\ \beta;\ 1+\beta;\ -e^{-a})]=$

$=\frac{1}{2\beta^2}-\frac{\pi e^{-a\beta}}{2\beta\sin\pi\beta}-\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^k e^{-ak}}{k^2-\beta^2}$ $[\operatorname{Re}\beta>0,\ \beta\neq 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ a>0]$.

ИП I 90 (18)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{\operatorname{sh}\pi x}\cdot\frac{dx}{x^2+m^2}=\frac{(-1)^m a e^{-ma}}{2m}+$

$+\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^k e^{-ka}}{m-k}+\frac{(-1)^m e^{-ma}}{2m}\ln(1+e^{-a})+$

$+\frac{1}{2m!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{(1+z)^{m-1}}{z}\ln(1+z)\right]_{z=e^{-a}}$ $[a>0]$. ИП I 89 (17)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{\operatorname{sh}\pi x}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\sin ax}{\operatorname{sh}\pi x}\frac{dx}{1+x^2}=$

$=-\frac{a}{2}\operatorname{ch}a+\operatorname{sh}a\ln\left(2\operatorname{ch}\frac{a}{2}\right)$. ГХ [336] (21b)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}x}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\sin ax}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=$

$=\frac{\pi}{2}\operatorname{sh}a-\operatorname{ch}a\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}a)$. ГХ [336] (21a)

5. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{4}x}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-a}+\frac{\operatorname{sh}a}{\sqrt{2}}\ln\frac{2\operatorname{ch}a+\sqrt{2}}{2\operatorname{ch}a-\sqrt{2}}+$

$+\sqrt{2}\operatorname{ch}a\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2\operatorname{sh}a}$ $[a>0]$. Ли [389] (1)

6. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}x}\cdot\frac{x\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-a}+\frac{\operatorname{sh}a}{\sqrt{2}}\ln\frac{2\operatorname{ch}a+\sqrt{2}}{2\operatorname{ch}a-\sqrt{2}}-$

$-\sqrt{2}\operatorname{ch}a\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sh}a}\right)$ $[a>0]$. БХ [388] (1)

7. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{\operatorname{sh}\pi x}\cdot\frac{x\,dx}{1+x^2}=-\frac{1}{2}+\frac{a}{2}e^{-a}+\operatorname{ch}a\ln(1+e^{-a})$

$[a>0]$. БХ [389] (14), ИП I 32 (24)

8 $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{x\,dx}{1+x^2}=2\operatorname{sh}a\operatorname{arctg}(e^{-a})+\frac{\pi}{2}e^{-a}-1$$

$[a>0]$. БХ [389] (11)

9 $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\operatorname{ch}\pi x}\cdot\frac{dx}{x^2+\beta^2}=\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2e^{-a\beta}-\beta e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)a}}{\beta\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\beta^2\right]}$$

$[\operatorname{Re}\beta>0,\ a>0]$. ИП I 32 (26)

10 $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\operatorname{ch}\pi x}\cdot\frac{dx}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+x^2}=\frac{(-1)^m e^{-\left(m+\frac{1}{2}\right)a}}{2m+1}[a+\ln(1+e^{-a})]+$$
$$+\frac{e^{-\frac{a}{2}}}{2m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k e^{-ak}}{k-m}+\frac{e^{-\frac{a}{2}}}{(2m+1)(m+1)}\cdot{}_2F_1(1,\ m+1;\ m+2;-e^{-a})$$

$[a>0]$. ИП I 32 (25)

11. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\operatorname{ch}\pi x}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=2\operatorname{ch}\frac{a}{2}-\left[e^a\operatorname{arctg}\left(e^{-\frac{a}{2}}\right)+e^{-a}\operatorname{arctg}\left(e^{\frac{a}{2}}\right)\right]$$

$[a>0]$. ИП I 32 (21)

12. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=ae^{-a}+\operatorname{ch}a\ln(1+e^{-2a})$$

$[a>0]$. БХ [388] (6)

13 $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}x}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-a}+\frac{2\operatorname{sh}a}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sh}a}\right)-$$
$$-\frac{\operatorname{ch}a}{\sqrt{2}}\ln\frac{2\operatorname{ch}a+\sqrt{2}}{2\operatorname{ch}a-\sqrt{2}}$$

$[a>0]$. БХ [388] (5)

4.114

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\cdot\frac{\operatorname{sh}\beta x}{\operatorname{sh}\gamma x}dx=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta\pi}{2\gamma}\operatorname{th}\frac{a\pi}{2\gamma}\right)$$

$[|\operatorname{Re}\beta|<\operatorname{Re}\gamma,\ a>0]$. БХ [387] (6) и

2 $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x}\cdot\frac{\operatorname{sh}\beta x}{\operatorname{ch}\gamma x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{a\pi}{2\gamma}+\sin\frac{\beta\pi}{2\gamma}}{\operatorname{ch}\frac{a\pi}{2\gamma}-\sin\frac{\beta\pi}{2\gamma}}$$

$[|\operatorname{Re}\beta|<\operatorname{Re}\gamma]$. ИП I 33 (34)

4.115

1 $$\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\cdot\frac{\operatorname{sh}\beta x}{\operatorname{sh}\pi x}dx=\frac{\pi}{2}\frac{e^{-ab}\sin b\beta}{\sin b\pi}+\sum_{k=1}^\infty(-1)^k\frac{ke^{-ak}\sin k\beta}{k^2-b^2}$$

$[0<\operatorname{Re}\beta<\pi,\ a>0,\ b>0]$. БХ [389] (23)

2. $$\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2+1}\cdot\frac{\operatorname{sh}\beta x}{\operatorname{sh}\pi x}dx = \frac{1}{2}e^{-a}(a\sin\beta-\beta\cos\beta)-$$
$$-\frac{1}{2}\operatorname{sh}a\sin\beta\ln[1+2e^{-a}\cos\beta+e^{-2a}]+\operatorname{ch}a\cos\beta\operatorname{arctg}\frac{\sin\beta}{e^a+\cos\beta}$$
$[|\operatorname{Re}\beta|<\pi,\ a>0]$. Ли [389] (10)

3. $$\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2+1}\cdot\frac{\operatorname{sh}\beta x}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}x}dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}\sin\beta+$$
$$+\frac{1}{2}\cos\beta\operatorname{sh}a\ln\frac{\operatorname{ch}a+\sin\beta}{\operatorname{ch}a-\sin\beta}-\sin\beta\operatorname{ch}a\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos\beta}{\operatorname{sh}a}\right)$$
$\left[|\operatorname{Re}\beta|<\frac{\pi}{2},\quad a>0\right]$. БХ [389] (8)

4. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\cdot\frac{\operatorname{sh}\beta x}{\operatorname{sh}\pi x}dx = \frac{\pi}{2b}\cdot\frac{e^{-ab}\sin b\beta}{\sin b\pi}+\sum_{k=1}^\infty(-1)^k\frac{e^{-ak}\sin k\beta}{k^2-b^2}$$
$[0<\operatorname{Re}\beta<\pi,\ a>0,\ b>0]$. БХ [389] (22)

5. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1}\cdot\frac{\operatorname{sh}\beta x}{\operatorname{sh}\pi x}dx = \frac{1}{2}e^{-a}(a\sin\beta-\beta\cos\beta)+$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{ch}a\sin\beta\ln(1+2e^{-a}\cos\beta+e^{-2a})-$$
$$-\operatorname{sh}a\cos\beta\operatorname{arctg}\frac{\sin\beta}{e^a+\cos\beta}$$
$[|\operatorname{Re}\beta|<\pi,\ a>0\ \ b>0]$
БХ [389] (20) и

6. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1}\cdot\frac{\operatorname{sh}\beta x}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}x}dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}\sin\beta-$$
$$-\frac{1}{2}\operatorname{ch}a\cos\beta\ln\frac{\operatorname{ch}a+\sin\beta}{\operatorname{ch}a-\sin\beta}+\operatorname{sh}a\sin\beta\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta}{\operatorname{sh}a}$$
$\left[|\operatorname{Re}\beta|<\frac{\pi}{2},\ a>0,\ b>0\right]$. БХ [389] (18)

7 $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^2+\frac{1}{4}}\cdot\frac{\operatorname{sh}\beta x}{\operatorname{ch}\pi x}dx = e^{-\frac{a}{2}}\left(a\sin\frac{\beta}{2}-\beta\cos\frac{\beta}{2}\right)-$$
$$-\operatorname{sh}\frac{a}{2}\sin\frac{\beta}{2}\ln(1+2e^{-a}\cos\beta+e^{-2a})+$$
$$+\operatorname{ch}\frac{a}{2}\cos\frac{\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sin\beta}{1+e^{-a}\cos\beta}$$
$[|\operatorname{Re}\beta|<\pi,\ a>0]$
ИП I 91 (26)

8. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^2+\beta^2}\ \frac{\operatorname{ch}\gamma x}{\operatorname{sh}\pi x}dx = \frac{1}{2\beta^2}-\frac{\pi}{2\beta}\cdot\frac{e^{-a\beta}\cos\beta\gamma}{\sin\beta\pi}+$$
$$+\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k-1}\frac{e^{-ak}\cos k\gamma}{k^2-\beta^2}$$
$[0\leqslant\operatorname{Re}\beta,\ |\operatorname{Re}\gamma|<\pi,\ a>0]$.
БХ [389] (21)

9 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x^2+1}\cdot\frac{\operatorname{ch}\beta x}{\operatorname{sh}\pi x}dx = -\frac{1}{2}e^{-a}(a\cos\beta+\beta\sin\beta)+$

$+\frac{1}{2}\operatorname{sh} a\cos\beta\ln(1+2e^{-a}\cos\beta+e^{-2a})+$

$+\operatorname{ch} a\sin\beta\operatorname{arctg}\frac{\sin\beta}{e^a+\cos\beta}$ $[|\operatorname{Re}\beta|<\pi,\ a>0]$.

ИП I 91 (25); ЛИ [389] (9)

10 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x^2+1}\cdot\frac{\operatorname{ch}\beta x}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}x}dx = -\frac{\pi}{2}e^{-a}\cos\beta+$

$+\frac{1}{2}\operatorname{sh} a\sin\beta\ln\frac{\operatorname{ch} a+\sin\beta}{\operatorname{ch} a-\sin\beta}+\operatorname{ch} a\cos\beta\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta}{\operatorname{sh} a}$

$\left[|\operatorname{Re}\beta|<\frac{\pi}{2},\ a>0\right]$, БХ [389] (7)

11 $\int\limits_0^\infty \frac{x\cos ax}{x^2+b^2}\cdot\frac{\operatorname{ch}\beta x}{\operatorname{sh}\pi x}dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{-ab}\cos b\beta}{\sin b\pi}+\sum_{k=1}^\infty(-1)^k\frac{ke^{-ak}\cos k\beta}{k^2-b^2}$

$[|\operatorname{Re}\beta|<\pi,\ a>0]$. БХ [389] (24)

12 $\int\limits_0^\infty \frac{x\cos ax}{x^2+1}\cdot\frac{\operatorname{ch}\beta x}{\operatorname{sh}\pi x}dx = \frac{1}{2}e^{-a}(a\cos\beta+\beta\sin\beta)-$

$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{ch} a\cos\beta\ln[1+2e^{-a}\cos\beta+e^{-2a}]+$

$+\operatorname{sh} a\sin\beta\operatorname{arctg}\frac{\sin\beta}{e^a+\cos\beta}$ $[|\operatorname{Re}\beta|<\pi,\ a>0]$.

БХ [389] (19)

13 $\int\limits_0^\infty \frac{x\cos ax}{x^2+1}\cdot\frac{\operatorname{ch}\beta x}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}x}dx = -1+\frac{\pi}{2}e^{-a}\cos\beta+$

$+\frac{1}{2}\operatorname{ch} a\sin\beta\ln\frac{\operatorname{ch} a+\sin\beta}{\operatorname{ch} a-\sin\beta}+\operatorname{sh} a\cos\beta\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta}{\operatorname{sh} a}$

$\left[|\operatorname{Re}\beta|<\frac{\pi}{2},\ a>0\right]$. БХ [389] (17)

14 $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1}\cdot\frac{\operatorname{ch}\beta x}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}x}dx = ae^{-a}\cos\beta+\beta e^{-a}\sin\beta+$

$+\operatorname{sh} a\sin\beta\operatorname{arctg}\frac{e^{-2a}\sin 2\beta}{1+e^{-2a}\cos 2\beta}+$

$+\frac{1}{2}\operatorname{ch} a\cos\beta\ln(1+2e^{-2a}\cos 2\beta+e^{-4a})$

$\left[|\operatorname{Re}\beta|<\frac{\pi}{2},\ a>0\right]$. ИП I 34 (37)

4.116

1 $\int\limits_0^\infty x\cos 2ax\operatorname{th}x\,dx = -\frac{\pi^2}{4}\,\frac{\operatorname{ch} a\pi}{\operatorname{sh}^2 a\pi}$ $[a>0]$. БХ [364] (2)

2. $\int\limits_0^\infty \cos ax \operatorname{th} \beta x \frac{dx}{x} = \ln \operatorname{cth} \frac{a\pi}{4\beta}$

$[\operatorname{Re} \beta > 0,\ a > 0]$. БХ [387] (8)

3 $\int\limits_0^\infty \cos ax \operatorname{cth} \beta x \frac{dx}{x} = -\ln\left(2 \operatorname{sh} \frac{a\pi}{2\beta}\right)$

$[\operatorname{Re} \beta > 0,\ a > 0]$. БХ [387] (9)

4.117

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{1+x^2} \operatorname{th} \frac{\pi x}{2} dx = a \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a \ln(2 \operatorname{sh} a)$

$[a > 0]$. БХ [388] (3)

2 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{1+x^2} \operatorname{th} \frac{\pi x}{4} dx = -\frac{\pi}{2} e^a + \operatorname{sh} a \ln \operatorname{cth} \frac{a}{2} +$

$+ 2 \operatorname{ch} a \operatorname{arctg}(e^a)$. БХ [388] (4)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{1+x^2} \operatorname{cth} \pi x\, dx = \frac{a}{2} e^{-a} - \operatorname{sh} a \ln(1 - e^{-a})$

$[a > 0]$. БХ [389] (5)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{1+x^2} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} x\, dx = \operatorname{sh} a \ln \operatorname{cth} \frac{a}{2}$ $[a > 0]$. БХ [389] (6)

5. $\int\limits_0^\infty \frac{x \cos ax}{1+x^2} \operatorname{th} \frac{\pi}{2} x\, dx = -ae^{-a} + \operatorname{sh} a \ln(1 - e^{-2a})$ $[a > 0]$. БХ [388] (7)

6. $\int\limits_0^\infty \frac{x \cos ax}{1+x^2} \operatorname{th} \frac{\pi}{4} x\, dx = -\frac{\pi}{2} e^a + \operatorname{ch} a \ln \operatorname{cth} \frac{a}{2} + 2 \operatorname{sh} a \operatorname{arctg}(e^a)$ $[a > 0]$.

БХ [388] (8)

7. $\int\limits_0^\infty \frac{x \cos ax}{1+x^2} \operatorname{cth} \pi x\, dx = -\frac{a}{2} e^{-a} - \frac{1}{2} - \operatorname{ch} a \ln(1 - e^{-a})$.

БХ [389] (15) *u*, ИПI 33 (31) *u*

8. $\int\limits_0^\infty \frac{x \cos ax}{1+x^2} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} x\, dx = -1 + \operatorname{ch} a \ln \operatorname{cth} \frac{a}{2}$ $[a > 0]$. БХ [389] (12)

9. $\int\limits_0^\infty \frac{x \cos ax}{1+x^2} \operatorname{cth} \frac{\pi}{4} x\, dx = -2 + \frac{\pi}{2} e^{-a} +$

$+ \operatorname{ch} a \ln \operatorname{cth} \frac{a}{2} + 2 \operatorname{sh} a \operatorname{arctg}(e^{-a})$ $[a > 0]$. БХ [389] (13)

4.118 $\int\limits_0^\infty \frac{x \sin ax}{\operatorname{ch}^2 x} dx = -\frac{d}{da}\left(\frac{\pi a}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi a}{2}}\right)$ $[a > 0]$. ИПI 89 (14)

4.119 $\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos px}{\operatorname{sh} qx}\cdot\frac{dx}{x} = \ln\left(\operatorname{ch}\frac{p\pi}{2q}\right)$. БХ [387] (2) и

4.121

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax - \sin bx}{\operatorname{ch} \beta x}\cdot\frac{dx}{x} = 2\operatorname{arctg}\frac{\exp\frac{a\pi}{2\beta}-\exp\frac{b\pi}{2\beta}}{1+\exp\frac{(a+b)\pi}{2\beta}}$ $[\operatorname{Re}\beta > 0]$. ГХ [336] (19b)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{\operatorname{sh} \beta x}\cdot\frac{dx}{x} = \ln\frac{\operatorname{ch}\frac{b\pi}{2\beta}}{\operatorname{ch}\frac{a\pi}{2\beta}}$ $[\operatorname{Re}\beta > 0]$. ГХ [336] (19a)

4.122

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos\beta x \sin\gamma x}{\operatorname{ch}\delta x}\cdot\frac{dx}{x} = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sh}\frac{\gamma\pi}{2\delta}}{\operatorname{ch}\frac{\beta\pi}{2\delta}}$ $[\operatorname{Re}\delta > |\operatorname{Im}(\beta+\gamma)|]$. ИП I 93 (46)

2. $\int\limits_0^\infty \sin^2 ax\,\frac{\operatorname{ch}\beta x}{\operatorname{sh} x}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\ln\frac{\operatorname{ch} 2a\pi+\cos\beta\pi}{1+\cos\beta\pi}$ $[|\operatorname{Re}\beta| < 1]$. БХ [387] (7)

4.123

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{\operatorname{ch} ax+\cos x}\cdot\frac{x\,dx}{x^2-\pi^2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{a}-\frac{1}{a}$. БХ [390] (1)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{\operatorname{ch} ax-\cos x}\cdot\frac{x\,dx}{x^2-\pi^2} = \frac{a}{1+a^2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{a}$. БХ [390] (2)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2ax-\cos 2x}\cdot\frac{x\,dx}{x^2-\pi^2} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{1+2a^2}{1+a^2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{a}$. БХ [390] (4)

4. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax\sin x}{\operatorname{ch} 2ax-\cos 2x}\cdot\frac{x\,dx}{x^2-\pi^2} = \frac{-1}{2a(1+a^2)}$. Ли [390] (3)

5. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{\operatorname{ch}\pi x+\cos\pi\beta}\cdot\frac{dx}{x^2+\gamma^2} = \frac{\pi e^{-a\gamma}}{2\gamma(\cos\gamma\pi+\cos\beta\pi)}+$

$$+\frac{1}{\operatorname{sh}\beta\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\exp[-(2k+1-\beta)a]}{\gamma^2-(2k+1-\beta)^2}-\frac{\exp[-(2k+1+\beta)a]}{\gamma^2-(2k+1+\beta)^2}\right\}$$

$[0 < \operatorname{Re}\beta < 1,\quad \operatorname{Re}\gamma > 0,\quad a > 0]$. ИП I 33 (27)

6. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax\operatorname{sh} bx}{\cos 2ax+\operatorname{ch} 2bx}x^{p-1}\,dx =$

$$= \frac{\Gamma(p)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}}\sin\left(p\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^p}$$

$[p > 0]$. БХ [364] (8)

7. $\int\limits_0^\infty \sin ax^2 \frac{\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi x}{2}}{\cos \pi x + \mathrm{ch}\,\pi x}\, x\, dx = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial \theta_1(z, q)}{\partial z}\right]_{z=0,\ q=e^{-2a}}$ $[a > 0]$. ИПI 93 (49)

4.124

1. $\int\limits_0^1 \frac{\cos px\, \mathrm{ch}\,(q\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2} J_0\left(\sqrt{p^2-q^2}\right)$. МО (40)

2. $\int\limits_u^\infty \cos ax\, \mathrm{ch}\,\sqrt{\beta(u^2-x^2)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{u^2-x^2}} = \frac{\pi}{2} J_0\left(\frac{u}{\sqrt{a^2-\beta^2}}\right)$. ИПI 34 (38)

4.125

1. $\int\limits_0^\infty \mathrm{sh}\,(a \sin x) \cos(a \cos x) \sin x \sin 2nx \frac{dx}{x} =$

$= \frac{(-1)^{n-1} a^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{\pi}{8}\left[1 + \frac{a^2}{2n(2n+1)}\right]$. Ли [367] (14)

2. $\int\limits_0^\infty \mathrm{ch}\,(a \sin x) \cos(a \cos x) \sin x \cos(2n-1)x \frac{dx}{x} =$

$= \frac{(-1)^{n-1} a^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} \frac{\pi}{8}\left[1 - \frac{a^2}{2n(2n-1)}\right]$. Ли [367] (15)

3. $\int\limits_0^\infty \mathrm{sh}\,(a \sin x) \cos(a \cos x) \cos x \cos 2nx \frac{dx}{x} =$

$= \frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{3\pi}{8} + \frac{(-1)^{n-1} a^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{\pi}{8}$.

Ли [367] (21)

4.126

1. $\int\limits_0^\infty \sin(a \cos bx)\, \mathrm{sh}\,(a \sin bx) \frac{x\, dx}{c^2-x^2} =$

$= \frac{\pi}{2}[\cos(a \cos bc)\, \mathrm{ch}\,(a \sin bc) - 1]$ $[b > 0]$. БХ [381] (2)

2. $\int\limits_0^\infty \sin(a \cos bx)\, \mathrm{ch}\,(a \sin bx) \frac{dx}{c^2-x^2} = \frac{\pi}{2c} \cos(a \cos bc)\, \mathrm{sh}\,(a \sin bc)$

$[b > 0,\ c > 0]$. БХ [381] (1)

3. $\int\limits_0^\infty \cos(a \cos bx)\, \mathrm{sh}\,(a \sin bx) \frac{x\, dx}{c^2-x^2} = \frac{\pi}{2}[a \cos bc - \sin(a \cos bc)\, \mathrm{ch}\,(a \sin bc)]$

$[b > 0]$. БХ [381] (4)

4. $\int\limits_0^\infty \cos(a \cos bx)\, \mathrm{ch}\,(a \sin bx) \frac{dx}{c^2-x^2} = -\frac{\pi}{2c} \sin(a \cos bc)\, \mathrm{sh}\,(a \sin bc)$

$[b > 0]$. БХ [381] (3)

4.13 Тригонометрические, гиперболические и показательная функции

4.131

1. $$\int_0^\infty \sin ax\,\mathrm{sh}^\nu \gamma x\cdot e^{-\beta x}\,dx =$$
$$= -\frac{i\Gamma(\nu+1)}{2^{\nu+2}\gamma}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{\beta-\nu\gamma-ai}{2\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+\nu\gamma-ai}{2\gamma}+1\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{\beta-\nu\gamma+ai}{2\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+\gamma\nu+ai}{2\gamma}+1\right)}\right\}$$
$[\mathrm{Re}\,\nu>-2,\ \mathrm{Re}\,\gamma>0,\ |\mathrm{Re}\,(\gamma\nu)|<\mathrm{Re}\,\beta]$. ИП I 91 (30) *u*

2. $$\int_0^\infty \cos ax\,\mathrm{sh}^\nu \gamma x\cdot e^{-\beta x}\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{2^{\nu+2}\gamma}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{\beta-\nu\gamma-ai}{2\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+\gamma\nu-ai}{2\gamma}+1\right)}+\frac{\Gamma\left(\frac{\beta-\nu\gamma+ai}{2\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+\nu\gamma+ai}{2\gamma}+1\right)}\right\}$$
$[\mathrm{Re}\,\nu>-1,\ \mathrm{Re}\,\gamma>0,\ |\mathrm{Re}\,(\gamma\nu)|<\mathrm{Re}\,\beta]$. ИП I 34 (40) *u*

3. $$\int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{\sin ax}{\mathrm{sh}\,\gamma x}\,dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{2a}{a^2+[\beta+(2k-1)\gamma]^2};$$ БХ [264] (9) *u*
$$= \frac{1}{2\gamma i}\left[\psi\left(\frac{\beta+\gamma+ia}{2\gamma}\right)-\psi\left(\frac{\beta+\gamma-ia}{2\gamma}\right)\right]$$
$[\mathrm{Re}\,\beta>|\mathrm{Re}\,\gamma|]$. ИП I 91 (28)

4. $$\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin ax}{\mathrm{sh}\,x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{cth}\frac{a\pi}{2}-\frac{1}{a}.$$ ИП I 91 (29)

4.132

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax\,\mathrm{sh}\,\beta x}{e^{\gamma x}-1}\,dx = -\frac{a}{2(a^2+\beta^2)}+\frac{\pi}{2\gamma}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\frac{2\pi a}{\gamma}}{\mathrm{ch}\,\frac{2\pi a}{\gamma}-\cos\frac{2\pi\beta}{\gamma}}+$$
$$+\frac{i}{2\gamma}\left[\psi\left(\frac{\beta}{\gamma}+i\frac{a}{\gamma}+1\right)-\psi\left(\frac{\beta}{\gamma}-i\frac{a}{\gamma}+1\right)\right]$$ $[\mathrm{Re}\,\gamma>|\mathrm{Re}\,\beta|,\ a>0]$.
ИП I 92 (33)

2. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax\,\mathrm{ch}\,\beta x}{e^{\gamma x}-1}\,dx = -\frac{a}{2(a^2+\beta^2)}+\frac{\pi}{2\gamma}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,\frac{2\pi a}{\gamma}}{\mathrm{ch}\,\frac{2\pi a}{\gamma}-\cos\frac{2\pi\beta}{\gamma}}$$ $[\mathrm{Re}\,\gamma>|\mathrm{Re}\,\beta|]$.
БХ [265] (5) *u*, ИП I 92 (34)

3. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax\,\mathrm{ch}\,\beta x}{e^{\gamma x}+1}\,dx = \frac{a}{2(a^2+\beta^2)}-\frac{\pi}{\gamma}\,\frac{\mathrm{sh}\,\frac{a\pi}{\gamma}\cos\frac{\beta\pi}{\gamma}}{\mathrm{ch}\,\frac{2a\pi}{\gamma}-\cos\frac{2\beta\pi}{\gamma}}$$ $[\mathrm{Re}\,\gamma>|\mathrm{Re}\,\beta|]$.
ИП I 92 (35)

4. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,\mathrm{sh}\,\beta x}{e^{\gamma x}-1}\,dx = \frac{\beta}{2(a^2+\beta^2)}-\frac{\pi}{2\gamma}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi\beta}{\gamma}}{\mathrm{ch}\,\frac{2a\pi}{\gamma}-\cos\frac{2\beta\pi}{\gamma}}$$ $[\mathrm{Re}\,\gamma>|\mathrm{Re}\,\beta|]$.
Ли [265] (8)

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax \operatorname{sh} \beta x}{e^{\gamma x}+1}\,dx = -\frac{\beta}{2(a^2+\beta^2)} + \frac{\pi}{\gamma}\,\frac{\sin\frac{\pi\beta}{\gamma}\operatorname{ch}\frac{\pi a}{\gamma}}{\operatorname{ch}\frac{2a\pi}{\gamma}-\cos\frac{2\beta\pi}{\gamma}}$ $[\operatorname{Re}\gamma > |\operatorname{Re}\beta|]$. ИП I 34 (39)

4.133

1. $\displaystyle\int_0^\infty \sin ax \operatorname{sh}\beta x \exp\left(-\frac{x^2}{4\gamma}\right)dx =$

$= \sqrt{\pi\gamma}\exp\gamma(\beta^2-a^2)\sin(2a\beta\gamma)$ $[\operatorname{Re}\gamma > 0]$. ИП I 92 (37)

2. $\displaystyle\int_0^\infty \cos ax \operatorname{ch}\beta x \exp\left(-\frac{x^2}{4\gamma}\right)dx =$

$= \sqrt{\pi\gamma}\exp\gamma(\beta^2-a^2)\cos(2a\beta\gamma)$ $[\operatorname{Re}\gamma > 0]$. ИП I 35 (41)

4.134

1. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\beta x^2}(\operatorname{ch}x+\cos x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\operatorname{ch}\frac{1}{4\beta}$ $[\operatorname{Re}\beta > 0]$. МХ 24

2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\beta x^2}(\operatorname{ch}x-\cos x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\operatorname{sh}\frac{1}{4\beta}$ $[\operatorname{Re}\beta > 0]$. МХ 24

4.135

1. $\displaystyle\int_0^\infty \sin ax^2 \operatorname{ch}2\gamma x\cdot e^{-\beta x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{\pi^2}{a^2+\beta^2}}\exp\left(-\frac{\beta\gamma^2}{a^2+\beta^2}\right)\times$

$\times\sin\left(\frac{a\gamma^2}{a^2+\beta^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a}{\beta}\right)$ $[\operatorname{Re}\beta > 0]$. Ли [268] (7)

2. $\displaystyle\int_0^\infty \cos ax^2 \operatorname{ch}2\gamma x\cdot e^{-\beta x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{\pi^2}{a^2+\beta^2}}\exp\left(-\frac{\beta\gamma^2}{a^2+\beta^2}\right)\times$

$\times\cos\left(\frac{a\gamma^2}{a^2+\beta^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a}{\beta}\right)$ $[\operatorname{Re}\beta > 0]$. Ли [268] (8)

4.136

1. $\displaystyle\int_0^\infty (\operatorname{sh}x^2+\sin x^2)\,e^{-\beta x^4}\,dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4\sqrt{\beta}}\,I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{8\beta}\right)\operatorname{ch}\frac{1}{8\beta}$ $[\operatorname{Re}\beta > 0]$. МХ 24

2. $\displaystyle\int_0^\infty (\operatorname{sh}x^2-\sin x^2)\,e^{-\beta x^4}\,dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4\sqrt{\beta}}\,I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{8\beta}\right)\operatorname{sh}\frac{1}{8\beta}$ $[\operatorname{Re}\beta > 0]$. МХ 24

3. $\displaystyle\int_0^\infty (\operatorname{ch}x^2+\cos x^2)\,e^{-\beta x^4}\,dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4\sqrt{\beta}}\,I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{8\beta}\right)\operatorname{ch}\frac{1}{8\beta}$ $[\operatorname{Re}\beta > 0]$. МХ 24

4. $\displaystyle\int_0^\infty (\operatorname{ch}x^2-\cos x^2)\,e^{-\beta x^4}\,dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4\sqrt{\beta}}\,I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{8\beta}\right)\operatorname{sh}\frac{1}{8\beta}$ $[\operatorname{Re}\beta > 0]$. МХ 24

4.137

1. $$\int_0^\infty \sin 2x^2 \operatorname{sh} 2x^2 e^{-\beta x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt[4]{128\beta^2}} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\beta}\right)\cos\left(\frac{1}{\beta}+\frac{\pi}{4}\right) \quad [\operatorname{Re}\beta>0].$$ МХд 32

2 $$\int_0^\infty \sin 2x^2 \operatorname{ch} 2x^2 e^{-\beta x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt[4]{128\beta^2}} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\beta}\right)\cos\left(\frac{1}{\beta}-\frac{\pi}{4}\right) \quad [\operatorname{Re}\beta>0].$$ МХд 32

3 $$\int_0^\infty \cos 2x^2 \operatorname{sh} 2x^2 e^{-\beta x^4}\,dx = \frac{-\pi}{\sqrt[4]{128\beta^2}} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\beta}\right)\sin\left(\frac{1}{\beta}-\frac{\pi}{4}\right) \quad [\operatorname{Re}\beta>0].$$ МХд 32

4 $$\int_0^\infty \cos 2x^2 \operatorname{ch} 2x^2 e^{-\beta x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt[4]{128\beta^2}} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\beta}\right)\sin\left(\frac{1}{\beta}+\frac{\pi}{4}\right) \quad [\operatorname{Re}\beta>0].$$ МХд 32

4.138

1 $$\int_0^\infty (\sin 2x^2 \operatorname{ch} 2x^2 + \cos 2x^2 \operatorname{sh} 2x^2)\, e^{-\beta x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt[4]{32\beta^2}} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\beta}\right)\cos\left(\frac{1}{\beta}\right) \quad [\operatorname{Re}\beta>0].$$ МХд 32

2 $$\int_0^\infty (\sin 2x^2 \operatorname{ch} 2x^2 - \cos 2x^2 \operatorname{sh} 2x^2)\, e^{-\beta x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt[4]{32\beta^2}} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\beta}\right)\sin\left(\frac{1}{\beta}\right) \quad [\operatorname{Re}\beta>0].$$ МХд 32

3 $$\int_0^\infty (\cos 2x^2 \operatorname{ch} 2x^2 + \sin 2x^2 \operatorname{sh} 2x^2)\, e^{-\beta x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt[4]{32\beta^2}} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\beta}\right)\cos\left(\frac{1}{\beta}\right) \quad [\operatorname{Re}\beta>0].$$ МХд 32

4 $$\int_0^\infty (\cos 2x^2 \operatorname{ch} 2x^2 - \sin 2x^2 \operatorname{sh} 2x^2)\, e^{-\beta x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt[4]{32\beta^2}} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\beta}\right)\sin\left(\frac{1}{\beta}\right) \quad [\operatorname{Re}\beta>0].$$ МХд 32

4.14 Тригонометрические, гиперболические, показательная и степенная функции

4.141

1 $$\int_0^\infty x e^{-\beta x^2} \operatorname{ch} x \sin x\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}\left(\cos\frac{1}{2\beta}+\sin\frac{1}{2\beta}\right) \quad [\operatorname{Re}\beta>0].$$ МХд 32

2 $$\int_0^\infty x e^{-\beta x^2} \operatorname{sh} x \cos x\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}\left(\cos\frac{1}{2\beta}-\sin\frac{1}{2\beta}\right) \quad [\operatorname{Re}\beta>0]$$ МХд 32

3. $\int_0^\infty x^2 e^{-\beta x^2} \operatorname{ch} x \cos x \, dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}} \left(\cos \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{\beta} \sin \frac{1}{2\beta} \right) \quad [\operatorname{Re} \beta > 0].$

МХд 32

4. $\int_0^\infty x^2 e^{-\beta x^2} \operatorname{sh} x \sin x \, dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}} \left(\sin \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{\beta} \cos \frac{1}{2\beta} \right) \quad [\operatorname{Re} \beta > 0].$

МХд 32

4.142

1. $\int_0^\infty x e^{-\beta x^2} (\operatorname{sh} x + \sin x) \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}} \operatorname{ch} \frac{1}{4\beta} \quad [\operatorname{Re} \beta > 0].$ МХ 24

2. $\int_0^\infty x e^{-\beta x^2} (\operatorname{sh} x - \sin x) \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}} \operatorname{sh} \frac{1}{4\beta} \quad [\operatorname{Re} \beta > 0].$ МХ 24

3. $\int_0^\infty x^2 e^{-\beta x^2} (\operatorname{ch} x + \cos x) \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{4\beta} + \frac{1}{2\beta} \operatorname{sh} \frac{1}{4\beta} \right) \quad [\operatorname{Re} \beta > 0].$

МХ 24

4. $\int_0^\infty x^2 e^{-\beta x^2} (\operatorname{ch} x - \cos x) \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}} \left(\operatorname{sh} \frac{1}{4\beta} + \frac{1}{2\beta} \operatorname{ch} \frac{1}{4\beta} \right) \quad [\operatorname{Re} \beta > 0].$

МХ 24

4.143

1. $\int_0^\infty x e^{-\beta x^2} (\operatorname{ch} x \sin x + \operatorname{sh} x \cos x) \, dx = \frac{1}{2\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \cos \frac{1}{2\beta} \quad [\operatorname{Re} \beta > 0].$ МХд 32

2. $\int_0^\infty x e^{-\beta x^2} (\operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x) \, dx = \frac{1}{2\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \sin \frac{1}{2\beta} \quad [\operatorname{Re} \beta > 0]$ МХд 32

4.144 $\int_0^\infty e^{-x^2} \operatorname{sh} x^2 \cos ax \frac{dx}{x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{a^2}{8}} - \frac{\pi a}{4} \left[1 - \Phi \left(\frac{a}{\sqrt{8}} \right) \right] \quad [a > 0].$

ИП I 35 (44)

4.145

1. $\int_0^\infty x e^{-\beta x^2} \operatorname{ch} (2ax \sin t) \sin (2ax \cos t) \, dx =$

$$= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}} \exp \left(-\frac{a^2}{\beta} \cos 2t \right) \cos \left(t - \frac{a^2}{\beta} \sin 2t \right)$$

$[\operatorname{Re} \beta > 0].$ БХ [363] (5)

2 $\int_0^\infty x e^{-\beta x^2} \operatorname{sh} (2ax \sin t) \cos (2ax \cos t) \, dx =$

$$= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}} \exp \left(-\frac{a^2}{\beta} \cos 2t \right) \sin \left(t - \frac{a^2}{\beta} \sin 2t \right)$$

$[\operatorname{Re} \beta > 0].$ БХ [363] (6)

4.2—4.4 ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

4.21 Логарифмическая функция

4.211

1. $$\int_e^\infty \frac{dx}{\ln\frac{1}{x}} = -\infty.$$ БХ [33] (9)

2. $$\int_0^u \frac{dx}{\ln x} = \operatorname{li} u.$$ Ф III 653, Ф II 606

4.212

1. $$\int_0^1 \frac{dx}{a+\ln x} = e^{-a}\,\overline{\mathrm{Ei}}(a).$$ БХ [31] (4)

2. $$\int_0^1 \frac{dx}{a-\ln x} = -e^{a}\,\mathrm{Ei}(-a).$$ БХ [31] (5)

3. $$\int_0^1 \frac{dx}{(a+\ln x)^2} = -\frac{1}{a} + e^{-a}\,\overline{\mathrm{Ei}}(a) \quad [a>0].$$ БХ [31] (14)

4. $$\int_0^1 \frac{dx}{(a-\ln x)^2} = \frac{1}{a} + e^{a}\,\mathrm{Ei}(-a) \quad [a>0].$$ БХ [31] (16)

5. $$\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{(a+\ln x)^2} = 1 + (1-a)\,e^{-a}\,\overline{\mathrm{Ei}}(a) \quad [a>0].$$ БХ [31] (15)

6. $$\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{(a-\ln x)^2} = 1 + (1+a)\,e^{a}\,\mathrm{Ei}(-a) \quad [a>0].$$ БХ [31] (17)

7. $$\int_1^e \frac{\ln x\,dx}{(1+\ln x)^2} = \frac{e}{2} - 1.$$ БХ [33] (10)

8. $$\int_0^1 \frac{dx}{(a+\ln x)^n} = \frac{1}{(n-1)!}\,a^{-a}\,\overline{\mathrm{Ei}}(a) - \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)!\,a^{k-n}$$ $$[a>0].$$ БХ [31] (22)

9. $$\int_0^1 \frac{dx}{(a-\ln x)^n} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\,e^{a}\,\mathrm{Ei}(-a) + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)!\,(-a)^{k-n}$$ $$[a>0].$$ БХ [31] (23)

В интегралах вида $\int \frac{(\ln x)^m}{[a^n+(\ln x)^n]^l}\,dx$ полезно сделать подстановку $x = e^{-t}$.

4.213

1. $$\int_0^1 \frac{dx}{a^2+(\ln x)^2} = \frac{1}{a}[\operatorname{ci}(a)\sin a - \operatorname{si}(a)\cos a] \qquad [a>0].$$ БХ [31] (6)

2. $$\int_0^1 \frac{dx}{a^2-(\ln x)^2} = \frac{1}{2a}[e^{-a}\overline{\operatorname{Ei}}(a) - e^{a}\operatorname{Ei}(-a)] \qquad [a>0],$$

(сравни 4.212 1. и 2.). БХ [31] (8)

3. $$\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{a^2+(\ln x)^2} = \operatorname{ci}(a)\cos(a) + \operatorname{si}(a)\sin a \qquad [a>0].$$ БХ [31] (7)

4. $$\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{a^2-(\ln x)^2} = -\frac{1}{2}[e^{-a}\overline{\operatorname{Ei}}(a) + e^{a}\operatorname{Ei}(-a)] \qquad [a>0],$$

(сравни 4.212 1. и 2.). БХ [31] (9)

5. $$\int_0^1 \frac{dx}{[a^2+(\ln x)^2]^2} = \frac{1}{2a^3}[\operatorname{ci}(a)\sin a - \operatorname{si}(a)\cos a] - \frac{1}{2a^2}[\operatorname{ci}(a)\cos a + \operatorname{si}(a)\sin a] \qquad [a>0].$$ Ли [31] (18)

6. $$\int_0^1 \frac{dx}{[a^2-(\ln x)^2]^2} = \frac{1}{4a^3}[(a-1)e^{a}\operatorname{Ei}(-a) + (1+a)e^{-a}\overline{\operatorname{Ei}}(a)] \qquad [a>0].$$ БХ [31] (20)

7. $$\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{[a^2+(\ln x)^2]^2} = \frac{1}{2a}[\operatorname{ci}(a)\sin a - \operatorname{si}(a)\cos a] - \frac{1}{2a^2} \qquad [a>0].$$ БХ [31] (19)

8. $$\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{[a^2-(\ln x)^2]^2} = \frac{1}{4a^2}\{2 + a[e^{a}\operatorname{Ei}(-a) - e^{-a}\overline{\operatorname{Ei}}(a)]\} \qquad [a>0].$$ Ли [31] (21)

4.214

1. $$\int_0^1 \frac{dx}{a^4-(\ln x)^4} = -\frac{1}{4a^3}[e^{a}\operatorname{Ei}(-a) - e^{-a}\overline{\operatorname{Ei}}(a) - 2\operatorname{ci}(a)\sin a + 2\operatorname{si}(a)\cos a] \qquad [a>0].$$ БХ [31] (10)

2. $$\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{a^4-(\ln x)^4} = -\frac{1}{4a^2}[e^{a}\operatorname{Ei}(-a) + e^{-a}\overline{\operatorname{Ei}}(a) - 2\operatorname{ci}(a)\cos a - 2\operatorname{si}(a)\sin a] \qquad [a>0].$$ БХ [31] (11)

3. $$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2\,dx}{a^4-(\ln x)^4} = -\frac{1}{4a}[e^{a}\operatorname{Ei}(-a) - e^{-a}\overline{\operatorname{Ei}}(a) + 2\operatorname{ci}(a)\sin a - 2\operatorname{si}(a)\cos a] \qquad [a>0].$$ БХ [31] (12)

4. $\int\limits_0^1 \frac{(\ln x)^3\,dx}{a^4-(\ln x)^4} = -\frac{1}{4}\left[e^a \operatorname{Ei}(-a) + e^{-a}\overline{\operatorname{Ei}}(a) + 2\operatorname{ci}(a)\cos a + 2\operatorname{si}(a)\sin a\right] \quad [a>0].$ БХ [31] (13)

4.215

1. $\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} dx = \Gamma(\mu) \quad [\operatorname{Re}\mu > 0].$ ФII 778

2 $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\mu}} = \frac{\pi}{\Gamma(\mu)}\operatorname{cosec}\mu\pi \quad [\operatorname{Re}\mu < 1].$ БХ [31] (1)

3 $\int\limits_0^1 \sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$ БХ [32] (1)

4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}} = \sqrt{\pi}.$ БХ [32] (3)

4.216 $\int\limits_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{\sqrt{(\ln x)^2-1}} = K_0(1).$ ГХ [321] (2)

4.22 Логарифмическая функция от более сложных аргументов

4.221

1. $\int\limits_0^1 \ln x \ln(1-x)\,dx = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$ БХ [30] (7)

2. $\int\limits_0^1 \ln x \ln(1+x)\,dx = 2 - \frac{\pi^2}{12} - 2\ln 2.$ БХ [30] (8)

3. $\int\limits_0^1 \ln\frac{1-ax}{1-a}\frac{dx}{\ln x} = -\sum_{k=1}^{\infty} a^k \frac{\ln(1+k)}{k} \quad [a<1].$ БХ [31] (3)

4.222

1 $\int\limits_0^{\infty} \ln\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\,dx = (a-b)\pi \quad [a>0,\ b>0].$ ГХ [322] (20)

2. $\int\limits_0^{\infty} \ln x \ln\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\,dx = \pi(b-a) + \pi\ln\frac{a^a}{b^b} \quad [a>0,\ b>0].$ БХ [33] (1)

3 $\int\limits_0^{\infty} \ln x \ln\left(1+\frac{b^2}{x^2}\right) dx = \pi b(\ln b - 1) \quad [b>0].$ БХ [33] (2)

4. $\int\limits_0^\infty \ln(1+a^2x^2)\ln\left(1+\frac{b^2}{x^2}\right)dx = 2\pi\left[\frac{1+ab}{a}\ln(1+ab)-b\right]$

$[a>0,\ b>0].$ БХ [33] (3)

5. $\int\limits_0^\infty \ln(a^2+x^2)\ln\left(1+\frac{b^2}{x^2}\right)dr = 2\pi[(a+b)\ln(a+b)-a\ln a-b]$

$[a>0,\ b>0].$ БХ [33] (4)

6. $\int\limits_0^\infty \ln\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)\ln\left(1+\frac{b^2}{x^2}\right)dx = 2\pi[(a+b)\ln(a+b)-a\ln a-b\ln b]$

$[a>0,\ b>0].$ БХ [33] (5)

7. $\int\limits_0^\infty \ln\left(a^2+\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(1+\frac{b^2}{x^2}\right)dx = 2\pi\left[\frac{1+ab}{a}\ln(1+ab)-b\ln b\right]$

$[a>0,\ b>0].$ БХ [33] (7)

4.223

1. $\int\limits_0^\infty \ln(1+e^{-x})\,dx = \frac{\pi^2}{12}.$ БХ [256] (10)

2. $\int\limits_0^\infty \ln(1-e^{-x})\,dx = -\frac{\pi^2}{6}.$ БХ [256] (11)

3. $\int\limits_0^\infty \ln(1+2e^{-x}\cos t+e^{-2x})\,dx = \frac{\pi^2}{6}-\frac{t^2}{2}$ $[|t|<\pi]$ БХ [256] (18)

4.224

1. $\int\limits_0^u \ln\sin x\,dx = L\left(\frac{\pi}{2}-u\right)-L\left(\frac{\pi}{2}\right).$ ЛоIII 186 (15)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{1}{2}G.$ БХ [285] (1)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$ ФII 629 и 643

4. $\int\limits_0^u \ln\cos x\,dx = -L(u).$ ЛоIII 184 (10)

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{2}G.$ БХ [286] (1)

6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$ БХ 3(6 (1)

7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin x)^2\,dx = \frac{\pi}{2}\left[(\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{12}\right].$ БХ [305] (19)

8. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \cos x)^2\,dx = \frac{\pi}{2}\left[(\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{12}\right].$ БХ [306] (14)

9. $\int\limits_0^{\pi} \ln(a + b\cos x)\,dx = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}$ $[a \geqslant |b| > 0]$. ГХ [322] (15)

10. $\int\limits_0^{\pi} \ln(1 \pm \sin x)\,dx = -\pi \ln 2 \pm 4G.$ ГХ [322] (16a)

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + a\sin x)^2\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + a\cos x)^2\,dx =$

$= \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{2}$ $[a^2 < 1]$;

$= -\pi \ln 2a$ $[a^2 > 1]$;

$= -\pi \ln 2 + 4G$ $[a = 1]$;

$= -\pi \ln 2 - 4G$ $[a = -1]$.

БХ [308] (5, 6, 7 и 8)

12. $\int\limits_0^{\pi} \ln(1 + a\cos x)^2\,dx = 2\pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{2}$ $[a^2 \leqslant 1]$. БХ [330] (1)

13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + 2a\sin x + a^2)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!}{(2k+1)\cdot(2k+1)!!}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^{2k+1}$

$[a^2 \leqslant 1]$. БХ [308] (24)

14. $\int\limits_0^{n\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx = 0$ $[a^2 < 1]$;

$= n\pi \ln a^2$ $[a^2 > 1]$.

ФИ II 142, 163 и 688

4.225

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x - \sin x)\,dx = -\frac{\pi}{8}\ln 2 - \frac{1}{2}G.$ ГХ [322] (9b)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x + \sin x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x + \sin x)\,dx = -\frac{\pi}{8}\ln 2 + \frac{1}{2}G.$

ГХ [322] (9a)

3. $$\int\limits_0^{2\pi} \ln(1 + a\sin x + b\cos x)\,dx = 2\pi \ln \frac{1+\sqrt{1-a^2-b^2}}{2}$$
$[a^2 + b^2 < 1]$. БХ [332] (2)

4. $$\int\limits_0^{2\pi} \ln(1 + a^2 + b^2 + 2a\sin x + 2b\cos x)\,dx =$$
$$= 0 \qquad [a^2 + b^2 \leqslant 1];$$
$$= 2\pi \ln(a^2 + b^2) \qquad [a^2 + b^2 \geqslant 1].$$
БХ [332] (3)

4.226

1. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x)^2\,dx = -2\pi \ln 2 \qquad [a^2 \leqslant 1];$$
$$= 2\pi \ln \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2} = 2\pi(\operatorname{Arch} a - \ln 2) \qquad [a > 1].$$
ФИ 644 и 687

2. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + a\sin^2 x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \ln(1 + a\sin^2 x)\,dx =$$
$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + a\cos^2 x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \ln(1 + a\cos^2 x)\,dx = \pi \ln \frac{1+\sqrt{1+a}}{2}$$
$[a \geqslant -1]$. БХ [308] (15), ГХ [322] (12)

3 $$\int\limits_0^{u} \ln(1 - \sin^2\alpha \sin^2 x)\,dx = (\pi - 2\theta)\ln \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} +$$
$$+ 2u \ln\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right) - \frac{\pi}{2}\ln 2 + L(\theta + u) - L(\theta - u) + L\left(\frac{\pi}{2} - 2u\right)$$
$\left[\operatorname{ctg}\theta = \cos\alpha \operatorname{tg} u;\ -\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}\right]$. ЛоIII 287

4 $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln[1 - \cos^2 x(\sin^2\alpha - \sin^2\beta \sin^2 x)]\,dx =$$
$$= \pi \ln\left[\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\cos^4\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}\right)\right]$$
$[\alpha > \beta > 0]$. ЛоIII 283

5 $$\int\limits_0^{u} \ln\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\alpha}\right)dx = -u\ln\sin^2\alpha - L\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + u\right) + L\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - u\right)$$
$\left[-\frac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2},\ |\sin u| \leqslant |\sin\alpha|\right]$. ЛоIII 287

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)\, dx = \pi \ln \frac{a+b}{2} \quad [a > 0,\ b > 0].$$ ГХ [322] (13)

7. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+\sin t \cos^2 x}{1-\sin t \cos^2 x}\, dx = \pi \ln \frac{1+\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} = \pi \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi - t}{4} \quad \left[|t| < \frac{\pi}{2} \right].$$ ЛоIII283

4.227

1. $$\int_0^{u} \ln \operatorname{tg} x\, dx = L(u) + L\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - L\left(\frac{\pi}{2}\right).$$ ЛоIII 186 (16)

2 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \operatorname{tg} x\, dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{tg} x\, dx = -G.$$ БХ [286] (11)

3 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln (a \operatorname{tg} x)\, dx = \frac{\pi}{2} \ln a \quad [a > 0].$$ БХ [307] (2)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln \operatorname{tg} x)^n\, dx = n!\, (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}.$$ БХ [286] (21)

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \operatorname{tg} x)^{2n}\, dx = 2\,(2n)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}}.$$ БХ [307] (15)

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \operatorname{tg} x)^{2n+1}\, dx = 0.$$ БХ [307] (14)

7. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln \operatorname{tg} x)^2\, dx = \frac{\pi^3}{16}.$$ БХ [286] (16)

8 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln \operatorname{tg} x)^4\, dx = \frac{5}{64} \pi^5.$$ БХ [286] (19)

9. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln (1 + \operatorname{tg} x)\, dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$ БХ [287] (1)

10. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 + G.$ БХ [308] (9)

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1-\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2 - G.$ БХ [287] (2)

12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\operatorname{tg} x)^2\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2 - 2G.$ БХ [308] (10)

13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{ctg} x)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2 + G.$ БХ [287] (3)

14. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\operatorname{ctg} x - 1)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$ БХ [287] (4)

15. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2.$

БХ [287] (5), БХ [308] (11)

16. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x)^2\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2.$

БХ [287] (6), БХ [308] (12)

17. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+b^2\operatorname{tg}^2 x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \ln(a^2+b^2\operatorname{tg}^2 x)\,dx = \pi\ln(a+b)$

$[a>0,\ b>0].$ ГХ [322] (17)

4.228

1 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin t\sin x + \sqrt{1-\cos^2 t\sin^2 x}\right)dx =$

$= \frac{\pi}{2}\ln 2 - 2L\left(\frac{t}{2}\right) - 2L\left(\frac{\pi-t}{2}\right).$ ЛоIII 290

2. $\int\limits_0^{u} \ln\left(\cos x + \sqrt{\cos^2 x - \cos^2 t}\right)dx = -\left(\frac{\pi}{2} - t - \varphi\right)\ln\cos t +$

$+\frac{1}{2}L(u+\varphi) - \frac{1}{2}L(u-\varphi) - L(\varphi)$

$\left[\cos\varphi = \frac{\sin u}{\sin t};\ 0 \leqslant u \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right].$ ЛоIII 290

3 $\int\limits_0^t \ln\left(\cos x + \sqrt{\cos^2 x - \cos^2 t}\right) dx = -\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \ln\cos t.$ ЛоIII 285

4 $\int\limits_0^u \ln \frac{\sin u + \sin t \cos x \sqrt{\sin^2 u - \sin^2 x}}{\sin u - \sin t \cos x \sqrt{\sin^2 u - \sin^2 x}}\, dx =$

$= \pi \ln\left[\operatorname{tg}\frac{t}{2}\sin u + \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\sin^2 u + 1}\right] \quad [t > 0,\ u > 0].$ ЛоIII 283

5 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\ln\operatorname{ctg} x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{(2k+1)^3}}.$ БХ [297] (9)

6 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{\ln\operatorname{ctg} x}} = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}.$ БХ [304] (24)

7 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} x}\right) dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} x}\right) dx =$

$= \frac{\pi}{8}\ln 2 + \frac{1}{2} G.$ БХ [287] (7), БХ [308] (22)

8 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{tg} x}\right)^2 dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{tg} x}\right)^2 dx =$

$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - G.$ БХ [287] (8), БХ [308] (23)

4.229

1 $\int\limits_0^1 \ln\left(\ln\frac{1}{x}\right) dx = -C.$ ФII 807

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)} = 0.$ БХ [31] (2)

3. $\int\limits_0^1 \ln\left(\ln\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}} = -(C + 2\ln 2)\sqrt{\pi}.$ БХ [32] (4)

4 $\int\limits_0^1 \ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} dx = \psi(\mu)\,\Gamma(\mu) \quad [\operatorname{Re}\mu > 0].$ БХ [30] (10)

В интегралах, в которых подынтегральная функция содержит $\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)$, полезно сделать подстановку $\ln\frac{1}{x} = u$, т. е. $x = e^{-u}$.

5 $\int\limits_0^1 \ln(a + \ln x)\, dx = \ln a - e^{-a}\,\overline{\mathrm{Ei}}(a) \quad [a > 0].$ БХ [30] (5)

6. $\int\limits_0^1 \ln(a-\ln x)\,dx = \ln a - e^a \operatorname{Ei}(-a) \quad [a>0].$ БХ [30] (6)

7. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \ln \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\pi}{2} \ln \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sqrt{2\pi} \right\}.$ БХ [308] (28)

4.23 Логарифмическая и рациональная функции

4.231

1. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx = -\frac{\pi^2}{12}.$ ФII 483 *и*

2. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}.$ ФII 714

3. $\int\limits_0^1 \frac{x\ln x}{1-x}\,dx = 1-\frac{\pi^2}{6}.$ БХ [108] (7)

4. $\int\limits_0^1 \frac{1+x}{1-x}\ln x\,dx = 1-\frac{\pi^2}{3}.$ БХ [108] (9)

5. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x+a)^2} = \frac{\ln a}{a} \quad [0<a<1].$ БХ [139] (1)

6. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx = -\ln 2.$ БХ [111] (1)

7. $\int\limits_0^\infty \ln x \frac{dx}{(a^2+b^2x^2)^n} = \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{4\cdot(n-1)!\,a^{2n-1}b}\left[2\ln\frac{a}{2b} - C - \psi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$

$[a>0,\ b>0].$ Ли [139] (3)

8. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{\pi}{2ab}\ln\frac{a}{b} \quad [ab>0].$ БХ [135] (6)

9. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln px}{q^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2q}\ln pq \quad [p>0,\ q>0].$ БХ [135] (4)

10. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{a^2-b^2x^2} = -\frac{\pi^2}{4ab} \quad [ab>0].$ Ли [135] (6)

11. $\int\limits_0^a \frac{\ln x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi\ln a}{4a} - \frac{G}{a} \quad [a>0].$ ГХ [324] (7b)

12. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -G.$ ФII 482, ФII 614

13. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1-x^2} = -\frac{\pi^2}{8}$. БХ [108] (11)

14. $\int\limits_0^1 \frac{x\ln x}{1+x^2}\,dx = -\frac{\pi^2}{48}$. ГХ [324] (7b)

15. $\int\limits_0^1 \frac{x\ln x}{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi^2}{24}$.

16. $\int\limits_0^1 \ln x\,\frac{1-x^{2n+2}}{(1-x^2)^2}\,dx = -\frac{(n+1)\pi^2}{8} + \sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{(2k-1)^2}$. БХ [111] (5)

17. $\int\limits_0^1 \ln x\,\frac{1+(-1)^n x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{(n+1)\pi^2}{12} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\frac{n-k+1}{k^2}$. БХ [111] (2)

18. $\int\limits_0^1 \ln x\,\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}\,dx = -\frac{(n+1)\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{k^2}$. БХ [111] (3)

4.232

1. $\int\limits_u^v \frac{\ln x\,dx}{(x+u)(x+v)} = \frac{\ln uv}{2(v-u)}\ln\frac{(u+v)^2}{4uv}$. БХ [145] (32)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x+\beta)(x+\gamma)} = \frac{(\ln\beta)^2-(\ln\gamma)^2}{2(\beta-\gamma)}$ $[|\arg\beta| < \pi,\ |\arg\gamma| < \pi]$. ИПІІ 218 (24)

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{x+a}\cdot\frac{dx}{x-1} = \frac{\pi^2+(\ln a)^2}{2(a+1)}$ $[a > 0]$. БХ [140] (10)

4.233

1. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1+x+x^2} = -0{,}781\,302\,412\,9\ \ldots$ Ли [113] (1)

2. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1-x+x^2} = -1{,}171\,953\,619\,35\ \ldots$ Ли [113] (3)

3. $\int\limits_0^1 \frac{x\ln x\,dx}{1+x+x^2} = -0{,}157\,660\,149\,15\ \ldots$ Ли [113] (2)

4. $\int\limits_0^1 \frac{x\ln x\,dx}{1-x+x^2} = -0{,}311\,821\,131\,9\ \ldots$ Ли [113] (4)

5. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^2+2xa\cos t+a^2} = \frac{t\ln a}{a\sin t}$ $[a > 0,\ 0 < t < \pi]$. ГХ [324] (13c)

4.234

1. $\int_1^\infty \frac{\ln x\,dx}{(1+x^2)^2} = \ln 2$ БХ [144] (18) и

2. $\int_0^1 \frac{x \ln x\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{4}\ln 2.$ БХ [111] (4)

3. $\int_0^\infty \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\ln x\,dx = 0.$ БХ [142] (2) и

4. $\int_0^\infty \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\ln x\,dx = -\frac{\pi}{2}.$ БХ [142] (1) и

5. $\int_0^1 \frac{x^2 \ln x\,dx}{(1-x^2)(1+x^4)} = -\frac{\pi^2}{16(2+\sqrt{2})}.$ БХ [112] (21)

6. $\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{(a^2+b^2x^2)(1+x^2)} = \frac{b\pi}{2a(b^2-a^2)}\ln\frac{a}{b} \quad [ab>0].$ БХ [317] (16) и

7. $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\frac{dx}{1+b^2x^2} = \frac{\pi}{2(1-a^2b^2)}\left(\frac{1}{a}\ln a + b\ln b\right)$
$[a>0, \quad b>0].$ Ли [140] (12)

8. $\int_0^\infty \frac{x^2 \ln x\,dx}{(a^2+b^2x^2)(1+x^2)} = \frac{a\pi}{2b(b^2-a^2)}\ln\frac{b}{a} \quad [ab>0].$
Ли [140] (12), БХ [317] (15) и

4.235

1. $\int_0^\infty \ln x \frac{(1-x)x^{n-2}}{1-x^{2n}}\,dx = -\frac{\pi^2}{4n^2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n} \quad [n>1].$ БХ [135] (10)

2. $\int_0^\infty \ln x \frac{(1-x^2)x^{m-1}}{1-x^{2n}}\,dx = -\frac{\pi^2 \sin\frac{m+1}{n}\pi \sin\frac{\pi}{n}}{4n^2\sin^2\frac{m\pi}{2n}\sin^2\left(\frac{m+2}{2n}\pi\right)}$ Ли [135] (12)

3. $\int_0^\infty \ln x \frac{(1-x^2)x^{n-2}}{1-x^{2n}}\,dx = -\frac{\pi^2}{4n^2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n} \quad [n>2].$ БХ [135] (11)

4. $\int_0^1 \ln x \frac{x^{m-1}+x^{n-m-1}}{1-x^n}\,dx = -\frac{\pi^2}{n^2\sin^2\left(\frac{m}{n}\pi\right)} \quad [n>m]$ БХ [108] (15)

4.236

1. $\int_0^1 \left\{\frac{1+(p-1)\ln x}{1-x} + \frac{x\ln x}{(1-x)^2}\right\} x^{p-1}\,dx = -1+\psi'(p) \quad [p>0].$
БХ [111] (6) и, ГХ [326] (13)

2. $\int_0^1 \left[\frac{1}{1-x} + \frac{x\ln x}{(1-x)^2}\right] dx = \frac{\pi^2}{6} - 1.$ ГХ [326] (13а)

4.24 Логарифмическая и алгебраическая функции

4.241

1. $$\int_0^1 \frac{x^{2n}\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}-\ln 2\right).$$

БХ [118] (5) *и*

2. $$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\left(\ln 2+\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}\right).$$ БХ [118] (5) *и*

3. $$\int_0^1 x^{2n}\sqrt{1-x^2}\ln x\,dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}-\frac{1}{2n+2}-\ln 2\right).$$

Ли [117] (4), ГХ [324] (53а)

4. $$\int_0^1 x^{2n+1}\sqrt{1-x^2}\ln x\,dx = \frac{(2n)!!}{(2n+3)!!}\left(\ln 2+\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}-\frac{1}{2n+3}\right).$$

БХ [117] (5), ГХ [324] (53b)

5. $$\int_0^1 \ln x\cdot\sqrt{(1-x^2)^{2n-1}}dx = -\frac{(2n-1)!!}{4\cdot(2n)!!}\pi\left[\psi(n+1)+C+\ln 4\right].$$

БХ [117] (3)

6. $$\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{1}{2}G.$$ БХ [145] (1)

7. $$\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$ ФИ II 614 и 643

8. $$\int_1^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = 1-\ln 2.$$ БХ [144] (17)

9. $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ln x\,dx = -\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\ln 2.$$ БХ [117] (1), ГХ [324] (53с)

10. $$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\ln x\,dx = \frac{1}{3}\ln 2-\frac{4}{9}.$$ БХ [117] (2)

11. $$\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x(1-x^4)}} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{8}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.$$ ГХ [324] (54а)

4.242

1. $$\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(x^2+b^2)}} = \frac{1}{2a}K\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)\ln ab \quad [a>b>0].$$

БФ (800.04)

2. $$\int_0^b \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}\left[\boldsymbol{K}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\ln ab - \frac{\pi}{2}\boldsymbol{K}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right] \quad [a>0,\quad b>0].$$ БФ (800.02)

3. $$\int_b^\infty \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}\left[\boldsymbol{K}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\ln ab + \frac{\pi}{2}\boldsymbol{K}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right] \quad [a>0,\quad b>0].$$ БФ (800.06)

4. $$\int_0^b \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{2a}\left[\boldsymbol{K}\left(\frac{b}{a}\right)\ln ab - \frac{\pi}{2}\boldsymbol{K}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)\right] \quad [a>b>0].$$ БФ (800.01)

5. $$\int_b^a \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{2a}\boldsymbol{K}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)\ln ab.$$ БФ (800.03)

6. $$\int_a^\infty \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}} = \frac{1}{2a}\left[\boldsymbol{K}\left(\frac{b}{a}\right)\ln ab + \frac{\pi}{2}\boldsymbol{K}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)\right] \quad [a>b>0].$$ БФ (800.05)

4.243 $$\int_0^1 \frac{x\ln x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = -\frac{\pi}{8}\ln 2.$$ ГХ [324] (56b)

4.244

1. $$\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)^2}} = -\frac{1}{8}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^3.$$ ГХ [324] (54b)

2. $$\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left(\ln 3 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right).$$ БХ [118] (7)

3. $$\int_0^1 \frac{x\ln x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \ln 3\right).$$ БХ [118] (8)

4.245

1. $$\int_0^1 \frac{x^{4n+1}\ln x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{8}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2\right).$$ ГХ [324] (56a)

2. $$\int_0^1 \frac{x^{4n+3}\ln x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{(2n)!!}{4\cdot(2n+1)!!}\left(\ln 2 + \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}\right).$$ ГХ [324] (56c)

4.246 $$\int_0^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\ln x\,dx = -\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{4}\left[2\ln 2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right].$$ ГХ [324] (55)

4.247

1. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt[n]{1-x^{2n}}}\,dx = -\frac{\pi B\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right)}{8n^2 \sin\frac{\pi}{2n}}$ $[n>1]$. ГХ [324] (54с) и

2. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt[n]{x^{n-1}(1-x^2)}} = -\frac{\pi B\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right)}{8\sin\frac{\pi}{2n}}$. ГХ [324] (54)

4.25 Логарифмическая и степенная функции

4.251

1. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\ln x}{\beta+x}\,dx = \frac{\pi\beta^{\mu-1}}{\sin\mu\pi}(\ln\beta - \pi\operatorname{ctg}\mu\pi)$
$[|\arg\beta|<\pi, \quad 0<\operatorname{Re}\mu<1]$. БХ [135] (1)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\ln x}{a-x}\,dx = \pi a^{\mu-1}\left(\operatorname{ctg}\mu\pi\ln a - \frac{\pi}{\sin^2\mu\pi}\right)$
$[a>0, \quad 0<\operatorname{Re}\mu<1]$. ИП I 314 (5)

3. $\int\limits_0^1 \frac{x^{\mu-1}\ln x}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\beta(\mu)$ $[\operatorname{Re}\mu>0]$. ГХ [324] (6), ИП I 314 (3)

4 $\int\limits_0^1 \frac{x^{\mu-1}\ln x}{1-x}\,dx = -\psi'(\mu) = -\zeta(2, \mu)$ $[\operatorname{Re}\mu>0]$. БХ [108] (8)

5 $\int\limits_0^1 \ln x\,\frac{x^{2n}\,dx}{1+x} = -\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$. БХ [108] (4)

6. $\int\limits_0^1 \ln x\,\frac{x^{2n-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k^2}$. БХ [108] (5)

4.252

1 $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\ln x}{(x+\beta)(x+\gamma)}\,dx = \frac{\pi}{(\gamma-\beta)\sin\mu\pi}[\beta^{\mu-1}\ln\beta - \gamma^{\mu-1}\ln\gamma -$
$-\pi\operatorname{ctg}\mu\pi(\beta^{\mu-1}-\gamma^{\mu-1})]$ $[|\arg\beta|<\pi, \quad |\arg\gamma|<\pi,$
$0<\operatorname{Re}\mu<2, \ \mu\neq 1]$. БХ [140] (9) и, ИП I 314 (6)

2 $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\ln x\,dx}{(x+\beta)(x-1)} = \frac{\pi}{(\beta+1)\sin^2\mu\pi}[\pi - \beta^{\mu-1}(\sin\mu\pi\ln\beta - \pi\cos\mu\pi)]$
$[|\arg\beta|<\pi, \quad 0<\operatorname{Re}\mu<2, \quad \mu\neq 1]$. БХ [140] (11)

3 $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln x}{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi^2}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{p\pi}{2}$ $[0<p<2]$

(см. также 4.254 2.).

4. $$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\ln x}{(x+a)^2}\,dx = \frac{(1-\mu)\,a^{\mu-2}\pi}{\sin\mu\pi}\left(\ln a - \pi\operatorname{ctg}\mu\pi + \frac{1}{\mu-1}\right)$$

$[a>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu\leqslant 2\ (\mu\neq 1)]$. ГХ [324] (13b)

4.253

1. $$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x^r)^{\nu-1}\ln x\,dx = \frac{1}{r^2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\mu}{r},\ \nu\right)\left[\psi\left(\frac{\mu}{r}\right)-\psi\left(\frac{\mu}{r}+\nu\right)\right]$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0,\ r>0]$. ГХ [324] (3b) *и*, БХ [107] (5) *и*

2. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{p+1}}\ln x\,dx = -\frac{\pi}{p}\operatorname{cosec}p\pi \quad [0<p<1].$$ БХ [319] (10) *и*

3. $$\int_u^\infty \frac{(x-u)^{\mu-1}\ln x\,dx}{x^\lambda} = u^{\mu-\lambda}\mathrm{B}(\lambda-\mu,\ \mu)\left[\ln u+\psi(\lambda)-\psi(\lambda-\mu)\right]$$

$[0<\operatorname{Re}\mu<\operatorname{Re}\lambda]$. ИПII 203 (18)

4. $$\int_0^1 \ln x\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right)^p\frac{dx}{x} = \frac{\ln a}{2a^p}\,\mathrm{B}\left(\frac{p}{2},\ \frac{p}{2}\right)$$

$[a>0,\quad p>0]$. БХ [140] (6)

5. $$\int_1^\infty (x-1)^{p-1}\ln x\,dx = \frac{\pi}{p}\operatorname{cosec}\pi p \quad [-1<p<0].$$ БХ [289] (12) *и*

6. $$\int_0^\infty \ln x\,\frac{dx}{(a+x)^{\mu+1}} = \frac{1}{\mu a^\mu}\left(\ln a - C - \psi(\mu)\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\quad a\neq 0,\quad \mu-a$ **не равно натуральному числу**$]$ НИ 68 (7)

7. $$\int_0^\infty \ln x\,\frac{dx}{(a+x)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{2}{(2n-1)a^{n-\frac{1}{2}}}\left(\ln a + 2\ln 2 - \sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=n-1}^{2n-3}\frac{1}{k}\right)$$

$[a>0]$. БХ [142] (5)

4.254

1. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\ln x}{1-x^q}\,dx = -\frac{1}{q^2}\,\psi'\left(\frac{p}{q}\right) \quad [p>0,\quad q>0].$$ ГХ [324] (5)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln x}{1-x^q}\,dx = -\frac{\pi^2}{q^2\sin^2\frac{p\pi}{q}} \quad [0<p<q].$$ БХ [135] (8)

3. $$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^q-1}\,\frac{dx}{x^p} = \frac{\pi^2}{q^2\sin^2\frac{p-1}{q}\pi} \quad [p<1,\ p+q>1].$$ БХ [140] (2)

4. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x^q}\,dx = \frac{1}{2q^2}\,\beta\left(\frac{p}{q}\right) \quad [p>0,\ q>0].$$ ГХ [324] (7)

5 $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x^q}\,dx = -\frac{\pi^2}{q^2}\frac{\cos\frac{p\pi}{q}}{\sin^2\frac{p\pi}{q}}$ $[0<p<q]$. БХ [135] (7)

6. $\int\limits_0^1 \frac{x^{q-1}\ln x}{1-x^{2q}}\,dx = -\frac{\pi^2}{8q^2}$ $[q>0]$. БХ [108] (12)

4.255

1 $\int\limits_0^1 \ln x\,\frac{(1-x^2)\,x^{p-2}}{1+x^{2p}}\,dx = -\left(\frac{\pi}{2p}\right)^2\frac{\sin\frac{\pi}{2p}}{\cos^2\frac{\pi}{2p}}$ $[p>1]$. БХ [108] (13)

2. $\int\limits_0^1 \ln x\,\frac{(1+x^2)\,x^{p-2}}{1-x^{2p}}\,dx = -\left(\frac{\pi}{2p}\right)^2\sec^2\frac{\pi}{2p}$ $[p>1]$. БХ [108] (14)

3 $\int\limits_0^\infty \ln x\,\frac{1-x^p}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{4}\operatorname{tg}^2\frac{p\pi}{2}$ $[p<1]$. БХ [140] (3)

4.256 $\int\limits_0^1 \ln\frac{1}{x}\,\frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}} = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\mu}{n},\,\frac{m}{n}\right)\left[\psi\left(\frac{\mu+m}{n}\right)-\psi\left(\frac{\mu}{n}\right)\right]$

$[\operatorname{Re}\mu>0]$. Ли [118] (12)

4.257

1. $\int\limits_0^\infty \frac{x^\nu\ln\frac{x}{\beta}\,dx}{(x+\beta)(x+\gamma)} = \frac{\pi\left[\gamma^\nu\ln\frac{\gamma}{\beta}+\pi(\beta^\nu-\gamma^\nu)\operatorname{ctg}\nu\pi\right]}{\sin\nu\pi\,(\gamma-\beta)}$

$[|\arg\beta|<\pi,\ |\arg\gamma|<\pi,\ |\operatorname{Re}\nu|<1]$. ИПII 219 (30)

2 $\int\limits_0^\infty \ln\frac{x}{q}\left(\frac{x^p}{q^{2p}+x^{2p}}\right)\frac{dx}{x} = 0$ $[q>0]$. БХ [140] (4) *и*

3 $\int\limits_0^\infty \ln\frac{x}{q}\left(\frac{x^p}{q^{2p}+x^{2p}}\right)^r\frac{dx}{q^2+x^2} = 0$ $[q>0]$. БХ [140] (4) *и*

4. $\int\limits_0^\infty \ln x\ln\frac{x}{a}\,\frac{dx}{(x-1)(x-a)} = \frac{[4\pi^2+(\ln a)^2]\ln a}{6(a-1)}$ $[a>0]$,

[$a=1$ см. 4.261 5.]. БХ [141] (5)

5. $\int\limits_0^\infty \ln x\ln\frac{x}{a}\,\frac{x^p\,dx}{(x-1)(x-a)} = \frac{\pi^2[(a^p+1)\ln a-2\pi(a^p-1)\operatorname{ctg}p\pi]}{(a-1)\sin^2 p\pi}$

$[p^2<1,\ a>0]$. БХ [141] (6)

4.26—4.27 Степени логарифма и степенная функция

4.261

1. $\int\limits_0^1 (\ln x)^2\,\frac{dx}{1+2x\cos t+x^2} = \frac{t(\pi^2-t^2)}{6\sin t}$. БХ [113] (7)

2. $$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2\,dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2\,dx}{x^2-x+1} = \frac{10\pi^3}{81\sqrt{3}}.$$ ГХ [324] (16c)

3. $$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2\,dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2\,dx}{x^2+x+1} = \frac{8\pi^3}{81\sqrt{3}}.$$ ГХ [324] (16b)

4. $$\int_0^\infty (\ln x)^2 \frac{dx}{(x-1)(x+a)} = \frac{[\pi^2+(\ln a)^2]\ln a}{3(1+a)}.$$ БХ [141] (1)

5. $$\int_0^\infty (\ln x)^2 \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{2}{3}\pi^2.$$ БХ [139] (4)

6. $$\int_0^1 (\ln x)^2 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi^3}{16}.$$ БХ [109] (3)

7. $$\int_0^1 (\ln x)^2 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\ln x)^2 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{3\sqrt{2}}{64}\pi^3.$$

БХ [109] (5), БХ [135] (13

8. $$\int_0^1 (\ln x)^2 \frac{1-x}{1-x^6}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{27}\pi^3.$$ БХ [109] (6)

9. $$\int_0^1 (\ln x)^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\left[(\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{12}\right].$$ БХ [118] (13)

10. $$\int_0^\infty (\ln x)^2 \frac{x^{\mu-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi^3(2-\sin^2\mu\pi)}{\sin^3\mu\pi} \qquad [0 < \operatorname{Re}\mu < 1].$$ ИП I 315 (10)

11. $$\int_0^1 (\ln x)^2 \frac{x^n\,dx}{1+x} = 2\sum_{k=n}^\infty \frac{(-1)^{n+k}}{(k+1)^3}.$$ БХ [109] (1)

12. $$\int_0^1 (\ln x)^2 \frac{x^n\,dx}{1-x} = 2\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{(k+1)^3}.$$ БХ [109] (2)

13. $$\int_0^1 (\ln x)^2 \frac{x^{2n}\,dx}{1-x^2} = 2\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{(2k+1)^3}.$$ БХ [109] (4)

14. $$\int_0^\infty (\ln x)^2 \frac{x^{p-1}\,dx}{x^2+2x\cos t+1} = \frac{\pi\sin(1-p)t}{\sin t\,\sin p\pi}\times$$
$$\times\{\pi^2 - t^2 + 2\pi\operatorname{ctg} p\pi\,[\pi\operatorname{ctg} p\pi + t\operatorname{ctg}(1-p)t]\}$$
$$[0 < t < \pi,\ 0 < p < 2\ (p \neq 1)].$$ ГХ [324] (17)

15. $$\int_0^1 (\ln x)^2 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2n-1)!!}{2\cdot(2n)!!}\pi\left\{\frac{\pi^3}{12} + \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^2} + \left[\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k} + \ln 2\right]^2\right\}.$$

ГХ [324] (60a)

16 $\int\limits_0^1 (\ln x)^2 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\left\{-\frac{\pi^2}{12} - \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k^2} + \left[\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k} + \ln 2\right]^2\right\}.$ ГХ [324] (60b)

17. $\int\limits_0^1 (\ln x)^2 x^{\mu-1} (1-x)^{\nu-1}\,dx = \mathrm{B}(\mu, \nu)\{[\psi(\mu) - \psi(\nu+\mu)]^2 + \psi'(\mu) - \psi'(\mu+\nu)\}$ $[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0].$ ИП I 315 (11)

18 $\int\limits_0^1 (\ln x)^2 \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}\,dx = 2(n+1)\zeta(3) - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{k^3}.$ Ли [111] (8)

19 $\int\limits_0^1 (\ln x)^2 \frac{1+(-1)^n x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx = \frac{3}{2}(n+1)\zeta(3) - 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{n-k+1}{k^3}.$ Ли [111] (7)

20 $\int\limits_0^1 (\ln x)^2 \frac{1-x^{2n+2}}{(1-x)^2}\,dx = 2(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{(2k-1)^3}.$ Ли [111] (9)

21. $\int\limits_0^1 (\ln x)^2 x^{p-1} (1-x^r)^{q-1}\,dx = \frac{1}{r^3}\mathrm{B}\left(\frac{p}{r}, q\right)\left\{\psi'\left(\frac{p}{r}\right) - \psi'\left(\frac{p}{r}+q\right) + \left[\psi\left(\frac{p}{r}\right) - \psi\left(\frac{p}{r}+q\right)\right]^2\right\}$ $[p > 0,\ q > 0,\ r > 0].$ ГХ [324] (8a)

4.262

1 $\int\limits_0^1 (\ln x)^3 \frac{dx}{1+x} = -\frac{7}{120}\pi^4.$ БХ [109] (9)

2. $\int\limits_0^1 (\ln x)^3 \frac{dx}{1-x} = -\frac{\pi^4}{15}.$ БХ [109] (11)

3. $\int\limits_0^\infty (\ln x)^3 \frac{dx}{(x+a)(x-1)} = \frac{[\pi^2 + (\ln a)^2]^2}{4(a+1)}$ $[a > 0].$ БХ [141] (2)

4 $\int\limits_0^1 (\ln x)^3 \frac{x^n\,dx}{1+x} = (-1)^{n+1}\left[\frac{7\pi^4}{120} - 6\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(k+1)^4}\right].$ БХ [109] (10)

5 $\int\limits_0^1 (\ln x)^3 \frac{x^n\,dx}{1-x} = -\frac{\pi^4}{15} + 6\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^4}.$ БХ [109] (12)

6. $\int\limits_0^1 (\ln x)^3 \frac{x^{2n}\,dx}{1-x^2} = -\frac{\pi^4}{16} + 6\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2k+1)^4}.$ БХ [109] (14)

7. $\int\limits_0^1 (\ln x)^3 \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}\,dx = -\frac{(n+1)\,\pi^4}{15} + 6\sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{k^4}$. БХ [111] (11)

8. $\int\limits_0^1 (\ln x)^3 \frac{1+(-1)^n x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{7\,(n+1)\,\pi^4}{120} + 6\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\,\frac{n-k+1}{k^4}$.

БХ [111] (10)

9. $\int\limits_0^1 (\ln x)^3 \frac{1-x^{2n+2}}{(1-x^2)^2}\,dx = -\frac{(n+1)\,\pi^4}{16} + 6\sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{(2k-1)^4}$. БХ [111] (12)

4.263

1. $\int\limits_0^\infty (\ln x)^4 \frac{dx}{(x-1)(x+a)} = \frac{\ln a\,[\pi^2+(\ln a)^2]^2\,[7\pi^2+3\,(\ln a)^2]}{15\,(1+a)}$

$[a>0]$. БХ [141] (3)

2. $\int\limits_0^1 (\ln x)^4 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{5\pi^5}{64}$. БХ [109] (17)

3. $\int\limits_0^1 (\ln x)^4 \frac{dx}{1+2x\cos t+x^2} = \frac{t\,(\pi^2-t^2)\,(7\pi^2-3t^2)}{30\sin t}$ $[\,|t|<\pi]$. БХ [113] (8)

4.264

1. $\int\limits_0^1 (\ln x)^5 \frac{dx}{1+x} = -\frac{31\pi^6}{252}$. БХ [109] (20)

2. $\int\limits_0^1 (\ln x)^5 \frac{dx}{1-x} = -\frac{8\pi^6}{63}$. БХ [109] (21)

3. $\int\limits_0^\infty (\ln x)^5 \frac{dx}{(x-1)(x+a)} = \frac{[\pi^2+(\ln a)^2]^2\,[3\pi^2+(\ln a)^2]}{6\,(1+a)}$

$[a>0]$. БХ [141] (4)

4.265 $\int\limits_0^1 (\ln x)^6 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{61\pi^7}{256}$. БХ [109] (25)

4.266

1. $\int\limits_0^1 (\ln x)^7 \frac{dx}{1+x} = -\frac{127\pi^8}{240}$. БХ [109] (28)

2. $\int\limits_0^1 (\ln x)^7 \frac{dx}{1-x} = -\frac{8\pi^8}{15}$. БХ [109] (29)

4.267

1. $\int\limits_0^1 \frac{1-x}{1+x}\frac{dx}{\ln x} = \ln\frac{2}{\pi}$. БХ [127] (3)

2. $$\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1+x^2}\frac{dx}{\ln x} = \ln\frac{\pi}{4}.$$ БХ [128] (2)

3. $$\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1+2x\cos\frac{m\pi}{n}+x^2}\cdot\frac{dx}{\ln x} = \frac{1}{\sin\frac{m\pi}{n}}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\sin\frac{km\pi}{n}\times$$
$$\times\ln\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{n+k+1}{2n}\right)\right\}^2\Gamma\left(\frac{k+2}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2n}\right)}{\left\{\Gamma\left(\frac{k+1}{2n}\right)\right\}^2\Gamma\left(\frac{n+k}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{n+k+2}{2n}\right)}\qquad [m+n\text{ — нечетно}];$$
$$= \frac{1}{\sin\frac{m\pi}{n}}\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^k\sin\frac{km\pi}{n}\times$$
$$\times\ln\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{n}\right)\right\}^2\Gamma\left(\frac{k+2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)}{\left\{\Gamma\left(\frac{k+1}{n}\right)\right\}^2\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-k+2}{n}\right)}\qquad [m+n\text{ — четно}];$$
$[m<n]$. БХ [130] (3)

4. $$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{dx}{\ln x} = -\frac{\ln 2}{2}.$$ БХ [130] (16)

5. $$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{dx}{\ln x} = \ln\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$ БХ [130] (17)

6. $$\int_0^1 (1-x)^p\frac{dx}{\ln x} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{k}\ln(1+k)\qquad [p\geqslant 1].$$ БХ [123] (2)

7. $$\int_0^1 \left(\frac{1-x^p}{1-x}-p\right)\frac{dx}{\ln x} = \ln\Gamma(p+1).$$ ГХ [326] (10)

8. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}\,dx = \ln\frac{p}{q}\qquad [p>0,\ q>0].$$ Ф II 647

9. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}\cdot\frac{dx}{1+x} = \ln\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}\qquad [p>0,\ q>0].$$ Ф II 186

10. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{(1+x)\ln x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{(1+x)\ln x}\,dx = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{p\pi}{2}\right)\qquad [0<p<1].$$ Ф II 816

11. $$\int_0^1 (x^p-x^q)\,x^{r-1}\frac{dx}{\ln x} = \ln\frac{p+r}{r+q}\qquad [r>0,\ p>0,\ q>0].$$ Ли [123] (5)

12. $$\int_0^1 \frac{x^p-x^q}{(1-ax)^n}\frac{dx}{x\ln x} = \ln\frac{p}{q}+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}a^k\ln\frac{p+k}{q+k}$$
$[p>0,\ q>0,\ a^2<1]$. БХ [130] (15)

13. $\int\limits_0^1 (x^p-1)(x^q-1)\frac{dx}{\ln x} = \ln\frac{p+q+1}{(p+1)(q+1)}$ $[p>-1,\ q>-1,\ p+q>-1]$.

ГХ [324] (19b)

14. $\int\limits_0^1 \frac{x^p-x^q}{1+x}\cdot\frac{1+x^{2n+1}}{x\ln x}dx = \ln\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+n+1\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}+n+1\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}$

$[p>0,\ q>0]$. БХ [127] (7)

15. $\int\limits_0^1 \frac{x^p-x^q}{1-x}\cdot\frac{1-x^r}{\ln x}dx = \ln\frac{\Gamma(q+1)\Gamma(p+r+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(q+r+1)}$

$[p>-1,\ q>-1,\ p+r>-1,\ q+r>-1]$. ГХ [324] (23)

16. $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x^r)\ln x}dx = \ln\frac{\Gamma\left(\frac{p+r}{2r}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2r}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+r}{2r}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2r}\right)}$ $[p>0,\ q>0,\ r>0]$.

ГХ [324] (21)

17. $\int\limits_0^1 \frac{1-x^{2p-2q}}{1+x^{2p}}\frac{x^{q-1}\,dx}{\ln x} = \ln\operatorname{tg}\frac{q\pi}{4p}$ $[0<q<p]$ (см. также 3.524 27.).

БХ [128] (6)

18. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x^r)\ln x}dx = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{p\pi}{2r}\operatorname{ctg}\frac{q\pi}{2r}\right)$ $[0<p<r,\ 0<q<r]$.

ГХ [324] (22), БХ [143] (2)

19. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1-x^r)\ln x}dx = \ln\left(\frac{\sin\frac{p\pi}{r}}{\sin\frac{q\pi}{r}}\right)$ $[0<p<r,\ 0<q<r]$. БХ [143] (4)

20. $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x^{2n}}\cdot\frac{1-x^2}{\ln x}dx = \ln\frac{\Gamma\left(\frac{p+2}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+2}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2n}\right)}$ $[p>0,\ q>0]$.

БХ [128] (11)

21. $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1+x^{2(2n+1)}}\frac{1+x^2}{\ln x}dx =$

$$= \ln\frac{\Gamma\left(\frac{p+4n+4}{4(2n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{q+2}{4(2n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{p+4n+2}{4(2n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{q}{4(2n+1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+4n+4}{4(2n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{p+2}{4(2n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{q+4n+2}{4(2n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{p}{4(2n+1)}\right)}$$

$[p>0,\ q>0]$. БХ [128] (7)

22. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1+x^{2(2n+1)}}\cdot\frac{1+x^2}{\ln x}dx =$

$$= \ln\left\{\operatorname{tg}\frac{p\pi}{4(2n+1)}\cdot\operatorname{tg}\frac{(p+2)\pi}{4(2n+1)}\cdot\operatorname{ctg}\frac{q\pi}{4(2n+1)}\cdot\operatorname{ctg}\frac{(q+2)\pi}{4(2n+1)}\right\}$$

$[0<p<4n,\ 0<q<4n]$. БХ [143] (5)

23. $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x^{2n}}\,\frac{1-x^2}{\ln x}\,dx = \ln \frac{\sin\frac{p\pi}{2n}\cdot\sin\frac{(q+2)\pi}{2n}}{\sin\frac{q\pi}{2n}\cdot\sin\frac{(p+2)\pi}{2n}}$$

$[0 < p < 2n,\ 0 < q < 2n]$. БХ [143] (6)

24. $$\int_0^1 (1-x^p)(1-x^q)\,\frac{x^{r-1}\,dx}{\ln x} = \ln\frac{(p+q+r)\,r}{(p+r)(q+r)}$$

$[p > 0,\ q > 0,\ r > 0]$. БХ [123] (8)

25. $$\int_0^1 (1-x^p)(1-x^q)\,\frac{x^{r-1}\,dx}{(1-x)\ln x} = \ln\frac{\Gamma(p+r)\,\Gamma(q+r)}{\Gamma(p+q+r)\,\Gamma(r)}$$

$[r > 0,\ r+p > 0,\ r+q > 0,\ r+p+q > 0]$. ФII 815и

26. $$\int_0^1 (1-x^p)(1-x^q)(1-x^r)\,\frac{dx}{\ln x} = \ln\frac{(p+q+1)(q+r+1)(r+p+1)}{(p+q+r+1)(p+1)(q+1)(r+1)}$$

$[p > -1,\ q > -1,\ r > -1,\ p+q > -1,\ p+r > -1,\ q+r > -1,$
$p+q+r > -1]$. ГХ [324] (19c)

27. $$\int_0^1 (1-x^p)(1-x^q)(1-x^r)\,\frac{dx}{(1-x)\ln x} =$$
$$= \ln\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(r+1)\,\Gamma(p+q+r+1)}{\Gamma(p+q+1)\,\Gamma(p+r+1)\,\Gamma(q+r+1)}$$

$[p > -1,\ q > -1,\ r > -1,\ p+q > -1,\ p+r > -1,\ q+r > -1,$
95 $p+q+r > -1]$. ФII 815

28. $$\int_0^1 (1-x^p)(1-x^q)(1-x^r)\,\frac{x^{s-1}\,dx}{\ln x} = \ln\frac{(p+q+s)(p+r+s)(q+r+s)\,s}{(p+s)(q+s)(r+s)(p+q+r+s)}$$

$[p > 0,\ q > 0,\ r > 0,\ s > 0]$. БХ [123] (10)

29. $$\int_0^1 (1-x^p)(1-x^q)\,\frac{x^{s-1}\,dx}{(1-x^r)\ln x} = \ln\frac{\Gamma\left(\frac{p+s}{r}\right)\Gamma\left(\frac{q+s}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{r}\right)\Gamma\left(\frac{p+q+s}{r}\right)}$$

$[p > 0,\ q > 0,\ r > 0,\ s > 0]$. ГХ [324] (23a)

30. $$\int_0^\infty (1-x^p)(1-x^q)\,\frac{x^{s-1}\,dx}{(1-x^{p+q+2s})\ln x} = 2\int_0^1 (1-x^p)(1-x^q)\,\frac{x^{s-1}\,dx}{(1-x^{p+q+2s})\ln x} =$$
$$= 2\ln\left\{\sin\frac{s\pi}{p+q+2s}\,\operatorname{cosec}\frac{(p+s)\pi}{p+q+2s}\right\}$$

$[s > 0,\ s+p > 0,\ s+p+q > 0]$.
ГХ [324] (23b) и

31. $$\int_0^1 (1-x^p)(1-x^q)(1-x^r)\,\frac{x^{s-1}\,dx}{(1-x)\ln x} =$$
$$= \ln\frac{\Gamma(p+s)\,\Gamma(q+s)\,\Gamma(r+s)\,\Gamma(p+q+r+s)}{\Gamma(p+q+s)\,\Gamma(p+r+s)\,\Gamma(q+r+s)\,\Gamma(s)}$$

$[p > 0,\ q > 0,\ r > 0,\ s > 0]$ *). БХ [127] (11)

---

*) Эти ограничения можно несколько ослабить, написав, например, в 4.267 31. и 32.: $s > 0,\ p+s > 0,\ q+s > 0,\ r+s > 0,\ p+q+s > 0,\ p+r+s > 0,\ q+r+s > 0,\ p+q+r+s > 0$.

32. $$\int_0^1 (1-x^p)(1-x^q)(1-x^r)\frac{x^{s-1}\,dx}{(1-x^t)\ln x}=$$
$$=\ln\frac{\Gamma\left(\frac{p+s}{t}\right)\Gamma\left(\frac{q+s}{t}\right)\Gamma\left(\frac{r+s}{t}\right)\Gamma\left(\frac{p+q+r+s}{t}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q+s}{t}\right)\Gamma\left(\frac{q+r+s}{t}\right)\Gamma\left(\frac{p+r+s}{t}\right)\Gamma\left(\frac{s}{t}\right)}$$
$[p>0,\ q>0,\ r>0,\ s>0,\ t>0]$ *). ГХ [324] (23b)

33. $$\int_0^1 \left\{\frac{x^p-x^{p+q}}{1-x}-q\right\}\frac{dx}{\ln x}=\ln\frac{\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(p+1)}$$
$[p>-1,\ p+q>-1]$ БХ [127] (19)

34. $$\int_0^1 \left\{\frac{x^\mu-x}{x-1}-x(\mu-1)\right\}\frac{dx}{x\ln x}=\ln\Gamma(\mu)\quad [\operatorname{Re}\mu>0].$$
УВ II 38, БХ [127] (18)

35. $$\int_0^1 \left\{1-x-\frac{(1-x^p)(1-x^q)}{1-x}\right\}\frac{dx}{x\ln x}=-\ln\{\mathrm{B}(p,\ q)\}\quad [p>0,\ q>0].$$
БХ [130] (18)

36. $$\int_0^1 \left\{\frac{x^{p-1}}{1-x}-\frac{x^{pq-1}}{1-x^q}-\frac{1}{x(1-x)}+\frac{1}{x(1-x^q)}\right\}\frac{dx}{\ln x}=q\ln p\quad [p>0].$$
БХ [130] (20)

37. $$\int_0^1 \left\{\frac{x^{q-1}}{1-x}-\frac{x^{pq-1}}{1-x^p}-\frac{p-1}{1-x^p}x^{p-1}-\frac{p-1}{2}x^{p-1}\right\}\frac{dx}{\ln x}=$$
$$=\frac{1-p}{2}\ln(2\pi)+\left(pq-\frac{1}{2}\right)\ln p\quad [p>0,\ q>0]$$ БХ [130] (22)

38. $$\int_0^1 \frac{(1-x^p)(1-x^q)-(1-x)^2}{x(1-x)\ln x}\,dx=\ln\mathrm{B}(p,\ q)\quad [p>0,\ q>0].$$ ГХ [324] (24)

39. $$\int_0^1 (x^p-1)^n\frac{dx}{\ln x}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}(-1)^{n-k}\ln(pk+1)\quad \left[p>-\frac{1}{n}\right]$$
ГХ [324] (19d), БХ [123] (12) и

40. $$\int_0^1 \frac{(1-x^p)^n}{1-x}\frac{dx}{\ln x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\ln\Gamma[(n-k)p+1]\quad \left[p>-\frac{1}{n}\right].$$
БХ [127] (12)

41. $$\int_0^1 (x^p-1)^n x^{q-1}\frac{dx}{\ln x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\ln[q+(n-k)p]$$
$\left[p>-\frac{1}{n},\ q>0\right]$. БХ [123] (12)

*) См. сноску на предыдущей странице.

42 $$\int_0^1 (1-x^p)^n x^{q-1} \frac{dx}{(1-x)\ln x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \ln \Gamma[(n-k)p+q]$$

$$\left[p > -\frac{1}{n},\ q > 0\right].$$ БХ [127] (13)

43 $$\int_0^1 (x^p-1)^n (x^q-1)^m \frac{x^{r-1}\,dx}{\ln x} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} [r+(m-k)q+(n-j)p]$$

$$\left[p > -\frac{1}{n},\ q > -\frac{1}{m},\ r > 0\right].$$ БХ [123] (16)

4.268

1 $$\int_0^1 \frac{(x^p-x^q)(1-x^r)}{(\ln x)^2}\,dx = (p+1)\ln(p+1) - (q+1)\ln(q+1) -$$

$$-(p+r+1)\ln(p+r+1) + (q+r+1)\ln(q+r+1)$$

$$[p > -1,\ q > -1,\ p+r > -1,\ q+r > -1].$$ ГХ [324] (26)

2 $$\int_0^1 (x^p-x^q)^2 \frac{dx}{(\ln x)^2} = (2p+1)\ln(2p+1) + (2q+1)\ln(2q+1) -$$

$$-2(p+q+1)\ln(p+q+1) \quad \left[p > -\frac{1}{2},\ q > -\frac{1}{2}\right].$$ ГХ [324] (26a)

3 $$\int_0^1 (1-x^p)(1-x^q)(1-x^r) \frac{dx}{(\ln x)^2} = (p+q+1)\ln(p+q+1) +$$

$$+(q+r+1)\ln(q+r+1) + (p+r+1)\ln(p+r+1) - (p+1)\ln(p+1) -$$

$$-(q+1)\ln(q+1) - (r+1)\ln(r+1) - (p+q+r)\ln(p+q+r)$$

$$[p > -1,\ q > -1,\ r > -1,\ p+q > -1,\ p+r > -1,\ q+r > -1,$$

$$p+q+r > 0].$$ БХ [124] (4)

4 $$\int_0^1 (1-x^p)^n x^{q-1} \frac{dx}{(\ln x)^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (pk+q)^2 \ln(pk+q)$$

$$\left[q > 0,\ p > -\frac{q}{n}\right].$$ БХ [124] (14)

5 $$\int_0^1 (1-x^p)^n (1-x^q)^m x^{r-1} \frac{dx}{(\ln x)^2} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \times$$

$$\times [(m-k)q+(n-j)p+r] \ln[(m-k)q+(n-j)p+r]$$

$$[r > 0,\ mq+r > 0,\ np+r > 0,\ mq+np+r > 0].$$ БХ [124] (8)

6. $$\int_0^1 [(q-r)x^{p-1}+(r-p)x^{q-1}+(p-q)x^{r-1}]\frac{dx}{(\ln x)^2} = (q-r)p\ln p+(r-p)q\ln q+(p-q)r\ln r$$
$[p>0,\ q>0,\ r>0]$. БХ [124] (9)

7. $$\int_0^1 \left[\frac{x^{p-1}}{(p-q)(p-r)(p-s)}+\frac{x^{q-1}}{(q-p)(q-r)(q-s)}+\frac{x^{r-1}}{(r-p)(r-q)(r-s)}+\frac{x^{s-1}}{(s-p)(s-q)(s-r)}\right]\frac{dx}{(\ln x)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{p^2\ln p}{(p-q)(p-r)(p-s)}+\frac{q^2\ln q}{(q-p)(q-r)(q-s)}+\frac{r^2\ln r}{(r-p)(r-q)(r-s)}+\frac{s^2\ln s}{(s-p)(s-q)(s-r)}\right]$$
$[p>0,\ q>0,\ r>0,\ s>0]$. БХ [124] (16)

4.269

1. $$\int_0^1 \sqrt{\ln\frac{1}{x}}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{(2k+1)^3}}.$$ БХ [115] (33)

2. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}\cdot(1+x)^2}} = \sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}.$$ БХ [133] (2)

3. $$\int_0^1 \sqrt{\ln\frac{1}{x}}\cdot x^{p-1}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p^3}} \qquad [p>0].$$ ГХ [324] (1c)

4. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \qquad [p>0].$$ БХ [133] (1)

5. $$\int_0^1 \frac{\sin t - x^n\sin[(n+1)t]+x^{n+1}\sin nt}{1-2x\cos t+x^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}} = \sqrt{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kt}{\sqrt{k}} \qquad [|t|<\pi].$$ БХ [133] (5)

6. $$\int_0^1 \frac{\cos t - x - x^{n-1}\cos nt + x^n\cos[(n-1)t]}{1-2x\cos t+x^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}} = \sqrt{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos kt}{\sqrt{k}} \qquad [|t|<\pi].$$ БХ [133] (6)

7. $$\int_u^v \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln\frac{x}{u}\ln\frac{v}{x}}} = \pi \qquad [uv>0].$$ БХ [145] (37)

4.271

1. $$\int_0^1 (\ln x)^{2n}\frac{dx}{1+x} = \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}\cdot(2n)!\,\zeta(2n+1).$$ БХ [110] (1)

2 $\int\limits_0^1 (\ln x)^{2n-1} \frac{dx}{1+x} = \frac{1-2^{2n-1}}{2n} \pi^{2n} |B_{2n}|.$ БХ [110] (2)

3 $\int\limits_0^1 (\ln x)^{2n-1} \frac{dx}{1-x} = -\frac{1}{n} 2^{2n-2} \pi^{2n} |B_{2n}|.$ БХ [110] (5), ГХ [324] (9a)

4 $\int\limits_0^1 (\ln x)^{p-1} \frac{dx}{1-x} = e^{i(p-1)\pi} \Gamma(p) \zeta(p) \qquad [p > 1].$ ГХ [324] (9b)

5 $\int\limits_0^1 (\ln x)^n \frac{dx}{1+x^2} = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}.$ БХ [110] (11)

6. $\int\limits_0^1 (\ln x)^{2n} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} (\ln x)^{2n} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}} |E_{2n}|.$ ГХ [324] (10) *и*

7 $\int\limits_0^{\infty} \frac{(\ln x)^{2n+1}}{1+bx+x^2} dx = 0 \qquad [|b| < 2].$ БХ [135] (2)

8. $\int\limits_0^1 (\ln x)^{2n} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}} \cdot (2n)! \zeta(2n+1).$ БХ [110] (12)

9 $\int\limits_0^{\infty} (\ln x)^{2n} \frac{dx}{1-x^2} = 0.$ БХ [312] (7) *и*

10. $\int\limits_0^1 (\ln x)^{2n-1} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} (\ln x)^{2n-1} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1-2^{2n}}{4n} \pi^{2n} |B_{2n}|.$

БХ [290] (17) *и*, БХ [312] (6) *и*

11 $\int\limits_0^1 (\ln x)^{2n-1} \frac{x\,dx}{1-x^2} = -\frac{1}{4n} \pi^{2n} |B_{2n}|.$ БХ [290] (19) *и*

12. $\int\limits_0^1 (\ln x)^{2n} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} dx = \frac{2^{2n}-1}{2} \pi^{2n} |B_{2n}|.$ БХ [296] (17) *и*

13 $\int\limits_0^1 (\ln x)^{2n+1} \frac{(\cos 2a\pi - x)\,dx}{1-2x\cos 2a\pi + x^2} = -(2n+1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2ak\pi}{k^{2n+2}}$

[a не равно целому числу]. Ли [113] (10)

14 $\int\limits_0^1 (\ln x)^n \frac{x^{\nu-1}\,dx}{a^2+2ax\cos t + x^2} = -\pi \cos t \frac{d^n}{d\nu^n} \left[a^{\nu-2} \frac{\sin(\nu-1)t}{\sin \nu\pi} \right]$

$[a > 0, \ 0 < \operatorname{Re} \nu < 2, \ |t| < \pi].$ ИП I 315 (12)

15. $\int\limits_0^1 (\ln x)^n \frac{x^{p-1}}{1-x^q} dx = -\frac{1}{q^{n+1}} \psi^{(n)}\left(\frac{p}{q}\right) \qquad [p > 0, \ q > 0].$ ГХ [324] (9)

16 $\int\limits_0^1 (\ln x)^n \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \frac{1}{2^n q^{n+1}} \beta\left(\frac{p}{q}\right) \qquad [p > 0, \ q > 0].$ ГХ [324] (10)

4.272

1. $$\int_0^1 \frac{\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{q-1} dx}{1+2x\cos t+x^2} = \operatorname{cosec} t\,\Gamma(q) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kt}{k^q}$$

$[|t| < \pi,\ q < 1]$. Ли [130] (1)

2. $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{q-1} \frac{(1+x)\,dx}{1+2x\cos t+x^2} = \sec\frac{t}{2}\cdot\Gamma(q) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right]}{k^q}$$

$\left[|t| < \pi,\ q < \frac{1}{2}\right]$. Ли [130] (5)

3. $$\int_0^{\infty} \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{\mu} \frac{x^{\nu-1}\,dx}{1-2ax\cos t+x^2a^2} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{a\sin t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \sin kt}{(\nu+k-1)^{\mu+1}}$$

$[a > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ 0 < \operatorname{Re}\nu < 2,\ |t| < \pi]$. БХ [140] (14) *и*

4. $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{r-1} \frac{\cos\lambda - px}{1+p^2x^2-2px\cos\lambda} x^{q-1}\,dx = \Gamma(r) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{k-1}\cos k\lambda}{(q+k-1)^r}$$

$[r > 0,\ q > 0]$. БХ [113] (11)

5. $$\int_1^{\infty} (\ln x)^p \frac{dx}{x^2} = \Gamma(1+p) \qquad [p > -1].$$ БХ [144] (1)

6. $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} x^{\nu-1}\,dx = \frac{1}{\nu^{\mu}}\Gamma(\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0].$$ БХ [107] (3)

7. $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-\frac{1}{2}} x^{\nu-1}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{(2\nu)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\nu}} \qquad [\operatorname{Re}\nu > 0].$$ БХ [107] (2)

8. $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1} \frac{x^{\nu-1}}{1+x}\,dx = (n-1)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\nu+k)^n} \qquad [\operatorname{Re}\nu > 0].$$ БХ [110] (4)

9. $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1} \frac{x^{\nu-1}}{1-x}\,dx = (n-1)!\,\zeta(n,\nu) \qquad [\operatorname{Re}\nu > 0].$$ БХ [110] (7)

10. $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} (x-1)^n \left(a+\frac{nx}{x-1}\right) x^{a-1}\,dx = \Gamma(\mu) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(a+n-k)^{\mu-1}\,k!}$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0]$. Ли [110] (10)

11. $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1} \frac{1-x^m}{1-x}\,dx = (n-1)! \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^n}.$$ Ли [110] (9)

12. $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} \frac{x^{\nu-1}\,dx}{1-x^2} = \Gamma(\mu)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\nu+2k)^{\mu}} = \frac{1}{2^{\mu}}\Gamma(\mu)\,\zeta\left(\mu, \frac{\nu}{2}\right)$$ $[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. БХ [110] (13)

13. $$\int_0^1 \frac{x^q - x^{-q}}{1-x^2}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx = \Gamma(p+1)\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2k+q-1)^{p+1}} - \frac{1}{(2k-q-1)^{p+1}}\right\}$$ $[p > -1,\ q^2 < 1]$. Ли [326] (12) *и*

14. $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{r-1} \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x^q)^s} = \Gamma(r)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-s}{k}\frac{1}{(p+kq)^r}$$ $[p > 0,\ q > 0,\ r > 0,\ 0 < s < r+2]$. ГХ [324] (11)

15. $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^n (1+x^q)^m x^{p-1}\,dx = n!\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{1}{(p+kq)^{n+1}}$$ $[p > 0,\ q > 0]$. БХ [107] (6)

16. $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^n (1-x^q)^m x^{p-1}\,dx = n!\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^k}{(p+kq)^{n+1}}$$ $[p > 0,\ q > 0]$. БХ [107] (7)

17. $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{p-1} \frac{x^{q-1}\,dx}{1-ax^q} = \frac{1}{aq^p}\Gamma(p)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k}{k^p}$$ $[p > 0,\ q > 0,\ a < 1]$. Ли [110] (8)

18. $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{2-\frac{1}{n}} (x^{p-1} - x^{q-1})\,dx = \frac{n}{n-1}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\left(q^{1-\frac{1}{n}} - p^{1-\frac{1}{n}}\right)$$ $[q > p > 0]$. БХ [133] (4)

19 $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{2n-1} \frac{x^p - x^{-p}}{1-x^q} x^{q-1}\,dx = \frac{1}{p^{2n}}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{2p\pi}{q}\right)^k \frac{|B_{2k}|}{2k\cdot(2k-2n)!}$$ $\left[p < \frac{q}{2}\right]$. Ли [110] (16)

4.273 $$\int_u^v \left(\ln\frac{x}{u}\right)^{p-1}\left(\ln\frac{v}{x}\right)^{q-1}\frac{dx}{x} = \mathrm{B}(p, q)\left(\ln\frac{v}{u}\right)^{p+q-1}$$ $[p > 0,\ q > 0,\ uv > 0]$. БХ [145] (36)

4.274 $$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\sqrt[q]{x}\,dx}{x\sqrt{-(1+\ln x)}} = \frac{\sqrt{q\pi}}{\sqrt[q]{e}}$$ $[q > 0]$. БХ [145] (4)

4.275

1. $$\int_0^1 \left[\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{q-1} - x^{p-1}(1-x)^{q-1}\right] dx =$$
$$= \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\left[\Gamma(p+q) - \Gamma(p)\right] \qquad [p>0,\ q>0]$$ БХ [107] (8)

2. $$\int_0^1 \left[x - \left(\frac{1}{1-\ln x}\right)^q\right] \frac{dx}{x \ln x} = -\psi(q) \qquad [q>0].$$ БХ [126] (5)

4.28 Рациональная функция $\ln x$ и степенная функция

4.281

1. $$\int_0^1 \left[\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x}\right] dx = C.$$ БХ [127] (15)

2. $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(\ln p - \ln x)} = \frac{1}{p}\,\mathrm{li}\,(p).$$ Ла 281 (30)

3. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{q \pm \ln x} = \pm e^{\mp pq}\,\mathrm{Ei}\,(\pm pq) \qquad [p>0,\ q>0]$$ Ли [144] (11 и 12)

4. $$\int_0^1 \left[\frac{1}{\ln x} + \frac{x^{\mu-1}}{1-x}\right] dx = -\psi(\mu) \qquad [\mathrm{Re}\,\mu > 0].$$ УВII (21)

5. $$\int_0^1 \left[\frac{x^{p-1}}{\ln x} + \frac{x^{q-1}}{1-x}\right] dx = \ln p - \psi(q) \qquad [p>0,\ q>0].$$ БХ [127] (17)

6. $$\int_0^1 \left[\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{2x\ln x}\right] \frac{dx}{\ln x} = \frac{\ln 2}{2}.$$ Ли [130] (19)

7. $$\int_0^1 \left[q - \frac{1}{2} + \frac{(1-x)(1+q\ln x) + x\ln x}{(1-x)^2}\, x^{q-1}\right] \frac{dx}{\ln x} =$$
$$= \frac{1}{2} - q - \ln\Gamma(q) + \frac{\ln 2\pi}{2} \qquad [q>0].$$ БХ [128] (15)

4.282

1. $$\int_0^1 \frac{\ln x}{4\pi^2 + (\ln x)^2} \cdot \frac{dx}{1-x} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}C.$$ БХ [129] (1)

2. $$\int_0^1 \frac{1}{a^2 + (\ln x)^2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2a}\,\beta\left(\frac{2a+\pi}{4\pi}\right) \qquad \left[a > -\frac{\pi}{2}\right].$$ БХ [129] (9)

3. $$\int_0^1 \frac{1}{\pi^2 + (\ln x)^2}\,\frac{dx}{1+x^2} = \frac{4-\pi}{4\pi}.$$ БХ [129] (6)

4. $$\int_0^1 \frac{\ln x}{\pi^2 + (\ln x)^2} \cdot \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \ln 2\right).$$ БХ [129] (10)

5 $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{a^2+(\ln x)^2} \cdot \frac{x\,dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2a} + \ln\frac{\pi}{a} + \psi\left(\frac{a}{\pi}\right)\right]$

$[a > 0]$. БХ [129] (14)

6 $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\pi^2+(\ln x)^2} \cdot \frac{x\,dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - C\right).$ БХ [129] (13)

7 $\int\limits_0^1 \frac{1}{\pi^2+4(\ln x)^2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\ln 2}{4\pi}.$ БХ [129] (7)

8 $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\pi^2+4(\ln x)^2} \cdot \frac{dx}{1-x^2} = \frac{2-\pi}{16}.$ БХ [129] (11)

9 $\int\limits_0^1 \frac{1}{\pi^2+16(\ln x)^2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} \quad [\pi + 2\ln(\sqrt{2}-1)].$ БХ [129] (8)

10. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\pi^2+16(\ln x)^2} \cdot \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{\pi}{32\sqrt{2}} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1).$ БХ [129] (12)

11 $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{[a^2+(\ln x)^2]^2} \frac{dx}{1-x} = -\frac{\pi^2}{a^4}\sum_{k=1}^{\infty} |B_{2k}| \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{2k-2}.$ БХ [129] (4)

12 $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{[a^2+(\ln x)^2]^2} \frac{x\,dx}{1-x^2} = -\frac{\pi^2}{4a^4}\sum_{k=1}^{\infty} |B_{2k}| \left(\frac{\pi}{a}\right)^{2k-2}.$ БХ [129] (16)

13 $\int\limits_0^1 \frac{x^p - x^{-p}}{x^2-1} \frac{dx}{q^2+\ln^2 x} = \frac{2\pi}{q}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kp\pi}{2q+k\pi} \quad [p^2 < 1].$ БХ [132] (13) и

4.283

1 $\int\limits_0^1 \left(\frac{x-1}{\ln x} - x\right)\frac{dx}{\ln x} = \ln 2 - 1.$ БХ [132] (17) и

2 $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{\ln x} = \frac{\ln 2\pi}{2} - 1.$ БХ [127] (20)

3 $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{x}{1-x} + \frac{x}{2}\right)\frac{dx}{x\ln x} = \frac{\ln 2\pi}{2}.$ БХ [127] (23)

4 $\int\limits_0^1 \left[\frac{1}{(\ln x)^2} - \frac{x}{(1-x)^2}\right] dx = C - \frac{1}{2}.$ ГХ [326] (8а)

5 $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{2\ln x} - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{\ln x} = \frac{\ln 2 - 1}{2}.$ БХ [128] (14)

6 $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1+x}{1-x} - \ln x\right)\frac{dx}{\ln x} = \frac{\ln 2\pi}{2}.$ БХ [127] (22)

7. $\int\limits_0^1 \left[\frac{1}{1-\ln x} - x\right] \frac{dx}{x \ln x} = -C.$ ГХ [326] (11a)

8. $\int\limits_0^1 \left[\frac{x^q - 1}{x (\ln x)^2} - \frac{q}{\ln x}\right] dx = q \ln q - q \quad [q > 0].$ БХ [126] (2)

9. $\int\limits_0^1 \left[x + \frac{1}{a \ln x - 1}\right] \frac{dx}{x \ln x} = \ln \frac{a}{q} + C \quad [a > 0, \ q > 0].$ БХ [126] (8)

10. $\int\limits_0^1 \left[\frac{1}{\ln x} + \frac{1+x}{2(1-x)}\right] \frac{x^{p-1}}{\ln x} dx = -\ln \Gamma(p) + \left(p - \frac{1}{2}\right) \ln p - p + \frac{\ln 2\pi}{2} \quad [p > 0].$ ГХ [326] (9)

11. $\int\limits_0^1 \left[p - 1 - \frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln x}\right) x^{p-1}\right] \frac{dx}{\ln x} = \left(\frac{1}{2} - p\right) \ln p + p - \frac{\ln 2\pi}{2} \quad [p > 0].$ БХ [127] (25)

12. $\int\limits_0^1 \left[-\frac{1}{(\ln x)^2} + \frac{(p-2) x^p - (p-1) x^{p-1}}{(1-x)^2}\right] dx = -\psi(p) + p - \frac{3}{2} \quad [p > 0]$ ГХ [326] (8)

13. $\int\limits_0^1 \left[\left(p - \frac{1}{2}\right) x^3 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)(x^{2p-1} - 1)\right] \frac{dx}{\ln x} = \left(\frac{1}{2} - p\right)(\ln p - 1) \quad [p > 0].$ БХ [132] (23) и

14. $\int\limits_0^1 \left[\left(q - \frac{1}{2}\right) \frac{x^{p-1} - x^{r-1}}{\ln x} + \frac{p x^{pq-1}}{1-x^p} - \frac{r x^{rq-1}}{1-x^r}\right] \frac{dx}{\ln x} = (p - r)\left[\frac{1}{2} - q - \ln \Gamma(q) + \frac{\ln 2\pi}{2}\right] \quad [q > 0].$ БХ [132] (13)

4.284

1. $\int\limits_0^1 \left[\frac{x^q - 1}{x (\ln x)^3} - \frac{q}{x (\ln x)^2} - \frac{q^2}{2 \ln x}\right] dx = \frac{q^2}{2} \ln q - \frac{3}{4} q^2 \quad [q > 0]$ БХ [126] (3)

2. $\int\limits_0^1 \left[\frac{x^q - 1}{x (\ln x)^4} - \frac{q}{x (\ln x)^3} - \frac{q^2}{2x (\ln x)^2} - \frac{q^3}{6 \ln x}\right] dx = \frac{q^3}{6} \ln q - \frac{11}{36} q^3 \quad [q > 0].$ БХ [126] (4)

4.285 $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{(q + \ln x)^n} = \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} e^{-pq} \operatorname{Ei}(pq) - \frac{1}{(n-1)!\, q^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k-1)!\, (pq)^{k-1} \quad [p > 0, \ q > 0].$ БХ [125] (21)

В интегралах вида $\int \frac{x^a (\ln x)^n dx}{[b + (\ln x)^m]^l}$ следует сделать подстановку $x = e^t$ или $x = e^{-t}$ и полученные затем интегралы искать в разделах **3.351 — 3.356**

4.29 — 4.32 Логарифмическая функция от более сложных аргументов и степенная функция

4.291

1 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}.$ ФII 483

2 $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}.$ ФII 714

3 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{\pi^2}{12}.$ БХ [145] (2)

4 $\int_0^1 \ln\left(1-\frac{x}{2}\right)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{\pi^2}{12}.$ БХ [114] (18)

5 $\int_0^1 \frac{\ln\frac{1+x}{2}}{1-x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{\pi^2}{12}.$ БХ [115] (1)

6 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$ БХ [114] (14) и

7 $\int_0^\infty \frac{\ln(1+ax)}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{4}\ln(1+a^2) - \int_0^a \frac{\ln u\,du}{1+u^2}$ $[a>0].$ ГКII (2209)

8 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$ ФII 157

9. $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 + G.$ БХ [136] (1)

10. $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2 - G.$ БХ [114] (17)

11. $\int_1^\infty \frac{\ln(x-1)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$ БХ [144] (4)

12. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)}\,dx = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$ БХ [144] (4)

13 $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x(1+x)}\,dx = \frac{\pi^2}{6}.$ БХ [141] (9) и

14. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(ax+b)^2}\,dx = \frac{1}{a(a-b)}\ln\frac{a+b}{b} + \frac{2\ln 2}{b^2-a^2}$ $[a \neq b,\ ab > 0]$;

$= \frac{1}{2a^2}(1-\ln 2)$ $[a=b]$. Ли [114] (5) и

15. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{(ax+b)^2}\,dx = \frac{\ln\frac{a}{b}}{a(a-b)}$ $[ab > 0]$. БХ [139] (5)

16. $\int\limits_0^1 \ln(a+x)\frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\operatorname{arcctg}\sqrt{a}\,\ln[(1+a)a]$ $[a > 0]$.

БХ [114] (20)

17 $\int\limits_0^\infty \ln(a+x)\frac{dx}{(b+x)^2} = \frac{a\ln a - b\ln b}{b(a-b)}$ $[a > 0,\ b > 0,\ a \neq b]$.

Ли [139] (6)

18 $\int\limits_0^a \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} a\ln(1+a^2)$. ГК II (2195)

19. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+ax)}{1+ax^2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\sqrt{a}\,\ln(1+a)$ $[a > 0]$. БХ [114] (21)

20 $\int\limits_0^1 \frac{\ln(ax+b)}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{2}(a+b)\ln(a+b) - b\ln b - a\ln 2\right]$

$[a > 0,\ b > 0,\ a \neq b]$. БХ [114] (22)

21. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(ax+b)}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{a-b}[a\ln a - b\ln b]$ $[a > 0,\ b > 0]$.

БХ [139] (8)

22. $\int\limits_0^\infty \ln(a+x)\frac{x\,dx}{(b^2+x^2)^2} = \frac{1}{2(a^2+b^2)}\left(\ln b + \frac{a\pi}{2b} + \frac{a^2}{b^2}\ln a\right)$ $[a > 0,\ b > 0]$.

БХ [139] (9)

23. $\int\limits_0^1 \ln(1+x)\frac{1+x^2}{(1+x)^4}\,dx = -\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{23}{72}$. Ли [114] (12)

24 $\int\limits_0^1 \ln(1+x)\frac{1+x^2}{a^2+x^2}\cdot\frac{dx}{1+a^2x^2} = \frac{1}{2a(1+a^2)}\left[\frac{\pi}{2}\ln(1+a^2) - \right.$

$\left. - 2\operatorname{arctg} a\cdot\ln a\right]$ $[a > 0]$. Ли [114] (11)

25 $\int\limits_0^1 \ln(1+x)\frac{1-x^2}{(ax+b)^2}\frac{dx}{(bx+a)^2} = \frac{1}{a^2-b^2}\left\{\frac{1}{a-b}\left[\frac{a+b}{ab}\ln(a+b) - \right.\right.$

$\left.\left. - \frac{1}{a}\ln b - \frac{1}{b}\ln a\right] + \frac{4\ln 2}{b^2-a^2}\right\}$ $[a > 0,\ b > 0,\ a^2 \neq b^2]$.

Ли [114] (13)

26. $$\int_0^\infty \ln(1+x)\frac{1-x^2}{(ax+b)^2}\cdot\frac{dx}{(bx+a)^2}=\frac{1}{ab(a^2-b^2)}\ln\frac{b}{a} \qquad [a>0,\ b>0].$$

Ли [139] (14)

27 $$\int_0^1 \ln(1+ax)\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+a)^2}{1+a^2}\ln(1+a)-$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{1+a^2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{a^2}{1+a^2} \qquad [a>-1].$$

БХ [114] (23)

28 $$\int_0^\infty \ln(a+x)\frac{b^2-x^2}{(b^2+x^2)^2}dx=\frac{1}{a^2+b^2}\left(a\ln\frac{b}{a}-\frac{b\pi}{2}\right) \qquad [a>0,\ b>0].$$

БХ [139] (11)

29. $$\int_0^\infty \ln(a-x)^2\frac{b^2-x^2}{(b^2+x^2)^2}dx=\frac{2}{a^2+b^2}\left(a\ln\frac{a}{b}-\frac{b\pi}{2}\right) \qquad [a>0,\ b>0].$$

БХ [139] (12)

30. $$\int_0^\infty \ln(a-x)^2\frac{x\,dx}{(b^2+x^2)^2}=\frac{1}{a^2+b^2}\left(\ln b-\frac{a\pi}{2b}+\frac{a^2}{b^2}\ln a\right) \qquad [a>0,\ b>0].$$

БХ [139] (10)

4.292

1. $$\int_0^1 \frac{\ln(1\pm x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2\pm 2G.$$

ГХ [325] (20)

2. $$\int_0^1 \frac{x\ln(1\pm x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=-1\pm\frac{\pi}{2}.$$

ГХ [325] (22с)

3. $$\int_{-a}^a \frac{\ln(1+bx)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-a^2b^2}}{2} \qquad \left[0\leqslant|b|\leqslant\frac{1}{a}\right].$$

БХ [145] (16 и 17) *и*, ГХ [325] (21е)

4. $$\int_0^1 \frac{x\ln(1+ax)}{\sqrt{1-x^2}}dx=-1+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}+\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\arcsin a \qquad [|a|\leqslant 1];$$
$$=-1+\frac{\pi}{2a}+\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\ln\left(a+\sqrt{a^2-1}\right) \qquad [a\geqslant 1].$$

ГХ [325] (22)

5. $$\int_0^1 \frac{\ln(1+ax)}{x\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\arcsin a\,(\pi-\arcsin a)=$$
$$=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}(\arccos a)^2 \qquad [|a|\leqslant 1].$$

БХ [120] (4), ГХ [325] (21а)

4.293

1. $$\int_0^1 x^{\mu-1}\ln(1+x)\,dx=\frac{1}{\mu}[\ln 2-\beta(\mu+1)] \qquad [\operatorname{Re}\mu>-1].$$

БХ [106] (4) *и*

2. $\int\limits_1^\infty x^{\mu-1}\ln(1+x)\,dx = \frac{1}{\mu}\left[\beta(-\mu)-\ln 2\right] \quad [\operatorname{Re}\mu < 0].$ ИПI 315 (17)

3. $\int\limits_0^\infty x^{\mu-1}\ln(1+x)\,dx = \frac{\pi}{\mu\sin\mu\pi} \quad [-1<\operatorname{Re}\mu<0].$ ГХ [325] (3) u

4. $\int\limits_0^1 x^{2n-1}\ln(1+x)\,dx = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$ ГХ [325] (2b)

5. $\int\limits_0^1 x^{2n}\ln(1+x)\,dx = \frac{1}{2n+1}\left[\ln 4+\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}\right].$ ГХ [325] (2c)

6. $\int\limits_0^1 x^{n-\frac{1}{2}}\ln(1+x)\,dx = \frac{2\ln 2}{2n+1}+\frac{(-1)^n\cdot 4}{2n+1}\left[\pi-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right].$ ГХ [325] (2f)

7. $\int\limits_0^\infty x^{\mu-1}\ln|1-x|\,dx = \frac{\pi}{\mu}\operatorname{ctg}(\mu\pi) \quad [-1<\operatorname{Re}\mu<0].$

БХ [134] (4), ИПI 315 (18)

8 $\int\limits_0^1 x^{\mu-1}\ln(1-x)\,dx = -\frac{1}{\mu}\left[\psi(\mu+1)-\psi(1)\right] \quad [\operatorname{Re}\mu > -1].$

ИПI 316 (19)

9. $\int\limits_1^\infty x^{\mu-1}\ln(x-1)\,dx = \frac{1}{\mu}\left[\pi\operatorname{ctg}(\mu\pi)+\psi(\mu+1)-\psi(1)\right] \quad [\operatorname{Re}\mu<0].$

ИПI 316 (20)

10. $\int\limits_0^\infty x^{\mu-1}\ln(1+\gamma x)\,dx = \frac{\pi}{\mu\gamma^\mu\sin\mu\pi} \quad [-1<\operatorname{Re}\mu<0, \quad |\arg\gamma|<\pi].$

БХ [134] (3)

11. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\ln(1+x)}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin\mu\pi}\left[C+\psi(1-\mu)\right] \quad [-1<\operatorname{Re}\mu<1].$

ИПI 316 (21)

12 $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^{\mu+1}}\,dx = \frac{-\ln 2}{2^\mu\mu}+\frac{2^\mu-1}{2^\mu\mu^2}.$ БХ [114] (6)

13. $\int\limits_0^1 \frac{x^{\mu-1}\ln(1-x)}{(1-x)^{1-\nu}}\,dx = \mathrm{B}(\mu,\ \nu)\left[\psi(\nu)-\psi(\mu+\nu)\right]$

$[\operatorname{Re}\mu>0, \quad \operatorname{Re}\nu>0].$ ИПI 316 (22)

14. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\ln(\gamma+x)}{(\gamma+x)^\nu}\,dx = \gamma^{\mu-\nu}\mathrm{B}(\mu,\ \nu-\mu)\left[\psi(\nu)-\psi(\nu-\mu)+\ln\gamma\right]$

$[0<\operatorname{Re}\mu<\operatorname{Re}\nu].$ ИПI 316 (23)

4.294

1. $$\int_0^1 \ln(1+x)\frac{(p-1)x^{p-1}-px^{-p}}{x}\,dx = 2\ln 2 - \frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad [0<p<1].$$
БХ [114] (2)

2. $$\int_0^1 \ln(1+x)\frac{1+x^{2n+1}}{1+x}\,dx = 2\ln 2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} - \sum_{j=1}^{2n+1}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$
БХ [114] (7)

3. $$\int_0^1 \ln(1+x)\frac{1-x^{2n}}{1+x}\,dx = 2\ln 2\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1} - \sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$
БХ [114] (8)

4. $$\int_0^1 \ln(1+x)\frac{1-x^{2n}}{1-x}\,dx = 2\ln 2\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1} + \sum_{j=1}^{2n}\frac{(-1)^j}{j}\sum_{k=1}^{j}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$
БХ [114] (9)

5. $$\int_0^1 \ln(1+x)\frac{1-x^{2n+1}}{1-x}\,dx = 2\ln 2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} + \sum_{j=1}^{2n+1}\frac{(-1)^j}{j}\sum_{k=1}^{j}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$
БХ [114] (10)

6. $$\int_0^1 \ln(1-x)\frac{1-(-1)^n x^n}{1-x}\,dx = \sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^j}{j}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k}.$$ БХ [114] (15)

7. $$\int_0^1 \ln(1-x)\frac{1-x^n}{1-x}\,dx = -\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k}.$$ БХ [114] (16)

8. $$\int_0^\infty \ln(1-x)^2 x^p\,dx = \frac{2\pi}{p+1}\operatorname{ctg} p\pi \qquad [-2<p<-1].$$ БХ [134] (13) и

9. $$\int_0^1 [\ln(1+x)]^n (1+x)^r\,dx = (-1)^{n-1}\frac{n!}{(r+1)^{n+1}} + 2^{r+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!(\ln 2)^{n-k}}{(n-k)!(r+1)^{k+1}}.$$ Лп [106] (34) и

10. $$\int_0^1 [\ln(1-x)]^n (1-x)^r\,dx = (-1)^n\frac{n!}{(r+1)^{n+1}} \qquad [r>-1].$$ БХ [106] (35) и

11. $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{1-x^2}\right)^n x^{2q-1}\,dx = \frac{n!}{2}\zeta(n+1,\ q+1) \qquad [-1<q<0].$$
БХ [311] (15) и

12. $$\int_0^1 (\ln x)^{2n}\ln(1-x^2)\frac{dx}{x} = -\frac{\pi^{2n+2}}{2(n+1)(2n+1)}|B_{2n+2}|.$$ БХ [309] (5) и

4.295

1. $$\int_0^\infty \ln(\mu x^2+\beta)\frac{dx}{\gamma+x^2}=\frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}\ln\left(\sqrt{\mu\gamma}+\sqrt{\beta}\right)$$
$[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\mu>0,\ |\arg\gamma|<\pi]$. ИПII 218 (27)

2. $$\int_0^1 \ln(1+x^2)\frac{dx}{x^2}=\frac{\pi}{2}-\ln 2.$$ ГХ [325] (2g)

3. $$\int_0^\infty \ln(1+x^2)\frac{dx}{x^2}=\pi.$$ ГХ [325] (4c)

4. $$\int_0^\infty \ln(1+x^2)\frac{dx}{(a+x)^2}=\frac{2a}{1+a^2}\left(\frac{\pi}{2a}+\ln a\right)\quad [a>0].$$ БХ [319] (6) и

5. $$\int_0^1 \ln(1+x^2)\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\ln 2-G.$$ БХ [114] (24)

6. $$\int_1^\infty \ln(1+x^2)\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\ln 2+G.$$ БХ [144] (5)

7. $$\int_0^\infty \ln(a^2+b^2x^2)\frac{dx}{c^2+g^2x^2}=\frac{\pi}{cg}\ln\frac{ag+bc}{g}$$
$[a>0,\ b>0,\ c>0,\ g>0]$. БХ [136] (11, 12, 13, 14) и

8. $$\int_0^\infty \ln(a^2+b^2x^2)\frac{dx}{c^2-g^2x^2}=-\frac{\pi}{cg}\operatorname{arctg}\frac{bc}{ag}$$
$[a>0,\ b>0,\ c>0,\ g>0]$. БХ [136] (15) и

9. $$\int_0^\infty \frac{\ln(1+p^2x^2)-\ln(1+q^2x^2)}{x^2}\,dx=\pi(p-q)\quad [p>0,\ q>0].$$ ФII 645

10. $$\int_0^1 \ln\frac{1+a^2x^2}{1+a^2}\,\frac{dx}{1-x^2}=-(\operatorname{arctg}a)^2.$$ БХ [115] (2)

11. $$\int_0^1 \ln(1-x^2)\frac{dx}{x}=-\frac{\pi^2}{12}.$$

12. $$\int_0^\infty \ln(1-x^2)^2\frac{dx}{x^2}=0.$$ БХ [142] (9) и

13. $$\int_0^1 \ln(1-x^2)\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}\ln 2-G.$$ ГХ [325] (17)

14. $$\int_1^\infty \ln(x^2-1)\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}\ln 2+G$$ БХ [144] (6)

15. $\int\limits_0^\infty \ln(a^2-x^2)^2 \frac{dx}{b^2+x^2} = \frac{\pi}{b} \ln(a^2+b^2) \quad [b>0].$ БХ [136] (16)

16. $\int\limits_0^\infty \ln(a^2-x^2)^2 \frac{b^2-x^2}{(b^2+x^2)^2}\, dx = -\frac{2b\pi}{a^2+b^2} \quad [b>0].$ БХ [139] (20)

17. $\int\limits_0^1 \ln(1+x^2) \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2\right].$ БХ [114] (25)

18. $\int\limits_0^\infty \ln(1+x^2) \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{\pi^2}{12}.$ БХ [141] (9)

19. $\int\limits_0^1 \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t) \frac{dx}{1-x^2} = -t^2.$ БХ [114] (27) *и*

20. $\int\limits_0^\infty \ln(a^2+b^2x^2) \frac{dx}{(c+gx)^2} = \frac{2\ln b}{cg} + \frac{b^2}{a^2g^2+b^2c^2}\left(\frac{a}{b}\pi + 2\frac{c}{g}\ln\frac{c}{g} + \right.$

$\left. + 2\frac{a^2g}{b^2c}\ln\frac{a}{b}\right) \quad [a>0,\ b>0,\ c>0,\ g>0].$ БХ [139] (16) *и*

21. $\int\limits_0^1 \ln(a^2+b^2x^2) \frac{dx}{(c+gx)^2} = \frac{2}{c(c+g)}\ln a + \frac{b^2}{a^2g^2+b^2c^2}\left[\frac{2a}{b}\operatorname{arcctg}\frac{a}{b} + \right.$

$\left. + \frac{cb^2-ga^2}{b^2(c+g)}\ln\frac{a^2+b^2}{a^2} - 2\frac{c}{g}\ln\frac{c+g}{c}\right] \quad [a>0,\ b>0,\ c>0,\ g>0].$

БХ [114] (28) *и*

22. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+p^2x^2)}{r^2+q^2x^2}\, dx = \int\limits_0^\infty \frac{\ln(p^2+x^2)}{q^2+r^2x^2}\, dx = \frac{\pi}{qr}\ln\frac{q+pr}{q} \quad [qr>0,\ p>0].$

ФИ II 745 *и*, БХ [318] (1) *и*, БХ [318] (4) *и*.

23. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{b^2+c^2x^2}\,\frac{dx}{d^2+g^2x^2} = \frac{\pi}{b^2g^2-c^2d^2}\left[\frac{g}{d}\ln\left(1+\frac{ad}{g}\right) - \right.$

$\left. - \frac{c}{b}\ln\left(1+\frac{ab}{c}\right)\right] \quad [a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0,\ g>0\ \ b^2g^2 \neq c^2d^2].$

БХ [141] (10)

24. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{b^2+c^2x^2}\,\frac{x^2\, dx}{d^2+g^2x^2} = \frac{\pi}{b^2g^2-c^2d^2}\left[\frac{b}{c}\ln\left(1+\frac{ab}{c}\right) - \right.$

$\left. - \frac{d}{g}\ln\left(1+\frac{ad}{g}\right)\right] \quad [a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0,\ g>0,\ b^2g^2 \neq c^2d^2].$

БХ [141] (11)

25. $\int\limits_0^\infty \ln(a^2+b^2x^2) \frac{dx}{(c^2+g^2x^2)^2} = \frac{\pi}{2c^3g}\left(\ln\frac{ag+bc}{g} - \frac{bc}{ag+bc}\right)$

$[a>0,\ b>0,\ c>0,\ g>0].$ ГХ [325] (18a)

26. $\int_0^\infty \ln(a^2+b^2x^2)\frac{x^2\,dx}{(c^2+g^2x^2)^2}=\frac{\pi}{2cg^3}\left(\ln\frac{ag+bc}{g}+\frac{bc}{ag+bc}\right)$

$[a>0,\ b>0,\ c>0,\ g>0]$. ГХ [325] (18b)

27. $\int_0^1 \ln(1+ax^2)\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\left\{\ln\frac{1+\sqrt{1+a}}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{1+a}}{1+\sqrt{1+a}}\right\}$

$[a>0]$. БХ [117] (6)

28. $\int_0^1 \ln(1+a-ax^2)\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\left\{\ln\frac{1+\sqrt{1+a}}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{1+a}}{1+\sqrt{1+a}}\right\}$

$[a>0]$. БХ [117] (7)

29. $\int_0^1 \ln(1-a^2x^2)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}$ $[a^2<1]$. БХ [119] (1)

30. $\int_0^1 \ln(1-a^2x^2)\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi^2}{4}-(\arccos a)^2$ $[a^2<1]$. Ли [120] (11)

31. $\int_0^1 \ln(1-x^2)\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\ln\frac{k'}{k}\boldsymbol{K}(k)-\frac{\pi}{2}\boldsymbol{K}(k')$. БХ [120] (12)

32. $\int_0^1 \ln(1\pm kx^2)\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{2}\ln\frac{2\pm 2k}{\sqrt{k}}\boldsymbol{K}(k)-\frac{\pi}{8}\boldsymbol{K}(k')$.

БХ [120] (8), БХ [120] (14)

33. $\int_0^1 \frac{\ln(1-k^2x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx=\ln k'\,\boldsymbol{K}(k)$. БХ [119] (27)

34. $\int_0^1 \ln(1-k^2x^2)\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx=(2-k^2)\boldsymbol{K}(k)-(2-\ln k')\boldsymbol{E}(k)$.

БХ [119] (3)

35. $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}\ln(1-k^2x^2)\,dx=\frac{1}{k^2}(1+k'^2-k'^2\ln k')\boldsymbol{K}(k)-$

$-(2-\ln k')\boldsymbol{E}(k)$. БХ [119] (7)

36. $\int_{-1}^1 \ln(1-x^2)\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}$

$[a>0,\ b>0,\ a\neq b]$. БХ [145] (15)

37. $\int_0^1 \ln(1-x^2)(px^{p-1}-qx^{q-1})\,dx=\psi\left(\frac{p}{2}+1\right)-\psi\left(\frac{q}{2}+1\right)$

$[p>-2,\ q>-2]$. БХ [106] (15)

38. $\int_0^1 \ln(1+ax^2)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1+a}}{2}$ $[a\geqslant -1]$. ГХ [325] (21b)

39. $\int_0^1 \ln(1+x^2)\, x^{\mu-1}\, dx = \frac{1}{\mu}\left[\ln 2 - \beta\left(\frac{\mu}{2}+1\right)\right]$

$[\operatorname{Re}\mu > -2]$. БХ [106] (12)

40 $\int_0^\infty \ln(1+x^2)\, x^{\mu-1}\, dx = \frac{\pi}{\mu \sin\frac{\mu\pi}{2}} \quad [-2 < \operatorname{Re}\mu < 0]$.

БХ [311] (4) и, ИПI 315 (15).

41 $\int_0^\infty \ln(1+x^2)\frac{x^{\mu-1}\, dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin\mu\pi}\left\{\ln 2 - (1-\mu)\sin\frac{\mu\pi}{2}\beta\left(\frac{1-\mu}{2}\right) - \right.$

$\left. -(2-\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}\beta\left(\frac{2-\mu}{2}\right)\right\} \quad [-2 < \operatorname{Re}\mu < 1]$. ИПI 316 (25)

4.296

1 $\int_0^1 \ln(1+2x\cos t+x^2)\frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{t^2}{2}$. БХ [114] (34)

2 $\int_{-\infty}^\infty \ln(a^2-2ax\cos t+x^2)\frac{dx}{1+x^2} = \pi\ln(1+2a\sin t+a^2)$. БХ [145] (28)

3 $\int_0^\infty \ln(1+2x\cos t+x^2)\, x^{\mu-1}\, dx = \frac{2\pi}{\mu}\frac{\cos\mu t}{\sin\mu\pi}$

$[|t| < \pi, \ -1 < \operatorname{Re}\mu < 0]$. ИПI 316 (27)

4.297

1 $\int_0^1 \ln\frac{ax+b}{bx+a}\frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{a-b}\left[(a+b)\ln\frac{a+b}{2} - a\ln a - b\ln b\right]$

$[a > 0,\ b > 0]$. БХ [115] (16)

2 $\int_0^\infty \ln\frac{ax+b}{bx+a}\frac{dx}{(1+x)^2} = 0 \quad [ab > 0]$. БХ [139] (23)

3 $\int_0^1 \ln\frac{1-x}{x}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{8}\ln 2$. БХ [115] (5)

4 $\int_0^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\frac{dx}{1+x^2} = G$. БХ [115] (17)

5 $\int_0^\infty \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{\pi^2}{2}$. БХ [141] (13)

6 $\int_u^v \ln\frac{v+x}{u+x}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{v}{u}\right)^2 \quad [uv > 0]$. БХ [145] (33)

7. $\int_0^\infty \frac{b\ln(1+ax) - a\ln(1+bx)}{x^2}\, dx = ab\ln\frac{b}{a} \quad [a > 0,\ b > 0]$. Ф II 647

8. $\int\limits_0^1 \ln\frac{1+ax}{1-ax}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\pi\arcsin a \quad [|a|\leqslant 1]$ ГХ [325] (21c), БХ [122] (2)

9. $\int\limits_u^v \ln\left(\frac{1+ax}{1-ax}\right)\frac{dx}{\sqrt{(x^2-u^2)(v^2-x^2)}}=\frac{\pi}{v}F\left(\arcsin av, \frac{u}{v}\right)$

$[|av|<1]$. БХ [145] (35)

4.298

1. $\int\limits_0^\infty \ln\frac{1+x^2}{x}\frac{x^{2n-1}}{1+x}dx=\frac{\ln 2}{2n}+\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{2n}\beta(2n+1)$. БХ [137] (1)

2. $\int\limits_0^\infty \ln\frac{1+x^2}{x}\frac{x^{2n}}{1+x}dx=\frac{\ln 2}{2n}+\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{2n}\beta(2n+1)$. БХ [137] (3)

3. $\int\limits_0^\infty \ln\frac{1+x^2}{x}\frac{x^{2n-1}}{1-x}dx=\frac{\ln 2}{2n}+\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{2n}\beta(2n+1)$. БХ [137] (2)

4. $\int\limits_0^\infty \ln\frac{1+x^2}{x}\frac{x^{2n}}{1-x}dx=-\frac{\ln 2}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{2n}\beta(2n+1)$. БХ [137] (4)

5. $\int\limits_0^\infty \ln\frac{1+x^2}{x}\frac{x^{2n-1}}{1+x^2}dx=\frac{\ln 2}{2n}+\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{2n}\beta(2n+1)$. БХ [137] (10)

6. $\int\limits_0^1 \ln\frac{1+x^2}{x}x^{2n}dx=\frac{1}{2n+1}\left\{(-1)^n\frac{\pi}{2}+\ln 2-\frac{1}{2n+1}+2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2n-2k-1}\right\}$.

БХ [294] (8)

7 $\int\limits_0^1 \ln\frac{1+x^2}{x}x^{2n-1}dx=\frac{1}{2n}\left\{(-1)^{n+1}\ln 2+\ln 2-\frac{1}{2n}+(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k}\right\}$.

БХ [294] (9) *и*

8. $\int\limits_0^1 \ln\frac{1+x^2}{x}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\ln 2$. БХ [115] (7)

9. $\int\limits_0^\infty \ln\frac{1+x^2}{x}\frac{dx}{1+x^2}=\pi\ln 2$. БХ [137] (8)

10. $\int\limits_0^\infty \ln\frac{1+x^2}{x}\frac{dx}{1-x^2}=0$. БХ [137] (9)

11. $\int\limits_0^1 \ln\frac{1-x^2}{x}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}\ln 2$. БХ [115] (9)

12. $\int\limits_1^\infty \ln\frac{1+x^2}{x+1}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{3\pi}{8}\ln 2$. БХ [144] (8)

13. $\int\limits_0^1 \ln \frac{1+x^2}{x+1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{3\pi}{8} \ln 2 - G.$ БХ [115] (18)

14. $\int\limits_1^\infty \ln \frac{1+x^2}{x-1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{3\pi}{8} \ln 2 + G.$ БХ [144] (9)

15. $\int\limits_0^1 \ln \frac{1+x^2}{1-x} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{3\pi}{8} \ln 2.$ БХ [115] (19)

16. $\int\limits_0^\infty \ln \frac{1+x^2}{x^2} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi^2}{12}.$ БХ [138] (3)

17. $\int\limits_0^\infty \ln \frac{a^2+b^2x^2}{x^2} \frac{dx}{c^2+g^2x^2} = \frac{\pi}{cg} \ln \frac{ag+bc}{c}$

$[a>0,\ b>0,\ c>0,\ g>0].$ БХ [138] (6, 7, 9, 10) и

18. $\int\limits_0^\infty \ln \frac{a^2+b^2x^2}{x^2} \frac{dx}{c^2-g^2x^2} = \frac{1}{cg} \operatorname{arctg} \frac{ag}{bc}$

$[a>0,\ b>0,\ c>0,\ g>0].$ БХ [138] (8, 11) и

19. $\int\limits_0^\infty \ln \frac{1+x^2}{x^2} \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4} (\ln 4 - 1).$ БХ [139] (21)

20. $\int\limits_0^1 \ln \left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^2 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi.$ Ф II 643 и

21. $\int\limits_0^1 \ln \frac{1+2x\cos t+x^2}{(1+x)^2} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \ln \frac{1+2x\cos t+x^2}{(1+x)^2} \frac{dx}{x} = -\frac{t^2}{2}$

$[|t|<\pi].$ БХ [115] (23), БХ [134] (15)

22. $\int\limits_0^\infty \ln \frac{1+2x\cos t+x^2}{(1+x)^2} x^{p-1}\,dx = -\frac{2\pi(1-\cos p\pi)}{p\sin p\pi}$

$[|p|<1,\ |t|<\pi].$ БХ [134] (17)

23. $\int\limits_0^1 \ln \frac{1+x^2\sin t}{1-x^2\sin t} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi \ln \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi-t}{4}\right)$

$[|t|<\pi].$ ГХ [325] (21d)

4.239

1. $\int\limits_0^\infty \ln \frac{(x+1)(x+a^2)}{(x+a)^2} \frac{dx}{x} = (\ln a)^2 \qquad [a>0].$ БХ [134] (14)

2. $\int\limits_0^1 \ln \frac{(1-ax)(1+ax^2)}{(1-ax^2)^2} \frac{dx}{1+ax^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \sqrt{a} \ln(1+a)$

$[a>0].$ БХ [115] (25)

3. $$\int_0^1 \ln\frac{(1-a^2x^2)(1+ax^2)}{(1-ax^2)^2}\frac{dx}{1+ax^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\sqrt{a}\ln(1+a)$$

$[a>0]$. БХ [115] (26)

4. $$\int_0^1 \ln\frac{(x+1)(x+a^2)}{(x+a)^2}x^{\mu-1}\,dx=\frac{\pi(a^\mu-1)^2}{\mu\sin\mu\pi}$$

$[a>0,\ \operatorname{Re}\mu>0]$. БХ [134] (16)

4.311

1. $$\int_0^\infty \ln(a^3-x^3)\frac{dx}{x^3}=\frac{\pi}{4a^2}\sqrt{3}.$$ БХ [134] (7)

2. $$\int_0^\infty \ln(1+x^3)\frac{dx}{1-x+x^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ln 3.$$ Ли [136] (8)

3. $$\int_0^\infty \ln(1+x^3)\frac{dx}{1+x^3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\ln 3-\frac{\pi^2}{9}.$$ Ли [136] (6)

4. $$\int_0^\infty \ln(1+x^3)\frac{x\,dx}{1+x^3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\ln 3+\frac{\pi^2}{9}.$$ Ли [136] (7)

5. $$\int_0^\infty \ln(1+x^3)\frac{1-x}{1+x^3}dx=-\frac{2}{9}\pi^2.$$ БХ [136] (9)

4.312

1. $$\int_0^\infty \ln\frac{1+x^3}{x^3}\frac{dx}{1+x^3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\ln 3+\frac{\pi^2}{9}.$$ БХ [138] (12)

2. $$\int_0^\infty \ln\frac{1+x^3}{x^3}\frac{x\,dx}{1+x^3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\ln 3-\frac{\pi^2}{9}.$$ БХ [138] (13)

4.313

1. $$\int_0^\infty \ln x\ln(1+a^2x^2)\frac{dx}{x^2}=\pi a(1-\ln a)$$

$[a>0]$. БХ [134] (18)

2. $$\int_0^\infty \ln(1+c^2x^2)\ln(a^2+b^2x^2)\frac{dx}{x^2}=$$
$$=2\pi\left[\left(c+\frac{b}{a}\right)\ln(b+ac)-\frac{b}{a}\ln b-c\ln c\right]$$

$[a>0,\ b>0,\ c>0]$. БХ [134] (20 и 21) *и*

3. $$\int_0^\infty \ln(1+c^2x^2)\ln\left(a^2+\frac{b^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x^2}=2\pi\left[\frac{a+bc}{b}\ln(a+bc)-\frac{a}{b}\ln a-c\right]$$

$[a>0,\ a+bc>0]$. БХ [134] (22 и 23) *и*

4. $$\int\limits_0^\infty \ln x \ln \frac{1+a^2x^2}{1+b^2x^2}\,\frac{dx}{x^2} = \pi(a-b) + \pi \ln \frac{b^b}{a^a}$$

$[a > 0,\ b > 0]$. БХ [134] (24)

5 $$\int\limits_0^\infty \ln x \ln \frac{a^2+2bx+x^2}{a^2-2bx+x^2}\,\frac{dx}{x} = 2\pi \ln a \arcsin \frac{b}{a}$$

$[a \geqslant |b|]$. БХ [134] (25)

6. $$\int\limits_0^\infty \ln(1+x)\,\frac{x\ln x - x - a}{(x+a)^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{(\ln a)^2}{2(a-1)}$$ $[a > 0]$. БХ [141] (7)

7 $$\int\limits_0^\infty \ln(1-x)^2\,\frac{x\ln x - x - a}{(x+a)^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi^2+(\ln a)^2}{1+a}$$

$[a > 0]$. Ли [141] (8)

4.314

1. $$\int\limits_0^1 \ln(1+ax)\,\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}\,dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{a^k}{k} \ln \frac{p+k}{q+k} + \ln \frac{p}{q}$$

$[a > 0,\ p > 0,\ q > 0]$. БХ [123] (18)

2 $$\int\limits_0^\infty \left[\frac{(q-1)x}{(1+x)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(1+x)^q}\right] \frac{dx}{x\ln(1+x)} = \ln\Gamma(q)$$

$[q > 0]$. БХ [143] (7)

3 $$\int\limits_0^1 \frac{x\ln x + 1 - x}{x(\ln x)^2} \ln(1+x)\,dx = \ln \frac{4}{\pi}.$$ БХ [126] (12)

4 $$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x^2)\,dx}{x(q^2+\ln^2 x)} = -\frac{\pi}{q} \ln\Gamma\left(\frac{q+\pi}{\pi}\right) + \frac{\pi}{2q} \ln 2q + \ln \frac{q}{\pi} - 1$$

$[q > \ ]$. Ли [327] (12) и

4.315

1 $$\int\limits_0^1 \ln(1+x)(\ln x)^{n-1}\,\frac{dx}{x} = (-1)^{n-1}(n-1)!\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\zeta(n+1).$$

БХ [116] (3)

2 $$\int\limits_0^1 \ln(1+x)(\ln x)^{2n}\,\frac{dx}{x} = \frac{2^{2n+1}-1}{(2n+1)(2n+2)}\,\pi^{2n+2}\,|B_{2n+2}|.$$

БХ [116] (1)

3. $$\int\limits_0^1 \ln(1-x)(\ln x)^{n-1}\,\frac{dx}{x} = (-1)^n(n-1)!\,\zeta(n+1).$$ БХ [116] (4)

4 $$\int\limits_0^1 \ln(1-x)(\ln x)^{2n}\,\frac{dx}{x} = -\frac{2^{2n}}{(n+1)(2n+1)}\,\pi^{2n+2}\,|B_{2n+2}|.$$

БХ [116] (2)

4.316

1. $$\int_0^1 \ln(1-ax^r)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\frac{dx}{x} = -\frac{1}{r^{p+1}}\Gamma(p+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k}{k^{p+2}}$$
$[p>-1,\ a<1,\ r>0].$ БХ [116] (7)

2. $$\int_0^1 \ln(1-2ax\cos t+a^2x^2)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\frac{dx}{x} = -2\Gamma(p+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k\cos kt}{k^{p+2}}.$$ Ли [116] (8)

4.317

1. $$\int_0^\infty \ln\frac{\sqrt{1+x^2}+a}{\sqrt{1+x^2}-a}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \pi\arcsin a$$
$[|a|<1].$ БХ [142] (11)

2. $$\int_0^1 \ln\frac{\sqrt{1-a^2x^2}-x\sqrt{1-a^2}}{1-x}\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}(\arcsin a)^2.$$ БХ [115] (32)

3. $$\int_0^1 \ln\frac{1+\cos t\sqrt{1-x^2}}{1-\cos t\sqrt{1-x^2}}\,\frac{dx}{x^2+\operatorname{tg}^2 v} = \pi\operatorname{ctg} t\,\frac{\cos\frac{v-t}{2}}{\sin\frac{v+t}{2}}.$$ БХ [115] (30)

4. $$\int_0^1 \ln\left(\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x-\sqrt{1-x^2}}\right)^2\frac{x\,dx}{1-x^2} = \frac{\pi^2}{2}.$$ БХ [115] (31)

5. $$\int_0^1 \ln\{\sqrt{1+kx}+\sqrt{1-kx}\}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{4}\ln(4k)\,\boldsymbol{K}(k)+\frac{\pi}{8}\boldsymbol{K}(k').$$ БХ [121] (8)

6. $$\int_0^1 \ln\{\sqrt{1+kx}-\sqrt{1-kx}\}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{4}\ln(4k)\,\boldsymbol{K}(k)+\frac{3}{8}\pi\boldsymbol{K}(k').$$ БХ [121] (9)

7 $$\int_0^1 \ln\{1+\sqrt{1-k^2x^2}\}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{2}\ln k\boldsymbol{K}(k)+\frac{\pi}{4}\boldsymbol{K}(k').$$ БХ [121] (6)

8. $$\int_0^1 \ln\{1-\sqrt{1-k^2x^2}\}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{2}\ln k\,\boldsymbol{K}(k)-\frac{3}{4}\pi\boldsymbol{K}(k').$$ БХ [121] (7)

9. $\int\limits_0^1 \ln \frac{1+p\sqrt{1-x^2}}{1-p\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{1-x} = \pi \arcsin p \qquad [p^2 < 1].$ БХ [115] (29)

10. $\int\limits_0^1 \ln \frac{1+q\sqrt{1-k^2x^2}}{1-q\sqrt{1-k^2x^2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \pi F(\arcsin q,\ k')$

$[q^2 < 1].$ БХ [122] (15)

4.318

1 $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x^q)}{1+(\ln x)^2} \frac{dx}{x} = \pi \left[\ln \Gamma\left(\frac{q}{2\pi}+1\right) - \frac{\ln q}{2} + \frac{q}{2\pi}\left(\ln \frac{q}{2\pi} - 1\right) \right]$

$[q > 0].$ БХ [126] (11)

2 $\int\limits_0^\infty \ln(1+x^r) \left[\frac{(p-r)x^p-(q-r)x^q}{\ln x} + \frac{x^q-x^p}{(\ln x)^2} \right] \frac{dx}{x^{r+1}} =$

$= r \ln\left(\operatorname{tg} \frac{q\pi}{2r} \operatorname{ctg} \frac{p\pi}{2r}\right) \qquad [p < r,\ q < r].$ БХ [143] (9)

В интегралах, в которые входит $\ln(a+bx^r)$, полезно сделать подстановку $x^r = t$ и затем полученный интеграл искать в таблицах. Например,

$$\int\limits_0^\infty x^{p-1} \ln(1+x^r)\,dx = \frac{1}{r} \int\limits_0^\infty t^{\frac{p}{r}-1} \ln(1+t)\,dt = \frac{\pi}{p \sin \frac{p\pi}{r}}$$

(см. 4.293 3.).

4.319

1 $\int\limits_0^\infty \ln(1-e^{-2a\pi x}) \frac{dx}{1+x^2} = -\pi \left[\frac{1}{2} \ln 2a\pi + a(\ln a - 1) - \ln \Gamma(a+1) \right]$

$[a > 0].$ БХ [354] (6)

2 $\int\limits_0^\infty \ln(1+e^{-2a\pi x}) \frac{dx}{1+x^2} = \pi \Big[\ln \Gamma(2a) - \ln \Gamma(a) +$

$+ a(1-\ln a) - \left(2a - \frac{1}{2}\right) \ln 2 \Big] \qquad [a > 0].$ БХ [354] (7)

3 $\int\limits_0^\infty \ln \frac{a+be^{-px}}{a+be^{-qx}} \frac{dx}{x} = \ln \frac{a}{a+b} \ln \frac{p}{q} \qquad \left[\frac{b}{a} > -1,\ pq > 0 \right].$

Ф II 635, БХ [354] (1)

4.321

1 $\int\limits_{-\infty}^\infty x \ln \operatorname{ch} x\,dx = 0.$ БХ [358] (2) и

2. $\int\limits_0^\infty \ln \operatorname{ch} x \frac{dx}{1-x^2} = 0.$ БХ [138] (20) и

4.322

1. $$\int\limits_0^{\pi} \ln \sin x \, x \, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \ln \cos^2 x \, x \, dx = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2.$$ БХ [432] (1 и 2), Ф II 643

2. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln \sin^2 ax}{b^2+x^2} dx = \frac{\pi}{b} \ln \frac{1-e^{-2ab}}{2} \qquad [a>0,\ b>0].$$ ГХ [338] (28b)

3. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln \cos^2 ax}{b^2+x^2} dx = \frac{\pi}{b} \ln \frac{1+e^{-2ab}}{2} \qquad [a>0,\ b>0].$$ ГХ [338] (28a)

4. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln \sin^2 ax}{b^2-x^2} dx = -\frac{\pi^2}{2b} + a\pi \qquad [a>0,\ b>0].$$ БХ [418] (1)

5. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln \cos^2 ax}{b^2-x^2} dx = a\pi \qquad [a>0].$$ БХ [418] (2)

6. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln \cos^2 x}{x^2} dx = -\pi.$$ Ф II 686

7. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x \, x^{\mu-1} \, dx = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\mu} \left[\ln 2 + \frac{2}{\mu} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{4^{2k-1}(\mu+2k)} \right]$$ $[\operatorname{Re} \mu > 0].$ Ли [425] (1)

8. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, x^{\mu-1} \, dx = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\mu} \left[\frac{1}{\mu} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{4^{k}(\mu+2k)} \right]$$ $[\operatorname{Re} \mu > 0].$ Ли [430] (1)

9. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\cos x) \, x^{\mu-1} \, dx = \frac{-1}{\mu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\mu} \left[\frac{2}{\mu} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{4^{2k-1}(\mu+2k)} \right]$$ $[\operatorname{Re} \mu > 0].$ Ли [430] (2)

10. $$\int\limits_0^{\infty} \ln(1 \pm 2p\cos\beta x + p^2) \frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{q} \ln(1 \pm pe^{-\beta q}) \qquad [p^2<1];$$ $$= \frac{\pi}{q} \ln(p \pm e^{-\beta q}) \qquad [p^2>1]$$ Ф II 718и

4.323

1. $$\int\limits_0^{\pi} \ln \operatorname{tg}^2 x \, x \, dx = 0.$$ БХ [432] (3)

2. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln \operatorname{tg}^2 ax}{b^2+x^2} dx = \frac{\pi}{b} \ln \operatorname{th} ab \qquad [a>0,\ b>0].$$ ГХ [338] (28c)

3. $\int\limits_0^\infty \ln\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right)^2 \frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{2}.$ ГХ [338] (26)

4.324

1. $\int\limits_0^\infty \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^2 \frac{dx}{x} = \pi^2.$ ГХ [338] (25)

2. $\int\limits_0^\infty \ln \frac{1+2a\cos px+a^2}{1+2a\cos qx+a^2} \frac{dx}{x} = \ln(1+a)\ln\frac{q^2}{p^2} \qquad [-1 < a \leqslant 1];$

$= \ln\left(1+\frac{1}{a}\right)\ln\frac{q^2}{p^2} \qquad [a < -1 \text{ или } a > 1]$

ГХ [338] (27)

3. $\int\limits_0^\infty \ln(a^2\sin^2 px + b^2\cos^2 px)\frac{dx}{c^2+x^2} =$

$= \frac{\pi}{c}[\ln(a \operatorname{sh} cp + b \operatorname{ch} cp) - cp] \qquad [a>0,\ b>0,\ c>0,\ p>0].$

ГХ [338] (29)

4.325

1. $\int\limits_0^1 \ln\ln\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1+x} = -C\ln 2 + \sum_{k=2}^\infty (-1)^k \frac{\ln k}{k} =$

$= -C\ln 2 + 0{,}159\,868\,905\ldots$ ГХ [325] (25a)

2. $\int\limits_0^1 \ln\ln\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x+e^{i\lambda}} = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k} e^{-ik\lambda}(C+\ln k).$ ГХ [325] (26)

3. $\int\limits_0^1 \ln\ln\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{(1+x)^2} = \int\limits_1^\infty \ln\ln x\,\frac{dx}{(1+x)^2} =$

$= \frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{1}{2}\right) + \ln 2\pi\right] = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\pi}{2} - C\right).$ БХ [147] (7)

4. $\int\limits_0^1 \ln\ln\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_1^\infty \ln\ln x\,\frac{dx}{1+x^2} =$

$= \frac{\pi}{2}\ln\frac{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}.$ БХ [148] (1)

5. $\int\limits_0^1 \ln\ln\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1+x+x^2} = \int\limits_1^\infty \ln\ln x\,\frac{dx}{1+x+x^2} =$

$= \frac{\pi}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt[3]{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}.$ БХ [148] (2)

6. $$\int_0^1 \ln\ln\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1-x+x^2}=\int_1^\infty \ln\ln x\,\frac{dx}{1-x+x^2}=$$
$$=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{5}{6}\ln 2\pi-\ln\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\right].$$ БХ [148] (5)

7 $$\int_0^1 \ln\ln\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1+2x\cos t+x^2}=\int_1^\infty \ln\ln x\,\frac{dx}{1+2x\cos t+x^2}=$$
$$=\frac{\pi}{2\sin t}\ln\frac{(2\pi)^{t/\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{2\pi}\right)}.$$ БХ [147] (9)

8 $$\int_0^1 \ln\ln\frac{1}{x}\,x^{\mu-1}\,dx=-\frac{1}{\mu}(C+\ln\mu)$$
$[\operatorname{Re}\mu>0]$. БХ [147] (1)

9. $$\int_1^\infty \ln\ln x\,\frac{x^{n-2}\,dx}{1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-2}}=$$
$$=\frac{\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\ln 2\pi+\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\sin\frac{k\pi}{n}\ln\frac{\Gamma\left(\frac{n+k}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2n}\right)}$$ [n четно].
$$=\frac{\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\ln\pi+\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{k-1}\sin\frac{k\pi}{n}\ln\frac{\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)}$$ [n нечетно]
БХ [148] (4)

10 $$\int_0^1 \ln\ln\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}=\int_1^\infty \ln\ln x\,\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\ln x}}=$$
$$=\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2k+1}}[\ln(2k+1)+2\ln 2+C].$$ БХ [147] (4)

11 $$\int_0^1 \ln\ln\left(\frac{1}{x}\right)\frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}=-(C+\ln 4\mu)\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}$$
$[\operatorname{Re}\mu>0]$. БХ [147] (3)

12. $$\int_0^1 \ln\ln\left(\frac{1}{x}\right)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\mu-1}x^{\nu-1}\,dx=\frac{1}{\nu^\mu}\Gamma(\mu)[\psi(\mu)-\ln(\nu)]$$
$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$. БХ [147] (2)

4.326

1 $$\int_0^1 \ln(a-\ln x)\,x^{\mu-1}\,dx=\frac{1}{\mu}[\ln a-e^{a\mu}\operatorname{Ei}(-a\mu)]$$
$[\operatorname{Re}\mu>0,\ a>0]$. БХ [107] (23)

2. $$\int_0^{\frac{1}{e}} \ln\left(2\ln\frac{1}{x}-1\right)\frac{x^{2\mu-1}}{\ln x}\,dx = -\frac{1}{2}[\mathrm{Ei}(-\mu)]^2$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0]$. БХ [145] (5)

4.327

1. $$\int_0^1 \ln[a^2+(\ln x)^2]\frac{dx}{1+x^2} = \pi\ln\frac{2\Gamma\left(\frac{2a+3\pi}{4\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{2a+\pi}{4\pi}\right)} + \frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{2}$$

$\left[a > -\frac{\pi}{2}\right]$. БХ [147] (10)

2. $$\int_0^1 \ln[a^2+4(\ln x)^2]\frac{dx}{1+x^2} = \pi\ln\frac{2\Gamma\left(\frac{a+3\pi}{4\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+\pi}{4\pi}\right)} + \frac{\pi}{2}\ln\pi$$

$[a > -\pi]$. БХ [147] (16) *и*

3. $$\int_0^\infty \ln[a^2+(\ln x)^2]\,x^{\mu-1}\,dx = \frac{2}{\mu}[-\cos a\mu\,\mathrm{ci}(a\mu) - \sin a\mu\,\mathrm{si}(a\mu) + \ln a]$$

$[a > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. ГХ [325] (28)

Если подынтегральная функция содержит логарифм, аргумент которого также содержит логарифм, например если под знаком интеграла имеется $\ln\ln\frac{1}{x}$, то полезно сделать подстановку $\ln x = t$ и затем искать в таблицах преобразованный интеграл.

4.33—4.34 Логарифмическая и показательная функции

4.331

1. $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\ln x\,dx = -\frac{1}{\mu}(C+\ln\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ БХ [256] (2)

2. $$\int_1^\infty e^{-\mu x}\ln x\,dx = -\frac{1}{\mu}\mathrm{Ei}(-\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ БХ [260] (5)

3. $$\int_0^1 e^{\mu x}\ln x\,dx = -\frac{1}{\mu}\int_0^1 \frac{e^{\mu x}-1}{x}\,dx \qquad [\mu \neq 0].$$ ГХ [324] (81а)

4.332

1. $$\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{e^x+e^{-x}-1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{5}{6}\ln 2\pi - \ln\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\right]$$

(сравни **4.325** 6.). БХ [257] (6)

2. $$\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{e^x+e^{-x}+1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\ln\left[\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\sqrt{2\pi}\right]$$

(сравни **4.325** 5.). БХ [257] (7) *и*, Ли [260] (3)

4.333 $\int\limits_0^\infty e^{-\mu x^2} \ln x \, dx = -\frac{1}{4}(C + \ln 4\mu)\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}$

$[\operatorname{Re}\mu > 0]$. БХ [256] (8), Ф II 807 и

4.334 $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x \, dx}{e^{x^2}+1+e^{-x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{C+\ln 4k}{\sqrt{k}} \sin\frac{k\pi}{3}$. БХ [357] (13)

4.335

1. $\int\limits_0^\infty e^{-\mu x} (\ln x)^2 \, dx = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\pi^2}{6} + (C + \ln\mu)^2\right]$ $[\operatorname{Re}\mu > 0]$. ИПІ 149 (13)

2. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} (\ln x)^2 \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{8}\left[(C + 2\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right]$. Ф II 808

3. $\int\limits_0^\infty e^{-\mu x} (\ln x)^3 \, dx = -\frac{1}{\mu}\left[(C + \ln\mu)^3 + \frac{\pi^2}{2}(C + \ln\mu) - \psi''(1)\right]$. МХд 26

4.336

1. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{\ln x} \, dx = 0$. БХ [260] (9)

2. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\mu x} \, dx}{\pi^2 + (\ln x)^2} = \nu'(\mu) - e^{\mu}$ $[\operatorname{Re}\mu > 0]$. МХд 26

4.337

1. $\int\limits_0^\infty e^{-\mu x} \ln(\beta + x) \, dx = \frac{1}{\mu}\left[\ln\beta - e^{\mu\beta} \operatorname{Ei}(-\beta\mu)\right]$

$[|\arg\beta| < \pi, \ \operatorname{Re}\mu > 0]$. БХ [256] (3)

2. $\int\limits_0^\infty e^{-\mu x} \ln(1 + \beta x) \, dx = -\frac{1}{\mu} e^{\frac{\mu}{\beta}} \operatorname{Ei}\left(-\frac{\mu}{\beta}\right)$

$[|\arg\beta| < \pi, \ \operatorname{Re}\mu > 0]$. ИПІ 148 (4)

3. $\int\limits_0^\infty e^{-\mu x} \ln|a - x| \, dx = \frac{1}{\mu}\left[\ln a - e^{-a\mu} \overline{\operatorname{Ei}}(a\mu)\right]$ $[a > 0, \ \operatorname{Re}\mu > 0]$.

БХ [256] (4)

4. $\int\limits_0^\infty e^{-\mu x} \ln\frac{\beta}{\beta - x} \, dx = \frac{1}{\mu}\left[e^{-\beta\mu} \operatorname{Ei}(\beta\mu)\right]$

[β не может быть действительным положительным числом, $\operatorname{Re}\mu > 0$].

МХд 26

4.338

1 $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\ln(\beta^2+x^2)\,dx=\frac{2}{\mu}\left[\ln\beta-\operatorname{ci}(\beta\mu)\cos(\beta\mu)-\operatorname{si}(\beta\mu)\sin(\beta\mu)\right]$$

$[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\mu>0]$. БХ [256] (6)

2 $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\ln(x^2-\beta^2)^2\,dx=\frac{2}{\mu}\left[\ln\beta^2-e^{\beta\mu}\operatorname{Ei}(-\beta\mu)-e^{-\beta\mu}\operatorname{Ei}(\beta\mu)\right]$$

$[\operatorname{Im}\beta>0,\ \operatorname{Re}\mu>0]$. БХ [256] (5)

4.339 $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|dx=\frac{2}{\mu}\left[\operatorname{shi}\mu\operatorname{ch}\mu-\operatorname{chi}\mu\operatorname{sh}\mu\right]$$

$[\operatorname{Re}\mu>0]$. МХд 27

4.341 $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\ln\frac{\sqrt{x+ai}+\sqrt{x-ai}}{\sqrt{2a}}\,dx=\frac{\pi}{4\mu}\left[\mathbf{H}_0(a\mu)-N_0(a\mu)\right]$$

$[a>0,\ \operatorname{Re}\mu>0]$. ИП I 149 (20)

4.342

1 $$\int_0^\infty e^{-2nx}\ln(\operatorname{sh}x)\,dx=\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{n}+\ln 2-2\beta(2n+1)\right].$$ БХ [256] (17)

2 $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\ln(\operatorname{ch}x)\,dx=\frac{1}{\mu}\left[\beta\left(\frac{\mu}{2}\right)-\frac{1}{\mu}\right]\qquad[\operatorname{Re}\mu>0].$$ ИП I 165 (32)

3 $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\left[\ln(\operatorname{sh}x)-\ln x\right]dx=\frac{1}{\mu}\left[\ln\frac{\mu}{2}-\frac{1}{2\mu}-\psi\left(\frac{\mu}{2}\right)\right]$$

$[\operatorname{Re}\mu>0]$. ИП I 165 (33)

4.343 $$\int_0^\pi e^{\mu\cos x}\left[\ln(2\mu\sin^2 x)+C\right]dx=-\pi K_0(\mu).$$ В 95 (16)

4.35 — 4.36 Логарифмическая, показательная и степенная функции

4.351

1. $$\int_0^1 (1-x)e^{-x}\ln x\,dx=\frac{1-e}{e}.$$ БХ [352] (1)

2. $$\int_0^1 e^{\mu x}(\mu x^2+2x)\ln x\,dx=\frac{1}{\mu^2}\left[(1-\mu)e^{\mu}-1\right].$$ БХ [352] (2)

3 $$\int_1^\infty \frac{e^{-\mu x}\ln x}{1+x}\,dx=\frac{1}{2}e^{\mu}\left[\operatorname{Ei}(-\mu)\right]^2\qquad[\operatorname{Re}\mu>0].$$ НИ 32 (10)

4.352

1. $$\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-\mu x}\ln x\,dx=\frac{1}{\mu^\nu}\Gamma(\nu)[\psi(\nu)-\ln\mu] \qquad [\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0].$$

БХ [353] (3), ИПI 315 (10) *u*

2. $$\int_0^\infty x^n e^{-\mu x}\ln x\,dx=\frac{n!}{\mu^{n+1}}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-C-\ln\mu\right] \qquad [\operatorname{Re}\mu>0].$$

ИПI 148 (7)

3. $$\int_0^\infty x^{n-\frac{1}{2}}e^{-\mu x}\ln x\,dx=\sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n\mu^{n+\frac{1}{2}}}\left[2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)-C-\ln 4\mu\right] \qquad [\operatorname{Re}\mu>0].$$

ИПI 148 (10)

4. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\ln x\,dx=\Gamma'(\mu) \qquad [\operatorname{Re}\mu>0].$$

ГХ [324] (83a)

4.353

1. $$\int_0^\infty (x-\nu)x^{\nu-1}e^{-x}\ln x\,dx=\Gamma(\nu) \qquad [\operatorname{Re}\nu>0].$$

ГХ [324] (84)

2. $$\int_0^\infty \left(\mu x-n-\frac{1}{2}\right)x^{n-\frac{1}{2}}e^{-\mu x}\ln x\,dx=\frac{(2n-1)!!}{(2\mu)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \qquad [\operatorname{Re}\mu>0].$$

БХ [357] (2)

3. $$\int_0^1 (\mu x+n+1)x^n e^{\mu x}\ln x\,dx=e^\mu\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\frac{n!}{(n-k)!\,\mu^{k+1}}+(-1)^n\frac{n!}{\mu^{n+1}} \qquad [\mu\neq 0].$$

ГХ [324] (82)

4.354

1. $$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}\ln x}{e^x+1}dx=\Gamma(\nu)\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^{k-1}}{k^\nu}[\psi(\nu)-\ln k] \qquad [\operatorname{Re}\nu>0].$$

ГХ [324] (86a)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}\ln x}{(e^x+1)^2}dx=\Gamma(\nu)\sum_{k=2}^\infty\frac{(-1)^k(k-1)}{k^\nu}[\psi(\nu)-\ln k] \qquad [\operatorname{Re}\nu>0].$$

ГХ [324] (86b)

3. $$\int_0^\infty \frac{(x-\nu)e^x-\nu}{(e^x+1)^2}x^{\nu-1}\ln x\,dx=\Gamma(\nu)\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^{k-1}}{k^\nu} \qquad [\operatorname{Re}\nu>0].$$

ГХ [324] (87a)

4. $$\int_0^\infty \frac{(x-2n)e^x-2n}{(e^x+1)^2}x^{2n-1}\ln x\,dx=\frac{2^{2n-1}-1}{2n}\pi^{2n}|B_{2n}|.$$

ГХ [324] (87b)

5. $$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}\ln x}{(e^x+1)^n}\,dx = (-1)^n \frac{\Gamma(\nu)}{(n-1)!}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k (k-1)!}{(k-n)!\,k^\nu}[\psi(\nu)-\ln k]$$
$[\operatorname{Re}\nu > 0]$. ГХ [324] (86c)

4.355

1. $$\int_0^\infty x^2 e^{-\mu x^2}\ln x\,dx = \frac{1}{8\mu}(2-\ln 4\mu - C)\sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$
БХ [357] (1) и

2. $$\int_{-\infty}^\infty x(\mu x^2-\nu x-1)\,e^{-\mu x^2+2\nu x}\ln x\,dx = \frac{\nu}{2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\exp\left(\frac{\nu^2}{\mu}\right)$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0]$. БХ [358] (1)

3. $$\int_0^\infty (\mu x^2-n)\,x^{2n-1}e^{-\mu x^2}\ln x\,dx = \frac{(n-1)!}{4\mu^n} \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ БХ [353] (4)

4. $$\int_0^\infty (2\mu x^2-2n-1)\,x^{2n}e^{-\mu x^2}\ln x\,dx = \frac{(2n-1)!!}{2(2\mu)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \qquad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$
БХ [353] (5)

4.356

1. $$\int_0^\infty \exp\left[-\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\right]\ln x\,\frac{dx}{x} = 2\ln a\,K_0(2\mu) \qquad [a>0,\ \operatorname{Re}\mu > 0].$$
ГХ [324] (91)

2. $$\int_0^\infty \exp\left(-ax-\frac{b}{x}\right)\ln x\,[2ax^2-(2n+1)x-2b]\,x^{n-\frac{1}{2}}\,dx =$$
$$= 2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{(n-k)!\,(2k)!!\,(2\sqrt{ab})^k} \qquad [a>0,\ b>0].$$
БХ [357] (4)

3. $$\int_0^\infty \exp\left(-ax-\frac{b}{x}\right)\ln x\,[2ax^2+(2n-1)x-2b]\frac{dx}{x^{n+\frac{3}{2}}} =$$
$$= 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{(n-k-1)!\,(2k)!!\,(2\sqrt{ab})^k} \qquad [a>0\ \ b>0].$$
БХ [357] (11)

При $n=\frac{1}{2}$:

4. $$\int_0^\infty \exp\left(-ax-\frac{b}{x}\right)\ln x\,\frac{ax^2-b}{x^2}\,dx = 2K_0\left(2\sqrt{ab}\right) \qquad [a>0,\ b>0].$$
ГХ [324] (92c)

При $n=0$:

5. $$\int_0^\infty \exp\left(-ax-\frac{b}{x}\right)\ln x\,\frac{2ax^2-x-2b}{x\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}$$

$[a>0,\ b>0]$. БХ [357] (7), ГХ [324] (92a)

При $n=-1$:

6. $$\int_0^\infty \exp\left(-ax-\frac{b}{x}\right)\ln x\,\frac{2ax^2-3x-2b}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1+2\sqrt{ab}}{a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}$$

$[a>0,\ b>0]$. Ли [357] (6), ГХ [324] (92b)

4.357

1 $$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1+x^4}{2ax^2}\right)\ln x\,\frac{1+ax^2-x^4}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{2a^3\pi}}{2\sqrt[a]{e}}$$

$[a>0]$. БХ [357] (8)

2 $$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1+x^4}{2ax^2}\right)\ln x\,\frac{x^4+ax^2-1}{x^4}\,dx = \frac{\sqrt{2a^3\pi}}{2\sqrt[a]{e}}$$

$[a>0]$. БХ [357] (9)

3. $$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1+x^4}{2ax^2}\right)\ln x\cdot\frac{x^4+3ax-1}{x^6}\,dx = \frac{(1+a)\sqrt{2a^3\pi}}{2\sqrt[a]{e}}$$

$[a>0]$. БХ [357] (10)

4.358

1. $$\int_1^\infty x^{\nu-1}e^{-\mu x}(\ln x)^m\,dx = \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial^m}{\partial\nu^m}\{\mu^{1-\nu}\Gamma(\mu,\nu)\}$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$. МХд 26

2 $$\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-\mu x}(\ln x)^2\,dx = \frac{\Gamma(\nu)}{\mu^\nu}\{[\psi(\nu)-\ln\mu]^2+\zeta(2,\nu-1)\}$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$. МХд 26

3 $$\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-\mu x}(\ln x)^3\,dx = \frac{\Gamma(\nu)}{\mu^\nu}\{[\psi(\nu)-\ln\mu]^3+$$
$$+[2\psi(\nu)-3\ln\mu]\,\zeta(2,\nu-1)-2\zeta(3,\nu-1)\}$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$. МХд 26

4.359

1. $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\,\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}\,dx = \frac{1}{\mu}[\lambda(\mu,p-1)-\lambda(\mu,q-1)]$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ p>0,\ q>0]$. МХд 27

2 $$\int_0^1 e^{\mu x}\,\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}\,dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{\mu^k}{k!}\ln\frac{p+k}{q+k}$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\ p>0,\ q>0]$. БХ [352] (9)

4.361

1. $$\int_0^\infty \frac{(x+1)e^{-\mu x}}{\pi^2+(\ln x)^2}\,dx = \nu'(\mu)-\nu''(\mu) \quad [\operatorname{Re}\mu>0].$$ МХд 27

2. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{x\left[\pi^2+(\ln x)^2\right]} = e^\mu-\nu(\mu) \quad [\operatorname{Re}\mu>0].$$ МХд 27

4.362

1. $$\int_0^1 xe^x \ln(1-x)\,dx = 1-e.$$ БХ [352] (5) и

2 $$\int_1^\infty e^{-\mu x}\ln(2x-1)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Ei}\left(-\frac{\mu}{2}\right)\right]^2 \quad [\operatorname{Re}\mu>0].$$ ИПІ 148 (8)

4.363

1. $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\ln(a+x)\frac{\mu(x+a)\ln(x+a)-2}{x+a}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-\mu x}\ln(a-x)^2\frac{\mu(x-a)\ln(x-a)^2-4}{x-a}\,dx = (\ln a)^2$$
$[\operatorname{Re}\mu>0,\ a>0].$ БХ [354] (4 и 5)

2 $$\int_0^1 x(1-x)(2-x)e^{-(1-x)^2}\ln(1-x)\,dx = \frac{1-e}{4e}.$$ БХ [352] (4)

4.364

1. $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\ln\left[(x+a)(x+b)\right]\frac{dx}{x+a+b} =$$
$$= e^{(a+b)\mu}\left\{\operatorname{Ei}(-a\mu)\operatorname{Ei}(-b\mu)-\ln(ab)\operatorname{Ei}\left[-(a+b)\mu\right]\right\}$$
$[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\mu>0].$ БХ [354] (11)

2 $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\ln(x+a+b)\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}\right)dx =$$
$$= (1+\ln a\ln b)\ln(a+b)+e^{-(a+b)\mu}\left\{\operatorname{Ei}(-a\mu)\operatorname{Ei}(-b\mu)+\right.$$
$$\left.+(1-\ln(ab))\operatorname{Ei}\left[-(a+b)\mu\right]\right\} \quad [a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\mu>0].$$ БХ [354] (12)

4.365 $$\int_0^\infty\left[e^{-x}-\frac{x}{(1+x)^{p+1}\ln(1+x)}\right]\frac{dx}{x} = \ln p \quad [p>0].$$ БХ [354] (15)

4.366

1. $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\ln\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{dx}{x} = \left[\operatorname{ci}(a\mu)\right]^2+\left[\operatorname{si}(a\mu)\right]^2$$
$[\operatorname{Re}\mu>0].$ НИ 32 (11) и

2. $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\ln\left|1-\frac{x^2}{a^2}\right|\frac{dx}{x} = \operatorname{Ei}(a\mu)\operatorname{Ei}(-a\mu) \quad [\operatorname{Re}\mu>0].$$ МХ 18

3. $$\int_0^\infty xe^{-\mu x^2} \ln\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right| dx = \frac{1}{\mu}\left[\operatorname{ch}\mu \operatorname{sh} i(\mu) - \operatorname{sh}\mu \operatorname{ch} i(\mu)\right]$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0]$; (сравни 4.339). МХд 27

4.367 $$\int_0^\infty xe^{-\mu x^2} \ln\frac{x+\sqrt{x^2+2\beta}}{\sqrt{2\beta}}\, dx = \frac{e^{\beta\mu}}{4\mu} K_0(\beta\mu)$$

$[|\arg\beta| < \pi,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. ИПІ 149 (19)

4.368 $$\int_0^{2u} e^{-\mu x^2} \ln\frac{x^2(4u^2-x^2)}{u^4} \frac{dx}{\sqrt{4u^2-x^2}} = \frac{\pi}{2} e^{-2u^2\mu}\left[\frac{\pi}{2} N_0(2iu^2\mu) - (C-\ln 2) J_0(2iu^2\mu)\right]$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0]$. ИПІ 149 (21) u

4.369

1. $$\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-\mu x}[\psi(\nu)-\ln x]\, dx = \frac{\Gamma(\nu)\ln\mu}{\mu^\nu} \quad [\operatorname{Re}\nu > 0].$$ ИПІ 149 (12)

2. $$\int_0^\infty x^n e^{-\mu x}\left\{\left[\ln x - \frac{1}{2}\psi(n+1)\right]^2 - \frac{1}{2}\psi'(n+1)\right\} dx = \frac{n!}{\mu^{n+1}}\left\{\left[\ln\mu - \frac{1}{2}\psi(n+1)\right]^2 + \frac{1}{2}\psi'(n+1)\right\} \quad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ МХд 26

4.37 Логарифмическая и гиперболические функции

4.371

1. $$\int_0^\infty \frac{\ln x}{\operatorname{ch} x}\, dx = \pi \ln\left[\frac{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right].$$ Ли [260] (1) u

2. $$\int_0^\infty \frac{\ln x\, dx}{\operatorname{ch} x + \cos t} = \frac{\pi}{\sin t} \ln\frac{(2\pi)^{\frac{t}{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{\pi+t}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\pi-t}{2\pi}\right)} \quad [t^2 < \pi^2].$$ БХ [257] (7) u

3. $$\int_0^\infty \frac{\ln x\, dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\pi = \ln\pi - 2\ln 2 - C.$$ БХ [257] (4) u

4.372

1. $$\int_1^\infty \ln x \frac{\operatorname{sh} mx}{\operatorname{sh} nx}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}\ln 2\pi + \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\sin\frac{km\pi}{n}\ln\frac{\Gamma\left(\frac{n+k}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2n}\right)} \quad [m+n \text{ нечетно}];$$

$$= \frac{\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}\ln\pi + \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{k-1}\sin\frac{km\pi}{n}\ln\frac{\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)} \quad [m+n \text{ четно}].$$

БХ [148] (3) u

2. $\int\limits_1^\infty \ln x \frac{\operatorname{ch} mx}{\operatorname{ch} nx}\,dx =$

$$= \frac{\pi}{2n}\frac{\ln 2\pi}{\cos\frac{m\pi}{2n}} + \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cos\frac{(2k-1)m\pi}{2n}\ln\frac{\Gamma\left(\frac{2n+2k-1}{4n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k-1}{4n}\right)}$$

[$m+n$ нечетно];

$$= \frac{\pi}{2n}\frac{\ln \pi}{\cos\frac{m\pi}{2n}} + \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{k-1}\cos\frac{(2k-1)m\pi}{2n}\ln\frac{\Gamma\left(\frac{2n-2k+1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k-1}{2n}\right)}$$

[$m+n$ четно]. БХ [148] (6) и

4.373

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(a^2+x^2)}{\operatorname{ch} bx}\,dx = \frac{\pi}{b}\left[2\ln\frac{2\Gamma\left(\frac{2ab+3\pi}{4\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{2ab+\pi}{4\pi}\right)} - \ln\frac{2b}{\pi}\right]$

$\left[b>0,\ a>-\frac{\pi}{2b}\right]$. БХ [258] (11) и

2 $\int\limits_0^\infty \ln(1+x^2)\frac{dx}{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2}} = 2\ln\frac{4}{\pi}$. БХ [258] (1) и

3 $\int\limits_0^\infty \ln(a^2+x^2)\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{2}{3}\pi x\right)}{\operatorname{sh}\pi x}\,dx = 2\sin\frac{\pi}{3}\ln\frac{6\Gamma\left(\frac{a+4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{a+5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{a+2}{6}\right)}$

[$a>-1$]. БХ [258] (12)

4. $\int\limits_0^\infty \ln(1+x^2)\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 ax} = \frac{2}{a}\left[\ln\frac{a}{\pi}+\frac{\pi}{2a}-\psi\left(\frac{\pi+a}{\pi}\right)\right]$ [$a>0$].

БХ [258] (5)

5 $\int\limits_0^\infty \ln(1+x^2)\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}x}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{2}x}\,dx = \frac{2\pi-4}{\pi}$. БХ [258] (3)

6. $\int\limits_0^\infty \ln(1+x^2)\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{4}x}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{4}x}\,dx = 4\sqrt{2}-\frac{16}{\pi}+\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\ln(\sqrt{2}+1)$. БХ [258] (2)

4.374

1 $\int\limits_0^\infty \ln(\cos^2 t + e^{-2x}\sin^2 t)\frac{dx}{\operatorname{sh} x} = -2t^2$. БХ [259] (10) и

2 $\int\limits_0^\infty \ln(a+be^{-2x})\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{2}{(b-a)}\left[\frac{a+b}{2}\ln(a+b) - a\ln a - b\ln 2\right]$

[$a>0,\ a+b>0$]. Ли [259] (14)

4.375

1. $$\int_0^\infty \ln \operatorname{ch} \frac{x}{2} \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = G - \frac{\pi}{4} \ln 2.$$ БХ [259] (11)

2. $$\int_0^\infty \ln \operatorname{cth} x \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$ БХ [259] (16)

4.376

1. $$\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x} \operatorname{ch} x} dx = 2\sqrt{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2k+1}} \{\ln(2k+1) + 2\ln 2 + C\}.$$ БХ [147] (4)

2. $$\int_0^\infty \ln x \frac{(\mu+1)\operatorname{ch} x - x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} x^\mu dx = 2\Gamma(\mu+1) \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^{\mu+1}}$$ $[\operatorname{Re}\mu > -1]$. БХ [356] (10)

3. $$\int_0^\infty \ln x \frac{(n+1)\operatorname{ch} x - x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} x^n dx = \frac{(-1)^n}{2^n} \beta^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right).$$

4. $$\int_0^\infty \ln 2x \frac{n \operatorname{sh} 2ax - ax}{\operatorname{sh}^2 ax} x^{2n-1} dx = -\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{2n} |B_{2n}|.$$ БХ [356] (9) u

5. $$\int_0^\infty \ln x \frac{ax \operatorname{ch} ax - (2n+1)\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh}^2 ax} x^{2n} dx = 2\frac{2^{2n+1}-1}{(2a)^{2n+1}} (2n)!\, \zeta(2n+1).$$ БХ [356] (14)

6. $$\int_0^\infty \ln x \frac{ax \operatorname{ch} ax - 2n \operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh}^2 ax} x^{2n-1} dx = \frac{2^{2n-1}-1}{2n} |B_{2n}| \left(\frac{\pi}{a}\right)^{2n}$$ $[a > 0]$. БХ [356] (15)

7. $$\int_0^\infty \ln x \frac{(2n+1)\operatorname{ch} ax - ax \operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch}^2 ax} x^{2n} dx = -\left(\frac{\pi}{2a}\right)^{2n+1} |E_{2n}|$$ $[a > 0]$. БХ [356] (11)

8. $$\int_0^\infty \ln x \frac{2ax \operatorname{sh} ax - (2n+1)\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch}^3 ax} x^{2n} dx = \frac{2}{a}(2^{2n-1}-1)\left(\frac{\pi}{2a}\right)^{2n} |B_{2n}|$$ $[a > 0]$. БХ [356] (2)

9. $$\int_0^\infty \ln x \frac{2ax \operatorname{ch} ax - (2n+1)\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh}^3 ax} x^{2n} dx = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{2n} |B_{2n}|.$$ БХ [356] (6) u

10. $$\int_0^\infty \ln x \frac{x \operatorname{sh} x - 6\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 6\cos^2\frac{t}{2}}{(\operatorname{ch} x + \cos t)^3} x^2 dx = \frac{(\pi^2 - t^2)\, t}{3 \sin t}$$ $[0 < t < \pi]$. БХ [356] (16) u

11. $\int\limits_0^\infty \ln(1+x^2)\frac{\operatorname{ch}\pi x+\pi x\operatorname{sh}\pi x}{\operatorname{ch}^2\pi x}\frac{dx}{x^2}=4-\pi.$ БХ [356] (12)

12. $\int\limits_0^\infty \ln(1+4x^2)\frac{\operatorname{ch}\pi x+\pi x\operatorname{sh}\pi x}{\operatorname{ch}^2\pi x}\frac{dx}{x^2}=4\ln 2.$ БХ [356] (13)

4.377 $\int\limits_0^\infty \ln 2x\,\frac{ax-n(1-e^{-2ax})}{\operatorname{sh}^2 ax}x^{2n-1}\,dx=\frac{1}{2n}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{2n}|B_{2n}|.$ Ли [356] (8) *и*

4.38—4.41 Логарифмическая и тригонометрические функции

4.381

1 $\int\limits_0^1 \ln x\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}[C+\ln a-\operatorname{ci}(a)]\quad [a>0].$ ГХ [338] (2а)

2. $\int\limits_0^1 \ln x\cos ax\,dx=-\frac{1}{a}\left[\operatorname{si}(a)+\frac{\pi}{2}\right]\quad [a>0].$ БХ [284] (2)

3. $\int\limits_0^{2\pi} \ln x\sin nx\,dx=-\frac{1}{n}[C+\ln(2n\pi)-\operatorname{ci}(2n\pi)].$ ГХ [338] (1а)

4. $\int\limits_0^{2\pi} \ln x\cos nx\,dx=-\frac{1}{n}\left[\operatorname{si}(2n\pi)+\frac{\pi}{2}\right].$ ГХ [338] (1b)

4.382

1. $\int\limits_0^\infty \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|\sin bx\,dx=\frac{\pi}{b}\sin ab\quad [a>0,\ b>0].$ ИПI 77 (11)

2. $\int\limits_0^\infty \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|\cos bx\,dx=\frac{2}{b}[\cos ab\operatorname{si}(ab)-\sin ab\operatorname{ci}(ab)]$

$[a>0,\ b>0].$ ИПI 18 (9)

3. $\int\limits_0^\infty \ln\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\cos cx\,dx=\frac{\pi}{c}(e^{-bc}-e^{-ac})\quad [a>0,\ b>0,\ c>0].$

Ф III 648 *и*, БХ [337] (5)

4. $\int\limits_0^\infty \ln\frac{x^2+x+a^2}{x^2-x+a^2}\sin bx\,dx=\frac{2\pi}{b}\exp\left(-b\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}\right)\sin\frac{b}{2}$

$[b>0].$ ИПI 77 (12)

5. $\int\limits_0^\infty \ln\frac{(x+\beta)^2+\gamma^2}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\sin bx\,dx=\frac{2\pi}{b}e^{-\gamma b}\sin\beta b$

$[\operatorname{Re}\gamma>0,\ |\operatorname{Im}\beta|\leqslant\operatorname{Re}\gamma,\ b>0].$ ИПI 77 (13)

4.383

1. $$\int_0^\infty \ln\left(1+e^{-\beta x}\right)\cos bx\,dx = \frac{\beta}{2b^2} - \frac{\pi}{2b\,\operatorname{sh}\left(\frac{\pi b}{\beta}\right)}$$
[$\operatorname{Re}\beta > 0,\ b > 0$]. ИП I 18(13)

2. $$\int_0^\infty \ln\left(1-e^{-\beta x}\right)\cos bx\,dx = \frac{\beta}{2b^2} - \frac{\pi}{2b}\operatorname{cth}\left(\frac{\pi b}{\beta}\right)$$
[$\operatorname{Re}\beta > 0,\ b > 0$]. ИП I 18(14)

4.384

1. $$\int_0^1 \ln(\sin\pi x)\sin 2n\pi x\,dx = 0.$$ ГХ [338] (3a)

2. $$\int_0^1 \ln(\sin\pi x)\sin(2n+1)\pi x\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(\sin\pi x)\sin(2n+1)\pi x\,dx =$$
$$= -\frac{1}{(2n+1)\pi}\left[2C + 2\ln 2 + \psi\left(\frac{1}{2}+n\right) + \psi\left(-\frac{1}{2}-n\right)\right] =$$
$$= \frac{2}{(2n+1)\pi}\left[\ln 2 - 2 - \frac{2}{3} - \ldots - \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right].$$ ГХ [338] (3b)

3. $$\int_0^1 \ln(\sin\pi x)\cos 2n\pi x\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(\sin\pi x)\cos 2n\pi x\,dx =$$
$$= -\ln 2 \qquad [n=0];$$
$$= -\frac{1}{2n} \qquad [n>0].$$ ГХ [338] (3c)

4. $$\int_0^1 \ln(\sin\pi x)\cos(2n+1)\pi x\,dx = 0.$$ ГХ [338] (3d)

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\sin x\,dx = \ln 2 - 1.$$ БХ [305] (4)

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\cos x\,dx = -1.$$ БХ [305] (5)

7. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\cos 2nx\,dx = -\frac{\pi}{4n}.$$ Ли [305] (6)

8. $$\int_0^{\pi} \ln\sin x\cos[2m(x-n)]\,dx = -\frac{\pi\cos 2mn}{2m}.$$ Ли [330] (8)

9. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{8}(1-\ln 4).$$ БХ [305] (7)

10. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \cos^2 x \, dx = -\frac{\pi}{8}(1 + \ln 4).$ БХ [305] (8)

11 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \sin x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{9}(\ln 8 - 4).$ БХ [305] (9)

12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \operatorname{tg} x \, dx = -\frac{\pi^2}{24}.$ БХ [305] (11)

13 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \sin x \, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \cos x \, dx = 2(\ln 2 - 1).$

БХ [305] (16 и 17)

14. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1 + p\cos x)}{\cos x} dx = \pi \arcsin p \qquad [p^2 < 1].$ Ф II 484

15 $\int\limits_0^{\pi} \ln \sin x \frac{dx}{1 - 2a\cos x + a^2} = \frac{\pi}{1 - a^2} \ln \frac{1 - a^2}{2} \qquad [a^2 < 1];$

$= \frac{\pi}{a^2 - 1} \ln \frac{a^2 - 1}{2a^2} \qquad [a^2 > 1].$ БХ [331] (8)

16. $\int\limits_0^{\pi} \ln \sin bx \frac{dx}{1 - 2a\cos x + a^2} = \frac{\pi}{1 - a^2} \ln \frac{1 - a^{2b}}{2} \qquad [a^2 < 1].$ БХ [331] (10)

17. $\int\limits_0^{\pi} \ln \cos bx \frac{dx}{1 - 2a\cos x + a^2} = \frac{\pi}{1 - a^2} \ln \frac{1 + a^{2b}}{2} \qquad [a^2 < 1].$ БХ [331] (11)

18. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \frac{dx}{1 - 2a\cos 2x + a^2} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \ln \sin x \frac{dx}{1 - 2a\cos 2x + a^2} =$

$= \frac{\pi}{2(1 - a^2)} \ln \frac{1 - a}{2} \qquad [a^2 < 1];$

$= \frac{\pi}{2(a^2 - 1)} \ln \frac{a - 1}{2a} \qquad [a^2 > 1].$ БХ [321] (1). БХ [331] (13)

19. $\int\limits_0^{\pi} \ln \sin bx \frac{dx}{1 - 2a\cos 2x + a^2} = \frac{\pi}{1 - a^2} \ln \frac{1 - a^b}{2} \qquad [a^2 < 1].$

БХ [331] (18)

20. $\int\limits_0^{\pi} \ln \cos bx \frac{dx}{1 - 2a\cos 2x + a^2} = \frac{\pi}{1 - a^2} \ln \frac{1 + a^b}{2} \qquad [a^2 < 1].$

БХ [331] (21)

21. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\cos x\,dx}{1-2p\cos 2x+p^2} = \frac{\pi}{2(1-p^2)}\ln\frac{1+p}{2} \qquad [p^2<1];$

$= \frac{\pi}{2(p^2-1)}\ln\frac{p+1}{2p} \qquad [p^2>1].$ БХ [321] (8)

22. $\int\limits_0^{\pi} \ln\sin x\,\frac{\cos x\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{\pi}{2a}\,\frac{1+a^2}{1-a^2}\ln(1-a^2) - \frac{a\pi\ln 2}{1-a^2} \qquad [a^2<1];$

$= \frac{\pi}{2a}\,\frac{a^2+1}{a^2-1}\ln\frac{a^2-1}{a^2} - \frac{\pi\ln 2}{a(a^2-1)} \qquad [a^2>1].$

Ли [331] (9)

23. $\int\limits_0^{\pi} \ln\sin bx\,\frac{\cos x\,dx}{1-2a\cos 2x+a^2} = \int\limits_0^{\pi} \ln\cos bx\,\frac{\cos x\,dx}{1-2a\cos 2x+a^2} = 0$

$[0<a<1].$ БХ [331] (19 и 22)

24. $\int\limits_0^{\pi} \ln\sin x\,\frac{\cos^2 x\,dx}{1-2a\cos 2x+a^2} = \frac{\pi}{4a}\,\frac{1+a}{1-a}\ln(1-a) - \frac{\pi\ln 2}{2(1-a)} \qquad [0<a<1];$

$= \frac{\pi}{4a}\,\frac{a+1}{a-1}\ln\frac{a-1}{a} - \frac{\pi\ln 2}{2a(a-1)} \qquad [a>1].$ БХ [331] (16)

25. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\frac{\cos 2x\,dx}{1-2a\cos 2x+a^2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \ln\sin x\,\frac{\cos 2x\,dx}{1-2a\cos 2x+a^2} =$

$= \frac{\pi}{2a(1-a^2)}\left\{\frac{1+a^2}{2}\ln(1-a) - a^2\ln 2\right\} \qquad [a^2<1];$

$= \frac{\pi}{2a(a^2-1)}\left\{\frac{1+a^2}{2}\ln\frac{a-1}{a} - \ln 2\right\} \qquad [a^2>1].$

БХ [321] (2), БХ [331] (15), Ли [321] (2)

26. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,\frac{\cos 2x\,dx}{1-2a\cos 2x+a^2} =$

$= \frac{\pi}{2a(1-a^2)}\left\{\frac{1+a^2}{2}\ln(1+a) - a^2\ln 2\right\} \qquad [a^2<1];$

$= \frac{\pi}{2a(a^2-1)}\left\{\frac{1+a^2}{2}\ln\frac{1+a}{a} - \ln 2\right\} \qquad [a^2>1].$ БХ [321] (9)

4.385

1. $\int\limits_0^{\pi} \ln\sin x\,\frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}} \qquad [a>0,\ a>b].$

БХ [331] (6)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\frac{dx}{(a\sin x\pm b\cos x)^2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,\frac{dx}{(a\cos x\pm b\sin x)^2} =$

$= \frac{1}{b(a^2+b^2)}\left(\mp a\ln\frac{a}{b} - \frac{b\pi}{2}\right) \qquad [a>0,\ b>0].$ БХ [319] (1 и 6) и

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x \, dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \cos x \, dx}{b^2 \sin^2 x + a^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2ab} \ln \frac{b}{a+b}$$
$[a > 0, \quad b > 0]$. БХ [317] (4 и 10)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \frac{\sin 2x \, dx}{(a \sin^2 x + b \cos^2 x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \frac{\sin 2x \, dx}{(b \sin^2 x + a \cos^2 x)^2} = \frac{1}{2b(b-a)} \ln \frac{a}{b}$$
$[a > 0, \ b > 0]$. БХ [319] (3 и 7), Ли [319] (3)

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \frac{a^2 \sin^2 x - b^2 \cos^2 x}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \frac{a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} dx = \frac{\pi}{2b(a+b)} \quad [a > 0, \ b > 0].$$
Ли [319] (2 и 8)

4.386

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \ln \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx = -\frac{\pi}{8} \ln 2.$$
БХ [322] (1 и 6)

2 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \ln \sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x \ln \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx = \frac{\ln 2 - 1}{4}.$$ БХ [322] (2 и 7)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{K}(k) \ln k - \frac{\pi}{4} \boldsymbol{K}(k').$$ БХ [322] (3)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \cos x \, dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{K}(k) \ln \frac{k'}{k} - \frac{\pi}{4} \boldsymbol{K}(k').$$ БХ [322] (9)

4.387

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \sin^\mu x \cos^\nu x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cos^\mu x \sin^\nu x \, dx = \frac{1}{4} \mathrm{B}\left(\frac{\mu+1}{2}, \frac{\nu+1}{2}\right) \left[\psi\left(\frac{\mu+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\mu+\nu+2}{2}\right)\right]$$
$[\operatorname{Re} \mu > -1, \ \operatorname{Re} \nu > -1]$. ГХ [338] (6с)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x \sin^{\mu-1} x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}\left[\psi\left(\frac{\mu}{2}\right)-\psi\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\right] \quad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ ГХ [338] (6a)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x \cos^{\nu-1} x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}\left[\psi\left(\frac{\nu}{2}\right)-\psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\right] \quad [\operatorname{Re}\nu > 0].$$ ГХ [338] (6b)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x \sin^{2n} x\, dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}\left\{\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\right\}.$$ Ф II 811

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\left\{\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k}}{k} + \ln 2\right\}.$$ БХ [305] (13)

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x \cos^{2n} x\, dx = -\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{4}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln 4\right] =$$
$$= -\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{4}\left[C + \psi(n+1) + \ln 4\right].$$ БХ [305] (14)

7. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x \cos^{2n+1} x\, dx = -\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} =$$
$$= -\frac{(2n)!!}{2(2n+1)!!}\left[\psi\left(n+\frac{3}{2}\right)-\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right].$$ ГХ [338] (7b)

8 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x \sin^{2n} x\, dx = -\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}\cdot n!}\frac{\pi}{2}\{C + 2\ln 2 + \psi(n+1)\}.$$ БХ [306] (8)

9. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x \cos^{2n} x\, dx = -\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\frac{\pi}{2}\left\{\ln 2 + \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}\right\}.$$ БХ [306] (10)

10. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x \cos^{2n-1} x\, dx = \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(2n-1)!!}\left[\ln 2 + \sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k}\right].$$ БХ [306] (9)

4.388

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n+2} x}\, dx =$$
$$= \frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{2}\ln 2 + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2n-2k-1}\right].$$ БХ [288] (1)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x \, \frac{\sin^{2n-1} x}{\cos^{2n+1} x} \, dx = \frac{1}{4n} \left[-\ln 2 + (-1)^n \ln 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{n-k} \right].$$ Ли [288] (2)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x \, \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n+2} x} \, dx = \frac{1}{2n+1} \left[-\frac{1}{2} \ln 2 + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2n-2k+1} \right].$$ БХ [288] (10)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x \, \frac{\sin^{2n-1} x}{\cos^{2n+1} x} \, dx = \frac{1}{4n} \left[-\ln 2 + (-1)^n \ln 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{n-k} \right].$$ БХ [288] (11)

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, \frac{\sin^{p-1} x}{\cos^{p+1} x} \, dx = -\frac{\pi}{2p} \operatorname{cosec} \frac{p\pi}{2} \qquad [0 < p < 2].$$ БХ [310] (4)

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, \frac{dx}{\operatorname{tg}^{p-1} x \sin 2x} = \frac{1}{4} \, \frac{\pi}{p-1} \sec \frac{p\pi}{2} \qquad [p^2 < 1].$$ БХ [310] (3)

4.389

1. $$\int_0^{\pi} \ln \sin x \sin^{2n} 2x \cos 2x \, dx = -\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \, \frac{\pi}{4n+2}.$$ БХ [330] (9)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x \cos^n 2x \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4(n+1)} \{ C + \psi(n+2) + \ln 2 \}.$$ БХ [285] (2)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x \cos^{\mu-1} 2x \operatorname{tg} 2x \, dx = \frac{1}{4(1-\mu)} \beta(\mu) \qquad [\operatorname{Re} \mu > 0].$$ БХ [286] (2)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \sin^{\mu-1} x \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cos^{\mu-1} x \sin x \, dx = -\frac{1}{\mu^2} \qquad [\operatorname{Re} \mu > 0].$$ БХ [306] (11)

5. $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cos^p x \cos px \, dx = -\frac{\pi}{2^p} \ln 2 \qquad [p > -1].$$ БХ [337] (6)

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cos^{p-1} x \sin px \sin x \, dx = \frac{\pi}{2^{p+2}} \left[C + \psi(p) - \frac{1}{p} - 2 \ln 2 \right] \qquad [p > 0].$$ БХ [306] (12)

4.391

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\cos 2x)^n \cos^{p-1} 2x \operatorname{tg} x\, dx =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\sin 2x)^n \sin^{p-1} 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx = \frac{1}{2}\beta^{(n)}(p) \quad [p > 0].$$
БХ [286] (10), БХ [285] (18)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\sin 2x)^n \sin^{p-1} 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx = \frac{(-1)^n n!}{2}\zeta(n+1, p).$$
БХ [285] (17)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\cos 2x)^{2n-1} \operatorname{tg} x\, dx = \frac{1-2^{2n-1}}{4n}\pi^{2n}|B_{2n}|.$$ БХ [286] (7)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\cos 2x)^{2n} \operatorname{tg} x\, dx = \frac{2^{2n}-1}{2^{2n+1}}(2n)!\,\zeta(2n+1).$$ БХ [286] (8)

4.392

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x\cos x)\frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n+2} x}\, dx =$$
$$= \frac{1}{2n+1}\left[(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2n+1} + 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{2n-2k-1}\right].$$ БХ [294] (8)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x\cos x)\frac{\sin^{2n-1} x}{\cos^{2n+1} x}\, dx =$$
$$= \frac{1}{2n}\left[(-1)^n\ln 2 - \ln 2 + \frac{1}{2n} + (-1)^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k}\right].$$ БХ [294] (9)

4.393

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\operatorname{tg} x \sin x\, dx = \ln 2.$$ БХ [307] (3)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\operatorname{tg} x \cos x\, dx = -\ln 2.$$ БХ [307] (4)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\operatorname{tg} x \sin^2 x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\operatorname{tg} x \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{4}.$$ БХ [307] (5 и 6)

4 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}\, dx = -\frac{\pi^2}{8}$. ГХ [338] (10b) u

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\, dx = \ln 2.$ Ло III 290

4.394

1. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \operatorname{tg} x\, dx}{1-2a\cos 2x+a^2} = \frac{\pi}{2(1-a^2)} \ln \frac{1-a}{1+a} \quad [a^2<1];$$
$$= \frac{\pi}{2(a^2-1)} \ln \frac{a-1}{a+1} \quad [a^2>1].$$
БХ [321] (15)

2. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \operatorname{tg} x \cos 2x\, dx}{1-2a\cos 2x+a^2} = \frac{\pi}{4a} \frac{1+a^2}{1-a^2} \ln \frac{1-a}{1+a} \quad [a^2<1];$$
$$= \frac{\pi}{4a} \frac{a^2+1}{a^2-1} \ln \frac{a-1}{a+1} \quad [a^2>1].$$ БХ [321] (16)

3. $$\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln \operatorname{tg} bx\, dx}{1-2a\cos 2x+a^2} = \frac{\pi}{1-a^2} \ln \frac{1-a^b}{1+a^b} \quad [0<a<1,\ b>0].$$ БХ [331] (24)

4. $$\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln \operatorname{tg} bx \cos x\, dx}{1-2a\cos 2x+a^2} = 0 \quad [0<a<1].$$ БХ [331] (25)

5. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \operatorname{tg} x \frac{\cos 2x\, dx}{1-a\sin 2x} = -\frac{\arcsin a}{4a} (\pi + \arcsin a) \quad [a^2 \leqslant 1].$$
БХ [291] (2 и 3)

6. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \operatorname{tg} x \frac{\cos 2x\, dx}{1-a^2\sin^2 2x} = -\frac{\pi}{4a} \arcsin a \quad [a^2<1].$$ БХ [291] (9)

7. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \operatorname{tg} x \frac{\cos 2x\, dx}{1+a^2\sin^2 x} = -\frac{\pi}{4a} \operatorname{Arsh} a = -\frac{\pi}{4a} \ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)$$
$[a^2<1]$. БХ [291] (10)

8. $$\int\limits_0^{u} \frac{\sin x \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{1-\cos^2\alpha \sin^2 x}\, dx =$$
$$= \operatorname{cosec} 2\alpha \left\{ \frac{\pi}{2} \ln 2 + L(\varphi-\alpha) - L(\varphi+\alpha) - L\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right) \right\}$$
$[\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \alpha \cos u;\ 0<u<\pi]$. Ло III 290

9. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x \sin 2x\, dx}{1-\cos^2 t \sin^2 2x} = \operatorname{cosec} 2t \left[L\left(\frac{\pi}{2}-t\right) - \left(\frac{\pi}{2}-t\right) \ln 2 \right].$

Ло III 290u

4.395

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \operatorname{tg} x\, dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} = -\ln k' \boldsymbol{K}(k).$ БХ [322] (11)

2. $\int\limits_u^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x \sin 4x\, dx}{(\sin^2 u + \operatorname{tg}^2 v \sin^2 2x) \sqrt{\sin^2 2x - \sin^2}} =$

$$= -\frac{\pi}{2} \frac{\cos^2 v}{\sin u \sin v} \ln \frac{\sin v + \sqrt{1-\cos^2 u \cos^2 v}}{\sin u (1+\sin v)}$$

$\left[0 < u < \frac{\pi}{2},\ 0 < v < \frac{\pi}{2} \right].$ Ло III 285u

4.396

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln (a \operatorname{tg} x) \sin^{\mu-1} 2x\, dx = 2^{\mu-2} \ln a \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(a)}$

$[a > 0,\ \operatorname{Re} \mu > 0]$ Ти [307] (8)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{tg} x \cos^{2(\mu-1)} x\, dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma\left(u-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu)} \left[\boldsymbol{C} + \psi\left(\frac{2\mu-1}{2}\right) + \ln 4 \right]$

$\left[\operatorname{Re} \mu > \frac{1}{2} \right].$ БХ [307] (9)

3 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{tg} x \cos^{q-1} x \operatorname{ctg} x \sin [(q+1)x]\, dx = -\frac{\pi}{2} [\boldsymbol{C} + \psi(q+1)]$

$[q > -1].$ БХ [307] (11)

4 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{tg} x \cos^{q-1} x \cos [(q+1)x]\, dx = -\frac{\pi}{2q}$ $[q > 0].$ БХ [307] (10)

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln \operatorname{tg} x)^n \operatorname{tg}^p x\, dx = \frac{1}{2^{n+1}} \beta^{(n)}\left(\frac{p+1}{2}\right)$ $[p > -1].$ Ли [286] (22)

6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \operatorname{tg} x)^{2n-1} \frac{dx}{\cos 2x} = \frac{1-2^{2n}}{2n} \pi^{2n} |B_{2n}|.$ БХ [312] (6)

7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^{2n+1} x\, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{4} \left[\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} \right].$ ГХ [338] (8a)

4.397

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+p\sin x)\frac{dx}{\sin x}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}(\arccos p)^2 \quad [p^2<1].$$ БХ [313] (1)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+p\cos x)\frac{dx}{\cos x}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}(\arccos p)^2 \quad [p^2<1].$$ БХ [313] (8)

3. $$\int_0^{\pi} \ln(1+p\cos x)\frac{dx}{\cos x}=\pi\arcsin p \quad [p^2<1].$$ БХ [331] (1)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\ln(1+\cos\alpha\cos x)}{1-\cos^2\alpha\cos^2 x}\,dx=\frac{L\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\alpha\ln\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \quad \left[0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right].$$ Ло III 291

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\ln(1-\cos\alpha\cos x)}{1-\cos^2\alpha\cos^2 x}\,dx=\frac{L\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+(\pi-\alpha)\ln\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \quad \left[0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right].$$ Ло III 291

6. $$\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x+a^2)\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\cos nx\,dx=$$
$$=-\frac{\pi}{n}a^n \quad [a^2<1];$$ БХ [330] (11), БХ [332] (5)
$$=-\frac{\pi}{na^n} \quad [a^2>1].$$ ГХ [338] (13a)

7. $$\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x+a^2)\sin nx\sin x\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\sin nx\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}\left(\frac{a^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n-1}}{n-1}\right)$$
$[a^2<1]$. БХ [330] (10), БХ [332] (4)

8. $$\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x+a^2)\cos nx\cos x\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\cos nx\cos x\,dx=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{a^{n+1}}{n+1}+\frac{a^{n-1}}{n-1}\right)$$
$[a^2<1]$. БХ [330] (12), БХ [332] (6)

9. $$\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos 2x+a^2)\cos(2n-1)x\,dx=0 \quad [a^2<1].$$ БХ [330] (15)

10. $$\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos 2x+a^2)\sin 2nx\sin x\,dx=0 \quad [a^2<1].$$ БХ [330] (13)

11. $$\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos 2x+a^2)\sin(2n-1)x\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a^n}{n}-\frac{a^{n-1}}{n-1}\right) \quad [a^2<1].$$ БХ [330] (14)

12. $$\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos 2x+a^2)\cos 2nx\cos x\,dx = 0 \quad [a^2<1].$$ БХ [330] (16)

13. $$\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos 2x+a^2)\cos(2n-1)x\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{a^{n-1}}{n-1}\right) \quad [a^2<1].$$ БХ [330] (17)

14. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+2a\cos 2x+a^2)\sin^2 x\,dx = -\frac{a\pi}{4} \quad [a^2<1];$$
$$= \frac{\pi\ln a^2}{4}-\frac{\pi}{4a} \quad [a^2>1].$$
БХ [309] (22), Ли [309] (22)

15 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+2a\cos 2x+a^2)\cos^2 x\,dx = \frac{a\pi}{4} \quad [a^2<1];$$
$$= \frac{\pi\ln a^2}{4}+\frac{\pi}{4a} \quad [a^2>1].$$
БХ [309] (23), Ли [309] (23)

16. $$\int_0^{\pi} \frac{\ln(1-2a\cos x+a^2)}{1-2b\cos x+b^2}\,dx = \frac{2\pi\ln(1-ab)}{1-b^2} \quad [a^2\leqslant 1,\ b^2<1].$$ БХ [331] (26)

4.398

1. $$\int_0^{\pi} \ln\frac{1+2a\cos x+a^2}{1-2a\cos x+a^2}\sin(2n+1)x\,dx = (-1)^n\frac{2\pi a^{2n+1}}{2n+1}$$
$[a^2<1]$ БХ [330] (18)

2. $$\int_0^{2\pi} \ln\frac{1-2a\cos x+a^2}{1-2a\cos nx+a^2}\cos mx\,dx = 2\pi\left(\frac{n}{m}a^{\frac{m}{n}}-\frac{a^m}{m}\right) \quad [a^2\leqslant 1];$$
$$= 2\pi\left(\frac{n}{m}a^{-\frac{m}{n}}-\frac{a^{-m}}{m}\right) \quad [a^2\geqslant 1].$$
БХ [332] (9)

3. $$\int_0^{\pi} \ln\frac{1+2a\cos 2x+a^2}{1+2a\cos 2nx+a^2}\operatorname{ctg} x\,dx = 0.$$ БХ [331] (5), Ли [331] (5)

4.399

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+a\sin^2 x)\sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1+a}}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{1+a}}{1+\sqrt{1+a}}\right)$$
$[a>-1]$. БХ [309] (14)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+a\sin^2 x)\cos^2 x\,dx =$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1+a}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{1+a}}{1+\sqrt{1+a}}\right) \quad [a > -1].$$ БХ [309] (15)

3 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1-\cos^2\beta\cos^2 x)}{1-\cos^2\alpha\cos^2 x}\,dx = -\frac{\pi}{\sin\alpha}\ln\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}$

$$\left[0<\beta<\frac{\pi}{2},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right].$$ Ло III 285

4.411

1. $\int\limits_0^{\pi} \ln\frac{1+\sin x}{1+\cos\lambda\sin x}\,\frac{dx}{\sin x} = \lambda^2 \quad [\lambda^2 < \pi^2].$ БХ [331] (2)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{p+q\sin ax}{p-q\sin ax}\,\frac{dx}{\sin ax} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{p+q\cos ax}{p-q\cos ax}\,\frac{dx}{\cos ax} =$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{p+q\,\mathrm{tg}\,ax}{p-q\,\mathrm{tg}\,ax}\,\frac{dx}{\mathrm{tg}\,ax} = \pi\arcsin\frac{q}{p} \quad [p > q > 0].$$

Ф II 695 *и*, БХ [315] (5), БХ [315] (13), БХ [315] (17) *и*

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\cos^2\alpha\cos^2 x}\ln\frac{1+\cos\beta\cos x}{1-\cos\beta\cos x}\,dx = \frac{2\pi}{\sin 2\alpha}\ln\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$

$$\left[0<\alpha\leqslant\beta<\frac{\pi}{2}\right].$$ Ло III 284

4.412

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\pm x\right)\frac{dx}{\sin 2x} = \pm\frac{\pi^2}{8}.$ БХ [293] (1)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\pm x\right)\frac{dx}{\mathrm{tg}\,2x} = \pm\frac{\pi^2}{16}.$ БХ [293] (2)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\pm x\right)(\ln\mathrm{tg}\,x)^{2n}\frac{dx}{\sin 2x} = \pm\frac{2^{2n+2}-1}{4(n+1)(2n+1)}\pi^{2n+2}|B_{2n+2}|.$

БХ [294] (24)

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\pm x\right)(\ln\mathrm{tg}\,x)^{2n-1}\frac{dx}{\sin 2x} = \pm\frac{1-2^{2n+1}}{2^{2n+2}n}(2n)!\,\zeta(2n+1).$

БХ [294] (25)

5. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm x\right)(\ln \sin 2x)^{n-1} \frac{dx}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}(n-1)!\,\zeta(n+1).$$

Ли [294] (20)

4.413

1. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(p^2 + q^2 \operatorname{tg}^2 x) \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{ab} \ln \frac{ap+bq}{a}$$

$[a > 0,\ b > 0,\ p > 0,\ q > 0]$. БХ [318] (1—4) и

2. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + q^2 \operatorname{tg}^2 x) \frac{1}{p^2 \sin^2 x + r^2 \cos^2 x} \frac{dx}{s^2 \sin^2 x + t^2 \cos^2 x} =$$
$$= \frac{\pi}{p^2t^2 - s^2r^2} \left\{ \frac{p^2 - r^2}{pr} \ln\left(1 + \frac{qr}{p}\right) + \frac{t^2 - s^2}{st} \ln\left(1 + \frac{qt}{s}\right) \right\}$$

$[q > 0,\ p > 0,\ r > 0,\ s > 0,\ t > 0]$. БХ [320] (18)

3. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + q^2 \operatorname{tg}^2 x) \frac{\sin^2 x}{p^2 \sin^2 x + r^2 \cos^2 x} \frac{dx}{s^2 \sin^2 x + t^2 \cos^2 x} =$$
$$= \frac{\pi}{p^2t^2 - s^2r^2} \left\{ \frac{t}{s} \ln\left(1 + \frac{qt}{s}\right) - \frac{r}{p} \ln\left(1 + \frac{qr}{p}\right) \right\}$$

$[q > 0,\ p > 0,\ r > 0,\ s > 0,\ t > 0]$. БХ [320] (20)

4. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + q^2 \operatorname{tg}^2 x) \frac{\cos^2 x}{p^2 \sin^2 x + r^2 \cos^2 x} \frac{dx}{s^2 \sin^2 x + t^2 \cos^2 x} =$$
$$= \frac{\pi}{p^2t^2 - s^2r^2} \left\{ \frac{p}{r} \ln\left(1 + \frac{qr}{p}\right) - \frac{s}{t} \ln\left(1 + \frac{qt}{s}\right) \right\}$$

$[q > 0,\ p > 0,\ r > 0,\ s > 0,\ t > 0]$. БХ [320] (21)

5. $$\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln \operatorname{tg} rx\, dx}{1 - 2p \cos x + p^2} = \frac{\pi}{1-p^2} \ln \frac{1-p^{2r}}{1+p^{2r}} \qquad [p^2 < 1].$$ БХ [331] (12)

4.414

1. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - k^2 \sin^2 x) \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \ln k' \boldsymbol{K}(k).$$ БХ [323] (1)

2. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - k^2 \sin^2 x) \frac{\sin^2 x\, dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{k^2} \{(k^2 - 2 + \ln k') \boldsymbol{K}(k) +$$
$$+ (2 - \ln k') \boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ [323] (3)

3. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - k^2 \sin^2 x) \frac{\cos^2 x\, dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{k^2} [(1 + k'^2 - k'^2 \ln k') \boldsymbol{K}(k) -$$
$$- (2 - \ln k') \boldsymbol{E}(k)].$$ БХ [323] (6)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-k^2\sin^2 x)\frac{dx}{\sqrt{(1-k^2\sin^2 x)^3}} = \frac{1}{k'^2}[(k^2-2)\boldsymbol{K}(k)+(2+\ln k')\boldsymbol{E}(k)].$$ БХ [323] (9)

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-k^2\sin^2 x)\frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{(1-k^2\sin^2 x)^3}} = \frac{1}{k^2k'^2}[(2+\ln k')\boldsymbol{E}(k)-(1+k'^2+k'^2\ln k')\boldsymbol{K}(k)].$$ БХ [323] (10)

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-k^2\sin^2 x)\frac{\cos^2 x\,dx}{\sqrt{(1-k^2\sin^2 x)^3}} = \frac{1}{k^2}[(1+k'^2+\ln k')\boldsymbol{K}(k)-(2+\ln k')\boldsymbol{E}(k)].$$ БХ [323] (16)

7. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-k^2\sin^2 x)\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx = (1+k'^2)\boldsymbol{K}(k)-(2-\ln k')\boldsymbol{E}(k).$$ БХ [324] (18)

8. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-k^2\sin^2 x)\sin^2 x\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{9k^2}\{(-2+11k^2-6k^4+3k'^2\ln k')\boldsymbol{K}(k)+[2-1-3(1-2k^2)\ln k']\boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ [324] (20)

9. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-k^2\sin^2 x)\cos^2 x\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{9k^2}\{(2+7k^2-3k^4-3k'^2\ln k')\boldsymbol{K}(k)-[2+8k^2-3(1+k^2)\ln k']\boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ [324] (21), Ли [324] (21)

10. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-k^2\sin^2 x)\frac{\sin x\cos x\,dx}{\sqrt{(1-k^2\sin^2 x)^{2n+1}}} = \frac{2}{(2n-1)^2k^2}\{[1+(2n-1)\ln k']k'^{1-2n}-1\}.$$ БХ [324] (17)

4.415

1. $$\int_0^{\infty} \ln x\sin ax^2\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(\ln 4a+C-\frac{\pi}{2}\right) \quad [a>0].$$ ГХ [338] (19)

2. $$\int_0^{\infty} \ln x\cos ax^2\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(\ln 4a+C+\frac{\pi}{2}\right) \quad [a>0].$$ ГХ [338] (19)

4.416

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \ln\left(1+\sqrt{\sin^2\beta-\cos^2\beta\,\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2 x}\right)}{1-\sin^2\alpha\cos^2 x}\,dx =$$
$$=\operatorname{cosec} 2\alpha\,\{(2\alpha+2\gamma-\pi)\ln\cos\beta+2L(\alpha)-2L(\gamma)+L(\alpha+\gamma)-L(\alpha-\gamma)\}$$
$$\left[\cos\gamma=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta};\ 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}\right].$$ Ло III 291

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \ln\left(1-\sqrt{\sin^2\beta-\cos^2\beta\,\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2 x}\right)}{1-\sin^2\alpha\cos^2 x}\,dx =$$
$$=\operatorname{cosec} 2\alpha\,\{(\pi+2\alpha-2\gamma)\ln\cos\beta+2L(\alpha)+2L(\gamma)-L(\alpha+\gamma)+L(\alpha-\gamma)\}$$
$$\left[\cos\gamma=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta};\ 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}\right].$$ Ло III 291

3. $$\int_\beta^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\sin x+\sqrt{\sin^2 x-\sin^2\beta}\right)}{1-\cos^2\alpha\cos^2 x}\,dx =$$
$$=-\operatorname{cosec}\alpha\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\sin\alpha}\right)\ln\sin\beta+\frac{\pi}{2}\ln\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha+\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}}\right\}$$
$$\left[0<\alpha<\pi,\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right].$$ Ло III 285

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\mathrm{tg}\,x\,(\ln\cos 2x)^{n-1}\,\mathrm{tg}\,2x\,dx=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2k)^{n+1}}=$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{2^{n+3}}\,\zeta\left(n+1,\frac{1}{2}\right).$$ БХ [287] (20)

4.42—4.43 Логарифмическая, тригонометрические и степенная функции

4.421

1. $$\int_0^{\infty}\ln x\sin ax\frac{dx}{x}=-\frac{\pi}{2}(C+\ln a)\qquad [a>0].$$ Ф II 810и

2. $$\int_0^{\infty}\ln ax\sin bx\frac{x\,dx}{\beta^2+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-b\beta'}\ln(a\beta')-$$
$$-\frac{\pi}{4}[e^{b\beta'}\operatorname{Ei}(-b\beta')+e^{-b\beta'}\operatorname{Ei}(b\beta')]\quad [\beta'=\beta\operatorname{sign}\beta;\ a>0,\ b>0].$$
ИП I 76 (5), НИ 27 (10)и

3. $$\int_0^{\infty}\ln ax\cos bx\frac{\beta'\,dx}{\beta^2+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-b\beta'}\ln(a\beta')+$$
$$+\frac{\pi}{4}[e^{b\beta'}\operatorname{Ei}(-b\beta')-e^{-b\beta'}\operatorname{Ei}(b\beta')]\quad [\beta'=\beta\operatorname{sign}\beta;\ a>0,\ b>0].$$
ИП I 17 (3), НИ 27 (11)и

4. $\int\limits_0^\infty \ln ax \sin bx \frac{x\,dx}{x^2-c^2} = \frac{\pi}{2}\{-\operatorname{si}(bc)\sin bc +$

$+\cos bc\,[\ln ac - \operatorname{ci}(bc)]\}$ $[a>0,\ b>0,\ c>0]$. БХ [422] (5)

5. $\int\limits_0^\infty \ln ax \cos bx \frac{dx}{x^2-c^2} = \frac{\pi}{2c}\{\sin bc\,[\operatorname{ci}(bc) - \ln ac] - \cos bc \operatorname{si}(bc)\}$

$[a>0,\ b>0,\ c>0]$. БХ [422] (6)

4.422

1. $\int\limits_0^\infty \ln x \sin ax\, x^{\mu-1}\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}\sin\frac{\mu\pi}{2}\left[\psi(\mu) - \ln a + \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\mu\pi}{2}\right]$

$[a>0,\ |\operatorname{Re}\mu|<1]$. БХ [411] (5)

2. $\int\limits_0^\infty \ln x \cos ax\, x^{\mu-1}\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}\cos\frac{\mu\pi}{2}\left[\psi(\mu) - \ln a - \frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\mu\pi}{2}\right]$

$[a>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<1]$. БХ [411] (6)

4.423

1. $\int\limits_0^\infty \ln x \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = \ln\frac{a}{b}\left(C + \frac{1}{2}\ln ab\right)$ $[a>0,\ b>0]$.

ГХ [338] (21a)

2. $\int\limits_0^\infty \ln x \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}[(a-b)(C-1) +$

$+a\ln a - b\ln b]$ $[a>0,\ b>0]$. ГХ [338] (21b)

3. $\int\limits_0^\infty \ln x \frac{\sin^2 ax}{x^2}\,dx = -\frac{a\pi}{2}(C + \ln 2a - 1)$ $[a>0]$. ГХ [338] (20b)

4.424

1. $\int\limits_0^\infty (\ln x)^2 \sin ax \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}C^2 + \frac{\pi^3}{24} + \pi C\ln a + \frac{\pi}{2}(\ln a)^2$

$[a>0]$. ИП I 77 (9), Ф II 810и

2. $\int\limits_0^\infty (\ln x)^2 \sin ax\, x^{\mu-1}\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}\sin\frac{\mu\pi}{2}\Big[\psi'(\mu) + \psi^2(\mu) + \pi\psi(\mu)\operatorname{ctg}\frac{\mu\pi}{2} -$

$-2\psi(\mu)\ln a - \pi\ln a\operatorname{ctg}\frac{\mu\pi}{2} + (\ln a)^2 - \pi^2\Big]$

$[a>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<1]$. ИП I 77 (10)

4.425

1. $\int\limits_0^\infty \ln(1+x)\cos ax \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\{[\operatorname{si}(a)]^2 + [\operatorname{ci}(a)]^2\}$ $[a>0]$. ИП I 18 (8)

2. $\int\limits_0^\infty \ln\left(\frac{b+x}{b-x}\right)^2 \cos ax \frac{dx}{x} = -2\pi\operatorname{si}(ab)$ $[a>0,\ b>0]$. ИП I 18 (11)

3. $$\int_0^\infty \ln(1+b^2x^2)\sin ax\frac{dx}{x} = -\pi\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{a}{b}\right) \qquad [a>0,\ b>0].$$

ГХ [338] (24), ИП I 77 (14)

4. $$\int_0^1 \ln(1-x^2)\cos(p\ln x)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2p^2}+\frac{\pi}{2p}\,\mathrm{cth}\,\frac{p\pi}{2}.$$ Ли [309] (1) *и*

4.426

1. $$\int_0^\infty \ln\frac{b^2+x^2}{c^2+x^2}\sin ax\,x\,dx = \frac{\pi}{a^2}\left[(1+ac)e^{-ac}-(1+ab)e^{-ab}\right]$$

$[b\geqslant 0,\ c\geqslant 0,\ a>0].$ ГХ [338] (23)

2. $$\int_0^\infty \ln\frac{b^2x^2+p^2}{c^2x^2+p^2}\sin ax\frac{dx}{x} = \pi\left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{ap}{c}\right)-\mathrm{Ei}\left(-\frac{ap}{b}\right)\right]$$

$[b>0,\ c>0,\ p>0,\ a>0].$ ИП I 77 (15)

4.427 $$\int_0^\infty \ln\left(x+\sqrt{\beta^2+x^2}\right)\frac{\sin ax}{\sqrt{\beta^2+x^2}}dx = \frac{\pi}{2}K_0(a\beta)+$$
$$+\frac{\pi}{2}\ln(\beta)\left[I_0(a\beta)-\mathbf{L}(a\beta)\right] \qquad [\mathrm{Re}\,\beta>0,\ a>0].$$ ИП I 77 (16)

4.428

1. $$\int_0^\infty \ln\cos^2 ax\frac{\cos bx}{x^2}dx = \pi b\ln 2 - a\pi \qquad [a>0,\ b>0].$$ ИП I 22 (29)

2. $$\int_0^\infty \ln(4\cos^2 ax)\frac{\cos bx}{x^2+c^2}dx = \frac{\pi}{c}\,\mathrm{ch}(bc)\ln(1+e^{-2ac})$$

$\left[0<b<2a<\frac{\pi}{c}\right].$ ИП I 22 (30)

3. $$\int_0^\infty \ln\cos^2 ax\frac{\sin bx}{x(1+x^2)}dx = \pi\ln(1+e^{-2a})\,\mathrm{sh}\,b-$$
$$-\pi\ln 2(1-e^{-b}) \qquad [a>0,\ b>0].$$ ИП I 82 (36)

4. $$\int_0^\infty \ln\cos^2 ax\frac{\cos bx}{x^2(1+x^2)}dx = -\pi\ln(1+e^{-2a})\,\mathrm{ch}\,b+$$
$$+(b+e^{-b})\pi\ln 2 - a\pi \qquad [a>0,\ b>0].$$ ИП I 22 (31)

4.429 $$\int_0^1 \frac{(1+x)x}{\ln x}\sin(\ln x)\,dx = \frac{\pi}{4}.$$ БХ [326] (2) *и*

4.431

1. $$\int_0^\infty \ln(2\pm 2\cos x)\frac{\sin bx}{x^2+c^2}x\,dx = -\pi\,\mathrm{sh}(bc)\ln(1\pm e^{-c})$$

$[b>0,\ c>0].$ ИП I 22 (32)

2. $$\int_0^\infty \ln(2 \pm 2\cos x)\frac{\cos bx}{x^2+c^2}\,dx = \frac{\pi}{c}\operatorname{ch}(bc)\ln(1 \pm e^{-c})$$

$[b > 0,\ c > 0]$. ИП I 22 (32)

3. $$\int_0^\infty \ln(1+2a\cos x + a^2)\frac{\sin bx}{x}\,dx = -\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{E(b)}\frac{(-a)^k}{k}[1+\operatorname{sign}(b-k)]$$

$[0 < a < 1,\ b > 0]$. ИП I 82 (35)

4 $$\int_0^\infty \ln(1-2a\cos x + a^2)\frac{\cos bx}{x^2+c^2}\,dx = \frac{\pi}{c}\ln(1-ae^{-c})\operatorname{ch}(bc) + \frac{\pi}{c}\sum_{k=1}^{E(b)}\frac{a^k}{k}\operatorname{sh}[c(b-k)]$$

$[|a| < 1,\ b > 0,\ c > 0]$. ИП I 22 (33)

4.432

1 $$\int_0^\infty \ln(1-k^2\sin^2 x)\frac{\sin x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\frac{dx}{x} = \int_0^\infty \ln(1-k^2\cos^2 x)\frac{\sin x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\frac{dx}{x} = \ln k'\boldsymbol{K}(k).$$ БХ [412 и 414] (4)

2 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-k^2\sin^2 x)\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}x\,dx = \frac{1}{k^2}\{\pi k'(1-\ln k') + (2-k^2)\boldsymbol{K}(k) - (4-\ln k')\boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ [426] (3)

3 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-k^2\cos^2 x)\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}x\,dx = \frac{1}{k^2}\{-\pi - (2-k^2)\boldsymbol{K}(k) + (4-\ln k')\boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ [426] (6)

4 $$\int_0^\infty \ln(1-k^2\sin^2 x)\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\frac{dx}{x} = \frac{1}{k^2}\{(2-k^2-k'^2\ln k')\boldsymbol{K}(k) - (2-\ln k')\boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ [412] (5)

5 $$\int_0^\infty \ln(1-k^2\cos^2 x)\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\frac{dx}{x} = \frac{1}{k^2}\{(k^2-2+\ln k')\boldsymbol{K}(k) + (2-\ln k')\boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ [414] (5)

6. $$\int_0^\infty \ln(1 \pm k\sin^2 x)\frac{\sin x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \int_0^\infty \ln(1 \pm k\cos^2 x)\frac{\sin x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \int_0^\infty \ln(1 \pm k\sin^2 x)\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \int_0^\infty \ln(1 \pm k\cos^2 x)\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \int_0^\infty \ln(1 \pm k\sin^2 2x)\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 2x}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \int_0^\infty \ln(1 \pm k^2\cos^2 2x)\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 2x}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{2(1\pm k)}{\sqrt{k}}\boldsymbol{K}(k) - \frac{\pi}{8}\boldsymbol{K}(k').$$

БХ [413] (1—6), БХ [415] (1—6)

7. $$\int_0^\infty \ln(1 - k^2\sin^2 x)\frac{\sin^3 x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{1}{k^2}\{(k^2 - 2 + \ln k')\boldsymbol{K}(k) + (2 - \ln k')\boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ [412] (6)

8. $$\int_0^\infty \ln(1 - k^2\cos^2 x)\frac{\sin^3 x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{1}{k^2}\{(2 - k^2 - k'^2\ln k')\boldsymbol{K}(k) - (2 - \ln k')\boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ [414] (6) и

9. $$\int_0^\infty \ln(1 - k^2\sin^2 x)\frac{\sin x\cos^2 x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{1}{k^2}\{(2 - k^2 - k'^2\ln k')\boldsymbol{K}(k) - (2 - \ln k')\boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ [412] (7)

10. $$\int_0^\infty \ln(1 - k^2\cos^2 x)\frac{\sin x\cos^2 x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{1}{k^2}\{(k^2 - 2 + \ln k')\boldsymbol{K}(k) + (2 - \ln k')\boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ [414] (7)

11. $$\int_0^\infty \ln(1 - k^2\sin^2 x)\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \int_0^\infty \ln(1 - k^2\cos^2 x)\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\frac{dx}{x} = \ln k'\boldsymbol{K}(k).$$ БХ [412 и 414] (9)

12. $$\int\limits_0^\infty \ln(1-k^2\sin^2 x)\frac{\sin^2 x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{1}{k^2}\{(k^2-2+\ln k')\boldsymbol{K}(k)+(2-\ln k')\boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ [412] (8)

13. $$\int\limits_0^\infty \ln(1-k^2\cos^2 x)\frac{\sin^2 x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{1}{k^2}\{(2-k^2-k'^2\ln k')\boldsymbol{K}(k)-(2-\ln k')\boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ [414] (8)

14. $$\int\limits_0^\infty \ln(1-k^2\sin^2 x)\frac{\sin x}{\sqrt{(1-k^2\sin^2 x)^3}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \int\limits_0^\infty \ln(1-k^2\cos^2 x)\frac{\sin x}{\sqrt{(1-k^2\cos^2 x)^3}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{1}{k'^2}\{(k^2-2)\boldsymbol{K}(k)+(2+\ln k')\boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ [412 и 414] (13)

15. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-k^2\sin^2 x)\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{(1-k^2\sin^2 x)^3}}x\,dx =$$
$$= \frac{1}{k^2}\left\{(1+\ln k')\frac{\pi}{k'}-(2+\ln k')\boldsymbol{K}(k)\right\}.$$ БХ [426] (9)

16. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-k^2\cos^2 x)\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{(1-k^2\cos^2 x)^3}}x\,dx =$$
$$= \frac{1}{k^2}\{-\pi+(2+\ln k')\boldsymbol{K}(k)\}.$$ БХ [426] (15)

17. $$\int\limits_0^\infty \ln(1-k^2\sin^2 x)\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{(1-k^2\sin^2 x)^3}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \int\limits_0^\infty \ln(1-k^2\cos^2 x)\frac{\sin^3 x}{\sqrt{(1-k^2\cos^2 x)^3}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{1}{k^2}\{(2-k^2+\ln k')\boldsymbol{K}(k)-(2+\ln k')\boldsymbol{E}(k)\}.$$
БХ [412] (14), БХ [414] (15)

18. $$\int\limits_0^\infty \ln(1-k^2\sin^2 x)\frac{\sin^3 x}{\sqrt{(1-k^2\sin^2 x)^3}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \int\limits_0^\infty \ln(1-k^2\cos^2 x)\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{(1-k^2\cos^2 x)^3}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{1}{k^2k'^2}\{(2+\ln k')\boldsymbol{E}(k)-(2-k^2+k'^2\ln k')\boldsymbol{K}(k)\}.$$
БХ [412] (15), БХ [414] (14)

19. $$\int_0^\infty \ln(1-k^2\sin^2 x)\frac{\sin x\cos^2 x}{\sqrt{(1-k^2\sin^2 x)^3}}\frac{dx}{x}=$$
$$=\int_0^\infty \ln(1-k^2\cos^2 x)\frac{\sin^2 x\,\operatorname{tg} x}{\sqrt{(1-k^2\cos^2 x)^3}}\frac{dx}{x}=$$
$$=\frac{1}{k^2}\{(2-k^2+\ln k')\boldsymbol{K}(k)-(2+\ln k')\boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ[412](16), БХ[414](17)

20. $$\int_0^\infty \ln(1-k^2\sin^2 x)\frac{\sin^2 x\,\operatorname{tg} x}{\sqrt{(1-k^2\sin^2 x)^3}}\frac{dx}{x}=$$
$$=\int_0^\infty \ln(1-k^2\cos^2 x)\frac{\sin x\cos^2 x}{\sqrt{(1-k^2\cos^2 x)^3}}\frac{dx}{x}=$$
$$=\frac{1}{k^2k'^2}\{(2+\ln k')\boldsymbol{E}(k)-(2-k^2+k'^2\ln k')\boldsymbol{K}(k)\}.$$
БХ [412] (17), БХ [414] (16)

21 $$\int_0^\infty \ln(1-k^2\sin^2 x)\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{(1-k^2\sin^2 x)^3}}\frac{dx}{x}=$$
$$=\int_0^\infty \ln(1-k^2\cos^2 x)\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{(1-k^2\cos^2 x)^3}}\frac{dx}{x}=$$
$$=\frac{1}{k'^2}\{(k^2-2)\boldsymbol{K}(k)+(2+\ln k')\boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ [412 и 414] (18)

22. $$\int_0^\infty \ln(1-k^2\sin^2 x)\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,\sin x\frac{dx}{x}=$$
$$=\int_0^\infty \ln(1-k^2\cos^2 x)\sqrt{1-k^2\cos^2 x}\,\sin x\frac{dx}{x}=$$
$$=(2-k^2)\boldsymbol{K}(k)-(2-\ln k')\boldsymbol{E}(k).$$ БХ [412 и 414] (1)

23 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-k^2\sin^2 x)\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,\sin x\cos x\cdot x\,dx=$$
$$=\frac{1}{27k^2}\{3\pi k'^3(1-3\ln k')+(22k'^2+6k^4-3k'^2\ln k')\boldsymbol{K}(k)-$$
$$-(2-k^2)(14-6\ln k')\boldsymbol{E}(k)\}.$$ БХ [426] (1)

24. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-k^2\cos^2 x)\sqrt{1-k^2\cos^2 x}\,\sin x\cos x\cdot x\,dx=\frac{1}{27k^2}\{-3\pi-$$
$$-(22k'^2+6k^4-3k'^2\ln k')\boldsymbol{K}(k)+(2-k^2)(14-6\ln k')\boldsymbol{E}(k)\}.$$
БХ [426] (2)

25. $$\int_0^\infty \ln(1-k^2\sin^2 x)\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,\operatorname{tg} x\frac{dx}{x} =$$
$$= \int_0^\infty \ln(1-k^2\cos^2 x)\sqrt{1-k^2\cos^2 x}\,\operatorname{tg} x\frac{dx}{x} =$$
$$=(2-k^2)\,\boldsymbol{K}(k)-(2-\ln k')\,\boldsymbol{E}(k).$$ БХ [412 и 414] (2)

26 $$\int_0^\infty \ln(\sin^2 x+k'\cos^2 x)\frac{\sin x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \int_0^\infty \ln(\sin^2 x+k'\cos^2 x)\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}\frac{dx}{x} =$$
$$= \int_0^\infty \ln(\sin^2 2x+k'\cos^2 2x)\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 2x}}\frac{dx}{x} =$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{2(\sqrt{k'})^3}{1+k'}\right]\boldsymbol{K}(k).$$ БХ [415] (19—21)

4.44 Логарифмическая, тригонометрические и показательная функции

4.441

1. $$\int_0^\infty e^{-qx}\sin px\ln x\,dx = \frac{1}{p^2+q^2}\left[q\operatorname{arctg}\frac{p}{q}-pC+\frac{p}{2}\ln(p^2+q^2)\right]$$
$[q>0,\ p>0]$. БХ [467] (1)

2. $$\int_0^\infty e^{-qx}\cos px\ln x\,dx = -\frac{1}{p^2+q^2}\left[\frac{q}{2}\ln(p^2+q^2)+p\operatorname{arctg}\frac{p}{q}+qC\right]$$
$[q>0]$. БХ [467] (2)

4.442 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-p\operatorname{tg} x}\ln\cos x\,dx}{\sin x\cos x} = -\frac{1}{2}[\operatorname{ci}(p)]^2+\frac{1}{2}[\operatorname{si}(p)]^2 \quad [\operatorname{Re} p>0].$$ НИ 32 (11)

4.5 ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

4.51 Обратные тригонометрические функции

4.511 $$\int_0^\infty \operatorname{arcctg} px\operatorname{arcctg} qx\,dx =$$
$$=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{p}{q}\right)+\frac{1}{q}\ln\left(1+\frac{q}{p}\right)\right\} \quad [p>0,\ q>0].$$ БХ [77] (8)

4.512 $$\int_0^\pi \operatorname{arctg}(\cos x)\,dx = 0.$$ БХ [345] (1)

4.52 Арксинус, арккосинус и степенная функция

4.521

•

1. $$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$ ФП 614, ФП 623

2. $$\int_0^1 \frac{\arccos x}{1 \pm x}\,dx = \mp\frac{\pi}{2}\ln 2 + 2G.$$ БХ [231] (7), БХ [231] (8)

3. $$\int_0^1 \arcsin x\,\frac{x}{1+qx^2}\,dx = \frac{\pi}{2q}\ln\frac{2\sqrt{1+q}}{1+\sqrt{1+q}} \quad [q > -1].$$ БХ [231] (1)

4. $$\int_0^1 \arcsin x\,\frac{x}{1-p^2x^2}\,dx = \frac{\pi}{2p^2}\ln\frac{1+\sqrt{1-p^2}}{2\sqrt{1-p^2}} \quad [p^2 < 1].$$ Ли [231] (3)

5. $$\int_0^1 \arccos x\,\frac{dx}{\sin^2\lambda - x^2} = 2\operatorname{cosec}\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin[(2k+1)\lambda]}{(2k+1)^2}.$$ БХ [231] (10)

6. $$\int_0^1 \arcsin x\,\frac{dx}{x(1+qx^2)} = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+q}}{\sqrt{1+q}} \quad [q > -1].$$ БХ [235] (10)

7. $$\int_0^1 \arcsin x\,\frac{x}{(1+qx^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4q}\,\frac{\sqrt{1+q}-1}{1+q} \quad [q > -1].$$ БХ [234] (2)

8. $$\int_0^1 \arccos x\,\frac{x}{(1+qx^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4q}\,\frac{\sqrt{1+q}-1}{\sqrt{1+q}} \quad [q > -1].$$ БХ [234] (4)

4.522

1. $$\int_0^1 x\sqrt{1-k^2x^2}\arccos x\,dx = \frac{1}{9k^2}\left[\frac{3}{2}\pi + k'^2\boldsymbol{K}(k) - 2(1+k'^2)\boldsymbol{E}(k)\right].$$
БХ [236] (9)

2. $$\int_0^1 x\sqrt{1-k^2x^2}\arcsin x\,dx =$$
$$= \frac{1}{9k^2}\left[-\frac{3}{2}\pi k'^3 - k'^2\boldsymbol{K}(k) + 2(1+k'^2)\boldsymbol{E}(k)\right].$$ БХ [236] (1)

3. $$\int_0^1 x\sqrt{k'^2+k^2x^2}\arcsin x\,dx = \frac{1}{9k^2}\left[\frac{3}{2}\pi + k'^2\boldsymbol{K}(k) - 2(1+k'^2)\boldsymbol{E}(k)\right].$$
БХ [236] (5)

4. $$\int_0^1 \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-k^2x^2}}\,dx = \frac{1}{k^2}\left[-\frac{\pi}{2}k' + \boldsymbol{E}(k)\right].$$ БХ [237] (1)

5. $$\int_0^1 \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-k^2x^2}}\,dx = \frac{1}{k^2}\left[\frac{\pi}{2} - \boldsymbol{E}(k)\right].$$ БХ [240] (1)

6. $\int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{k'^2+k^2x^2}}\,dx = \frac{1}{k^2}\left[\frac{\pi}{2} - \boldsymbol{E}(k)\right].$ БХ [238] (1)

7. $\int_0^1 \frac{x \arccos x}{\sqrt{k'^2+k^2x^2}}\,dx = \frac{1}{k^2}\left[-\frac{\pi}{2}k' + \boldsymbol{E}(k)\right].$ БХ [241] (1)

8. $\int_0^1 \frac{x \arcsin x\,dx}{(x^2-\cos^2\lambda)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sin\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin[(2k+1)\lambda]}{(2k+1)^2}.$ БХ [243] (11)

9. $\int_0^1 \frac{x \arcsin kx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx = -\frac{\pi}{2k}\ln k'.$ БХ [239] (1)

10. $\int_0^1 \frac{x \arccos kx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx = \frac{\pi}{2k}\ln(1+k).$ БХ [242] (1)

4.523

1. $\int_0^1 x^{2n}\arcsin x\,dx = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2^n n!}{(2n+1)!!}\right].$ БХ [229] (1)

2. $\int_0^1 x^{2n-1}\arcsin x\,dx = \frac{\pi}{4n}\left[1 - \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right].$ БХ [229] (2)

3. $\int_0^1 x^{2n}\arccos x\,dx = \frac{2^n n!}{(2n+1)(2n+1)!!}.$ БХ [229] (4)

4. $\int_0^1 x^{2n-1}\arccos x\,dx = \frac{\pi}{4n}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}.$ БХ [229] (5)

5. $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n \arccos x\,dx = \pi\frac{2^n n!}{(2n+1)!!}.$ БХ [254] (2)

6. $\int_{-1}^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\arccos x\,dx = \frac{\pi^2}{2}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}.$ БХ [254] (3)

4.524

1. $\int_0^1 (\arcsin x)^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \pi\ln 2.$ БХ [243] (13)

2. $\int_0^1 (\arccos x)^2 \frac{dx}{(\sqrt{1-x^2})^3} = \pi\ln 2.$ БХ [244] (9)

4.53—4.54 Арктангенс, арккотангенс и степенная функция

4.531

1. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \int_1^{\infty}\frac{\operatorname{arcctg} x}{x}\,dx = G.$ ФИ 482, БХ [253] (8)

2. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arcctg} x}{1 \pm x}\,dx = \pm\frac{\pi}{4}\ln 2 + G.$$ БХ [248] (6), БХ [248] (7)

3. $$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x)}\,dx = -\frac{\pi}{8}\ln 2 + G.$$ БХ [235] (11)

4. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1-x^2}\,dx = -G.$$ БХ [248] (2)

5. $$\int_0^1 \operatorname{arctg} qx \frac{dx}{(1+px)^2} = \frac{1}{2}\frac{q}{p^2+q^2}\ln\frac{(1+p)^2}{1+q^2} + \frac{q^2-p}{(1+p)(p^2+q^2)}\operatorname{arctg} q$$ $[p > -1]$. БХ [234] (7)

6. $$\int_0^1 \operatorname{arcctg} qx \frac{dx}{(1+px)^2} = \frac{1}{2}\frac{q}{p^2+q^2}\ln\frac{1+q^2}{(1+p)^2} + \frac{p}{p^2+q^2}\operatorname{arctg} q + \frac{1}{1+p}\operatorname{arcctg} q$$ $[p > -1]$. БХ [234] (10)

7. $$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2 + \frac{1}{2}G.$$ БХ [235] (12)

8. $$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi^2}{16}.$$ БХ [248] (3)

9. $$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{arctg} x}{1-x^4}\,dx = -\frac{\pi}{8}\ln 2.$$ БХ [248] (4)

10. $$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{arcctg} x}{1-x^4}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$ БХ [248] (12)

11. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arcctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = 2G.$$ БХ [251] (3), БХ [251] (10)

12. $$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$ Ф II 694

13. $$\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x\,dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2x^2)}} = \frac{1}{k^2}\left[F\left(\frac{\pi}{4}, k\right) - \frac{\pi}{2\sqrt{2(1+k'^2)}}\right].$$ БХ [244] (14)

4.532

1. $$\int_0^1 x^p \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{1}{2(p+1)}\left[\frac{\pi}{2} - \beta\left(\frac{p}{2}+1\right)\right] \quad [p > -2].$$ БХ [229] (7)

2. $$\int_0^\infty x^p \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{\pi}{2(p+1)}\operatorname{cosec}\frac{p\pi}{2} \quad [-1 > p > -2].$$ БХ [246] (1)

3. $$\int_0^1 x^p \operatorname{arcctg} x\,dx = \frac{1}{2(p+1)}\left[\frac{\pi}{2}+\beta\left(\frac{p}{2}+1\right)\right]$$ $[p>-1]$. БХ [229] (8)

4. $$\int_0^\infty x^p \operatorname{arcctg} x\,dx = -\frac{\pi}{2(p+1)}\operatorname{cosec}\frac{p\pi}{2} \quad [-1<p<0].$$ БХ [246] (2)

5. $$\int_0^\infty \left(\frac{x^p}{1+x^{2p}}\right)^{2q} \operatorname{arctg} x\,\frac{dx}{x} = \frac{\sqrt{\pi^3}}{2^{2q+2}p}\,\frac{\Gamma(q)}{\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)} \quad [q>0].$$ БХ [250] (10)

4.533

1. $$\int_0^\infty (1 - x\operatorname{arcctg} x)\,dx = \frac{\pi}{4}.$$ БХ [246] (3)

2. $$\int_0^1 \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x\right)\frac{dx}{1-x} = -\frac{\pi}{8}\ln 2 + G.$$ БХ [232] (2)

3. $$\int_0^1 \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x\right)\frac{1+x}{1-x}\,\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{8}\ln 2 + \frac{1}{2}G.$$ БХ [235] (25)

4. $$\int_0^1 \left(x\operatorname{arcctg} x - \frac{1}{x}\operatorname{arctg} x\right)\frac{dx}{1-x^2} = -\frac{\pi}{4}\ln 2.$$ БХ [232] (1)

4.534 $$\int_0^\infty (\operatorname{arctg} x)^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int_0^\infty (\operatorname{arcctg} x)^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\pi^2}{4} + 4G.$$ БХ [251] (9), БХ [251] (17)

4.535

1. $$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} px}{1+p^2x}\,dx = \frac{1}{2p^2}\operatorname{arctg} p \ln(1+p^2).$$ БХ [231] (19)

2. $$\int_0^1 \frac{\operatorname{arcctg} px}{1+p^2x}\,dx = \frac{1}{p^2}\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} p\right\}\ln(1+p^2) \quad [p>0].$$ БХ [231] (24)

3. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} qx}{(p+x)^2}\,dx = -\frac{q}{1+p^2q^2}\left(\ln pq - \frac{\pi}{2}pq\right)$$ $[p>0,\ q>0]$. БХ [249] (1)

4. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arcctg} qx}{(p+x)^2}\,dx = \frac{q}{1+p^2q^2}\left(\ln pq + \frac{\pi}{2pq}\right) \quad [p>0,\ q>0].$$ БХ [249] (8)

5. $$\int_0^\infty \frac{x\operatorname{arcctg} px}{q^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1+pq}{pq} \quad [p>0,\ q>0].$$ БХ [248] (9)

6. $$\int_0^\infty \frac{x\operatorname{arcctg} px\,dx}{x^2-q^2} = \frac{\pi}{4}\ln\frac{1+p^2q^2}{p^2q^2} \quad [p>0,\ q>0].$$ БХ [248] (10)

7. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} px}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln(1+p) \quad [p \geqslant 0].$ Ф II 745

8. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} px}{x(1-x^2)}\,dx = \frac{\pi}{4}\ln(1+p^2) \quad [p \geqslant 0].$ БХ [250] (6)

9. $\int_0^\infty \operatorname{arctg} qx \frac{dx}{x(p^2+x^2)} = \frac{\pi}{2p^2}\ln(1+pq) \quad [p > 0,\ q \geqslant 0].$ БХ [250] (3)

10. $\int_0^\infty \operatorname{arctg} qx \frac{dx}{x(1-p^2x^2)} = \frac{\pi}{4}\ln\frac{p^2+q^2}{p^2} \quad [q \geqslant 0].$ БХ [250] (6)

11. $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{arctg} qx}{(p^2+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi q}{4p(1+pq)} \quad [p > 0,\ q \geqslant 0].$ БХ [252] (12) и

12. $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{arcctg} qx}{(p^2+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4p^2(1+pq)} \quad [p > 0,\ q \geqslant 0].$ БХ [252] (20) и

13. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} qx}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\left(q+\sqrt{1+q^2}\right).$ БХ [244] (11)

4.536

1. $\int_0^\infty \operatorname{arctg} qx \arcsin x \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2} q\pi \ln\frac{1+\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+q^2}} + \frac{\pi}{2}\ln\left(q+\sqrt{1+q^2}\right) - \frac{\pi}{2}\operatorname{arctg} q.$ БХ [230] (7)

2. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} px - \operatorname{arctg} qx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{p}{q} \quad [p > 0,\ q > 0].$ Ф II 635

3. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} px \operatorname{arctg} qx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{(p+q)^{p+q}}{p^p q^q} \quad [p > 0,\ q > 0].$ Ф II 745

4.537

1. $\int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\frac{dx}{1-x^2\cos^2\lambda} = \frac{\pi}{\cos\lambda}\ln\left[\cos\left(\frac{\pi-4\lambda}{8}\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi+4\lambda}{8}\right)\right].$ БХ [245] (9)

2. $\int_0^1 \operatorname{arctg}\left(p\sqrt{1-x^2}\right)\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\pi\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) \quad [p > 0].$ БХ [245] (10)

3. $\int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\lambda\sqrt{1-k^2x^2}\right)\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2k^2}\left[E(\lambda, k) - k'^2 F(\lambda, k)\right] - \frac{\pi}{2k^2}\operatorname{ctg}\lambda\left(1-\sqrt{1-k^2\sin^2\lambda}\right).$ БХ [245] (12)

4 $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\lambda\sqrt{1-k^2x^2}\right)\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx=$

$$=\frac{\pi}{2}E(\lambda,\ k)-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\lambda\left(1-\sqrt{1-k^2\sin^2\lambda}\right).$$ БХ [245] (11)

5. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\lambda\sqrt{1-k^2x^2}\right)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx=\frac{\pi}{2}F(\lambda,\ k).$ БХ [245] (13)

4.538

1. $\int\limits_0^\infty \operatorname{arctg} x^2\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_0^\infty \operatorname{arctg} x^3\frac{dx}{1+x^2};$ БХ [252] (10), БХ [252] (11)

$$=\int\limits_0^\infty \operatorname{arcctg} x^2\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_0^\infty \operatorname{arcctg} x^3\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

БХ [252] (18), БХ [252] (19)

2 $\int\limits_0^1 \frac{1-x^2}{x^2}\operatorname{arctg} x^2\,dx=\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}-1\right).$ БХ [244] (10) и

4.539 $\int\limits_0^\infty x^{s-1}\operatorname{arctg}(ae^{-x})\,dx=2^{-s-1}\Gamma(s)\,a\Phi\left(-a^2,\ s+1,\ \frac{1}{2}\right).$ ИП I 222 (47)

4.541 $\int\limits_0^\infty \operatorname{arctg}\left(\frac{p\sin qx}{1+p\cos qx}\right)\frac{x\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\ln\left(1+pe^{-q}\right)\quad [p>-e^q]$

БХ [341] (14) и

4.55 Обратные тригонометрические и показательная функции

4.551

1 $\int\limits_0^1 (\arcsin x)\,e^{-bx}\,dx=\frac{\pi}{2b}\left[I_0(b)-\mathbf{L}_0(b)\right].$ ИП I 160 (1)

2. $\int\limits_0^1 x(\arcsin x)\,e^{-bx}\,dx=\frac{\pi}{2b^2}\left[\mathbf{L}_0(b)-I_0(b)+b\mathbf{L}_1(b)-bI_1(b)\right]+\frac{1}{b}.$

ИП I 161 (2)

3. $\int\limits_0^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)e^{-bx}\,dx=\frac{1}{b}\left[-\operatorname{ci}(ab)\sin(ab)-\operatorname{si}(ab)\cos(ab)\right]$

$[\operatorname{Re} b>0].$ ИП I 161 (3)

4 $\int\limits_0^\infty \left(\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\right)e^{-bx}\,dx=\frac{1}{b}\left[\frac{\pi}{2}+\operatorname{ci}(ab)\sin(ab)+\operatorname{si}(ab)\cos(ab)\right]$

$[\operatorname{Re} b>0].$ ИП I 161 (4)

4.552 $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{q}}{e^{2\pi x}-1}\,dx=\frac{1}{2}\left[\ln\Gamma(q)-\left(q-\frac{1}{2}\right)\ln q+q-\frac{1}{2}\ln 2\pi\right]\quad [q>0].$

УВ II 25

4.553 $$\int\limits_0^\infty \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arcctg} x - e^{-px}\right)\frac{dx}{x} = C + \ln p \quad [p > 0].$$ НИ 66 (12)

4.56 Арктангенс и гиперболическая функция

4.561 $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} e^{-x}}{\operatorname{ch}^{2q} px}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Pi(x)}{\operatorname{ch}^{2q} px}\,dx = \frac{\sqrt{\pi^3}}{4p}\,\frac{\Gamma(q)}{\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}$$
$[q > 0]$. Ли [282] (10)

4.57 Обратные и прямые тригонометрические функции

4.571 $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(k\sin x)\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = -\frac{\pi}{2k}\ln k'.$$ БХ [344] (2)

4.572 $$\int\limits_0^\infty \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arcctg} x - \cos px\right)dx = C + \ln p \quad [p > 0].$$ НИ 66 (12)

4.573

1. $$\int\limits_0^\infty \operatorname{arcctg} qx \sin px\,dx = \frac{\pi}{2p}\left(1 - e^{-\frac{p}{q}}\right) \quad [p > 0,\ q > 0]$$ БХ [347] (1) *и*

2. $$\int\limits_0^\infty \operatorname{arcctg} qx \cos px\,dx = \frac{1}{2p}\left[e^{-\frac{p}{q}}\operatorname{Ei}\left(\frac{p}{q}\right) - e^{\frac{p}{q}}\operatorname{Ei}\left(-\frac{p}{q}\right)\right].$$
$[p > 0,\quad q > 0]$. БХ [347] (2) *и*

3. $$\int\limits_0^\infty \operatorname{arcctg} rx \frac{\sin px\,dx}{1 \pm 2q\cos px + q^2} =$$
$$= \pm\frac{\pi}{2pq}\ln\frac{1 \pm q}{1 \pm qe^{-\frac{p}{r}}} \quad [q^2 < 1,\quad r > 0,\quad p > 0];$$
$$= \pm\frac{\pi}{2pq}\ln\frac{q \pm 1}{q \pm e^{-\frac{p}{r}}} \quad [q^2 > 1,\quad r > 0,\quad p > 0].$$ БХ [347] (10)

4. $$\int\limits_0^\infty \operatorname{arcctg} px \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{q^2\cos^2 x + r^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2r^2}\ln\left(1 + \frac{r}{q}\operatorname{th}\frac{1}{p}\right)$$
$[p > 0,\quad q > 0,\quad r > 0]$. БХ [347] (9)

4.574

1. $$\int\limits_0^\infty \operatorname{arctg}\left(\frac{2a}{x}\right)\sin(bx)\,dx = \frac{\pi}{b}e^{-ab}\operatorname{sh}(ab)$$
$[\operatorname{Re} a > 0,\quad b > 0]$. ИП I 87 (8)

2. $$\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{a}{x}\cos(bx)\,dx = \frac{1}{2b}\left[e^{-ab}\,\overline{\mathrm{Ei}}(ab) - e^{ab}\,\mathrm{Ei}(-ab)\right]$$

$[a>0, \quad b>0]$. ИПI 29(7)

3. $$\int_0^\infty \operatorname{arctg}\left[\frac{2ax}{x^2+c^2}\right]\sin(bx)\,dx = \frac{\pi}{b}\,e^{-b\sqrt{a^2+c^2}}\operatorname{sh}(ab)$$

$[b>0]$. ИПI 87(9)

4. $$\int_0^\infty \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x^2}\right)\cos(bx)\,dx = \frac{\pi}{b}\,e^{-b}\sin b \quad [b>0].$$ ИПI 29(8)

4.575

1. $$\int_0^\pi \operatorname{arctg}\frac{p\sin x}{1-p\cos x}\sin nx\,dx = \frac{\pi}{2n}\,p^n \quad [p^2<1].$$ БХ [345](4)

2. $$\int_0^\pi \operatorname{arctg}\frac{p\sin x}{1-p\cos x}\sin nx\cos x\,dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{p^{n+1}}{n+1}+\frac{p^{n-1}}{n-1}\right)$$

$[p^2<1]$. БХ [345](5)

3. $$\int_0^\pi \operatorname{arctg}\frac{p\sin x}{1-p\cos x}\cos nx\sin x\,dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{p^{n+1}}{n+1}-\frac{p^{n-1}}{n-1}\right)$$

$[p^2<1]$. БХ [345](6)

4.576

1. $$\int_0^\pi \operatorname{arctg}\frac{p\sin x}{1-p\cos x}\,\frac{dx}{\sin x} = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1+p}{1-p} \quad [p^2<1].$$ БХ [346](1)

2. $$\int_0^\pi \operatorname{arctg}\frac{p\sin x}{1-p\cos x}\,\frac{dx}{\operatorname{tg} x} = -\frac{\pi}{2}\ln(1-p^2) \quad [p^2<1].$$ БХ [346](3)

4.577

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\lambda\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\right)\frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} =$$

$$= \frac{\pi}{2k^2}\left[F(\lambda, k) - E(\lambda, k) + \operatorname{ctg}\lambda\left(1-\sqrt{1-k^2\sin^2\lambda}\right)\right].$$ БХ [344](4)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\lambda\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\right)\frac{\cos^2 x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} =$$

$$= \frac{\pi}{2k^2}\left[E(\lambda, k) - k'^2 F(\lambda, k) + \operatorname{ctg}\lambda\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\lambda}-1\right)\right].$$

БХ [344](5)

4.58 Обратная и прямая тригонометрические и степенная функции

4.581 $$\int_0^\infty \operatorname{arctg} x \cos px \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \operatorname{arctg} \frac{x}{p} \cos x \frac{dx}{x} =$$
$$= -\frac{\pi}{2} \operatorname{Ei}(-p) \quad [\operatorname{Re}(p) > 0].$$ ФШ 654. НИ 25(13)

4.59 Обратные тригонометрические и логарифмическая функции

4.591

1. $$\int_0^1 \arcsin x \ln x\, dx = 2 - \ln 2 - \frac{1}{2}\pi.$$ БХ [339] (1)

2. $$\int_0^1 \arccos x \ln x\, dx = \ln 2 - 2.$$ БХ [339] (2)

4.592 $$\int_0^1 \arccos x \frac{dx}{\ln x} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} \frac{\ln(2k+2)}{2k+1}.$$ БХ [339] (8)

4.593

1. $$\int_0^1 \operatorname{arctg} x \ln x\, dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{48}\pi^2.$$ БХ [339] (3)

2. $$\int_0^1 \operatorname{arcctg} x \ln x\, dx = -\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$ БХ [339] (4)

4.594 $$\int_0^1 \operatorname{arctg} x (\ln x)^{n-1} (\ln x + n)\, dx = \frac{n!}{(-2)^{n+1}} (2^{-n} - 1)\, \zeta(n+1).$$

БХ [339] (7)

4.6 КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

4.60 Замена переменных в кратных интегралах

4.601

1. $$\iint_{(\sigma)} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{(\sigma')} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\, |\Delta|\, du\, dv,$$

где $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, а $\Delta = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} \equiv \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$ представляет собой функциональный определитель (определитель Якоби) функций φ и ψ.

2. $$\iiint_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iiint_{(V')} f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)]\, |\Delta|\, du\, dv\, dw,$$

где $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$, а

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial w} \\ \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial w} \end{vmatrix} \equiv \frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(u, v, w)}$$

представляет собой функциональный определитель функций φ, ψ, χ.

При этом предполагается как в (4.601 2.), так и в (4.601 1.), что

а) функции φ, ψ, χ, а также их первые частные производные непрерывны в области интегрирования;

б) функциональный определитель не меняет в этой области знака;

в) между старыми переменными x, y, z и новыми u, v, w существует взаимно однозначное соответствие в области интегрирования;

г) область V (или, соответственно, σ) при переходе от переменных x, y, z к переменным u, v, w переходит в область V' (или, соответственно, σ').

4.602 Преобразование к полярным координатам:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi; \quad \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r.$$

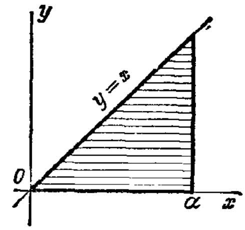
4.603 Преобразование к сферическим координатам:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \quad \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = r^2\sin\theta.$$

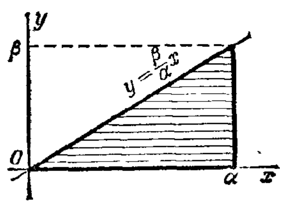
4.61 Перемена порядка интегрирования и замена переменных

4.611

1. $$\int_0^\alpha dx \int_0^x f(x, y)\,dy = \int_0^\alpha dy \int_y^\alpha f(x, y)\,dx.$$

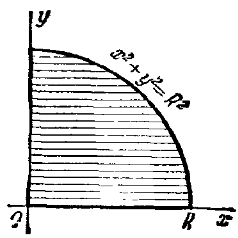


2. $$\int_0^\alpha dx \int_0^{\frac{\beta}{\alpha}x} f(x, y)\,dy = \int_0^\beta dy \int_{\frac{\alpha}{\beta}y}^\alpha f(x, y)\,dx.$$

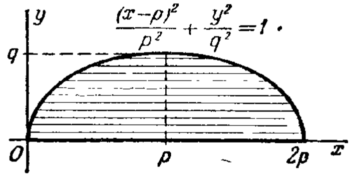


4.612

1. $$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y)\,dy = \int_0^R dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y)\,dx.$$

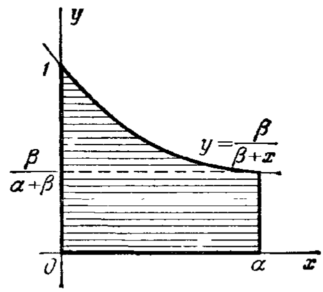


2. $$\int_0^{2p} dx \int_0^{\frac{q}{p}\sqrt{2px-x^2}} f(x, y)\, dy = \int_0^{q} dy \int_{p\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{y}{q}\right)^2}\right]}^{p\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{y}{q}\right)^2}\right]} f(x, y)\, dx.$$



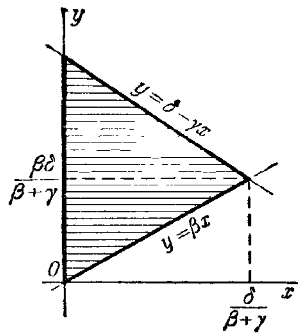
4.613

1. $$\int_0^{\alpha} dx \int_0^{\frac{\beta}{\beta+x}} f(x, y)\, dy = \int_0^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}} dy \int_0^{\alpha} f(x, y)\, dx + \int_{\frac{\beta}{\beta+\alpha}}^{1} dy \int_0^{\frac{\beta}{y}(1-y)} f(x, y)\, dx.$$

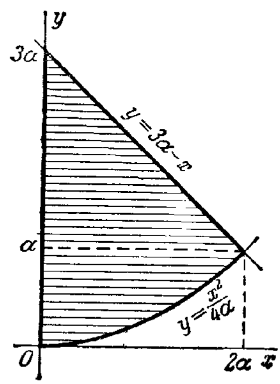


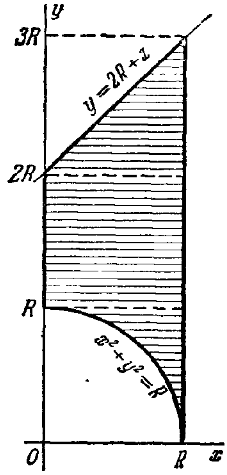
2. $$\int_0^{\alpha} dx \int_{\beta x}^{\delta-\gamma x} f(x, y)\, dy = \int_0^{\alpha\beta} dy \int_0^{\frac{y}{\beta}} f(x, y)\, dx + \int_{\alpha\beta}^{\delta} dy \int_0^{\frac{\delta-y}{\gamma}} f(x, y)\, dx$$

$$\left[\alpha = \frac{\delta}{\beta+\gamma}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0\right].$$



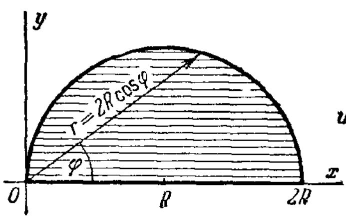
3. $$\int_0^{2\alpha} dx \int_{\frac{x^2}{4\alpha}}^{3\alpha-x} f(x, y)\, dy = \int_0^{\alpha} dy \int_0^{2\sqrt{\alpha y}} f(x, y)\, dx + \int_{\alpha}^{3\alpha} dy \int_0^{3\alpha-y} f(x, y)\, dx.$$



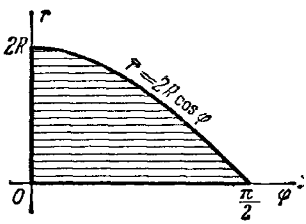


4 $$\int_0^R dx \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{x+2R} f(x,\ y)\,dy = \int_0^R dy \int_{\sqrt{R^2-y^2}}^{R} f(x,\ y)\,dx +$$
$$+\int_R^{2R} dy \int_0^R f(x,\ y)\,dx + \int_{2R}^{3R} dy \int_{y-2R}^{R} f(x,\ y)\,dx.$$

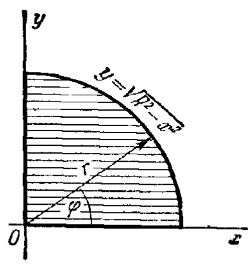
4.614 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} f(r,\ \varphi)\,dr = \int_0^{2R} dr \int_0^{\arccos\frac{r}{2R}} f(r,\ \varphi)\,d\varphi.$$



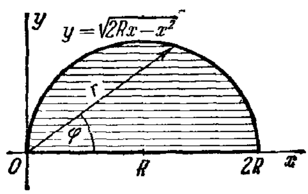
или



4.615 $$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\ r\,dr.$$



4.616 $$\int_0^{2R} dx \int_0^{\sqrt{2Rx-x^2}} f(x,\ y)\,dy =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} f(r\cos\varphi\, r,\ \sin\varphi)\, r\,dr.$$



4.617 $$\int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy = \int_0^{\beta} dx \int_0^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy - \int_0^{\beta} dx \int_0^{\varphi_1(x)} f(x, y)\,dy -$$
$$- \int_0^{\alpha} dx \int_0^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy + \int_0^{\alpha} dx \int_0^{\varphi_1(x)} f(x, y)\,dy$$
$[\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ при $\alpha \leqslant x \leqslant \beta]$.

4.618 $$\int_0^{\gamma} dx \int_0^{\varphi(x)} f(x, y)\,dy = \int_0^{\gamma} dx \int_0^1 f[x, z\varphi(x)]\,\varphi(x)\,dz \qquad [y = z\varphi(x)];$$
$$= \gamma \int_0^1 dz \int_0^{\varphi(\gamma z)} f(\gamma z, y)\,dy \qquad [x = \gamma z].$$

4.619 $$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\,dy = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_0^1 (y_1 - y_0)\, f[x, y_0 + (y_1 - y_0)t]\,dt$$
$[y = y_0 + (y_1 - y_0)t]$

4.62 Двойные и тройные интегралы с постоянными пределами

4.620 Формулы общего характера

1. $$\int_0^{\pi} d\omega \int_0^{\infty} f'(p \operatorname{ch} x + q \cos\omega \operatorname{sh} x) \operatorname{sh} x\,dx =$$
$$= -\frac{\pi \operatorname{sign} p}{\sqrt{p^2 - q^2}} f(\operatorname{sign} p \sqrt{p^2 - q^2}) \qquad [p^2 > q^2, \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0]$$
Ло III 389

2 $$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\infty} f'[p \operatorname{ch} x + (q\cos\omega + r\sin\omega)\operatorname{sh} x] \operatorname{sh} x\,dx =$$
$$= -\frac{2\pi \operatorname{sign} p}{\sqrt{p^2 - q^2 - r^2}} f(\operatorname{sign} p \sqrt{p^2 - q^2 - r^2}) \qquad [p^2 > q^2 + r^2, \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0].$$
Ло III 390

3. $$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dx\,dy}{\sin x \sin^2 y} f'\left[\frac{p - q\cos x}{\sin x \sin y} + r \operatorname{ctg} y\right] =$$
$$= -\frac{2\pi \operatorname{sign} p}{\sqrt{p^2 - q^2 - r^2}} f(\operatorname{sign} p \sqrt{p^2 - q^2 - r^2}) \qquad [p^2 > q^2 + r^2, \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0].$$
Ло III 280

4 $$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f'(p \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + q \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + r \operatorname{sh} y) \operatorname{ch} y\,dy =$$
$$= -\frac{2\pi \operatorname{sign} p}{\sqrt{p^2 - q^2 - r^2}} f(\operatorname{sign} p \sqrt{p^2 - q^2 - r^2}) \qquad [p^2 > q^2 + r^2, \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0].$$
Ло III 390

5. $$\int_0^\infty dx \int_0^\pi f(p \operatorname{ch} x + q \cos\omega \operatorname{sh} x) \operatorname{sh}^2 x \sin\omega \, d\omega =$$
$$= 2 \int_0^\infty f(\operatorname{sign} p \sqrt{p^2 - q^2} \operatorname{ch} x) \operatorname{sh}^2 x \, dx \qquad [\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0].$$ Ло III 391

6. $$\int_0^\infty dx \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^\pi f[p \operatorname{ch} x + (q\cos\omega + r\sin\omega)\sin\theta \operatorname{sh} x] \operatorname{sh}^2 x \sin\theta \, d\theta =$$
$$= 4 \int_0^\infty f(\operatorname{sign} p \sqrt{p^2 - q^2 - r^2} \operatorname{ch} x) \operatorname{sh}^2 x \, dx$$
$$[p^2 > q^2 + r^2, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0].$$ Ло III 390

7. $$\int_0^\infty dx \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^\pi f\{p \operatorname{ch} x + [(q\cos\omega + r\sin\omega)\sin\theta + s\operatorname{ch}\theta] \operatorname{sh} x\} \times$$
$$\times \operatorname{sh}^2 x \sin\theta \, d\theta = 4\pi \int_0^\infty f(\operatorname{sign} p \sqrt{p^2 - q^2 - r^2 - s^2} \operatorname{ch} x) \operatorname{sh}^2 x \, dx$$
$$[p^2 > q^2 + r^2 + s^2, \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0].$$ Ло III 391

4.621

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x \sin^2 y}}{1 - k^2 \sin^2 y} \, dx \, dy = \frac{\pi}{2\sqrt{1-k^2}}.$$ Ло I 252 (90)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x \sin^2 y}}{1 - k^2 \sin^2 y} \, dx \, dy = \boldsymbol{K}(k).$$ Ло I 252 (91)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha \sin y \, dx \, dy}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2 x \sin^2 y}} = \frac{\pi\alpha}{2}.$$ Ло I 253

4.622

1. $$\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{dx \, dy \, dz}{1 - \cos x \cos y \cos z} = 4\pi \boldsymbol{K}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$ МО 137

2. $$\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{dx \, dy \, dz}{3 - \cos y \cos z - \cos x \cos z - \cos x \cos y} = \sqrt{3}\pi \boldsymbol{K}^2\left(\sin\frac{\pi}{12}\right).$$ МО 137

3. $$\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{dx \, dy \, dz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} =$$
$$= 4\pi [18 + 12\sqrt{2} - 10\sqrt{3} - 7\sqrt{6}] \boldsymbol{K}^2 [(2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})].$$ МО 137

4.623 $$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(a^2x^2 + b^2y^2) \, dx \, dy = \frac{\pi}{4ab} \int_0^\infty \varphi(x) \, x \, dx.$$

4.624 $$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta\cos\psi+\gamma\sin\theta\sin\psi)\sin\theta\,d\theta\,d\psi =$$
$$= 2\pi\int_0^{\pi} f(R\cos p)\sin p\,dp = 2\pi\int_{-1}^{1} f(Rt)\,dt \qquad [R=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}].$$

4.63—4.64 Многократные интегралы

4.631 $$\int_p^x dt_{n-1}\int_p^{t_{n-1}} dt_{n-2}\ldots\int_p^{t_1} f(t)\,dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_p^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt,$$

где $f(t)$ — непрерывная на отрезке $[p, q]$ функция и $p\leqslant x\leqslant q$. Ф II 692

4.632

1. $$\underset{\substack{x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant h}}{\int\int\ldots\int} dx_1\,dx_2\ldots dx_n = \frac{h^n}{n!}$$ [объем n-мерного симплекса]. Ф III 472

2. $$\underset{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2}{\int\int\ldots\int} dx_1\,dx_2\ldots dx_n = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^n$$ [объем n-мерной сферы] Ф III 473

4.633 $$\underset{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqslant 1}{\int\int\ldots\int}\frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2}} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \qquad [n>1]$$

[половина площади поверхности $(n+1)$-мерной сферы $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n+1}^2=1$]. Ф III 474

4.634 $$\underset{\substack{x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0\\ \left(\frac{x_1}{q_1}\right)^{\alpha_1}+\left(\frac{x_2}{q_2}\right)^{\alpha_2}+\ldots+\left(\frac{x_n}{q_n}\right)^{\alpha_n}\leqslant 1}}{\int\int\ldots\int} x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n =$$
$$= \frac{q_1^{p_1}q_2^{p_2}\ldots q_n^{p_n}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\frac{p_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}+1\right)}$$
$[\alpha_i>0,\ p_i>0,\ q_i>0,\ i=1, 2, \ldots, n]$. Ф III 477

4.635

1. $$\underset{\substack{x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0\\ \left(\frac{x_1}{q_1}\right)^{\alpha_1}+\left(\frac{x_2}{q_2}\right)^{\alpha_2}+\ldots+\left(\frac{x_n}{q_n}\right)^{\alpha_n}\geqslant 1}}{\int\int\ldots\int} f\left[\left(\frac{x_1}{q_1}\right)^{\alpha_1}+\left(\frac{x_2}{q_2}\right)^{\alpha_2}+\ldots+\left(\frac{x_n}{q_n}\right)^{\alpha_n}\right]\times$$
$$\times x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n =$$
$$= \frac{q_1^{p_1}q_2^{p_2}\ldots q_n^{p_n}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\frac{p_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}\int_1^{\infty} f(x)\,x^{\frac{p_1}{\alpha_1}+\frac{p_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}-1}\,dx$$

в предположении, что интеграл, стоящий справа, сходится абсолютно.

Ф III 487

2. $$\int\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0\\ \left(\frac{x_1}{q_1}\right)^{\alpha_1}+\left(\frac{x_2}{q_2}\right)^{\alpha_2}+\ldots+\left(\frac{x_n}{q_n}\right)^{\alpha_n}\leqslant 1}}\int\ldots\int f\left[\left(\frac{x_1}{q_1}\right)^{\alpha_1}+\left(\frac{x_2}{q_2}\right)^{\alpha_2}+\ldots+\left(\frac{x_n}{q_n}\right)^{\alpha_n}\right]\times$$
$$\times x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$
$$=\frac{q_1^{p_1}q_2^{p_2}\ldots q_n^{p_n}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\frac{p_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}\int\limits_0^1 f(x)\,x^{\frac{p_1}{\alpha_1}+\frac{p_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}-1}\,dx$$

в предположении абсолютной сходимости простого интеграла справа; все числа q_i, α_i, p_i положительны. Ф III 479

В частности,

3. $$\int\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant 1}}\int\ldots\int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}e^{-q(x_1+x_2+\ldots+x_n)}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)}\int\limits_0^1 x^{p_1+p_2+\ldots+p_n-1}e^{-qx}\,dx$$
$$[n>0,\ p_1>0,\ p_2>0,\ \ldots,\ p_n>0].$$

4 $$\int\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0\\ x_1^{\alpha_1}+x_2^{\alpha_2}+\ldots+x_n^{\alpha_n}\leqslant 1}}\int\ldots\int \frac{x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}}{(1-x_1^{\alpha_1}-x_2^{\alpha_2}-\ldots-x_n^{\alpha_n})^{\mu}}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$
$$=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(1-\mu+\frac{p_1}{\alpha_1}+\frac{p_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}\Gamma(1-\mu)$$
$$[p_1>0,\ p_2>0,\ \ldots,\ p_n>0,\ \mu<1].$$ Ф III 480

4.636

1. $$\int\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0\\ x_1^{\alpha_1}+x_2^{\alpha_2}+\ldots+x_n^{\alpha_n}\geqslant 1}}\int\ldots\int \frac{x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}}{(x_1^{\alpha_1}+x_2^{\alpha_2}+\ldots+x_n^{\alpha_n})^{\mu}}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$
$$=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\left(\mu-\frac{p_1}{\alpha_1}-\frac{p_2}{\alpha_2}-\ldots-\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\frac{p_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}$$
$$\left[p_1>0,\ p_2>0,\ \ldots,\ p_n>0;\ \mu>\frac{p_1}{\alpha_1}+\frac{p_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right].$$ Ф III 488

2. $$\underset{\substack{x_1\geqslant 0,\, x_2\geqslant 0,\, \ldots,\, x_n\geqslant 0\\ x_1^{\alpha_1}+x_2^{\alpha_2}+\ldots+x_n^{\alpha_n}\leqslant 1}}{\int\int\cdots\int} \frac{x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}}{(x_1^{\alpha_1}+x_2^{\alpha_2}+\ldots+x_n^{\alpha_n})^{\mu}}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n =$$

$$=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\frac{p_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}-\mu\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\frac{p_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}$$

$$\left[\mu<\frac{p_1}{\alpha_1}+\frac{p_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right].$$ Ф III 480

3. $$\underset{\substack{x_1\geqslant 0,\, x_2\geqslant 0,\, \ldots,\, x_n\geqslant 0\\ x_1^{\alpha_1}+x_2^{\alpha_2}+\ldots+x_n^{\alpha_n}\leqslant 1}}{\int\int\cdots\int} x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\sqrt{\frac{1-x_1^{\alpha_1}-x_2^{\alpha_2}-\ldots-x_n^{\alpha_n}}{1+x_1^{\alpha_1}+x_2^{\alpha_2}+\ldots+x_n^{\alpha_n}}}\times$$

$$\times\, dx_1\,dx_2\ldots dx_n=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\,\frac{1}{\Gamma(m)}\times$$

$$\times\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}\right\},$$

где $m=\frac{p_1}{\alpha_1}+\frac{p_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}$. Ф III 480

4.637 $$\underset{\substack{x_1\geqslant 0,\, x_2\geqslant 0,\, \ldots,\, x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant 1}}{\int\int\cdots\int} f(x_1+x_2+\ldots+x_n)\times$$

$$\times\frac{x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n}{(q_1x_1+q_2x_2+\ldots+q_nx_n+r)^{p_1+p_2+\ldots+p_n}}=$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)}\int\limits_0^1 f(x)\frac{x^{p_1+p_2+\ldots+p_n-1}}{(q_1x+r)^{p_1}(q_2x+r)^{p_2}\ldots(q_nx+r)^{p_n}}\,dx,$$

где $f(x)$ — непрерывная на отрезке $(0, 1)$ функция

$$[q_1\geqslant 0,\ q_2\geqslant 0,\ \ldots,\ q_n\geqslant 0;\ r>0].$$

4.638

1. $$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\cdots\int\limits_0^\infty\frac{x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,e^{-(q_1x_1+q_2x_2+\ldots+q_nx_n)}}{(r_0+r_1x_1+r_2x_2+\ldots+r_nx_n)^s}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(s)}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-r_0x}x^{s-1}\,dx}{(q_1+r_1x)^{p_1}(q_2+r_2x)^{p_2}\ldots(q_n+r_nx)^{p_n}}$$

при p_i, q_i, r_i, s положительных; этот результат имеет место и при $r_0=0$ при условии, что $p_1+p_2+\ldots+p_n>s$.

2. $$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\cdots\int\limits_0^\infty\frac{x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}}{(r_0+r_1x_1+r_2x_2+\ldots+r_nx_n)^s}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)\Gamma(s-p_1-p_2-\ldots-p_n)}{r_1^{p_1}r_2^{p_2}\ldots r_n^{p_n}r_0^{s-p_1-p_2-\ldots-p_n}\Gamma(s)}\quad [p_i>0,\ r_i>0,\ s>0].$$

3. $$\int_0^\infty\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\dots x_n^{p_n-1}}{[1+(r_1x_1)^{q_1}+(r_2x_2)^{q_2}+\dots+(r_nx_n)^{q_n}]^s}\,dx_1\,dx_2\dots dx_n =$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\Gamma\left(\frac{p_2}{q_2}\right)\dots\Gamma\left(\frac{p_n}{q_n}\right)}{q_1q_2\dots q_n r_1^{p_1q_1}r_2^{p_2q_2}\dots r_n^{p_nq_n}}\,\frac{\Gamma\left(s-\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}-\dots-\frac{p_n}{q_n}\right)}{\Gamma(s)}$$
$[p_i>0,\ q_i>0,\ r_i>0,\ s>0]$.

4.639

1. $$\int\int\dots\int_{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2\le 1}(p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n)^{2m}\,dx_1\,dx_2\dots dx_n =$$
$$=\frac{(2m-1)!!}{2^m}\,\frac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m+1\right)}\,(p_1^2+p_2^2+\dots+p_n^2)^m.$$ Ф III 482

2. $$\int\int\dots\int_{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2\le 1}(p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n)^{2m+1}\,dx_1\,dx_2\dots dx_n=0.$$
Ф III 483

4.641

1. $$\int\int\dots\int_{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2\le 1} e^{p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n}\,dx_1\,dx_2\dots dx_n =$$
$$=\sqrt{\pi^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k+1\right)}\left(\frac{p_1^2+p_2^2+\dots+p_n^2}{4}\right)^k.$$ Ф III 483

2. $$\int\int\dots\int_{x_1^2+x_2^2+\dots+x_{2n}^2\le 1} e^{p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_{2n}x_{2n}}\,dx_1\,dx_2\dots dx_{2n} =$$
$$=\frac{(2\pi)^n I_n\left(\sqrt{p_1^2+p_2^2+\dots+p_{2n}^2}\right)}{(p_1^2+p_2^2+\dots+p_{2n}^2)^n}.$$ Ф III 483 *и*

4.642 $$\int\int\dots\int_{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2\le R^2} f\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}\right)dx_1\,dx_2\dots dx_n =$$
$$=\frac{2\sqrt{\pi^n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^R x^{n-1}f(x)\,dx,$$
где $f(x)$ — непрерывная на отрезке $(0,\ R)$ функция. Ф III 485

4.643 $$\int_0^1\int_0^1\dots\int_0^1 f(x_1x_2\dots x_n)(1-x_1)^{p_1-1}(1-x_2)^{p_2-1}\dots(1-x_n)^{p_n-1}\times$$
$$\times x_2^{p_1}x_3^{p_1+p_2}\dots x_n^{p_1+p_2+\dots+p_{n-1}}\,dx_1\,dx_2\dots dx_n =$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\dots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_n)}\int_0^1 f(x)(1-x)^{p_1+p_2+\dots+p_n-1}dx$$
в предположении, что интеграл, стоящий справа, сходится абсолютно
Ф III 488

4.644
$$\overbrace{\iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1}\ldots\int}^{n-1} f(p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n)\frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}}{|x_n|}=$$
$$=2\iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2\leqslant 1}\ldots\int f(p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n)\frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_{n-1}^2}}=$$
$$=\frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2}\cos x\right)\sin^{n-2}x\,dx \qquad [n\geqslant 3],$$

где $f(x)$ — непрерывная на отрезке $\left[-\sqrt{p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2},\ \sqrt{p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2}\right]$ функция. Ф III 489

4.645 Пусть функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывны в ограниченной замкнутой области (D), причем наименьшее и наибольшее значения функции g в области (D) пусть будут m и M; пусть $\varphi(u)$ означает функцию, непрерывную для $m\leqslant u\leqslant M$. Обозначим через $\psi(u)$ интеграл

1. $$\psi(u)=\iint\limits_{m\leqslant g(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leqslant u}\ldots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

распространенный на ту часть области (D), в которой выполняется неравенство $m\leqslant g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\leqslant u$. Тогда

2. $$\iint\limits_{m\leqslant g(x_1,x_2,\ldots x_n)\leqslant M}\ldots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\varphi[g(x_1,x_2,\ldots,x_n)]\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$
$$=(S)\int\limits_m^M\varphi(u)\,d\psi(u)=(R)\int\limits_m^M\varphi(u)\frac{d\psi(u)}{du}\,du,$$

где средний интеграл надо понимать в смысле Стилтьеса; если существует непрерывная производная $\frac{d\psi}{du}$, то интеграл в смысле Римана, стоящий справа, существует.

В формуле 4.645 2. M может быть и $+\infty$, причем в этом случае под $\int\limits_m^{+\infty}$ следует понимать $\lim\limits_{M\to+\infty}\int\limits_m^M$.

4.646
$$\iint\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant 1}}\ldots\int\frac{x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}}{(q_1x_1+q_2x_2+\ldots q_nx_n)^r}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n-r+1)\,\Gamma(r)}\int\limits_0^\infty\frac{x^{r-1}\,dx}{(1+q_1x)^{p_1}(1+q_2x)^{p_2}\ldots(1+q_nx)^{p_n}}$$
$$[p_1>0,\ p_2>0,\ \ldots,\ p_n>0,\quad q_1>0,\ q_2>0,\ \ldots,\ q_n>0,\quad p_1+p_2+\ldots+p_n>r>0].$$
Ф III 493

4.647 $$\int\limits_{0\leqslant x_1^2+x_2^2+}\int\ldots\int\limits_{+x_n^2\leqslant 1}\exp\left\{\frac{q_1x_1+q_2x_2+\ldots+q_nx_n}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}}\right\}dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$
$$=\frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\,(p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2)^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}}\,I_{\frac{n}{2}-1}\left(\sqrt{p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2}\right).$$ Ф III 495

4.648 $$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\ldots\int\limits_0^\infty\exp\left[-\left(x_1+x_2+\ldots+x_n+\frac{\lambda^{n+1}}{x_1x_2\ldots x_n}\right)\right]\times$$
$$\times\,x_1^{\frac{1}{n+1}-1}x_2^{\frac{2}{n+1}-1}\ldots x_n^{\frac{n}{n+1}-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}(2\pi)^{\frac{n}{2}}e^{-(n+1)\lambda}.$$ Ф III 496

5 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

5.1 ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И ФУНКЦИИ

5.11. Полные эллиптические интегралы

5.111

1. $$\int \boldsymbol{K}(k)\, k^{2p+3}\, dk = \frac{1}{(2p+3)^2}\left\{4(p+1)^2 \int \boldsymbol{K}(k)\, k^{2p+1}\, dk + k^{2p+2}\left[\boldsymbol{E}(k) - (2p+3)\boldsymbol{K}(k)\, k'^2\right]\right\}.$$ БФ (610.04)

2. $$\int \boldsymbol{E}(k)\, k^{2p+3}\, dk = \frac{1}{4p^2+16p+15}\left\{4(p+1)^2 \int \boldsymbol{E}(k)\, k^{2p+1}\, dk - \boldsymbol{E}(k)\, k^{2p+2}\left[(2p+3)\, k'^2 - 2\right] - k^{2p+2}k'^2\boldsymbol{K}(k)\right\}$$ БФ (611.04)

5.112

1. $$\int \boldsymbol{K}(k)\, dk = \frac{\pi k}{2}\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[(2j)!]^2\, k^{2j}}{(2j+1)\, 2^{4j}\, (j!)^4}\right].$$ БФ (610.00)

2. $$\int \boldsymbol{E}(k)\, dk = \frac{\pi k}{2}\left[1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[2j]^2\, k^{2j}}{(4j^2-1)\, 2^{4j}\, (j!)^4}\right].$$ БФ (611.00)

3 $$\int \boldsymbol{K}(k)\, k\, dk = \boldsymbol{E}(k) - k'^2\boldsymbol{K}(k).$$ БФ (610.01)

4. $$\int \boldsymbol{E}(k)\, k\, dk = \frac{1}{3}\left[(1+k^2)\,\boldsymbol{E}(k) - k'^2\boldsymbol{K}(k)\right].$$ БФ (611.01)

5. $$\int \boldsymbol{K}(k)\, k^3\, dk = \frac{1}{9}\left[(4+k^2)\,\boldsymbol{E}(k) - k'^2(4+3k^2)\,\boldsymbol{K}(k)\right].$$ БФ (610.02)

6. $$\int \boldsymbol{E}(k)\, k^3\, dk = \frac{1}{45}\left[(4+k^2+9k^4)\,\boldsymbol{E}(k) - k'^2(4+3k^2)\,\boldsymbol{K}(k)\right].$$ БФ (611.02)

7. $$\int \boldsymbol{K}(k)\, k^5\, dk = \frac{1}{225}\left[(64+16k^2+9k^4)\,\boldsymbol{E}(k) - k'^2(64+48k^2+45k^4)\,\boldsymbol{K}(k)\right].$$ БФ (610.03)

8. $$\int \boldsymbol{E}(k)\, k^5\, dk = \frac{1}{1575}\left[(64+16k^2+9k^4+225k^6)\,\boldsymbol{E}(k) - k'^2(64+48k^2+45k^4)\,\boldsymbol{K}(k)\right].$$ БФ (611.03)

9. $\int \frac{\boldsymbol{K}(k)}{k^2}\,dk = -\frac{\boldsymbol{E}(k)}{k}$. БФ (612.05)

10. $\int \frac{\boldsymbol{E}(k)}{k^2}\,dk = \frac{1}{k}[k'^2\boldsymbol{K}(k) - 2\boldsymbol{E}(k)]$. БФ (612.02)

11. $\int \frac{\boldsymbol{E}(k)}{k'^2}\,dk = k\boldsymbol{K}(k)$. БФ (612.01)

12 $\int \frac{\boldsymbol{E}(k)}{k^4}\,dk = \frac{1}{9k^3}[2(k^2-2)\boldsymbol{E}(k) + k'^2\boldsymbol{K}(k)]$. БФ (612.03)

13. $\int \frac{k\boldsymbol{E}(k)}{k'^2}\,dk = \boldsymbol{K}(k) - \boldsymbol{E}(k)$. БФ (612.04)

5.113

1. $\int [\boldsymbol{K}(k) - \boldsymbol{E}(k)]\frac{dk}{k} = -\boldsymbol{E}(k)$. БФ (612.06)

2. $\int [\boldsymbol{E}(k) - k'^2\boldsymbol{K}(k)]\frac{dk}{k} = 2\boldsymbol{E}(k) - k'^2\boldsymbol{K}(k)$. БФ (612.09)

3. $\int [(1+k^2)\boldsymbol{K}(k) - \boldsymbol{E}(k)]\frac{dk}{k} = -k'^2\boldsymbol{K}(k)$. БФ (612.12)

4. $\int [\boldsymbol{K}(k) - \boldsymbol{E}(k)]\frac{dk}{k^2} = \frac{1}{k}[\boldsymbol{E}(k) - k'^2\boldsymbol{K}(k)]$. БФ (612.07)

5. $\int [\boldsymbol{E}(k) - k'^2\boldsymbol{K}(k)]\frac{dk}{k^2k'^2} = \frac{1}{k}[\boldsymbol{K}(k) - \boldsymbol{E}(k)]$.

6. $\int [(1+k^2)\boldsymbol{E}(k) - k'^2\boldsymbol{K}(k)]\frac{dk}{kk'^4} = \frac{\boldsymbol{E}(k)}{k'^2}$. БФ (612.13)

5.114 $\int \frac{k\boldsymbol{K}(k)\,dk}{[\boldsymbol{E}(k) - k'^2\boldsymbol{K}(k)]^2} = \frac{1}{k'^2\boldsymbol{K}(k) - \boldsymbol{E}(k)}$. БФ (612.11)

5.115

1. $\int \Pi\left(\frac{\pi}{2}, r^2, k\right) k\,dk = (k^2 - r^2)\,\Pi\left(\frac{\pi}{2}, r^2, k\right) - \boldsymbol{K}(k) + \boldsymbol{E}(k)$. БФ (612.14)

2. $\int \left[\boldsymbol{K}(k) - \Pi\left(\frac{\pi}{2}, r^2, k\right)\right] k\,dk = k^2\boldsymbol{K}(k) - (k^2 - r^2)\,\Pi\left(\frac{\pi}{2}, r^2, k\right)$. БФ (612.15)

3. $\int \left[\frac{\boldsymbol{E}(k)}{k'^2} + \Pi\left(\frac{\pi}{2}, r^2, k\right)\right] k\,dk = (k^2 - r^2)\,\Pi\left(\frac{\pi}{2}, r^2, k\right)$. БФ (612.16)

5.12 Эллиптические интегралы

5.121 $\int_0^x \frac{F(x, k)\,dx}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 x}} = \frac{[F(x, k)]^2}{2}$ $\left[0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}\right]$. БФ (630.01)

5.122 $\int_0^x E(x, k)\sqrt{1 - k^2\sin^2 x}\,dx = \frac{[E(x, k)]^2}{2}$. БФ (630.32)

5.123

1. $$\int_0^x F(x, k)\sin x\,dx = -\cos x\,F(x, k) + \frac{1}{k}\arcsin(k\sin x).$$

БФ (630.11)

2. $$\int_0^x F(x, k)\cos x\,dx = \sin x\,F(x, k) + \frac{1}{k}\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{1-k^2\sin^2 x}{k'^2}} - \frac{1}{k}\operatorname{Arch}\left(\frac{1}{k'}\right).$$

БФ (630.21)

5.124

1. $$\int_0^x E(x, k)\sin x\,dx = -\cos x\,E(x, k) + \frac{1}{2k}\left[k\sin x\sqrt{1-k^2\sin^2 x} + \arcsin(k\sin x)\right].$$

БФ (630.12)

2. $$\int_0^x E(x, k)\cos x\,dx = \sin x\,E(x, k) + \frac{1}{2k}\left[k\cos x\sqrt{1-k^2\sin^2 x} - k'^2\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{1-k^2\sin^2 x}{k'^2}} - k + k'^2\operatorname{Arch}\left(\frac{1}{k'}\right)\right].$$

БФ (630.22)

5.125

1. $$\int_0^x \Pi(x, \alpha^2, k)\sin x\,dx = -\cos x\,\Pi(x, \alpha^2, k) + \frac{1}{\sqrt{k^2-\alpha^2}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{k^2-\alpha^2}{1-k^2\sin^2 x}}\sin x\right] \quad [\alpha^2 < k^2];$$
$$= -\cos x\,\Pi(x, \alpha^2, k) + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-k^2}}\operatorname{Arth}\left[\sqrt{\frac{\alpha^2-k^2}{1-k^2\sin^2 x}}\sin x\right] \quad [\alpha^2 > k^2].$$

БФ (630.13)

2. $$\int_0^x \Pi(x, \alpha^2, k)\cos x\,dx = \sin x\,\Pi(x, \alpha^2, k) - f + f_0,$$

где

$$f = \frac{1}{2\sqrt{(1-\alpha^2)(\alpha^2-k^2)}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2(1-\alpha^2)(\alpha^2-k^2) + (1-\alpha^2\sin^2 x)(2k^2-\alpha^2-\alpha^2k^2)}{2\alpha^2\sqrt{(1-\alpha^2)(\alpha^2-k^2)}\cos x\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\right]$$
для $(1-\alpha^2)(\alpha^2-k^2) > 0$;

$$= \frac{1}{2\sqrt{(\alpha^2-1)(\alpha^2-k^2)}}\ln\left[\frac{2(\alpha^2-1)(\alpha^2-k^2) + (1-\alpha^2\sin^2 x)(\alpha^2+\alpha^2k^2-2k^2)}{1-\alpha^2\sin^2 x} + \frac{2\alpha^2\sqrt{(\alpha^2-1)(\alpha^2-k^2)}\cos x\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}{1-\alpha^2\sin^2 x}\right]$$
для $(1-\alpha^2)(\alpha^2-k^2) < 0$,

f_0 — значение f при $x = 0$.

БФ (630.23)

Интегрирование по модулю

5.126 $\int F(x, k)\,k\,dk = E(x, k) - k'^2 F(x, k) + \left(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} - 1\right)\operatorname{ctg} x.$ БФ (613.01)

5.127 $\int E(x, k)\,k\,dk = \frac{1}{3}\left[(1 + k^2) E(x, k) - k'^2 F(x, k) + \left(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} - 1\right)\operatorname{ctg} x\right].$ БФ (613.02)

5.128 $\int \Pi(x, r^2, k)\,k\,dk = (k^2 - r^2)\,\Pi(x, r^2, k) - F(x, k) + E(x, k) + \left(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} - 1\right)\operatorname{ctg} x.$ БФ (613.03)

5.13 Эллиптические функции Якоби

5.131

1. $$\int \operatorname{sn}^m u\,du = \frac{1}{m+1}\left[\operatorname{sn}^{m+1} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u + (m+2)(1+k^2)\int \operatorname{sn}^{m+2} u\,du - (m+3)k^2 \int \operatorname{sn}^{m+4} u\,du\right].$$ Си 259, П (567)

2. $$\int \operatorname{cn}^m u\,du = \frac{1}{(m+1)k'^2}\left[-\operatorname{cn}^{m+1} u \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u + (m+2)(1-2k^2)\int \operatorname{cn}^{m+2} u\,du + (m+3)k^2 \int \operatorname{cn}^{m+4} u\,du\right].$$ П (568)

3. $$\int \operatorname{dn}^m u\,du = \frac{1}{(m+1)k'^2}\left[k^2 \operatorname{dn}^{m+1} u \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u + (m+2)(2-k^2)\int \operatorname{dn}^{m+2} u\,du - (m+3)\int \operatorname{dn}^{m+4} u\,du\right].$$ П (569)

Интегралы $\int \operatorname{sn}^m u\,du$, $\int \operatorname{cn}^m u\,du$, $\int \operatorname{dn}^m u\,du$ с помощью формул 5.131 сводятся к интегралам 5.132, 5.133 и 5.134.

5.132

1. $$\int \frac{du}{\operatorname{sn} u} = \ln \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u};$$ Ж 87 (164)

$$= \ln \frac{\operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}.$$ Си 266 (4)

2. $$\int \frac{du}{\operatorname{cn} u} = \frac{1}{k'} \ln \frac{k' \operatorname{sn} u + \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}.$$ Си 266 (5)

3. $$\int \frac{du}{\operatorname{dn} u} = \frac{1}{k'} \operatorname{arctg} \frac{k' \operatorname{sn} u - \operatorname{cn} u}{k' \operatorname{sn} u + \operatorname{cn} u};$$ Ж 88 (166)

$$= \frac{1}{k'} \arccos \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u};$$ ЯЭ 192

$$= \frac{1}{ik'} \ln \frac{\operatorname{cn} u + ik' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u};$$ Си 266 (6)

$$= \frac{1}{k'} \arcsin \frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}.$$ ЯЭ 192

5.133

1. $\int \operatorname{sn} u\, du = \frac{1}{k} \ln (\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u);$ Ж 87 (161)

$= \frac{1}{k} \operatorname{Arch} \frac{\operatorname{dn} u - k^2 \operatorname{cn} u}{1-k^2};$ ЯЭ 192

$= \frac{1}{k} \operatorname{Arsh} \left(k \frac{\operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u}{1-k^2} \right);$ ЯЭ 192

$= -\frac{1}{k} \ln (\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u).$ Си 365 (1)

2 $\int \operatorname{cn} u\, du = \frac{1}{k} \arccos (\operatorname{dn} u);$ Ж 87 (162)

$= \frac{i}{k} \ln (\operatorname{dn} u - ik \operatorname{sn} u);$ Си 265 (2) u, Ж 87 (162)

$= \frac{1}{k} \arcsin (k \operatorname{sn} u).$ ЯЭ 192

3 $\int \operatorname{dn} u\, du = \arcsin (\operatorname{sn} u);$ Ж 87 (163)

$= \operatorname{am} u = i \ln (\operatorname{cn} u - i \operatorname{sn} u).$ Си 266 (3), Ж 87 (163)

5.134

1. $\int \operatorname{sn}^2 u\, du = \frac{1}{k^2} [u - E(\operatorname{am} u, k)].$ П (564)

2. $\int \operatorname{cn}^2 u\, du = \frac{1}{k^2} [E(\operatorname{am} u, k) - k'^2 u].$ П (565)

3. $\int \operatorname{dn}^2 u\, du = E(\operatorname{am} u, k).$ П (566)

5.135

1. $\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} du = \frac{1}{k'} \ln \frac{\operatorname{dn} u + k'}{\operatorname{cn} u};$ Си 266 (7)

$= \frac{1}{2k'} \ln \frac{\operatorname{dn} u + k'}{\operatorname{dn} u - k'}.$ Ж 88 (167)

2 $\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} du = \frac{i}{kk'} \ln \frac{ik' - k \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u};$ Си 266 (8)

$= \frac{1}{kk'} \operatorname{arcctg} \frac{k \operatorname{cn} u}{k'}.$ Ж 88 (169)

3. $\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u} du = \ln \frac{1 - \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u};$ Си 266 (10)

$= \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \operatorname{dn} u}{1 + \operatorname{dn} u}.$ Ж 88 (168)

4. $\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} du = -\frac{1}{k} \ln \frac{1 - k \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u};$ Си 266 (9)

$= \frac{1}{2k} \ln \frac{1 + k \operatorname{sn} u}{1 - k \operatorname{sn} u}.$ Ж 88 (171)

5. $\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} du = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{sn} u}{1 - \operatorname{sn} u};$ Ж 88 (172)

$= \ln \frac{1 + \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}.$ ЯЭ 193

6. $\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} du = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \operatorname{cn} u}{1 + \operatorname{cn} u}.$ Ж 87 (170)

5.136

1. $\int \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \, du = -\frac{1}{k^2} \operatorname{dn} u.$

2. $\int \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \, du = -\operatorname{cn} u.$

3. $\int \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \, du = \operatorname{sn} u.$

5.137

1. $\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}^2 u} du = \frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}.$ Ж 88 (173)

2. $\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn}^2 u} du = -\frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}.$ Ж 88 (175)

3. $\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u} du = -\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}.$ Ж 88 (174)

4. $\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u} du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}.$ Ж 88 (177)

5. $\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u} du = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}.$ Ж 88 (176)

6. $\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u} du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}.$ Ж 88 (178)

5.138

1. $\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} du = \ln \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}.$ Ж 88 (183)

2. $\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} du = \frac{1}{k'^2} \ln \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}.$ Ж 88 (182)

3. $\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u} du = \ln \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}.$ Ж 88 (184)

5.139

1. $\int \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} du = \ln \operatorname{sn} u.$ Ж 88 (179)

2. $\int \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} du = \ln \frac{1}{\operatorname{cn} u}.$ Ж 88 (180)

3. $\int \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} du = -\frac{1}{k^2} \ln \operatorname{dn} u.$ Ж 88 (181)

5.14 Эллиптические функции Вейерштрасса

5.141

1. $\int \wp(u) \, du = -\zeta(u).$

2. $\int \wp^2(u) \, du = \frac{1}{6} \wp'(u) + \frac{1}{12} g_2 u.$ Ж 120 (192)

3. $\int \wp^3(u) \, du = \frac{1}{120} \wp'''(u) - \frac{3}{20} g_2 \zeta(u) + \frac{1}{10} g_3 u.$ Ж 120 (193)

4. $$\int \frac{du}{\wp(u)-\wp(v)} = \frac{1}{\wp'(v)}\left[2u\zeta(v) + \ln\frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)}\right].$$ Ж 120 (194)

5. $$\int \frac{\alpha\wp(u)+\beta}{\gamma\wp(u)+\delta}\,du = \frac{\alpha u}{\gamma} - \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2\wp'(v)}\left[\ln\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} - 2u\zeta(v)\right],$$

где $\wp'(v) = -\frac{\delta}{\gamma}$. Ж 120 (195)

5.2 ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

5.21 Интегральная показательная функция

5.211 $$\int_x^\infty \mathrm{Ei}(-\beta x)\,\mathrm{Ei}(-\gamma x)\,dx = \left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\mathrm{Ei}[-(\beta+\gamma)x] - x\,\mathrm{Ei}(-\beta x)\,\mathrm{Ei}(-\gamma x) - \frac{e^{-\beta x}}{\beta}\mathrm{Ei}(-\gamma x) - \frac{e^{-\gamma x}}{\gamma}\mathrm{Ei}(-\beta x)$$

$[\mathrm{Re}(\beta+\gamma) > 0]$ НИ 53 (2)

5.22 Интегральная показательная и степенная функции

5.221

1. $$\int_x^\infty \frac{\mathrm{Ei}[-a(x+b)]}{x^{n+1}}\,dx = \left[\frac{1}{x^n} - \frac{(-1)^n}{b^n}\right]\frac{\mathrm{Ei}[-a(x+b)]}{n} + \frac{e^{-ab}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k-1}}{b^{n-k}}\int_x^\infty \frac{e^{-ax}}{x^{k+1}}\,dx$$ $[a > 0,\ b > 0]$. НИ 52 (3)

2. $$\int_x^\infty \frac{\mathrm{Ei}[-a(x+b)]}{x^2}\,dx = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{b}\right)\mathrm{Ei}[-a(x+b)] - \frac{e^{-ab}\,\mathrm{Ei}(-ax)}{b}$$

$[a > 0,\ b > 0]$. НИ 52 (4)

5.23 Интегральная показательная и показательная функции

5.231

1. $$\int_0^x e^x\,\mathrm{Ei}(-x)\,dx = -\ln x - C + e^x\,\mathrm{Ei}(-x).$$ ИПІІ 308 (11)

2. $$\int_0^x e^{-\beta x}\,\mathrm{Ei}(-\alpha x)\,dx = -\frac{1}{\beta}\left\{e^{-\beta x}\,\mathrm{Ei}(-\alpha x) + \ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right) - \mathrm{Ei}[-(\alpha+\beta)x]\right\}.$$ ИПІІ 308 (12)

5.3 ИНТЕГРАЛЬНЫЙ СИНУС И ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КОСИНУС

5.31

1. $$\int \cos\alpha x\,\mathrm{ci}(\beta x)\,dx = \frac{\sin\alpha x\,\mathrm{ci}(\beta x)}{\alpha} - \frac{\mathrm{si}(\alpha x+\beta x)+\mathrm{si}(\alpha x-\beta x)}{2\alpha}.$$ НИ 49 (1)

2. $$\int \sin\alpha x\,\mathrm{ci}(\beta x)\,dx = -\frac{\cos\alpha x\,\mathrm{ci}(\beta x)}{\alpha} + \frac{\mathrm{ci}(\alpha x+\beta x)+\mathrm{ci}(\alpha x-\beta x)}{2\alpha}.$$ НИ 49 (2)

5.32

1. $\int \cos \alpha x \operatorname{si}(\beta x)\,dx = \frac{\sin \alpha x \operatorname{si}(\beta x)}{\alpha} + \frac{\operatorname{ci}(\alpha x+\beta x) - \operatorname{ci}(\alpha x-\beta x)}{2\alpha}$. НИ 49 (3)

2. $\int \sin \alpha x \operatorname{si}(\beta x)\,dx = -\frac{\cos \alpha x \operatorname{si}(\beta x)}{\alpha} + \frac{\operatorname{si}(\alpha x+\beta x) - \operatorname{si}(\alpha x-\beta x)}{2\alpha}$. НИ 49 (4)

5.33

1. $\int \operatorname{ci}(\alpha x)\operatorname{ci}(\beta x)\,dx = x\operatorname{ci}(\alpha x)\operatorname{ci}(\beta x) + \frac{1}{2\alpha}(\operatorname{si}(\alpha x+\beta x) + \operatorname{si}(\alpha x-\beta x)) +$
$+ \frac{1}{2\beta}(\operatorname{si}(\alpha x+\beta x) + \operatorname{si}(\beta x-\alpha x)) - \frac{1}{\alpha}\sin \alpha x \operatorname{ci}(\beta x) - \frac{1}{\beta}\sin \beta x \operatorname{ci}(\alpha x)$.
НИ 53 (5)

2. $\int \operatorname{si}(\alpha x)\operatorname{si}(\beta x)\,dx = x\operatorname{si}(\alpha x)\operatorname{si}(\beta x) - \frac{1}{2\beta}(\operatorname{si}(\alpha x+\beta x) + \operatorname{si}(\alpha x-\beta x)) -$
$- \frac{1}{2\alpha}(\operatorname{si}(\alpha x+\beta x) + \operatorname{si}(\beta x-\alpha x)) + \frac{1}{\alpha}\cos \alpha x \operatorname{si}(\beta x) + \frac{1}{\beta}\cos \beta x \operatorname{si}(\alpha x)$.
НИ 54 (6)

3. $\int \operatorname{si}(\alpha x)\operatorname{ci}(\beta x)\,dx = x\operatorname{si}(\alpha x)\operatorname{ci}(\beta x) + \frac{1}{\alpha}\cos \alpha x \operatorname{ci}(\beta x) -$
$- \frac{1}{\beta}\sin \beta x \operatorname{si}(\alpha x) - \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\beta}\right)\operatorname{ci}(\alpha x+\beta x) - \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\beta}\right)\operatorname{ci}(\alpha x-\beta x)$.
НИ 54 (10)

5.34

1. $\int\limits_x^\infty \operatorname{si}[a(x+b)]\frac{dx}{x^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b}\right)\operatorname{si}[a(x+b)] -$
$- \frac{\cos ab \operatorname{si}(ax) + \sin ab \operatorname{ci}(ax)}{b}$ $[a>0,\ b>0]$. НИ 52 (6)

2. $\int\limits_x^\infty \operatorname{ci}[a(x+b)]\frac{dx}{x^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b}\right)\operatorname{ci}[a(x+b)] +$
$+ \frac{\sin ab \operatorname{si}(ax) - \cos ab \operatorname{ci}(ax)}{b}$ $[a>0,\ b>0]$. НИ 52 (5)

5.4 ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТИ И ИНТЕГРАЛЫ ФРЕНЕЛЯ

5.41 $\int \Phi(\alpha x)\,dx = x\Phi(\alpha x) + \frac{e^{-\alpha^2 x^2}}{\alpha\sqrt{\pi}}$. НИ 12 (20) и

5.42 $\int S(\alpha x)\,dx = xS(\alpha x) + \frac{\cos \alpha^2 x^2}{\alpha\sqrt{2\pi}}$. НИ 12 (22) и

5.43 $\int C(\alpha x)\,dx = xC(\alpha x) - \frac{\sin \alpha^2 x^2}{\alpha\sqrt{2\pi}}$. НИ 12 (21) и

5.5 ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

5.51 $\int J_p(x)\,dx = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{p+2k+1}(x)$. ЯЭ 237, МО 30

5.52 **184**

1. $\int x^{p+1} Z_p(x)\,dx = x^{p+1} Z_{p+1}(x)$ *). В 146 (1)

2. $\int x^{-p+1} Z_p(x)\,dx = -x^{-p+1} Z_{p-1}(x)$ *). В 146 (2)

5.53 $\int \left[(\alpha^2-\beta^2)x - \frac{p^2-q^2}{x}\right] Z_p(\alpha x)\,\mathfrak{Z}_p(\beta x)\,dx = \beta x Z_p(\alpha x)\,\mathfrak{Z}_{q-1}(\beta x) - \alpha x Z_{p-1}(\alpha x)\,\mathfrak{Z}_q(\beta x) + (p-q) Z_p(\alpha x)\,\mathfrak{Z}_q(\beta x)$ *).

ЯЭ 237, МО 30, В 148 (7) *и*

5.54

1. $\int x Z_p(\alpha x)\,\mathfrak{Z}_p(\beta x)\,dx = \frac{\beta x Z_p(\alpha x)\,\mathfrak{Z}_{p-1}(\beta x) - \alpha x Z_{p-1}(\alpha x)\,\mathfrak{Z}_p(\beta x)\ ^{*)}}{\alpha^2-\beta^2}$.

В 148 (8) *и*

2. $\int x [Z_p(\alpha x)]^2\,dx = \frac{x^2}{2}\{[Z_p(\alpha x)]^2 - Z_{p-1}(\alpha x) Z_{p+1}(\alpha x)\}$ *). В 149 (11)

5.55 $\int \frac{1}{x} Z_p(\alpha x)\,\mathfrak{Z}_q(\alpha x)\,dx = \alpha x \frac{Z_{p-1}(\alpha x)\,\mathfrak{Z}_q(\alpha x) - Z_p(\alpha x)\,\mathfrak{Z}_{q-1}(\alpha x)}{p^2-q^2} - \frac{Z_p(\alpha x)\,\mathfrak{Z}_q(\alpha x)\ ^{*)}}{p+q}$. В 149 (13)

5.56

1. $\int Z_1(x)\,dx = -Z_0(x)$ *). ЯЭ 237

2. $\int x Z_0(x)\,dx = x Z_1(x)$ *). ЯЭ 237

*) В формулах 5.52—5.56 $Z_p(x)$ и $\mathfrak{Z}_p(x)$ — произвольные цилиндрические функции.

6.—7. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

6.1 ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И ФУНКЦИИ

6.11 Формы, содержащие $F(x, k)$

6.111 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, k) \operatorname{ctg} x\, dx = \frac{\pi}{4} \boldsymbol{K}(k') + \frac{1}{2} \ln k\, \boldsymbol{K}(k).$$ БХ [350] (1)

6.112

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, k) \frac{\sin x \cos x}{1 + k \sin^2 x}\, dx = \frac{1}{4k} \boldsymbol{K}(k) \ln \frac{(1+k)\sqrt{k}}{2} + \frac{\pi}{16k} \boldsymbol{K}(k').$$

БХ [350] (6)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, k) \frac{\sin x \cos x}{1 - k \sin^2 x}\, dx = \frac{1}{4k} \boldsymbol{K}(k) \ln \frac{2}{(1-k)\sqrt{k}} - \frac{\pi}{16k} \boldsymbol{K}(k')$$

БХ [350] (7)

3 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, k) \frac{\sin x \cos x}{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx = -\frac{1}{2k^2} \ln k'\, \boldsymbol{K}(k)$$

БХ [350] (2) *и*, БФ (802.12) *и*

6.113

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, k') \frac{\sin x \cos x\, dx}{\cos^2 x + k \sin^2 x} = \frac{1}{4(1-k)} \ln \frac{2}{(1+k)\sqrt{k}} \boldsymbol{K}(k').$$ БХ [350] (5)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, k) \frac{\sin x \cos x}{1 - k^2 \sin^2 t \sin^2 x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = -\frac{1}{k^2 \sin t \cos t} \times$$
$$\times \left[\boldsymbol{K}(k) \operatorname{arctg}(k' \operatorname{tg} t) - \frac{\pi}{2} F(t, k) \right].$$ БХ [350] (12)

6.114 $$\int_u^v F(x, k) \frac{dx}{\sqrt{(\sin^2 x - \sin^2 u)(\sin^2 v - \sin^2 x)}} =$$
$$= \frac{1}{2\cos u \sin v} \boldsymbol{K}(k) \boldsymbol{K}\left(\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 u \operatorname{ctg}^2 v}\right)$$
$[k^2 = 1 - \operatorname{ctg}^2 u \cdot \operatorname{ctg}^2 v]$. БХ [351] (9)

6.115 $$\int_0^1 F(\arcsin x, k) \frac{x\,dx}{1 + kx^2} = \frac{1}{4k} \boldsymbol{K}(k) \ln \frac{(1+k)\sqrt{k}}{2} + \frac{\pi}{16k} \boldsymbol{K}(k')$$
(сравни **6.112** 2.). БХ [466] (1)

Эта и подобные ей формулы получаются из формул **6.111**—**6.113** путем подстановки $x = \arcsin t$.

6.12 Формы, содержащие $E(x, k)$

6.121 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} E(x, k) \frac{\sin x \cos x}{1 - k^2 \sin^2 x} dx = \frac{1}{2k^2} \{(1 + k'^2) \boldsymbol{K}(k) - (2 + \ln k') \boldsymbol{E}(k)\}.$$
БХ [350] (4)

6.122 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} E(x, k) \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{E}(k) \boldsymbol{K}(k) - \ln k'\}.$$
БХ [350] (10), БФ (630.02)

6.123 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} E(x, k) \frac{\sin x \cos x}{1 - k^2 \sin^2 t \sin^2 x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = -\frac{1}{k^2 \sin t \cos t} \times$$
$$\times \left[\boldsymbol{E}(k) \operatorname{arctg}(k' \operatorname{tg} t) - \frac{\pi}{2} E(t, k) + \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} t \left(1 - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\right)\right].$$
БХ [350] (13)

6.124 $$\int_u^v E(x, k) \frac{dx}{\sqrt{(\sin^2 x - \sin^2 u)(\sin^2 v - \sin^2 x)}} =$$
$$= \frac{1}{2\cos u \sin v} \boldsymbol{E}(k) \boldsymbol{K}\left(\sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 u}{\operatorname{tg}^2 v}}\right) + \frac{k^2 \sin v}{2 \cos u} \boldsymbol{K}\left(\sqrt{1 - \frac{\sin^2 2u}{\sin^2 2v}}\right)$$
$[k^2 = 1 - \operatorname{ctg}^2 u \operatorname{ctg}^2 v]$. БХ [351] (10)

6.13 Интегрирование эллиптических интегралов по модулю

6.131 $$\int_0^1 F(x, k)\, k\, dk = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$ БФ (616.03)

6.132 $\int\limits_0^1 E(x, k)\, k\, dk = \frac{\sin^2 x + 1 - \cos x}{3 \sin x}$. БФ (616.04)

6.133 $\int\limits_0^1 \Pi(x, r^2, k)\, k\, dk = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - r \ln \sqrt{\frac{1 + r \sin x}{1 - r \sin x}} - r^2 \Pi(x, r^2, 0)$.

БФ (616.05)

6.14 — 6.15 Полные эллиптические интегралы

6.141

1. $\int\limits_0^1 \boldsymbol{K}(k)\, dk = 2G$. Ф II 755

2. $\int\limits_0^1 \boldsymbol{K}(k')\, dk = \frac{\pi^2}{4}$. БФ (615.03)

6.142 $\int\limits_0^1 \left(\boldsymbol{K}(k) - \frac{\pi}{2}\right) \frac{dk}{k} = \pi \ln 2 - 2G$. БФ (615.05)

6.143 $\int\limits_0^1 \boldsymbol{K}(k) \frac{dk}{k'} = \boldsymbol{K}^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. БФ (615.08)

6.144 $\int\limits_0^1 \boldsymbol{K}(k) \frac{dk}{1+k} = \frac{\pi^2}{8}$. БФ (615.09)

6.145 $\int\limits_0^1 \left(\boldsymbol{K}(k') - \ln \frac{4}{k}\right) \frac{dk}{k} = \frac{1}{12} [24 (\ln 2)^2 - \pi^2]$. БФ (615.13)

6.146 $n^2 \int\limits_0^1 k^n \boldsymbol{K}(k)\, dk = (n-1)^2 \int\limits_0^1 k^{n-2} \boldsymbol{K}(k)\, dk + 1$. БФ (615.12)

6.147 $n \int\limits_0^1 k^n \boldsymbol{K}(k')\, dk = (n-1) \int\limits_0^1 k^{n-2} \boldsymbol{E}(k)\, dk \quad [n > 1]$

(смотри 6.152). БФ (615.11)

6.148

1. $\int\limits_0^1 \boldsymbol{E}(k)\, dk = \frac{1}{2} + G$. БФ (615.02)

2. $\int\limits_0^1 \boldsymbol{E}(k')\, dk = \frac{\pi^2}{8}$. БФ (615.04)

6.149

1. $\int\limits_0^1 \left(\boldsymbol{E}(k) - \frac{\pi}{2}\right) \frac{dk}{k} = \pi \ln 2 - 2G + 1 - \frac{\pi}{2}$. БФ (615.06)

2. $\int_0^1 (\boldsymbol{E}(k') - 1)\frac{dk}{k} = 2\ln 2 - 1.$ БФ (615.07)

6.151 $\int_0^1 \boldsymbol{E}(k)\frac{dk}{k'} = \frac{1}{8}\left[4\boldsymbol{K}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi^2}{\boldsymbol{K}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right].$ БФ (615.10)

6.152 $(n+2)\int_0^1 k^n \boldsymbol{E}(k')\,dk = (n+1)\int_0^1 k^n \boldsymbol{K}(k')\,dk \quad [n > 1]$

(смотри **6.147**). БФ (615.14)

6.153 $\int_0^a \frac{\boldsymbol{K}(k)\,k\,dk}{k'^2\sqrt{a^2-k^2}} = \frac{\pi a}{2\sqrt{1-a^2}} \quad [a^2 < 1].$ ЛоI 252

6.154 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\boldsymbol{E}(p\sin x)}{1-p^2\sin^2 x}\sin x\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{1-p^2}} \quad [p^2 < 1].$ Ф II 489

6.16 Тэта-функции

6.161

1. $\int_0^\infty x^{s-1}\theta_2(0\,|\,ix^2)\,dx = 2^s(1-2^{-s})\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s)$

$[\operatorname{Re} s > 2].$ ИП I 339 (20)

2. $\int_0^\infty x^{s-1}[\theta_3(0\,|\,ix^2) - 1]\,dx = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s)$

$[\operatorname{Re} s > 2].$ ИП I 339 (21)

3. $\int_0^\infty x^{s-1}[1 - \theta_4(0\,|\,ix^2)]\,dx = (1-2^{1-s})\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s)$

$[\operatorname{Re} s > 2].$ ИП I 339 (22)

4. $\int_0^\infty x^{s-1}[\theta_4(0\,|\,ix^2) + \theta_2(0\,|\,ix^2) - \theta_3(0\,|\,ix^2)]\,dx =$

$= -(2^s-1)(2^{1-s}-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s).$ ИП I 339 (24)

6.162

1. $\int_0^\infty e^{-ax}\theta_4\left(\frac{b\pi}{2l}\,\middle|\,\frac{i\pi x}{l^2}\right)dx = \frac{l}{\sqrt{a}}\operatorname{ch}(b\sqrt{a})\operatorname{cosech}(l\sqrt{a})$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ |b| \leqslant l].$ ИП I 224 (1) *и*

2. $\int_0^\infty e^{-ax}\theta_1\left(\frac{b\pi}{2l}\,\middle|\,\frac{i\pi x}{l^2}\right)dx = -\frac{l}{\sqrt{a}}\operatorname{sh}(b\sqrt{a})\operatorname{sech}(l\sqrt{a})$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ |b| \leqslant l].$ ИП I 224 (2) *и*

3. $$\int_0^\infty e^{-ax}\theta_2\left(\frac{(1+b)\pi}{2l}\,\middle|\,\frac{i\pi x}{l^2}\right)dx = -\frac{l}{\sqrt{a}}\operatorname{sh}\left(b\sqrt{a}\right)\operatorname{sech}\left(l\sqrt{a}\right)$$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ |b| \leqslant l]$. ИП I 224 (3) и

4. $$\int_0^\infty e^{-ax}\theta_3\left(\frac{(1+b)\pi}{2l}\,\middle|\,\frac{i\pi x}{l^2}\right)dx = \frac{l}{\sqrt{a}}\operatorname{ch}\left(b\sqrt{a}\right)\operatorname{cosech}\left(l\sqrt{a}\right)$$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ |b| \leqslant l]$. ИП I 224 (4) и

6.163 $$\int_0^\infty e^{-(a-\mu)x}\theta_3\left(\pi\sqrt{\mu}\,x\,\middle|\,i\pi x\right)dx = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\operatorname{th}\left(\sqrt{a}+\sqrt{\mu}\right)+\operatorname{th}\left(\sqrt{a}-\sqrt{\mu}\right)\right]$$

$[\operatorname{Re} a > 0]$. ИП I 224 (7) и

6.164 $$\int_0^\infty \left[\theta_4\left(0\,|\,ie^{2x}\right)+\theta_2\left(0\,|\,ie^{2x}\right)-\theta_3\left(0\,|\,ie^{2x}\right)\right]e^{\frac{1}{2}x}\cos(ax)\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}\left(2^{\frac{1}{2}+ia}-1\right)\left(1-2^{\frac{1}{2}-ia}\right)\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}ia}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}ia\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+ia\right)$$

$[a > 0]$. ИП I 61 (11)

6.165 $$\int_0^\infty e^{\frac{1}{2}x}\left[\theta_3\left(0\,|\,ie^{2x}\right)-1\right]\cos(ax)\,dx =$$

$$=2\left(1+4a^2\right)^{-1}\left\{1+\left[\left(a^2+\frac{1}{4}\right)\pi^{-\frac{1}{2}ia-\frac{1}{4}}\Gamma\left(\frac{1}{2}ia+\frac{1}{4}\right)\zeta\left(ia+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$$

$[a > 0]$. ИП I 62 (12)

6.2—6.3 ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ЕЙ ФУНКЦИИ

6.21 Интегральный логарифм

6.211 $$\int_0^1 \operatorname{li}(x)\,dx = -\ln 2.$$ БХ [79] (5)

6.212

1. $$\int_0^1 \operatorname{li}\left(\frac{1}{x}\right)x\,dx = 0.$$ БХ [255] (1)

2. $$\int_0^1 \operatorname{li}(x)\,x^{p-1}\,dx = -\frac{1}{p}\ln(p+1) \quad [p > -1].$$ БХ [255] (2)

3. $$\int_0^1 \operatorname{li}(x)\frac{dx}{x^{q+1}} = \frac{1}{q}\ln(1-q) \quad [q < 1].$$ БХ [255] (3)

4. $$\int_1^\infty \operatorname{li}(x)\frac{dx}{x^{q+1}} = -\frac{1}{q}\ln(q-1) \quad [q > 1].$$ БХ [255] (4)

6.213

1. $$\int_0^1 \operatorname{li}\left(\frac{1}{x}\right)\sin(a\ln x)\,dx = \frac{1}{1+a^2}\left(a\ln a - \frac{\pi}{2}\right) \quad [a>0].$$ БХ [475] (1)

2. $$\int_1^\infty \operatorname{li}\left(\frac{1}{x}\right)\sin(a\ln x)\,dx = -\frac{1}{1+a^2}\left(\frac{\pi}{2} + a\ln a\right) \quad [a>0].$$ БХ [475] (9)

3. $$\int_0^1 \operatorname{li}\left(\frac{1}{x}\right)\cos(a\ln x)\,dx = -\frac{1}{1+a^2}\left(\ln a + \frac{\pi}{2}a\right) \quad [a>0].$$ БХ [475] (2)

4. $$\int_1^\infty \operatorname{li}\left(\frac{1}{x}\right)\cos(a\ln x)\,dx = \frac{1}{1+a^2}\left(\ln a - \frac{\pi}{2}a\right) \quad [a>0].$$ БХ [475] (10)

5. $$\int_0^1 \operatorname{li}(x)\sin(a\ln x)\frac{dx}{x} = \frac{\ln(1+a^2)}{2a} \quad [a>0].$$ БХ [479] (1), ИП I 98 (20) и

6. $$\int_0^1 \operatorname{li}(x)\cos(a\ln x)\frac{dx}{x} = -\frac{\operatorname{arctg} a}{a}.$$ БХ [479] (2)

7. $$\int_0^1 \operatorname{li}(x)\sin(a\ln x)\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{1+a^2}\left(a\ln a + \frac{\pi}{2}\right) \quad [a>0].$$ БХ [479] (3)

8. $$\int_1^\infty \operatorname{li}(x)\sin(a\ln x)\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{1+a^2}\left(\frac{\pi}{2} - a\ln a\right) \quad [a>0].$$ БХ [479] (13)

9. $$\int_0^1 \operatorname{li}(x)\cos(a\ln x)\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{1+a^2}\left(\ln a - \frac{\pi}{2}a\right) \quad [a>0].$$ БХ [479] (4)

10. $$\int_1^\infty \operatorname{li}(x)\cos(a\ln x)\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{1+a^2}\left(\ln a + \frac{\pi}{2}a\right) \quad [a>0].$$ БХ [479] (14)

11. $$\int_0^1 \operatorname{li}(x)\sin(a\ln x)x^{p-1}\,dx = \frac{1}{a^2+p^2}\left\{\frac{a}{2}\ln\left[(1+p)^2+a^2\right] - p\operatorname{arctg}\frac{a}{1+p}\right\}$$
$$[p>0].$$ БХ [477] (1)

12. $$\int_0^1 \operatorname{li}(x)\cos(a\ln x)x^{p-1}\,dx = -\frac{1}{a^2+p^2}\left\{a\operatorname{arctg}\frac{a}{1+p} + \right.$$
$$\left. + \frac{p}{2}\ln\left[(1+p)^2+a^2\right]\right\} \quad [p>0].$$ БХ [477] (2)

6.214

1. $$\int_0^1 \operatorname{li}\left(\frac{1}{x}\right)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx = -\pi\operatorname{ctg} p\pi\cdot\Gamma(p) \quad [0<p<1].$$ БХ [340] (1)

2. $$\int_1^\infty \operatorname{li}\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^{p-1}\,dx = -\frac{\pi}{\sin p\pi}\Gamma(p) \quad [p>0].$$ БХ [340] (9)

6.215

1. $$\int\limits_0^1 \operatorname{li}(x)\frac{x^{p-1}}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}dx = -2\sqrt{\frac{\pi}{p}}\operatorname{Arsh}\sqrt{p} =$$
$$= -2\sqrt{\frac{\pi}{p}}\ln\left(\sqrt{p}+\sqrt{p+1}\right) \quad [p>0].$$ БХ [444] (3)

2. $$\int\limits_0^1 \operatorname{li}(x)\frac{dx}{x^{p+1}\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}} = -2\sqrt{\frac{\pi}{p}}\arcsin\sqrt{p} \quad [1>p>0].$$
БХ [444] (4)

6.216

1. $$\int\limits_0^1 \operatorname{li}(x)\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{p-1}\frac{dx}{x} = -\frac{1}{p}\Gamma(p) \quad [0<p<1].$$ БХ [444] (1)

2. $$\int\limits_0^1 \operatorname{li}(x)\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{p-1}\frac{dx}{x^2} = -\frac{\pi\Gamma(p)}{\sin p\pi} \quad [0<p<1].$$ БХ [444] (2)

6.22—6.23 Интегральная показательная функция

6.221 $$\int\limits_0^p \operatorname{Ei}(\alpha x)\,dx = p\operatorname{Ei}(\alpha p)+\frac{1-e^{\alpha p}}{\alpha}.$$ НИ 11 (7)

6.222 $$\int\limits_0^\infty \operatorname{Ei}(-px)\operatorname{Ei}(-qx)\,dx = \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\ln(p+q)-\frac{\ln q}{p}-\frac{\ln p}{q}$$
$$[p>0,\ q>0].$$ ФИ II 653, НИ 53 (3)

6.223 $$\int\limits_0^\infty \operatorname{Ei}(-\beta x)x^{\mu-1}\,dx = -\frac{\Gamma(\mu)}{\mu\beta^\mu} \quad [\operatorname{Re}\beta\geqslant 0,\ \operatorname{Re}\mu>0].$$
НИ 55 (7), ИП I 325 (10)

6.224

1. $$\int\limits_0^\infty \operatorname{Ei}(-\beta x)e^{-\mu x}\,dx = -\frac{1}{\mu}\ln\left(1+\frac{\mu}{\beta}\right) \quad [\operatorname{Re}(\beta+\mu)\geqslant 0,\ \mu>0];$$
$$=1 \quad [\mu=0].$$ ФИ II 652, НИ 48 (8)

2. $$\int\limits_0^\infty \operatorname{Ei}(ax)e^{-\mu x}\,dx = -\frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{\mu}{a}-1\right) \quad [a>0,\ \operatorname{Re}\mu>0,\ \mu>a].$$
ИП I 178 (23) *и*, БХ [283] (3)

6.225

1. $$\int\limits_0^\infty \operatorname{Ei}(-x^2)e^{-\mu x^2}\,dx = -\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\operatorname{Arsh}\sqrt{\mu} = -\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\ln\left(\sqrt{\mu}+\sqrt{1+\mu}\right)$$
$$[\operatorname{Re}\mu>0].$$ БХ [283] (5), ИП I 178 (25) *и*

2. $$\int\limits_0^\infty \operatorname{Ei}(-x^2)e^{px^2}\,dx = -\sqrt{\frac{\pi}{p}}\arcsin\sqrt{p} \quad [1>p>0].$$ НИ 59 (9) *и*

6.226

1. $$\int_0^\infty \operatorname{Ei}\left(-\frac{1}{4x}\right) e^{-\mu x}\,dx = -\frac{2}{\mu} K_0\left(\sqrt{\mu}\right) \quad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ МХд 34

2. $$\int_0^\infty \operatorname{Ei}\left(\frac{a^2}{4x}\right) e^{-\mu x}\,dx = -\frac{2}{\mu} K_0\left(a\sqrt{\mu}\right) \quad [a > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0].$$ МХд 34

3. $$\int_0^\infty \operatorname{Ei}\left(-\frac{1}{4x^2}\right) e^{-\mu x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \operatorname{Ei}\left(-\sqrt{\mu}\right) \quad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ МХд 34

4. $$\int_0^\infty \operatorname{Ei}\left(-\frac{1}{4x^2}\right) e^{-\mu x^2 + \frac{1}{4x^2}}\,dx =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \left[\cos\sqrt{\mu}\ \operatorname{ci}\sqrt{\mu} - \sin\sqrt{\mu}\ \operatorname{si}\sqrt{\mu}\right] \quad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ МХд 34

6.227

1. $$\int_0^\infty \operatorname{Ei}(-x) e^{-\mu x} x\,dx = \frac{1}{\mu(\mu+1)} - \frac{1}{\mu^2}\ln(1+\mu) \quad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ МХд 34

2. $$\int_0^\infty \left[\frac{e^{-ax}\operatorname{Ei}(ax)}{x-b} - \frac{e^{ax}\operatorname{Ei}(-ax)}{x+b}\right] dx = 0 \quad [a > 0,\ b < 0];$$
$$= \pi^2 e^{-ab} \quad [a > 0,\ b > 0].$$ ИПII 253(1)*и*

6.228

1. $$\int_0^\infty \operatorname{Ei}(-x) e^{x} x^{\nu-1}\,dx = -\frac{\pi\Gamma(\nu)}{\sin\nu\pi} \quad [0 < \operatorname{Re}\nu < 1].$$ ИПII 308(13)

2. $$\int_0^\infty \operatorname{Ei}(-\beta x) e^{-\mu x} x^{\nu-1}\,dx = -\frac{\Gamma(\nu)}{\nu(\beta+\mu)^\nu}\, {}_2F_1\left(1,\ \nu;\ \nu+1;\ \frac{\mu}{\beta+\mu}\right)$$
$$[|\arg\beta| < \pi,\ \operatorname{Re}(\beta+\mu) > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0].$$ ИПII 308(14)

6.229 $$\int_0^\infty \operatorname{Ei}\left(-\frac{1}{4x^2}\right) \exp\left(-\mu x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) \frac{dx}{x^2} =$$
$$= 2\sqrt{\pi}\left(\cos\sqrt{\mu}\ \operatorname{si}\sqrt{\mu} - \sin\sqrt{\mu}\ \operatorname{ci}\sqrt{\mu}\right) \quad [\operatorname{Re}\mu > 0].$$ МХд 34

6.231 $$\int_{-\ln a}^\infty [\operatorname{Ei}(-a) - \operatorname{Ei}(-e^{-x})] e^{-\mu x}\,dx = \frac{1}{\mu}\gamma(\mu,\ a) \quad [a < 1,\ \operatorname{Re}\mu > 0].$$ МХд 34

6.232

1. $$\int_0^\infty \operatorname{Ei}(-ax)\sin bx\,dx = -\frac{\ln\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}{2b} \quad [a > 0,\ b > 0].$$ БХ[473](1)*и*

2. $$\int_0^\infty \operatorname{Ei}(-ax)\cos bx\,dx = -\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} \quad [a > 0,\ b > 0].$$ БХ[473](2)*и*

6.233

1. $$\int_0^\infty \mathrm{Ei}(-x)\, e^{-\mu x} \sin \beta x\, dx = -\frac{1}{\beta^2+\mu^2} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\beta}{2} \ln \left[(1+\mu)^2 + \beta^2 \right] - \mu \operatorname{arctg} \frac{\beta}{1+\mu} \right\} \quad [\operatorname{Re} \mu > |\operatorname{Im} \beta|].$$ БХ [473] (7) и

2. $$\int_0^\infty \mathrm{Ei}(-x)\, e^{-\mu x} \cos \beta x\, dx = -\frac{1}{\beta^2+\mu^2} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\mu}{2} \ln \left[(1+\mu)^2 + \beta^2 \right] + \beta \operatorname{arctg} \frac{\beta}{1+\mu} \right\} \quad [\operatorname{Re} \mu > |\operatorname{Im} \beta|].$$ БХ [473] (8) и

6.234 $$\int_0^\infty \mathrm{Ei}(-x) \ln x\, dx = C + 1.$$ НИ 56 (10)

6.24—6.26 Интегральные синус и косинус

6.241

1. $$\int_0^\infty \mathrm{si}(px)\, \mathrm{si}(qx)\, dx = \frac{\pi}{2p} \quad [p \geqslant q].$$ ФП 653, НИ 54 (8)

2. $$\int_0^\infty \mathrm{ci}(px)\, \mathrm{ci}(qx)\, dx = \frac{\pi}{2p} \quad [p \geqslant q].$$ ФП 653, НИ 54 (7)

3. $$\int_0^\infty \mathrm{si}(px)\, \mathrm{ci}(qx)\, dx = \frac{1}{4q} \ln \left(\frac{p+q}{p-q} \right)^2 + \frac{1}{4p} \ln \frac{(p^2-q^2)^2}{q^4} \quad [p \neq q];$$
$$= \frac{1}{q} \ln 2 \quad [p = q].$$ ФП 653, НИ 54 (10 и 12)

6.242 $$\int_0^\infty \frac{\mathrm{ci}(ax)}{\beta + x}\, dx = -\frac{1}{2} \left\{ [\mathrm{si}(a\beta)]^2 + [\mathrm{ci}(a\beta)]^2 \right\} \quad [a > 0, \ |\arg \beta| < \pi].$$ ИПII 224 (1)

6.243

1. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{si}(a|x|)}{x-b} \operatorname{sign} x\, dx = \pi\, \mathrm{ci}(a|b|) \quad [a > 0, \ b > 0].$$ ИПII 253 (3)

2. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{ci}(a|x|)}{x-b}\, dx = -\pi \operatorname{sign} b \cdot \mathrm{si}(a|b|) \quad [a > 0].$$ ИПII 253 (2)

6.244

1. $$\int_0^\infty \left[\mathrm{si}(px) + \frac{\pi}{2} \right] \frac{x\, dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2} \mathrm{Ei}(-pq) \quad [p > 0, \ q > 0].$$ БХ [255] (6)

2. $$\int_0^\infty \left[\mathrm{si}(px) + \frac{\pi}{2} \right] \frac{x\, dx}{q^2-x^2} = -\frac{\pi}{2} \mathrm{ci}(pq) \quad [p > 0, \ q > 0].$$ БХ [255] (6)

6.245

1. $$\int_0^\infty \operatorname{ci}(px)\frac{dx}{q^2+x^2}=\frac{\pi}{2q}\operatorname{Ei}(-pq) \quad [p>0,\ q>0].$$ БХ [255] (7)

2. $$\int_0^\infty \operatorname{ci}(px)\frac{dx}{q^2-x^2}=\frac{\pi}{2q}\operatorname{si}(pq) \quad [p>0,\ q>0].$$ БХ [255] (8)

6.246

1. $$\int_0^\infty \operatorname{si}(ax)x^{\mu-1}\,dx=-\frac{\Gamma(\mu)}{\mu a^\mu}\sin\frac{\mu\pi}{2} \quad [a>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<1].$$ НИ 56 (9), ИП I 325 (12)и

2. $$\int_0^\infty \operatorname{ci}(ax)x^{\mu-1}\,dx=-\frac{\Gamma(\mu)}{\mu a^\mu}\cos\frac{\mu\pi}{2} \quad [a>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<1].$$ НИ 56 (8), ИП I 325 (13)и

6.247

1. $$\int_0^\infty \operatorname{si}(\beta x)e^{-\mu x}\,dx=-\frac{1}{\mu}\operatorname{arctg}\frac{\mu}{\beta} \quad [\operatorname{Re}\mu>0].$$ НИ 49 (12), ИП I 177 (18)

2. $$\int_0^\infty \operatorname{ci}(\beta x)e^{-\mu x}\,dx=-\frac{1}{\mu}\ln\sqrt{1+\frac{\mu^2}{\beta^2}} \quad [\operatorname{Re}\mu>0].$$ НИ 49 (11), ИП I 178 (19)и

6.248

1. $$\int_0^\infty \operatorname{si}(x)e^{-\mu x^2}x\,dx=\frac{\pi}{4\mu}\left[1-\Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\right)\right] \quad [\operatorname{Re}\mu>0].$$ МХд 34

2. $$\int_0^\infty \operatorname{ci}(x)e^{-\mu x^2}\,dx=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\operatorname{Ei}\left(-\frac{1}{4\mu}\right) \quad [\operatorname{Re}\mu>0].$$ МХд 34

6.249 $$\int_0^\infty\left[\operatorname{si}(x^2)+\frac{\pi}{2}\right]e^{-\mu x}\,dx=\frac{\pi}{\mu}\left\{\left[S\left(\frac{\mu^2}{4}\right)-\frac{1}{2}\right]^2+\left[C\left(\frac{\mu^2}{4}\right)-\frac{1}{2}\right]^2\right\}$$ $[\operatorname{Re}\mu>0]$. МХ 26

6.251

1. $$\int_0^\infty \operatorname{si}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\mu x}\,dx=\frac{2}{\mu}\operatorname{kei}\left(2\sqrt{\mu}\right) \quad [\operatorname{Re}\mu>0].$$ МХд 34

2. $$\int_0^\infty \operatorname{ci}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\mu x}\,dx=-\frac{2}{\mu}\operatorname{ker}\left(2\sqrt{\mu}\right) \quad [\operatorname{Re}\mu>0].$$ МХд 34

6.252

1. $$\int_0^\infty \sin px\operatorname{si}(qx)\,dx=-\frac{\pi}{2p} \quad [p^2>q^2];$$
$$=-\frac{\pi}{4p} \quad [p^2=q^2];$$
$$=0 \quad [p^2<q^2].$$ ФП 652, НИ 50 (8)

2. $\int\limits_0^\infty \cos px \operatorname{si}(qx)\, dx = -\frac{1}{4p} \ln \left(\frac{p+q}{p-q}\right)^2 \quad [p \neq 0,\ p^2 \neq q^2];$

$= 1 \quad [p = 0].$ ФП 652, НИ 50 (10)

3. $\int\limits_0^\infty \sin px \operatorname{ci}(qx)\, dx = -\frac{1}{4p} \ln \left(\frac{p^2}{q^2} - 1\right)^2 \quad [p \neq 0,\ p^2 \neq q^2];$

$= 0 \quad [p = 0].$ ФП 652, НИ 50 (9)

4 $\int\limits_0^\infty \cos px \operatorname{ci}(qx)\, dx = -\frac{\pi}{2p} \quad [p^2 > q^2];$

$= -\frac{\pi}{4p} \quad [p^2 = q^2];$

$= 0 \quad [p^2 < q^2].$ ФП 654, НИ 50 (7)

6.253 $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{si}(ax)\sin bx}{1 - 2r\cos x + r^2}\, dx = -\frac{\pi(r^m + r^{m+1})}{4b(1-r)(1-r^2)} \quad [b = a - m];$

$= -\frac{\pi(2 + 2r - r^m - r^{m+1})}{4b(1-r)(1-r^2)} \quad [b = a + m];$

$= -\frac{\pi r^{m+1}}{2b(1-r)(1-r^2)} \quad [a - m - 1 < b < a - m];$

$= -\frac{\pi(1 + r - r^{m+1})}{2b(1-r)(1-r^2)} \quad [a + m < b < a + m + 1].$

ИП I 97 (10)

6.254

1. $\int\limits_0^\infty \left[\operatorname{si}(ax) + \frac{\pi}{2}\right] \sin bx \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\left[L_2\left(\frac{a}{b}\right) - L_2\left(-\frac{a}{b}\right)\right]$

$[a > 0,\ b > 0].$ ИП I 97 (12)

2. $\int\limits_0^\infty \left[\operatorname{si}(ax) + \frac{\pi}{2}\right] \cos bx \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b} \quad [a > 0,\ b > 0].$ ИП I 41 (11)

6.255

1. $\int\limits_{-\infty}^\infty [\cos ax \operatorname{ci}(a|x|) + \sin(a|x|) \operatorname{si}(a|x|)] \frac{dx}{x-b} =$

$= -\pi[\operatorname{sign} b \cos ab \operatorname{si}(a|b|) - \sin ab \operatorname{ci}(a|b|)] \quad [a > 0].$ ИП II 253 (4)

2. $\int\limits_{-\infty}^\infty [\sin ax \operatorname{ci}(a|x|) - \operatorname{sign} x \cos ax \operatorname{si}(a|x|)] \frac{dx}{x-b} =$

$= -\pi[\sin(a|b|) \operatorname{si}(a|b|) + \cos ab \operatorname{ci}(a|b|)] \quad [a > 0].$ ИП II 253 (5)

6.256 $\int\limits_0^\infty [\operatorname{si}^2(x) + \operatorname{ci}^2(x)] \cos ax\, dx = \frac{\pi}{a} \ln(1 + a) \quad [a > 0].$ ИП I 42 (18)

6.257 $\int\limits_0^\infty \operatorname{si}\left(\frac{a}{x}\right) \sin bx\, dx = -\frac{\pi}{2b} J_0\left(2\sqrt{ab}\right) \quad [b > 0].$ ИП I 96 (9)

6.258

1. $$\int_0^\infty \left[\operatorname{si}(ax)+\frac{\pi}{2}\right]\sin bx\frac{dx}{x^2+c^2}=$$

$$=\frac{\pi}{4c}\{e^{-bc}[\operatorname{Ei}(bc)-\operatorname{Ei}(-ac)]+e^{bc}[\operatorname{Ei}(-ac)-\operatorname{Ei}(-bc)]\}\quad [0<b\leqslant a,\ c>0];$$

$$=\frac{\pi}{4c}e^{-bc}[\operatorname{Ei}(ac)-\operatorname{Ei}(-ac)]\quad [0<a\leqslant b,\ c>0].$$ БХ [460] (1)

2. $$\int_0^\infty \left[\operatorname{si}(ax)+\frac{\pi}{2}\right]\cos bx\frac{x\,dx}{x^2+c^2}=$$

$$=-\frac{\pi}{4}\{e^{-bc}[\operatorname{Ei}(bc)-\operatorname{Ei}(-ac)]+e^{bc}[\operatorname{Ei}(-bc)-\operatorname{Ei}(-ac)]\}$$
$$[0<b\leqslant a,\ c>0];$$

$$=\frac{\pi}{4}e^{-bc}[\operatorname{Ei}(-ac)-\operatorname{Ei}(ac)]\quad [0<a\leqslant b,\ c>0].$$ БХ [460] (2 и 5)

6.259

1. $$\int_0^\infty \operatorname{si}(ax)\sin bx\frac{dx}{x^2+c^2}=\frac{\pi}{2c}\operatorname{Ei}(-ac)\operatorname{sh}(bc)\quad [0<b\leqslant a,\ c>0];$$

$$=\frac{\pi}{4c}e^{-cb}[\operatorname{Ei}(-bc)+\operatorname{Ei}(bc)-\operatorname{Ei}(-ac)-$$
$$-\operatorname{Ei}(ac)]+\frac{\pi}{2c}\operatorname{Ei}(-bc)\operatorname{sh}(bc)\quad [0<a\leqslant b,\ c>0].$$ ИПI 96 (8)

2. $$\int_0^\infty \operatorname{ci}(ax)\sin bx\frac{x\,dx}{x^2+c^2}=-\frac{\pi}{2}\operatorname{sh}(bc)\operatorname{Ei}(-ac)\quad [0<b\leqslant a,\ c>0];$$

$$=-\frac{\pi}{2}\operatorname{sh}(bc)\operatorname{Ei}(-bc)+\frac{\pi}{4}e^{-bc}[\operatorname{Ei}(-bc)+\operatorname{Ei}(bc)-$$
$$-\operatorname{Ei}(-ac)-\operatorname{Ei}(ac)]\quad [0<a\leqslant b,\ c>0].$$ БХ [460] (3) *и*, ИПI 97 (15) *и*

3. $$\int_0^\infty \operatorname{ci}(ax)\cos bx\frac{dx}{x^2+c^2}=\frac{\pi}{2c}\operatorname{ch}bc\operatorname{Ei}(-ac)\quad [0<b\leqslant a,\ c>0];$$

$$=\frac{\pi}{4c}\{e^{-bc}[\operatorname{Ei}(ac)+\operatorname{Ei}(-ac)-\operatorname{Ei}(bc)]+e^{bc}\operatorname{Ei}(-bc)\}$$
$$[0<a\leqslant b,\ c>0].$$ БХ [460] (4), ИПI 41 (15)

6.261

1. $$\int_0^\infty \operatorname{si}(bx)\cos ax\,e^{-px}\,dx=-\frac{1}{2(a^2+p^2)}\left[\frac{a}{2}\ln\frac{p^2+(a+b)^2}{p^2+(a-b)^2}+\right.$$
$$\left.+p\operatorname{arctg}\frac{2bp}{b^2-a^2-p^2}\right]\quad [a>0,\ b>0,\ p>0].$$ ИПI 40 (8)

2. $$\int_0^\infty \operatorname{si}(\beta x)\cos ax\,e^{-\mu x}\,dx=-\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{\mu+ai}{\beta}}{2(\mu+ai)}-\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{\mu-ai}{\beta}}{2(\mu-ai)}$$
$$[a>0,\ \operatorname{Re}\mu>|\operatorname{Im}\beta|].$$ ИПI 40 (9)

6.262

1. $$\int_0^\infty \operatorname{ci}(bx)\sin ax\, e^{-\mu x}\,dx = \frac{1}{2(a^2+\mu^2)} \times$$
$$\times \left\{\mu \operatorname{arctg}\frac{2a\mu}{\mu^2+b^2-a^2} - \frac{a}{2}\ln\frac{(\mu^2+b^2-a^2)^2+4a^2\mu^2}{b^4}\right\}$$
$[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\mu>0]$. ИП198 (16) u

2. $$\int_0^\infty \operatorname{ci}(bx)\cos ax\, e^{-px}\,dx = \frac{-1}{2(a^2+p^2)} \times$$
$$\times \left\{\frac{p}{2}\ln\frac{[(b^2+p^2-a^2)^2+4a^2p^2]}{b^4} + a\operatorname{arctg}\frac{2ap}{b^2+p^2-a^2}\right\}$$
$[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}p>0]$. ИП141 (16)

3. $$\int_0^\infty \operatorname{ci}(\beta x)\cos ax e^{-\mu x}\,dx = \frac{-\ln\left[1+\frac{(\mu+ai)^2}{\beta^2}\right]}{4(\mu+ai)} - \frac{\ln\left[1+\frac{(\mu-ai)^2}{\beta^2}\right]}{4(\mu-ai)}$$
$[a>0,\ \operatorname{Re}\mu>|\operatorname{Im}\beta|]$. ИП I 41 (17)

6.263

1. $$\int_0^\infty [\operatorname{ci}(x)\cos x + \operatorname{si}(x)\sin x]\, e^{-\mu x}\,dx = \frac{-\frac{\pi}{2}-\mu\ln\mu}{1+\mu^2}$$
$[\operatorname{Re}\mu>0]$. МХ 26 u, ИП I 178 (21) u

2. $$\int_0^\infty [\operatorname{si}(x)\cos x - \operatorname{ci}(x)\sin x]\, e^{-\mu x}\,dx = \frac{-\frac{\pi}{2}\mu+\ln\mu}{1+\mu^2}$$
$[\operatorname{Re}\mu>0]$. МХ 26 u, ИП I 178 (20) u

3. $$\int_0^\infty [\sin x - x\operatorname{ci}(x)]\, e^{-\mu x}\,dx = \frac{\ln(1+\mu^2)}{2\mu^2} \quad [\operatorname{Re}\mu>0].$$ МХ 26

6.264

1. $$\int_0^\infty \operatorname{si}(x)\ln x\,dx = C+1.$$ НИ 56 (10)

2. $$\int_0^\infty \operatorname{ci}(x)\ln x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$ НИ 56 (11)

6.27 Интегральный гиперболический синус и косинус

6.271

1. $$\int_0^\infty \operatorname{shi}(x)\, e^{-\mu x}\,dx = \frac{1}{2\mu}\ln\frac{\mu+1}{\mu-1} = \frac{1}{\mu}\operatorname{Arcth}\mu \quad [\operatorname{Re}\mu>1].$$ МХд 34

2. $$\int_0^\infty \operatorname{chi}(x)\, e^{-\mu x}\,dx = -\frac{1}{2\mu}\ln(\mu^2-1) \quad [\operatorname{Re}\mu>1].$$ МХд 34

6.272 $\int\limits_0^\infty \operatorname{chi}(x)\, e^{-px^2}\, dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, \operatorname{Ei}\left(\frac{1}{4p}\right) \quad [p > 0].$ МХд 35

6.273

1. $\int\limits_0^\infty [\operatorname{ch} x \operatorname{shi}(x) - \operatorname{sh} x \operatorname{chi}(x)]\, e^{-\mu x}\, dx = \frac{\ln \mu}{\mu^2 - 1} \quad [\operatorname{Re}\mu > 0].$ МХд 35

2. $\int\limits_0^\infty [\operatorname{ch} x \operatorname{chi}(x) + \operatorname{sh} x \operatorname{shi}(x)]\, e^{-\mu x}\, dx = \frac{\mu \ln \mu}{1 - \mu^2} \quad [\operatorname{Re}\mu > 2].$ МХд 35

6.274 $\int\limits_0^\infty [\operatorname{ch} x \operatorname{shi}(x) - \operatorname{sh} x \operatorname{chi}(x)]\, e^{-\mu x^2}\, dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\, e^{\frac{1}{4\mu}}\, \operatorname{Ei}\left(-\frac{1}{4\mu}\right)$

$[\operatorname{Re}\mu > 0].$ МХд 35

6.275 $\int\limits_0^\infty [x \operatorname{chi}(x) - \operatorname{sh} x]\, e^{-\mu x}\, dx = -\frac{\ln(\mu^2 - 1)}{2\mu^2} \quad [\operatorname{Re}\mu > 1].$ МХд 35

6.276 $\int\limits_0^\infty [\operatorname{ch} x \operatorname{chi}(x) + \operatorname{sh} x \operatorname{shi}(x)]\, e^{-\mu x^2}\, x\, dx =$

$= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\mu^3}}\, \exp\left(\frac{1}{4\mu}\right) \operatorname{Ei}\left(-\frac{1}{4\mu}\right) \quad [\operatorname{Re}\mu > 0].$ МХд 35

6.277

1. $\int\limits_0^\infty [\operatorname{chi}(x) + \operatorname{ci}(x)]\, e^{-\mu x}\, dx = -\frac{\ln(\mu^4 - 1)}{2\mu} \quad [\operatorname{Re}\mu > 1].$ МХд 34

2. $\int\limits_0^\infty [\operatorname{chi}(x) - \operatorname{ci}(x)]\, e^{-\mu x}\, dx = \frac{1}{2\mu} \ln \frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1} \quad [\operatorname{Re}\mu > 1].$ МХд 35

6.28—6.31 Интеграл вероятности

6.281 $\int\limits_0^\infty [1 - \Phi(px)]\, x^{2q-1}\, dx = \frac{\Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\, q p^{2q}} \quad [\operatorname{Re} q > 0, \ \operatorname{Re} p > 0].$

НИ 56 (12), ИПШ 306 (1) *и*

6.282

1. $\int\limits_0^\infty \Phi(qt)\, e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}\left[1 - \Phi\left(\frac{p}{2q}\right)\right] \exp\left(\frac{p^2}{4q^2}\right).$

МО 175, ВТФII 148 (11)

2. $\int\limits_0^\infty \left[\Phi\left(x + \frac{1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right] e^{-\mu x + \frac{1}{4}}\, dx =$

$= \frac{1}{(\mu+1)(\mu+2)} \exp\frac{(\mu+1)^2}{4}\left[1 - \Phi\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\right].$ МХ 27

6.283

1. $$\int_0^\infty e^{\beta x}\left[1-\Phi\left(\sqrt{\alpha x}\right)\right]dx=\frac{1}{\beta}\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha-\beta}}-1\right]$$

$[\operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta<\operatorname{Re}\alpha]$. ИП II 307 (5)

2. $$\int_0^\infty \Phi\left(\sqrt{qt}\right)e^{-pt}\,dt=\frac{\sqrt{q}}{p}\frac{1}{\sqrt{p+q}}$$

$[\operatorname{Re}p>0,\ \operatorname{Re}(q+p)>0]$. ВТФ II 148 (12)

6.284 $$\int_0^\infty\left[1-\Phi\left(\frac{q}{2\sqrt{x}}\right)\right]e^{-px}\,dx=\frac{1}{p}e^{-q\sqrt{p}}$$

$\left[\operatorname{Re}p>0,\ |\arg q|<\frac{\pi}{4}\right]$. ЭД 147 (235), ВТФ II 148 (13)

6.285

1 $$\int_0^\infty[1-\Phi(x)]e^{-\mu^2x^2}\,dx=\frac{\operatorname{arctg}\mu}{\sqrt{\pi}\,\mu}\qquad[\operatorname{Re}\mu>0].$$ МХд 37

2 $$\int_0^\infty \Phi(iat)\,e^{-a^2t^2-st}\,dt=\frac{-1}{2ai\sqrt{\pi}}\exp\left(\frac{s^2}{4a^2}\right)\operatorname{Ei}\left(-\frac{s^2}{4a^2}\right)$$

$\left[\operatorname{Re}s>0,\ |\arg a|<\frac{\pi}{4}\right]$. ВТФ II 148 (14) и

6.286

1 $$\int_0^\infty[1-\Phi(\beta x)]\,e^{\mu^2x^2}x^{\nu-1}\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\nu\beta^\nu}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{\nu}{2},\ \frac{\nu+1}{2};\ \frac{\nu}{2}+1;\ \frac{\mu^2}{\beta^2}\right)\quad[\operatorname{Re}\beta^2>\operatorname{Re}\mu^2,\ \operatorname{Re}\nu>0].$$ ИП II 306 (2)

2 $$\int_0^\infty\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right)\right]e^{\frac{x^2}{2}}x^{\nu-1}\,dx=2^{\frac{\nu}{2}-1}\sec\frac{\nu\pi}{2}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)$$

$[0<\operatorname{Re}\nu<1]$. ИП I 325 (9)

6.287

1. $$\int_0^\infty\Phi(\beta x)\,e^{-\mu x^2}x\,dx=\frac{\beta}{2\mu\sqrt{\mu+\beta^2}}\qquad[\operatorname{Re}\mu>-\operatorname{Re}\beta^2,\ \operatorname{Re}\mu>0].$$

МХ 27и, ИП I 176 (4)

2. $$\int_0^\infty[1-\Phi(\beta x)]\,e^{-\mu x^2}x\,dx=\frac{1}{2\mu}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\mu+\beta^2}}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu>-\operatorname{Re}\beta^2,\ \operatorname{Re}\mu>0]$. НИ 49 (14), ИП I 177 (9)

6.288 $$\int_0^\infty\Phi(iax)\,e^{-\mu x^2}x\,dx=\frac{ai}{2\mu\sqrt{\mu-a^2}}\qquad[a>0,\ \operatorname{Re}\mu>\operatorname{Re}a^2].$$ МХд 37 и

6.289

1. $$\int_0^\infty \Phi(\beta x)\, e^{(\beta^2-\mu^2)x^2} x\, dx = \frac{\beta}{2\mu(\mu^2-\beta^2)} \quad \left[\operatorname{Re}\mu^2 > \operatorname{Re}\beta^2,\ |\arg\mu| < \frac{\pi}{4}\right].$$

ИПІ 176 (5)

2. $$\int_0^\infty [1-\Phi(\beta x)]\, e^{(\beta^2-\mu^2)x^2} x\, dx = \frac{1}{2\mu(\mu+\beta)}$$

$$\left[\operatorname{Re}\mu^2 > \operatorname{Re}\beta^2,\ |\arg\mu| < \frac{\pi}{4}\right].$$ ИПІ 177 (10)

3. $$\int_0^\infty \Phi\left(\sqrt{b-a}\, x\right) e^{-(a+\mu)x^2} x\, dx = \frac{\sqrt{b-a}}{2(\mu+a)\sqrt{\mu+b}}$$

$$[\operatorname{Re}\mu > -a > 0,\ b > a].$$ МХ 27

6.291 $$\int_0^\infty \Phi(ix)\, e^{-(\mu x + x^2)} x\, dx = \frac{i}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{\mu} + \frac{\mu}{4}\operatorname{Ei}\left(-\frac{\mu^2}{4}\right)\right]$$

$$[\operatorname{Re}\mu > 0].$$ МХд 37

6.292 $$\int_0^\infty [1-\Phi(x)]\, e^{-\mu^2x^2} x^2\, dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\operatorname{arctg}\mu}{\mu^3} - \frac{1}{\mu^2(\mu^2+1)}\right\}$$

$$\left[|\arg\mu| < \frac{\pi}{4}\right].$$ МХд 37

6.293 $$\int_0^\infty \Phi(x)\, e^{-\mu x^2}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\mu+1}+1}{\sqrt{\mu+1}-1} = \operatorname{Arcth}\sqrt{\mu+1}$$

$$[\operatorname{Re}\mu > 0].$$ МХд 37 *u*

6.294

1. $$\int_0^\infty \left[1-\Phi\left(\frac{\beta}{x}\right)\right] e^{-\mu^2x^2} x\, dx = \frac{1}{2\mu^2}\exp(-2\beta\mu)$$

$$\left[|\arg\beta| < \frac{\pi}{4},\ |\arg\mu| < \frac{\pi}{4}\right].$$ ИПІ 177 (11)

2. $$\int_0^\infty \left[1-\Phi\left(\frac{1}{x}\right)\right] e^{-\mu^2x^2}\frac{dx}{x} = -\operatorname{Ei}(-2\mu) \quad \left[|\arg\mu| < \frac{\pi}{4}\right].$$ МХд 37

6.295

1. $$\int_0^\infty \left[1-\Phi\left(\frac{1}{x}\right)\right]\exp\left(-\mu^2x^2+\frac{1}{x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}}[\sin 2\mu \operatorname{ci}(2\mu) - \cos 2\mu \operatorname{si}(2\mu)] \quad \left[|\arg\mu| < \frac{\pi}{4}\right].$$ МХд 37

2. $$\int_0^\infty \left[1-\Phi\left(\frac{1}{x}\right)\right]\exp\left(-\mu^2x^2+\frac{1}{x^2}\right) x\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2\mu}[\mathbf{H}_1(2\mu) - N_1(2\mu)] - \frac{1}{\mu^2} \quad \left[|\arg\mu| < \frac{\pi}{4}\right].$$ МХд 37

3. $\int_0^\infty \left[1-\Phi\left(\frac{1}{x}\right)\right]\exp\left(-\mu^2x^2+\frac{1}{x^2}\right)\frac{dx}{x}=$

$=\frac{\pi}{2}\left[\mathbf{H}_0(2\mu)-N_0(2\mu)\right]\qquad\left[|\arg\mu|<\frac{\pi}{4}\right].$ МХд 37

6.296 $\int_0^\infty \left\{(x^2+a^2)\left[1-\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2}\,x}\right)\right]-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,ax\cdot e^{-\frac{a^2}{2x^2}}\right\}e^{-\mu^2x^2}x\,dx=$

$=\frac{1}{2\mu^4}e^{-a\mu\sqrt{2}}\qquad\left[|\arg\mu|<\frac{\pi}{4},\ a>0\right].$ МХд 38 и

6.297

1. $\int_0^\infty \left[1-\Phi\left(\gamma x+\frac{\beta}{x}\right)\right]e^{(\gamma^2-\mu)x^2}x\,dx=$

$=\frac{1}{2\sqrt{\mu}(\sqrt{\mu}+\gamma)}\exp\left[-2(\beta\gamma+\beta\sqrt{\mu})\right]$

$[\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\mu>0].$ ИПІ 177 (12) и

2. $\int_0^\infty \left[1-\Phi\left(\frac{b+2ax^2}{2x}\right)\right]\exp\left[-(\mu^2-a^2)x^2+ab\right]x\,dx=$

$=\frac{e^{-b\mu}}{2\mu(\mu+a)}\qquad[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\mu>0].$ МХд 38

3. $\int_0^\infty \left\{\left[1-\Phi\left(\frac{b-2ax^2}{2x}\right)\right]e^{-ab}+\left[1-\Phi\left(\frac{b+2ax^2}{2x}\right)\right]e^{ab}\right\}e^{-\mu x^2}x\,dx=$

$=\frac{1}{\mu}\exp\left(-b\sqrt{a^2+\mu}\right)\qquad[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\mu>0].$ МХд 38

6.298 $\int_0^\infty \left\{2\operatorname{ch}ab-e^{-ab}\Phi\left(\frac{b-2ax^2}{2x}\right)-e^{ab}\Phi\left(\frac{b+2ax^2}{2x}\right)\right\}e^{-(\mu-a^2)x^2}x\,dx=$

$=\frac{1}{\mu-a^2}\exp\left(-b\sqrt{\mu}\right)$

$[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\mu>0].$ МХд 38

6.299 $\int_0^\infty \operatorname{ch}(2\nu t)\exp\left[(a\operatorname{ch}t)^2\right]\left[1-\Phi(a\operatorname{ch}t)\right]dt=$

$=\frac{1}{2\cos(\nu\pi)}\exp\left(\frac{1}{2}a^2\right)K_\nu(a^2)$

$\left[\operatorname{Re}a>0,\ -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right].$ ИПІІ 308 (10)

6.311 $\int_0^\infty \left[1-\Phi(ax)\right]\sin bx\,dx=\frac{1}{b}\left(1-e^{-\frac{b^2}{4a^2}}\right)$

$[a>0,\ b>0].$ ИПІ 96 (4)

6.312 $\int_0^\infty \Phi(ax)\sin bx^2\,dx=\frac{1}{4\sqrt{2\pi b}}\left(\ln\frac{b+a^2+a\sqrt{2b}}{b+a^2-a\sqrt{2b}}+2\operatorname{arctg}\frac{a\sqrt{2b}}{b-a^2}\right)$

$[a>0,\ b>0].$ ИПІ 96 (3)

6.313

1. $$\int_0^\infty \sin(\beta x)\left[1-\Phi\left(\sqrt{\alpha x}\right)\right]dx = \frac{1}{\beta} - \left(\frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2+\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}-\alpha\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$[\operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Im}\beta|]$. ИПII 307 (6)

2. $$\int_0^\infty \cos(\beta x)\left[1-\Phi\left(\sqrt{\alpha x}\right)\right]dx = \left(\frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2+\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}+\alpha\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$[\operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Im}\beta|]$. ИПII 307 (7)

6.314

1. $$\int_0^\infty \sin(bx)\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)\right]dx = b^{-1}\exp\left[-(2ab)^{\frac{1}{2}}\right]\cos\left[(2ab)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0]$. ИПII 307 (8)

2 $$\int_0^\infty \cos(bx)\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)\right]dx = -b^{-1}\exp\left[-(2ab)^{\frac{1}{2}}\right]\sin\left[(2ab)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0]$. ИПII 307 (9)

6.315

1. $$\int_0^\infty x^{\nu-1}\sin(\beta x)\left[1-\Phi(\alpha x)\right]dx = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\nu\right)\beta}{\sqrt{\pi}(\nu+1)\alpha^{\nu+1}}\,{}_2F_2\left(\frac{\nu+1}{2},\ \frac{\nu}{2}+1;\ \frac{3}{2},\ \frac{\nu+3}{2};\ -\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)$$
$[\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1]$. ИПII 307 (3)

2. $$\int_0^\infty x^{\nu-1}\cos(\beta x)\left[1-\Phi(\alpha x)\right]dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu\right)}{\sqrt{\pi}\,\nu\alpha^{\nu}}\,{}_2F_2\left(\frac{\nu}{2},\ \frac{\nu+1}{2};\ \frac{1}{2},\ \frac{\nu}{2}+1;\ -\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)$$
$[\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИПII 307 (4)

3 $$\int_0^\infty \left[1-\Phi(ax)\right]\cos bx\cdot x\,dx = \frac{1}{2a^2}\exp\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{1}{b^2}\left[1-\exp\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$
$[a > 0,\ b > 0]$. ИПI 40 (5)

4. $$\int_0^\infty [\Phi(ax) - \Phi(bx)] \cos px \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Ei}\left(-\frac{p^2}{4b^2}\right) - \operatorname{Ei}\left(\frac{p^2}{4a^2}\right)\right]$$

$[a > 0,\ b > 0,\ p > 0]$. ИП I 40 (6)

5. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \Phi\left(a\sqrt{x}\right) \sin bx\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi b}}\left\{\ln\left[\frac{b + a\sqrt{2b} + a^2}{b - a\sqrt{2b} + a^2}\right] + 2\operatorname{arctg}\left[\frac{a\sqrt{2b}}{b - a^2}\right]\right\}.$$

$[a > 0,\ b > 0]$. ИП I 96 (3)

6.316 $$\int_0^\infty e^{\frac{1}{2}x^2}\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] \sin bx\, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{\frac{b^2}{2}}\left[1 - \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)\right] \qquad [b > 0].$$ ИП I 96 (5)

6.317 $$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\Phi(iax) \sin bx\, dx = \frac{\pi i}{4a} e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \qquad [b > 0].$$ ИП I 96 (2)

6.318 $$\int_0^\infty [1 - \Phi(x)] \operatorname{si}(2px)\, dx = \frac{2}{\pi p}\left(1 - e^{-p^2}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}(1 - \Phi(p))$$

$[p > 0]$. НИ 61 (13) *u*

6.32 Интегралы Френеля

6.321

1. $$\int_0^\infty \left[\frac{1}{2} - S(px)\right] x^{2q-1}\, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{2q+1}{4}\pi}{4\sqrt{\pi}\, q p^{2q}} \qquad \left[0 < \operatorname{Re} q < \frac{3}{2},\ p > 0\right].$$ НИ 56 (14) *u*

2. $$\int_0^\infty \left[\frac{1}{2} - C(px)\right] x^{2q-1}\, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right) \cos \frac{2q+1}{4}\pi}{4\sqrt{\pi}\, q p^{2q}} \qquad \left[0 < \operatorname{Re} q < \frac{3}{2},\ p > 0\right].$$ НИ 56 (13) *u*

6.322

1. $$\int_0^\infty S(t)\, e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}\left\{\cos\frac{p^2}{4}\left[\frac{1}{2} - C\left(\frac{p}{2}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \sin\frac{p^2}{4}\left[\frac{1}{2} - S\left(\frac{p}{2}\right)\right]\right\}.$$ МО 173 *u*

2. $$\int_0^\infty C(t)\, e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}\left\{\cos\frac{p^2}{4}\left[\frac{1}{2} - S\left(\frac{p}{2}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \sin\frac{p^2}{4}\left[\frac{1}{2} - C\left(\frac{p}{2}\right)\right]\right\}.$$ МО 172 *и*

6.323

1. $$\int_0^\infty S(\sqrt{t})\, e^{-pt}\, dt = \frac{(\sqrt{p^2+1} - p)^{\frac{1}{2}}}{2p\sqrt{p^2+1}}.$$ ЭД 122 (58) *и*

2. $$\int_0^\infty C(\sqrt{t})\, e^{-pt}\, dt = \frac{(\sqrt{p^2+1} + p)^{\frac{1}{2}}}{2p\sqrt{p^2+1}}.$$ ЭД 122 (58) *и*

6.324

1. $$\int_0^\infty \left[\frac{1}{2} - S(x)\right] \sin 2px\, dx = -\frac{2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}}{\pi}\,\frac{\sin\frac{p^2}{2}}{p}$$
$[p > 0]$. НИ 61 (12) *и*

2. $$\int_0^\infty \left[\frac{1}{2} - C(x)\right] \sin 2px\, dx = -\frac{2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}}{\pi}\,\frac{\sin\frac{p^2}{2}}{p}$$
$[p > 0]$. НИ 61 (11) *и*

6.325

1. $$\int_0^\infty S(x)\sin b^2x^2\, dx = \frac{1}{b}\sqrt{\pi}\, 2^{-\frac{5}{2}} \qquad [0 < b^2 < 1];$$
$$= 0 \qquad [b^2 > 1].$$
ИПІ 98 (21) *и*

2. $$\int_0^\infty C(x)\cos b^2x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{b}\, 2^{-\frac{5}{2}} \qquad [0 < b^2 < 1];$$
$$= 0 \qquad [b^2 > 1].$$ ИПІ 42 (22)

6.326

1. $$\int_0^\infty \left[\frac{1}{2} - S(x)\right] \mathrm{si}(2px)\, dx = \frac{\sqrt{8}\cos\frac{\pi}{8}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{2} - S(p\sqrt{2})\right]$$
$[p > 0]$. НИ 61 (15) *и*

2. $$\int_0^\infty \left[\frac{1}{2} - C(x)\right] \mathrm{si}(2px)\, dx = \frac{\sqrt{8}\sin\frac{\pi}{8}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{2} - S(p\sqrt{2})\right]$$
$[p > 0]$. НИ 61 (14) *и*

6.4 ГАММА-ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ЕЙ ФУНКЦИИ

6.41 Гамма-функция

6.411 $$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta-x)\,dx = -i\pi 2^{1-\alpha-\beta}\Gamma(\alpha+\beta)$$

$[\operatorname{Re}(\alpha+\beta)<1,\ \operatorname{Im}\alpha,\ \operatorname{Im}\beta>0]$; ИП II 297 (3)

$$= i\pi 2^{1-\alpha-\beta}\Gamma(\alpha+\beta)$$

$[\operatorname{Re}(\alpha+\beta)<1,\ \operatorname{Im}\alpha,\ \operatorname{Im}\beta<0]$; ИП II 297 (2)

$$=0$$

$[\operatorname{Re}(\alpha+\beta)<1,\ \operatorname{Im}\alpha\cdot\operatorname{Im}\beta<0]$. ИП II 297 (1)

6.412 $$\int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)\,ds = 2\pi i\,\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}$$

$[\operatorname{Re}\alpha,\ \operatorname{Re}\beta,\ \operatorname{Re}\gamma,\ \operatorname{Re}\delta>0]$. ИП II 302 (32)

6.413

1. $$\int_0^{\infty} |\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)|^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma(b)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)\Gamma(a+b)}{2\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right)}$$

$[a>0,\ b>0]$. ИП II 302 (27)

2. $$\int_0^{\infty} \left|\frac{\Gamma(a+ix)}{\Gamma(b+ix)}\right|^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b-a-\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(b)\Gamma\left(b-\frac{1}{2}\right)\Gamma(b-a)}$$

$\left[0<a<b-\frac{1}{2}\right]$. ИП II 302 (28)

6.414

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)}\,dx = 0$$ $[\operatorname{Im}\alpha\neq 0,\ \operatorname{Re}(\alpha-\beta)<-1]$. ИП II 297 (4)

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta-x)} = \frac{2^{\alpha+\beta-2}}{\Gamma(\alpha+\beta-1)}$$ $[\operatorname{Re}(\alpha+\beta)>1]$. ИП II 297 (5)

3. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+x)\Gamma(\delta+x)}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta+x)}\,dx = 0$$

$[\operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma-\delta)>1,\ \operatorname{Im}\gamma,\ \operatorname{Im}\delta>0]$. ИП II 299 (18)

4. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+x)\,\Gamma(\delta+x)}{\Gamma(\alpha+x)\,\Gamma(\beta+x)}\,dx =$$
$$= \frac{\pm 2\pi^2 i\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\delta-1)}{\sin[\pi(\gamma-\delta)]\,\Gamma(\alpha-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\delta)\,\Gamma(\beta-\gamma)\,\Gamma(\beta-\delta)}$$

[$\operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma-\delta) > 1$, $\operatorname{Im}\gamma$, $\operatorname{Im}\delta < 0$. В числителе выбирается знак $+$, если $\operatorname{Im}\gamma > \operatorname{Im}\delta$, и знак $-$, если $\operatorname{Im}\gamma < \operatorname{Im}\delta$.] ИП II 300(19)

5. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha-\beta-\gamma+x+1)\,dx}{\Gamma(\alpha+x)\,\Gamma(\beta-x)\,\Gamma(\gamma+x)} =$$
$$= \frac{\pi \exp\left[\pm\frac{1}{2}\pi(\delta-\gamma)\,i\right]}{\Gamma(\beta+\gamma-1)\,\Gamma\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(\gamma-\delta+1)\right]}$$

[$\operatorname{Re}(\beta+\gamma) > 1$, $\delta = \alpha-\beta-\gamma+1$, $\operatorname{Im}\delta \neq 0$. Знак $+$ в показателе при $\operatorname{Im}\delta > 0$, знак $-$ при $\operatorname{Im}\delta < 0$.] ИП II 300(20)

6. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\Gamma(\alpha+x)\,\Gamma(\beta-x)\,\Gamma(\gamma+x)\,\Gamma(\delta-x)} =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta-3)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)\,\Gamma(\beta+\gamma-1)\,\Gamma(\gamma+\delta-1)\,\Gamma(\delta+\alpha-1)}$$

[$\operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) > 3$]. ИП II 300(21)

6.415

1. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{R(x)\,dx}{\Gamma(\alpha+x)\,\Gamma(\beta-x)\,\Gamma(\gamma+x)\,\Gamma(\delta-x)} =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta-3)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)\,\Gamma(\beta+\gamma-1)\,\Gamma(\gamma+\delta-1)\,\Gamma(\delta+\alpha-1)} \int\limits_0^1 R(t)\,dt$$

[$\operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) > 3$, $R(x+1) = R(x)$]. ИП II 301(24)

2 $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{R(x)\,dx}{\Gamma(\alpha+x)\,\Gamma(\beta-x)\,\Gamma(\gamma+x)\,\Gamma(\delta-x)} =$$
$$= \frac{\int\limits_0^1 R(t)\cos\left[\frac{1}{2}\pi(2t+\alpha-\beta)\right]dt}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma(\alpha+\delta-1)}$$

[$\alpha+\delta = \beta+\gamma$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) > 2$, $R(x+1) = -R(x)$].

ИП II 301(25)

6.42 Гамма-функция, показательная и степенная функции

6.421

1. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha+x)\,\Gamma(\beta-x)\exp[2(\pi n+\theta)\,xi]\,dx =$$
$$= 2\pi i\,\Gamma(\alpha+\beta)(2\cos\theta)^{-\alpha-\beta}\exp[(\beta-\alpha)\,i\theta] \times$$

$$\times [\eta_n(\beta)\exp(2n\pi\beta i)-\eta_n(-\alpha)\exp(-2n\pi\alpha i)]$$

$\left[\operatorname{Re}(\alpha+\beta)<1;\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2};\ n\text{ — целое; } \eta_n(\zeta)=0,\right.$

если $\left(\frac{1}{2}-n\right)\operatorname{Im}\zeta>0,\ \eta_n(\zeta)=\operatorname{sign}\left(\frac{1}{2}-n\right)$,

если $\left.\left(\frac{1}{2}-n\right)\operatorname{Im}\zeta<0\right]$. ИПII 298 (7)

2. $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pi icx}\,dx}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta-x)\Gamma(\gamma+kx)\Gamma(\delta-kx)}=0$$

$[\operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)>2,\ c,\ k$ — действительные;

$|c|>|k|+1]$. ИПII 301 (26)

3. $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)}\exp[(2\pi n+\pi-2\theta)xi]\,dx=$$

$$=2\pi i\operatorname{sign}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{(2\cos\theta)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}\exp[-(2\pi n+\pi-\theta)\alpha i+\theta i(\beta-1)]$$

$\left[\operatorname{Re}(\beta-\alpha)>0,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},\ n\text{ — целое, }\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Im}\alpha<0\right]$.

ИПII 298 (8)

4. $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)}\exp[(2\pi n+\pi-2\theta)xi]\,dx=0$$

$\left[\operatorname{Re}(\beta-\alpha)>0,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},\ n\text{ — целое, }\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Im}\alpha>0\right]$.

ИПII 297 (6)

6.422

1. $$\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma(s-k-\lambda)\,\Gamma\left(\lambda+\mu-s+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda-\mu-s+\frac{1}{2}\right)z^s\,ds=$$

$$=2\pi i\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)z^{\lambda}e^{\frac{z}{2}}\,W_{k,\mu}(z)$$

$$\left[\operatorname{Re}(k+\lambda)<0,\ \ \operatorname{Re}\lambda>|\operatorname{Re}\mu|-\frac{1}{2},\ |\arg z|<\frac{3\pi}{2}\right].$$

ИПII 302 (29)

2. $$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma(\alpha+s)\,\Gamma(-s)\,\Gamma(1-c-s)\,x^s\,ds=$$

$$=2\pi i\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha-c+1)\,\Psi(\alpha,\ c;\ x)$$

$$\left[-\operatorname{Re}\alpha<\gamma<\min(0,\ 1-\operatorname{Re}c),\ -\frac{3\pi}{2}<\arg x<\frac{3\pi}{2}\right].$$

ВТФ I 256 (5)

3. $$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma(-s)\,\Gamma(\beta+s)\,t^s\,ds=2\pi i\,\Gamma(\beta)\,(1+t)^{-\beta}$$

$[0>\gamma>\operatorname{Re}(1-\beta),\ |\arg t|<\pi]$. ВТФ I 256, Бу 75

4. $$\int\limits_{-\infty i}^{\infty i} \Gamma\left(\frac{t-p}{2}\right)\Gamma(-t)\left(\sqrt{2}\right)^{t-p-2} z^t\,dt = 2\pi i e^{\frac{1}{4}z^2}\Gamma(-p)\,D_p(z)$$

$\left[|\arg z| < \frac{3}{4}\pi;\ p\right.$ не есть целое положительное число$\left.\right]$. УВ II 161

5. $$\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(s)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4}-s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}-s\right)\left(\frac{z^2}{2}\right)^s ds = 2\pi i\cdot 2^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu} z^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{4}z^2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}\right)D_\nu(z)$$

$\left[|\arg z| < \frac{3}{4}\pi,\quad \nu \neq \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ \ldots\right]$. ВТФ II 120

6. $$\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{1}{2}x\right)^{-s}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}s\right)\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}s\right)\right]^{-1} ds = -4\pi i J_\nu(x)$$

$[x>0,\ -\operatorname{Re}\nu < c < 1]$. ВТФ II 21 (34)

7. $$\int\limits_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} \Gamma(-\nu-s)\,\Gamma(-s)\left(-\frac{1}{2}iz\right)^{\nu+2s} ds = -2\pi^2 e^{\frac{1}{2}i\nu\pi} H_\nu^{(1)}(z)$$

$\left[|\arg(-iz)| < \frac{\pi}{2},\ 0 < \operatorname{Re}\nu < c\right]$. ВТФ II 83 (34)

8. $$\int\limits_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} \Gamma(-\nu-s)\,\Gamma(-s)\left(\frac{1}{2}iz\right)^{\nu+2s} ds = 2\pi^2 e^{-\frac{1}{2}i\nu\pi} H_\nu^{(2)}(z)$$

$\left[|\arg(iz)| < \frac{\pi}{2},\ 0 < \operatorname{Re}\nu < c\right]$. ВТФ II 83 (35)

9. $$\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(-s)\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{\nu+2s}}{\Gamma(\nu+s+1)}\,ds = 2\pi i J_\nu(x) \qquad [x>0,\ \operatorname{Re}\nu>0].$$

ВТФ II 83 (36)

10. $$\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(-s)\,\Gamma(-2\nu-s)\,\Gamma\left(\nu+s+\frac{1}{2}\right)(-2iz)^s\,ds = -\pi^{\frac{5}{2}} e^{-i(z-\nu\pi)}\sec(\nu\pi)\,(2z)^{-\nu} H_\nu^{(1)}(z)$$

$\left[|\arg(-iz)| < \frac{3}{2}\pi,\quad 2\nu \neq \pm 1,\ \pm 3\ldots\right]$. ВТФ II 83 (37)

11. $$\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(-s)\,\Gamma(-2\nu-s)\,\Gamma\left(\nu+s+\frac{1}{2}\right)(2iz)^s\,ds = \pi^{\frac{5}{2}} e^{i(z-\nu\pi)}\sec(\nu\pi)\,(2z)^{-\nu} H_\nu^{(2)}(z)$$

$\left[|\arg(iz)| < \frac{3}{2}\pi,\ 2\nu \neq \pm 1,\ \pm 3\ldots\right]$. ВТФ II 84 (38)

12. $$\int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(s)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-s-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s+\nu\right)(2z)^s\,ds = 2^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{3}{2}} i z^{\frac{1}{2}} e^z \sec(\nu\pi)\,K_\nu(z)$$

$\left[|\arg z| < \frac{3\pi}{2},\ 2\nu \neq \pm 1,\ \pm 3, \ldots\right]$. ВТФ II 84 (39)

13. $$\int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{s\Gamma(1+s)}\,x^{2s}\,ds = 4\pi \int_{2x}^{\infty} \frac{J_0(t)}{t}\,dt \qquad [x>0].$$ МО 41

14. $$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(\alpha+s)\,\Gamma(\beta+s)\,\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)}(-z)^s\,ds = 2\pi i\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}\,F(\alpha, \beta; \gamma; z)$$

[$\arg(-z) < \pi$, путь интегрирования должен отделять полюсы подынтегральной функции в точках $s=0, 1, 2, 3, \ldots$ от полюсов $s=-\alpha-n$ и $s=-\beta-n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$]. ВТФ I 62 (15)

15. $$\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(\alpha+s)\,\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)}(-z)^s\,ds = \frac{2\pi i\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\,{}_1F_1(\alpha; \gamma; z)$$

$\left[-\frac{\pi}{2} < \arg(-z) < \frac{\pi}{2},\ 0 > \delta > -\operatorname{Re}\alpha,\ \gamma \neq 0, 1, 2, \ldots\right]$. ВТФ I 256 (4)

16. $$\int_{-i\infty}^{i\infty} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma(s)}\right]^2 z^s\,ds = 2\pi i z^{\frac{1}{2}}\left[2\pi^{-1}K_0\left(4z^{\frac{1}{4}}\right) - N_0\left(4z^{\frac{1}{4}}\right)\right] \qquad [z>0].$$

ИП II 303 (33)

17. $$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma\left(\lambda+\mu-s+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda-\mu-s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda-k-s+1)}\,z^s\,ds = 2\pi i z^\lambda e^{-\frac{z}{2}} W_{k,\mu}(z)$$

$\left[\operatorname{Re}\lambda > |\operatorname{Re}\mu| - \frac{1}{2},\quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}\right]$.

ИП II 302 (30)

18. $$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(k-\lambda+s)\,\Gamma\left(\lambda+\mu-s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu-\lambda+s+\frac{1}{2}\right)}\,z^s\,ds = 2\pi i\,\frac{\Gamma\left(k+\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\mu+1)}\,z^\lambda e^{-\frac{z}{2}} M_{k,\mu}(z)$$

$\left[\operatorname{Re}(k-\lambda) > 0,\ \operatorname{Re}(\lambda+\mu) > -\frac{1}{2},\ |\arg z| < \frac{\pi}{2}\right]$. ИП II 302 (31)

19. $$\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - s) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j + s) \prod\limits_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - s)} z^s\, ds = 2\pi i G_{pq}^{mn}\left(z \left| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right.\right)$$

$\left[p + q < 2(m + n);\ |\arg z| < \left(m + n - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} q\right)\pi;\right.$

$\left.\operatorname{Re} a_k < 1,\ k = 1, \ldots, n,\ \operatorname{Re} b_j > 0,\ j = 1, \ldots, m\right]$. ИП II 303 (34)

6.423

1. $$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{dx}{\Gamma(1 + x)} = \nu(e^{-\alpha}).$$ МХд 39, ВТФ III 222 (16)

2. $$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{dx}{\Gamma(x + \beta + 1)} = e^{\beta\alpha} \nu(e^{-c}, \beta).$$ МХд 39, ВТФ III 222 (16)

3 $$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{x^m}{\Gamma(x + 1)}\, dx = \mu(e^{-\alpha}, m)$$

$[\operatorname{Re} m > -1]$ МХд 39 ВТФ III 222 (17)

4. $$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{x^m}{\Gamma(x + n + 1)}\, dx = e^{n\alpha} \mu(e^{-\alpha}, m, n).$$ МХд 39, ВТФ III 222 (17)

6.424 $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{R(x) \exp[(2\pi n + \theta) x i]\, dx}{\Gamma(\alpha + x) \Gamma(\beta - x)} = \frac{\left[2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{\alpha+\beta-2}}{\Gamma(\alpha + \beta - 1)} \exp\left[\frac{1}{2}\theta(\beta - \alpha) i\right] \int\limits_0^1 R(t) \exp(2\pi n t i)\, dt$$

$[\operatorname{Re}(\alpha + \beta) > 1,\ -\pi < \theta < \pi,\ n$ — целое, $R(x + 1) = R(x)]$

ИП II 299 (16)

6.43 Гамма-функция и тригонометрические функции

6.431

1 $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin rx\, dx}{\Gamma(p + x) \Gamma(q - x)} = \frac{\left(2\cos\frac{r}{2}\right)^{p+q-2} \sin\frac{r(q - p)}{2}}{\Gamma(p + q - 1)} \quad [|r| < \pi];$$

$$= 0 \quad [|r| > \pi],$$

$[r$ — действительно, $\operatorname{Re}(p + q) > 1]$ МО 10 *и*, ИП II 298 (9, 10)

2. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos rx\, dx}{\Gamma(p + x) \Gamma(q - x)} = \frac{\left(2\cos\frac{r}{2}\right)^{p+q-2} \cos\frac{r(q - p)}{2}}{\Gamma(p + q - 1)} \quad [|r| < \pi];$$

$$= 0 \quad [|r| > \pi];$$

$[r$ — действительно; $\operatorname{Re}(p + q) > 1]$. МО 10 *и*, ИП II 299 (13, 14)

6.432 $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x)}{\sin(\pi x)} \frac{dx}{\Gamma(\alpha+x)\,\Gamma(\beta-x)} = 0 \qquad [m \text{ — целое, четное}];$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta-2}}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} \qquad [m \text{ — целое, нечетное}]$$

$[\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 1]$. ИП II 298 (11, 12)

6.433

1. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x\, dx}{\Gamma(\alpha+x)\,\Gamma(\beta-x)\,\Gamma(\gamma+x)\,\Gamma(\delta-x)} =$$

$$= \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(\beta-\alpha)\right]}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma(\alpha+\delta-1)}$$

$[\alpha+\delta=\beta+\gamma,\ \operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) > 2]$. ИП II 300 (22)

2 $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x\, dx}{\Gamma(\alpha+x)\,\Gamma(\beta-x)\,\Gamma(\gamma+x)\,\Gamma(\delta-x)} =$$

$$= \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(\beta-\alpha)\right]}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma(\alpha+\delta-1)}$$

$[\alpha+\delta=\beta+\gamma,\ \operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) > 2]$. ИП II 301 (23)

6.44 Логарифм гамма-функции *)

6.441

1. $$\int\limits_{p}^{p+1} \ln\Gamma(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln 2\pi + p\ln p - p.$$ Ф II 784

2. $$\int\limits_{0}^{1} \ln\Gamma(x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} \ln\Gamma(1-x)\,dx = \frac{1}{2}\ln 2\pi.$$ Ф II 783

3. $$\int\limits_{0}^{1} \ln\Gamma(x+q)\,dx = \frac{1}{2}\ln 2\pi + q\ln q - q \qquad [q \geqslant 0].$$

НГ 89 (17), ИП II 304 (40)

4. $$\int\limits_{0}^{z} \ln\Gamma(x+1)\,dx = \frac{z}{2}\ln 2\pi - \frac{z(z+1)}{2} + z\ln\Gamma(z+1) - \ln G(z+1),$$

где $$G(z+1) = (2\pi)^{\frac{z}{2}} \exp\left(-\frac{z(z+1)}{2} - \frac{Cz^2}{2}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left\{\left(1+\frac{z}{k}\right)^k \exp\left(-z+\frac{z^2}{2k}\right)\right.$$

УВ II 43

*) Здесь принятый порядок следования формул нарушен для лучшей обозримости интегралов, связанных с гамма-функцией

5. $$\int_0^n \ln\Gamma(a+x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}(a+k)\ln(a+k) - na + \frac{1}{2}n\ln(2\pi) - \frac{1}{2}n(n-1) \quad [a \geqslant 0;\ n = 1, 2, \ldots].$$ ИП II 304(41)

6.442. $$\int_0^1 \exp(2\pi nxi)\ln\Gamma(a+x)\,dx = (2\pi ni)^{-1}[\ln a - \exp(-2\pi nai)\operatorname{Ei}(2\pi nai)] \quad [a > 0;\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots].$$ ИП II 304(38)

6.443

1. $$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\sin 2\pi nx\,dx = \frac{1}{2\pi n}[\ln(2\pi n) + C].$$ НГ 203(5), ИП II 304(42)

2. $$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\sin(2n+1)\pi x\,dx = \frac{1}{(2n+1)\pi}\left[\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right) + \frac{1}{2n+1}\right].$$ ИП II 305(43)

3. $$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2\pi nx\,dx = \frac{1}{4n}.$$ НГ 203(6), ИП II 305(44)

4. $$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos(2n+1)\pi x\,dx = 0.$$ НГ 203(6)

5. $$\int_0^1 \sin(2\pi nx)\ln\Gamma(a+x)\,dx = -(2\pi n)^{-1}[\ln a + \cos(2\pi na)\operatorname{ci}(2\pi na) - \sin(2\pi na)\operatorname{si}(2\pi na)] \quad [a > 0;\ n = 1, 2, \ldots].$$ ИП II 304(36)

6. $$\int_0^1 \cos(2\pi nx)\ln\Gamma(a+x)\,dx = -(2\pi n)^{-1}[\sin(2\pi na)\operatorname{ci}(2\pi na) + \cos(2\pi na)\operatorname{si}(2\pi na)] \quad [a > 0;\ n = 1, 2, \ldots].$$ ИП II 304(37)

6.45 Неполная гамма-функция

6.451

1. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\gamma(\beta, x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\beta)(1+\alpha)^{-\beta} \quad [\beta > 0].$$ МХд 39

2. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\Gamma(\beta, x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\beta)\left[1 - \frac{1}{(\alpha+1)^\beta}\right] \quad [\beta > 0].$$ МХд 39

6.452

1. $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\gamma\left(\nu, \frac{x^2}{8a^2}\right)dx = \frac{1}{\mu}2^{-\nu-1}\Gamma(2\nu)\,e^{(a\mu)^2}D_{-2\nu}(2a\mu)$$

$$\left[|\arg a| < \frac{\pi}{4},\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\mu > 0\right].$$ ИП I 179 (36)

2. $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\gamma\left(\frac{1}{4}, \frac{x^2}{8a^2}\right)dx = \frac{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}e^{(a\mu)^2}K_{\frac{1}{4}}(a^2\mu^2)$$

$$\left[|\arg a| < \frac{\pi}{4},\ \operatorname{Re}\mu > 0\right].$$ ИП I 179 (35)

6.453 $$\int_0^\infty e^{-\mu x}\Gamma\left(\nu, \frac{a}{x}\right)dx = 2a^{\frac{1}{2}\nu}\mu^{\frac{1}{2}\nu-1}K_\nu\left(2\sqrt{\mu a}\right)$$

$$\left[|\arg a| < \frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}\mu > 0\right].$$ ИП I 179 (32)

6.454 $$\int_0^\infty e^{-\beta x}\gamma\left(\nu, \alpha x^{\frac{1}{2}}\right)dx = 2^{-\frac{1}{2}\nu}\alpha^\nu\beta^{-\frac{1}{2}\nu-1}\Gamma(\nu)\exp\left(\frac{\alpha^2}{8\beta}\right)D_{-\nu}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\beta}}\right)$$

$$\left[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0\right].$$ ИП II 309 (19), МХд 39 *и*

6.455

1. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-\beta x}\Gamma(\nu, \alpha x)\,dx = \frac{\alpha^\nu\Gamma(\mu+\nu)}{\mu(\alpha+\beta)^{\mu+\nu}}\,{}_2F_1\left(1, \mu+\nu; \mu+1; \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$$

$$[\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu) > 0].$$ ИП II 309 (16)

2. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-\beta x}\gamma(\nu, \alpha x)\,dx = \frac{\alpha^\nu\Gamma(\mu+\nu)}{\nu(\alpha+\beta)^{\mu+\nu}}\,{}_2F_1\left(1, \mu+\nu; \nu+1; \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$$

$$[\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu) > 0].$$ ИП II 308 (15)

6.456

1. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}(4x)^{\nu-\frac{1}{2}}\gamma\left(\nu, \frac{1}{4x}\right)dx = \sqrt{\pi}\,\frac{\gamma(2\nu, \sqrt{\alpha})}{\alpha^{\nu+\frac{1}{2}}}.$$ МХд 39 *и*

2. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}(4x)^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu, \frac{1}{4x}\right)dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu, \sqrt{\alpha})}{\alpha^{\nu+\frac{1}{2}}}.$$ МХд 39 *и*

6.457

1. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{(4x)^\nu}{\sqrt{x}}\gamma\left(\nu+1, \frac{1}{4x}\right)dx = \sqrt{\pi}\,\frac{\gamma(2\nu+1, \sqrt{\alpha})}{\alpha^{\nu+\frac{1}{2}}}.$$ МХд 39

2. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{(4x)^\nu}{\sqrt{x}}\Gamma\left(\nu+1, \frac{1}{4x}\right)dx = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(2\nu+1, \sqrt{\alpha})}{\alpha^{\nu+\frac{1}{2}}}.$$ МХд 39

6.458 $\int\limits_0^\infty x^{1-2\nu} \exp(\alpha x^2) \sin(bx)\, \Gamma(\nu, \alpha x^2)\, dx =$

$$= \pi^{\frac{1}{2}} 2^{-\nu} \alpha^{\nu-1} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \nu\right) \exp\left(\frac{b^2}{8\alpha}\right) D_{2\nu-2}\left[\frac{b}{(2\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$\left[|\arg \alpha| < \frac{3\pi}{2},\ 0 < \operatorname{Re}\nu < 1\right]$. ИП II 309 (18)

6.46—6.47 Функция $\psi(x)$

6.461 $\int\limits_1^x \psi(x)\, dx = \ln \Gamma(x)$.

6.462 $\int\limits_0^1 \psi(\alpha + x)\, dx = \ln \alpha \qquad [\alpha > 0]$. ИП II 305 (1)

6.463 $\int\limits_0^\infty x^{-\alpha} [C + \psi(1 + x)] = -\pi \operatorname{cosec}(\pi\alpha)\, \zeta(\alpha) \qquad [1 < \operatorname{Re}\alpha < 2]$.

ИП II 305 (6)

6.464 $\int\limits_0^1 e^{2\pi n x i} \psi(\alpha + x)\, dx = e^{-2\pi n \alpha i} \operatorname{Ei}(2\pi n \alpha i)$

$[\alpha > 0;\ n = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots]$. ИП II 305 (2)

6.465

1. $\int\limits_0^1 \psi(x) \sin \pi x\, dx = 0$. НГ 204

2. $\int\limits_0^1 \psi(x) \sin(2\pi n x)\, dx = -\frac{1}{2}\pi \qquad [n = 1,\ 2,\ \ldots]$. ИП II 305 (3)

6.466 $\int\limits_0^\infty [\psi(\alpha + ix) - \psi(\alpha - ix)] \sin xy\, dx = i\pi e^{-\alpha y} (1 - e^{-y})^{-1}$

$[\alpha > 0,\ y > 0]$. ИП I 96 (1)

6.467

1. $\int\limits_0^1 \sin(2\pi n x)\, \psi(\alpha + x)\, dx = \sin(2\pi n \alpha) \operatorname{ci}(2\pi n \alpha) + \cos(2\pi n \alpha) \operatorname{si}(2\pi n \alpha)$

$[\alpha \geqslant 0;\ n = 1,\ 2,\ \ldots]$. ИП II 305 (4)

2. $\int\limits_0^1 \cos(2\pi n x)\, \psi(\alpha + x)\, dx = \sin(2\pi n \alpha) \operatorname{si}(2\pi n \alpha) - \cos(2\pi n \alpha) \operatorname{ci}(2\pi n \alpha)$

$[\alpha > 0;\ n = 1,\ 2,\ \ldots]$. ИП II 305 (5)

6.468 $\int\limits_0^1 \psi(x) \sin^2 \pi x\, dx = -\frac{1}{2}[C + \ln(2\pi)]$. НГ 204

6.469

1. $\int\limits_0^1 \psi(x) \sin \pi x \cos \pi x \, dx = -\frac{\pi}{4}$. НГ 204

2 $\int\limits_0^1 \psi(x) \sin \pi x \sin(n\pi x) \, dx = 0$ [n — четное];

$= \frac{1}{2} \ln \frac{n-1}{n+1}$ [n — нечетное] НГ 204 (8) u

6.471

1. $\int\limits_0^\infty x^{-\alpha} [\ln x - \psi(1+x)] \, dx = \pi \operatorname{cosec}(\pi\alpha) \zeta(\alpha)$ [$0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$].

ИП II 306 (7)

2. $\int\limits_0^\infty x^{-\alpha} [\ln(1+x) - \psi(1+x)] \, dx = \pi \operatorname{cosec}(\pi\alpha)[\zeta(\alpha) - (\alpha-1)^{-1}]$

[$0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$]. ИП II 306 (8)

3 $\int\limits_0^\infty [\psi(x+1) - \ln x] \cos(2\pi xy) \, dx = \frac{1}{2} [\psi(y+1) - \ln y]$. ИП II 306 (12)

6.472

1. $\int\limits_0^\infty x^{-\alpha} [(1+x)^{-1} - \psi'(1+x)] \, dx = -\pi\alpha \operatorname{cosec}(\pi\alpha) [\zeta(1+\alpha) - \alpha^{-1}]$

[$|\operatorname{Re} \alpha| < 1$]. ИП II 306 (9)

2. $\int\limits_0^\infty x^{-\alpha} [x^{-1} - \psi'(1+x)] \, dx = -\pi\alpha \operatorname{cosec}(\pi\alpha) \zeta(1+\alpha)$

[$-2 < \operatorname{Re} \alpha < 0$]. ИП II 306 (10)

6.473 $\int\limits_0^\infty x^{-\alpha} \psi^{(n)}(1+x) \, dx = (-1)^{n-1} \frac{\pi \Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha) \sin \pi\alpha} \zeta(\alpha+n)$

[$n = 1, 2, \ldots; \ 0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$]. ИП II 306 (11)

6.5—6.7 ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

6.51 Цилиндрические функции

6.511

1 $\int\limits_0^\infty J_\nu(bx) \, dx = \frac{1}{b}$ [$\operatorname{Re} \nu > -1, \ b > 0$]. ИП II 22 (3)

2. $\int\limits_0^\infty N_\nu(bx) \, dx = -\frac{1}{b} \operatorname{tg}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)$ [$|\operatorname{Re} \nu| < 1, \ b > 0$].

В 432 (7), ИП II 96 (1)

3. $\int_0^a J_\nu(x)\,dx = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{\nu+2k+1}(a) \qquad [\operatorname{Re}\nu > -1].$ ИП II 333 (1)

4. $\int_0^a J_{\frac{1}{2}}(t)\,dt = 2S\left(\sqrt{a}\right).$ В 599 (4)

5. $\int_0^a J_{-\frac{1}{2}}(t)\,dt = 2C\left(\sqrt{a}\right).$ В 599 (3)

6. $\int_0^a J_0(x)\,dx = aJ_0(a) + \frac{\pi a}{2}[J_1(a)\mathbf{H}_0(a) - J_0(a)\mathbf{H}_1(a)] \qquad [a > 0].$

ИП II 7 (2)

7. $\int_0^a J_1(x)\,dx = 1 - J_0(a) \qquad [a > 0].$ ИП II 18 (1)

8. $\int_a^\infty J_0(x)\,dx = 1 - aJ_0(a) + \frac{\pi a}{2}[J_0(a)\mathbf{H}_1(a) - J_1(a)\mathbf{H}_0(a)] \qquad [a > 0].$

ИП II 7 (3)

9. $\int_a^\infty J_1(x)\,dx = J_0(a) \qquad [a > 0].$ ИП II 18 (2)

10. $\int_a^b N_\nu(x)\,dx = 2\sum_{n=0}^{\infty}[N_{\nu+2n+1}(b) - N_{\nu+2n+1}(a)].$ ИП II 339 (46)

11. $\int_0^a I_\nu(x)\,dx = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{\nu+2n+1}(a) \qquad [\operatorname{Re}\nu > -1].$ ИП II 364 (1)

6.512

1. $$\int_0^\infty J_\mu(ax)J_\nu(bx)\,dx = b^\nu a^{-\nu-1}\times$$
$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)}F\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{\nu-\mu+1}{2}; \nu+1; \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$[a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1,\ b < a.$ Для $a < b$ следует μ и ν поменять местами]. ИП II 48 (6)

2. $$\int_0^\infty J_{\nu+n}(\alpha t)J_{\nu-n-1}(\beta t)\,dt = \frac{\beta^{\nu-n-1}\Gamma(\nu)}{\alpha^{\nu-n}n!\,\Gamma(\nu-n)}F\left(\nu, -n; \nu-n; \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$$
$[0 < \beta < \alpha];$

$= (-1)^n\frac{1}{2\alpha} \qquad [0 < \beta = \alpha];$

$= 0 \qquad [0 < \alpha < \beta] \qquad [\operatorname{Re}(\nu) > 0].$ МО 50

3. $$\int_0^\infty J_\nu(\alpha x) J_{\nu-1}(\beta x)\,dx = \left.\begin{aligned} &\frac{\beta^{\nu-1}}{\alpha^\nu} && [\beta < \alpha]; \\ &= \frac{1}{2\beta} && [\beta = \alpha]; \\ &= 0 && [\beta > \alpha]; \end{aligned}\right\} \quad [\operatorname{Re}\nu > 0].$$

В 444 (8), Ку 153 (40) и

4. $$\int_0^\infty J_{\nu+2n+1}(ax) J_\nu(bx)\,dx = b^\nu a^{-\nu-1} P_n^{(\nu,\,0)}\left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right)$$

$[\operatorname{Re}\nu > -1-n,\ 0 < b < a]$;

$= 0$ $\qquad [\operatorname{Re}\nu > -1-n,\ 0 < a < b]$.

ИП II 47 (5)

5. $$\int_0^\infty J_{\nu+n}(ax) N_{\nu-n}(ax)\,dx = (-1)^{n+1}\frac{1}{2a}$$

$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2};\ a > 0;\ n = 0, 1, 2, \ldots\right]$. ИП II 347 (57)

6. $$\int_0^\infty J_1(bx) N_0(ax)\,dx = -\frac{b^{-1}}{\pi}\ln\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$[0 < b < a]$. ИП II 21 (31)

7. $$\int_0^a J_\nu(x) J_{\nu+1}(x)\,dx = \sum_{n=0}^\infty [J_{\nu+n+1}(a)]^2$$

$[\operatorname{Re}\nu > -1]$. ИП II 338 (37)

6.513

1. $$\int_0^\infty [J_\mu(ax)]^2 J_\nu(bx)\,dx =$$

$$= a^{2\mu} b^{-2\mu-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu+2\mu}{2}\right)}{[\Gamma(\mu+1)]^2\,\Gamma\left(\frac{1+\nu-2\mu}{2}\right)} \times$$

$$\times\left[F\left(\frac{1-\nu+2\mu}{2}, \frac{1+\nu+2\mu}{2}; \mu+1; \frac{1-\sqrt{1-\frac{4a^2}{b^2}}}{2}\right)\right]^2$$

$[\operatorname{Re}\nu + \operatorname{Re}2\mu > -1,\ 0 < 2a < b]$. ИП II 52 (33)

2. $$\int_0^\infty [J_\mu(ax)]^2 K_\nu(bx)\,dx =$$

$$= \frac{b^{-1}}{2}\Gamma\left(\frac{2\mu+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\mu-\nu+1}{2}\right)\left[P_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}^{-\mu}\left(\sqrt{1+\frac{4a^2}{b^2}}\right)\right]^2$$

$[2\operatorname{Re}\mu > |\operatorname{Re}\nu| - 1,\ \operatorname{Re}b > 2|\operatorname{Im}a|]$. ИП II 138 (18)

3. $\int\limits_0^\infty I_\mu(ax) K_\mu(ax) J_\nu(bx)\,dx =$

$$= \frac{e^{\mu\pi i}\Gamma\left(\frac{\nu+2\mu+1}{2}\right)}{b\Gamma\left(\frac{\nu-2\mu+1}{2}\right)} P^{-\mu}_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{4a^2}{b^2}}\right) Q^{-\mu}_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{4a^2}{b^2}}\right)$$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}(\nu+2\mu) > -1]$
ИП II 65 (20)

4. $\int\limits_0^\infty J_\mu(ax) J_{-\mu}(ax) K_\nu(bx)\,dx =$

$$= \frac{\pi}{2b}\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) P^{\mu}_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{4a^2}{b^2}}\right) P^{-\mu}_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{4a^2}{b^2}}\right)$$

$[|\operatorname{Re}\nu| < 1,\ \operatorname{Re} b > 2|\operatorname{Im} a|]$. ИП II 138 (21)

5 $\int\limits_0^\infty [K_\mu(ax)]^2 J_\nu(bx)\,dx =$

$$= \frac{e^{2\mu\pi i}\Gamma\left(\frac{1+\nu+2\mu}{2}\right)}{b\Gamma\left(\frac{1+\nu-2\mu}{2}\right)} \left[Q^{-\mu}_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{4a^2}{b^2}}\right)\right]^2$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\nu \pm \mu\right) > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 66 (28)

6. $\int\limits_0^z J_\mu(x) J_\nu(z-x)\,dx = 2\sum\limits_{k=0}^\infty (-1)^k J_{\mu+\nu+2k+1}(z)$

$[\operatorname{Re}\mu > -1,\ \operatorname{Re}\nu > -1]$ (см. также 6.683 3.). В 414 (2)

7. $\int\limits_0^z J_\mu(x) J_{-\mu}(z-x)\,dx = \sin z \qquad [-1 < \operatorname{Re}\mu < 1]$. В 415 (4)

8. $\int\limits_0^z J_\mu(x) J_{1-\mu}(z-x)\,dx = J_0(z) - \cos(z)$

$[-1 < \operatorname{Re}\mu < 2]$. В 415 (4)

6.514

1. $\int\limits_0^\infty J_\nu\left(\frac{a}{x}\right) J_\nu(bx)\,dx = b^{-1} J_{2\nu}\left(2\sqrt{ab}\right)$

$\left[a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 57 (9)

2 $\int\limits_0^\infty J_\nu\left(\frac{a}{x}\right) N_\nu(bx)\,dx = b^{-1}\left[N_{2\nu}\left(2\sqrt{ab}\right) + \frac{2}{\pi} K_{2\nu}\left(\sqrt{2ab}\right)\right]$

$\left[a > 0,\ b > 0,\ -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{3}{2}\right]$. ИП II 110 (12)

3. $$\int_0^\infty J_\nu\left(\frac{a}{x}\right)K_\nu(bx)\,dx =$$
$$= b^{-1}e^{\frac{1}{2}i(\nu+1)\pi}K_{2\nu}\left[2e^{\frac{1}{4}i\pi}\sqrt{ab}\right] + b^{-1}e^{-\frac{1}{2}i(\nu+1)\pi}K_{2\nu}\left[2e^{-\frac{1}{4}\pi i}\sqrt{ab}\right]$$
$\left[a > 0,\ \operatorname{Re} b > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{5}{2}\right]$. ИП II 141 (31)

4. $$\int_0^\infty N_\nu\left(\frac{a}{x}\right)J_\nu(bx)\,dx = -\frac{2b^{-1}}{\pi}\left[K_{2\nu}\left(2\sqrt{ab}\right) - \frac{\pi}{2}N_{2\nu}\left(2\sqrt{ab}\right)\right]$$
$\left[a > 0,\ b > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right]$. ИП II 62 (37) и

5. $$\int_0^\infty N_\nu\left(\frac{a}{x}\right)N_\nu(bx)\,dx = -b^{-1}J_{2\nu}\left(2\sqrt{ab}\right)$$
$\left[a > 0,\ b > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right]$. ИП II 110 (14)

6. $$\int_0^\infty N_\nu\left(\frac{a}{x}\right)K_\nu(bx)\,dx = -b^{-1}e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}K_{2\nu}\left(2e^{\frac{1}{4}\pi i}\sqrt{ab}\right) -$$
$$- b^{-1}e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}K_{2\nu}\left(2e^{-\frac{1}{4}\pi i}\sqrt{ab}\right)$$
$\left[a > 0,\ \operatorname{Re} b > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{5}{2}\right]$. ИП II 143 (37)

7. $$\int_0^\infty K_\nu\left(\frac{a}{x}\right)N_\nu(bx)\,dx = -2b^{-1}\left[\sin\left(\frac{3\nu\pi}{2}\right)\operatorname{ker}_{2\nu}\left(2\sqrt{ab}\right) +\right.$$
$$\left. + \cos\left(\frac{3\nu\pi}{2}\right)\operatorname{kei}_{2\nu}\left(2\sqrt{ab}\right)\right]$$
$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right]$. ИП II 113 (28)

8. $$\int_0^\infty K_\nu\left(\frac{a}{x}\right)K_\nu(bx)\,dx = \pi b^{-1}K_{2\nu}\left(2\sqrt{ab}\right)$$
$[\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re} b > 0]$. ИП II 146 (54)

6.515

1. $$\int_0^\infty J_\mu\left(\frac{a}{x}\right)N_\mu\left(\frac{a}{x}\right)K_0(bx)\,dx =$$
$$= -2b^{-1}J_{2\mu}\left(2\sqrt{ab}\right)K_{2\mu}\left(2\sqrt{ab}\right)$$
$[a > 0,\ \operatorname{Re} b > 0]$. ИП II 143 (42)

2. $$\int_0^\infty \left[K_\mu\left(\frac{a}{x}\right)\right]^2 K_0(bx)\,dx =$$
$$= 2\pi b^{-1}K_{2\mu}\left(2e^{\frac{1}{4}\pi i}\sqrt{ab}\right)K_{2\mu}\left(2e^{-\frac{1}{4}\pi i}\sqrt{ab}\right)$$
$[\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re} b > 0]$. ИП II 147 (59)

3. $$\int_0^\infty H_\mu^{(1)}\left(\frac{a^2}{x}\right) H_\mu^{(2)}\left(\frac{a^2}{x}\right) J_0(bx)\,dx =$$
$$= 16\pi^{-2}b^{-1}\cos\mu\pi K_{2\mu}\left(2e^{\frac{1}{4}\pi i}a\sqrt{b}\right) K_{2\mu}\left(2e^{-\frac{1}{4}\pi i}a\sqrt{b}\right)$$
$$\left[|\arg a| < \frac{\pi}{4},\ b > 0,\ |\operatorname{Re}\mu| < \frac{1}{4}\right].$$ ИП II 17 (36)

6.516

1. $$\int_0^\infty J_{2\nu}(a\sqrt{x})\, J_\nu(bx)\,dx = b^{-1}J_\nu\left(\frac{a^2}{4b}\right)$$
$$\left[a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 58 (16)

2. $$\int_0^\infty J_{2\nu}(a\sqrt{x})\, N_\nu(bx)\,dx = -b^{-1}\mathbf{H}_\nu\left(\frac{a^2}{4b}\right)$$
$$\left[a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 111 (18)

3. $$\int_0^\infty J_{2\nu}(a\sqrt{x})\, K_\nu(bx)\,dx = \frac{\pi}{2}b^{-1}\left[I_\nu\left(\frac{a^2}{4b}\right) - \mathbf{L}_\nu\left(\frac{a^2}{4b}\right)\right]$$
$$\left[\operatorname{Re} b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 144 (45)

4. $$\int_0^\infty N_{2\nu}(a\sqrt{x})\, J_\nu(bx)\,dx = 2\sec(\nu\pi)\, b^{-1} \times$$
$$\times\left[\frac{1}{2}\cos(\nu\pi) N_\nu\left(\frac{a^2}{4b}\right) - N_{-\nu}\left(\frac{a^2}{4b}\right) + \mathbf{H}_{-\nu}\left(\frac{a^2}{4b}\right)\right]$$
$$\left[a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 62 (39)

5 $$\int_0^\infty N_{2\nu}(a\sqrt{x})\, N_\nu(bx)\,dx =$$
$$= \frac{b^{-1}}{2}\left[\sec(\nu\pi) J_{-\nu}\left(\frac{a^2}{4b}\right) + \operatorname{cosec}(\nu\pi)\mathbf{H}_{-\nu}\left(\frac{a^2}{4b}\right) - \right.$$
$$\left. - 2\operatorname{ctg}(2\nu\pi)\,\mathbf{H}_\nu\left(\frac{a^2}{4b}\right)\right]$$
$$\left[a > 0,\ b > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right].$$ ИП II 111 (19)

6. $$\int_0^\infty N_{2\nu}(a\sqrt{x})\, K_\nu(bx)\,dx =$$
$$= \frac{\pi b^{-1}}{2}\left[\operatorname{cosec}(2\nu\pi)\,\mathbf{L}_{-\nu}\left(\frac{a^2}{4b}\right) - \operatorname{ctg}(2\nu\pi)\,\mathbf{L}_\nu\left(\frac{a^2}{4b}\right) - \right.$$
$$\left. - \operatorname{tg}(\nu\pi)\, I_\nu\left(\frac{a^2}{4b}\right) - \frac{\sec(\nu\pi)}{\pi} K_\nu\left(\frac{a^2}{4b}\right)\right]$$
$$\left[\operatorname{Re} b > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right].$$ ИП II 144 (46)

7. $\int_0^\infty K_{2\nu}(a\sqrt{x})\,J_\nu(bx)\,dx = \frac{1}{4}\pi b^{-1}\sec(\nu\pi)\left[\mathbf{H}_{-\nu}\left(\frac{a^2}{4b}\right) - N_{-\nu}\left(\frac{a^2}{4b}\right)\right]$

$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$ ИП II 70(22)

8 $\int_0^\infty K_{2\nu}(a\sqrt{x})\,N_\nu(bx)\,dx =$

$$= -\frac{1}{4}\pi b^{-1}\left[\sec(\nu\pi)\,J_{-\nu}\left(\frac{a^2}{4b}\right) - \operatorname{cosec}(\nu\pi)\,\mathbf{H}_{-\nu}\left(\frac{a^2}{4b}\right) + {}\right.$$
$$\left. {}+ 2\operatorname{cosec}(2\nu\pi)\,\mathbf{H}_\nu\left(\frac{a^2}{4b}\right)\right]$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0;\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right].$ ИП II 114(34)

9 $\int_0^\infty K_{2\nu}(a\sqrt{x})\,K_\nu(bx)\,dx =$

$$= \frac{\pi b^{-1}}{4\cos(\nu\pi)}\left\{K_\nu\left(\frac{a^2}{4b}\right) + \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}\left[\mathbf{L}_{-\nu}\left(\frac{a^2}{4b}\right) - \mathbf{L}_\nu\left(\frac{a^2}{4b}\right)\right]\right\}$$

$\left[\operatorname{Re} b > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right].$ ИП II 147(63)

10 $\int_0^\infty I_{2\nu}(a\sqrt{x})\,K_\nu(bx)\,dx = \frac{\pi b^{-1}}{2}\left[I_\nu\left(\frac{a^2}{4b}\right) + \mathbf{L}_\nu\left(\frac{a^2}{4b}\right)\right]$

$\left[\operatorname{Re} b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$ ИП II 147(60)

6.517 $\int_0^z J_0\left(\sqrt{z^2 - x^2}\right)dx = \sin z.$ МО 48

6.518 $\int_0^\infty K_{2\nu}(2z\operatorname{sh} x)\,dx = \frac{\pi^2}{8\cos\nu\pi}\left(J_\nu^2(z) + N_\nu^2(z)\right)$

$\left[\operatorname{Re} z > 0,\ -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}\right].$ МО 45

6.519

1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{2\nu}(2z\cos x)\,dx = \frac{\pi}{2}J_\nu^2(z)$ $\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$ УВ II 198

2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{2\nu}(2z\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}J_\nu^2(z)$ $\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$ В 42(1)*и*

6.52 Цилиндрические функции, x и x^2

6.521

1. $$\int_0^1 xJ_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x)\,dx = 0 \quad [\alpha \neq \beta];$$

$$= \frac{1}{2}\{J_{\nu+1}(\alpha)\}^2 \quad [\alpha = \beta]$$

$$[J_\nu(\alpha) = J_\nu(\beta) = 0, \quad \nu > -1].$$ УВ II 198

2. $$\int_0^\infty xK_\nu(ax) J_\nu(bx)\,dx = \frac{b^\nu}{a^\nu (b^2 + a^2)}$$

$$[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1].$$ ИП II 63 (2)

3. $$\int_0^\infty xK_\nu(ax) K_\nu(bx)\,dx = \frac{\pi (ab)^{-\nu} (a^{2\nu} - b^{2\nu})}{2\sin(\nu\pi)(a^2 - b^2)}$$

$$[|\operatorname{Re}\nu| < 1,\ \operatorname{Re}(a+b) > 0].$$ ИП II 145 (48)

4. $$\int_0^a xJ_\nu(\lambda x) K_\nu(\mu x)\,dx = (\mu^2 + \lambda^2)^{-1} \left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^\nu + \lambda a J_{\nu+1}(\lambda a) K_\nu(\mu a) - \right.$$

$$\left. - \mu a J_\nu(\lambda a) K_{\nu+1}(\mu a) \right] \quad [\operatorname{Re}\nu > -1].$$ ИП II 367 (26)

6.522

1. $$\int_0^\infty x [J_\mu(ax)]^2 K_\nu(bx)\,dx = \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\nu + 1\right) \Gamma\left(\mu - \frac{1}{2}\nu + 1\right) b^{-2} \times$$

$$\times (1 + 4a^2 b^{-2})^{-\frac{1}{2}} P_{\frac{1}{2}\nu}^{-\mu} \left[(1 + 4a^2 b^{-2})^{\frac{1}{2}}\right] P_{\frac{1}{2}\nu-1}^{-\mu} \left[(1 + 4a^2 b^{-2})^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$[\operatorname{Re} b > 2|\operatorname{Im} a|,\ 2\operatorname{Re}\mu > |\operatorname{Re}\nu| - 2].$$ ИП II 138 (19)

2. $$\int_0^\infty x [K_\mu(ax)]^2 J_\nu(bx)\,dx = \frac{2e^{2\mu\pi i}\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\nu + \mu\right)}{b(4a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu - \mu\right)} \times$$

$$\times Q_{\frac{1}{2}\nu}^{-\mu} \left[(1 + 4a^2 b^{-2})^{\frac{1}{2}}\right] Q_{\frac{1}{2}\nu-1}^{-\mu} \left[(1 + 4a^2 b^{-2})^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\left[b > 0,\quad \operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\nu \pm \mu\right) > -1\right].$$ ИП II 66 (27) и

3. $$\int_0^\infty xK_0(ax) J_\nu(bx) J_\nu(cx)\,dx = r_1^{-1} r_2^{-1} (r_2 - r_1)^\nu (r_2 + r_1)^{-\nu},$$

$$r_1 = [a^2 + (b-c)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad r_2 = [a^2 + (b+c)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$[c > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re} a > |\operatorname{Im} b|].$$ ИП II 63 (6)

4. $$\int\limits_0^\infty xI_0(ax)K_0(bx)J_0(cx)\,dx=(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$[\operatorname{Re} b>\operatorname{Re} a,\quad c>0]$. ИП II 16 (27)

5. $$\int\limits_0^\infty xJ_0(ax)K_0(bx)J_0(cx)\,dx=(a^4+b^4+c^4-2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$[\operatorname{Re} b>|\operatorname{Im} a|,\quad c>0]$. ИП II 15 (25)

6. $$\int\limits_0^\infty xJ_0(ax)N_0(ax)J_0(bx)\,dx=$$

$$=0 \qquad [0<b<2a];$$

$$=-2\pi^{-1}b^{-1}[b^2-4a^2]^{-\frac{1}{2}} \qquad [0<2a<b<\infty].$$

ИП II 15 (21)

7. $$\int\limits_0^\infty xJ_\mu(ax)J_{\mu+1}(ax)K_\nu(bx)\,dx=$$

$$=\Gamma\left(\mu+\frac{3+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{3-\nu}{2}\right)b^{-2}(1+4a^2b^{-2})^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times P^{-\mu}_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}[(1+4a^2b^{-2})^{\frac{1}{2}}]\,P^{-\mu-1}_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}[(1+4a^2b^{-2})^{\frac{1}{2}}]$$

$[\operatorname{Re} b>2|\operatorname{Im} a|,\quad 2\operatorname{Re}\mu>|\operatorname{Re}\nu|-3]$. ИП II 138 (20)

8. $$\int\limits_0^\infty xK_{\mu-\frac{1}{2}}(ax)K_{\mu+\frac{1}{2}}(ax)J_\nu(bx)\,dx=$$

$$=-\frac{2e^{2\mu\pi i}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\mu+1\right)}{b\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu-\mu\right)(b^2+4a^2)^{\frac{1}{2}}}Q^{-\mu+\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}[(1+4a^2b^{-2})^{\frac{1}{2}}]\times$$

$$\times Q^{-\mu-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}[(1+4a^2b^{-2})^{\frac{1}{2}}]$$

$\left[b>0,\ \operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ |\operatorname{Re}\mu|<1+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\nu\right]$. ИП II 67 (29) *и*

9. $$\int\limits_0^\infty xI_{\frac{1}{2}\nu}(ax)K_{\frac{1}{2}}(ax)J_\nu(bx)\,dx=b^{-1}(b^2+4a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$[b>0,\ \operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП II 65 (16)

10. $$\int\limits_0^\infty xJ_{\frac{1}{2}\nu}(ax)N_{\frac{1}{2}\nu}(ax)J_\nu(bx)\,dx=$$

$$=0 \qquad [a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1;\ 0<b<2a];$$

$$=-2\pi^{-1}b^{-1}(b^2-4a^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad [a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ 2a<b<\infty].$$

ИП II 55 (48)

11. $\int\limits_0^\infty xJ_{\frac{1}{2}(\nu+n)}(ax)\,J_{\frac{1}{2}(\nu-n)}(ax)\,J_\nu(bx)\,dx=$

$$=2\pi^{-1}b^{-1}(4a^2-b^2)^{-\frac{1}{2}}T_n\left(\frac{b}{2a}\right)\quad [a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ 0<b<2a];$$
$$=0\quad [a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ 2a<b<\infty].$$

ИП II 52 (32)

12. $\int\limits_0^\infty xI_{\frac{1}{2}(\nu-\mu)}(ax)\,K_{\frac{1}{2}(\nu+\mu)}(ax)\,J_\nu(bx)\,dx=$

$$=2^{-\mu}a^{-\mu}b^{-1}(b^2+4a^2)^{-\frac{1}{2}}[b+(b^2+4a^2)^{\frac{1}{2}}]^\mu$$
$$[b>0,\ \operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}(\nu-\mu)>-2].$$

ИП II 66 (23)

13. $\int\limits_0^\infty xJ_\mu(xa\sin\varphi)\,K_{\nu-\mu}(ax\cos\varphi\cos\psi)\,J_\nu(xa\sin\psi)\,dx=$

$$=\frac{(\sin\varphi)^\mu(\sin\psi)^\nu(\cos\varphi)^{\nu-\mu}(\cos\psi)^{\mu-\nu}}{a^2(1-\sin^2\varphi\sin^2\psi)}$$
$$\left[a>0,\ 0<\varphi,\ \psi<\frac{\pi}{2},\quad \operatorname{Re}\mu>-1,\ \operatorname{Re}\nu>-1\right].$$

ИП II 64 (10)

14. $\int\limits_0^\infty xJ_\mu(xa\sin\varphi\cos\psi)\,J_{\nu-\mu}(ax)\,J_\nu(xa\cos\varphi\sin\psi)\,dx=$

$$=2\pi^{-1}a^{-2}\sin(\mu\pi)(\sin\varphi)^\mu(\sin\psi)^\nu(\cos\varphi)^{-\nu}(\cos\psi)^{-\mu}\times$$
$$\times[\cos(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)]^{-1}$$
$$\left[a>0,\ 0<\varphi,\ \psi<\frac{1}{2}\pi,\ \operatorname{Re}\nu>-1\right].$$

ИП II 54 (39)

6.523 $\int\limits_0^\infty x[2\pi^{-1}K_0(ax)-N_0(ax)]\,K_0(bx)\,dx=$

$$=2\pi^{-1}[(a^2+b^2)^{-1}+(b^2-a^2)^{-1}]\ln\frac{b}{a}$$
$$[\operatorname{Re}b>|\operatorname{Im}a|,\ \operatorname{Re}(a+b)>0].$$

ИП II 145 (50)

6.524

1. $\int\limits_0^\infty xJ_\nu^2(ax)\,J_\nu(bx)\,N_\nu(bx)\,dx=$

$$=0\quad \left[0<a<b,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right];$$
$$=-(2\pi ab)^{-1}\quad \left[0<b<a,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$

ИП II 352 (14)

2. $\int\limits_0^\infty x[J_0(ax)\,K_0(bx)]^2\,dx=\frac{\pi}{8ab}-\frac{1}{4ab}\arcsin\left(\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right)$

$$[a>0,\ b>0].$$

ИП II 373 (9)

6.525

1. $$\int_0^\infty x^2 J_1(ax)\,K_0(bx)\,J_0(cx)\,dx = 2a\,(a^2+b^2-c^2)\,[(a^2+b^2+c^2)^2-4a^2c^2]^{-\frac{3}{2}}$$

$[c>0,\ \operatorname{Re} b \geqslant |\operatorname{Im} a|,\ \operatorname{Re} a > 0]$. ИПII 15 (26)

2. $$\int_0^\infty x^2 I_0(ax)\,K_1(bx)\,J_0(cx)\,dx =$$
$$= 2b\,(b^2+c^2-a^2)\,[(a^2+b^2+c^2)^2-4a^2b^2]^{-\frac{3}{2}}.$$ ИПII 16 (28)

6.526

1. $$\int_0^\infty x J_{\frac{1}{2}\nu}(ax^2)\,J_\nu(bx)\,dx = (2a)^{-1} J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right)$$

$[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИПII 56 (1)

2. $$\int_0^\infty x J_{\frac{1}{2}\nu}(ax^2)\,N_\nu(bx)\,dx =$$
$$= (4a)^{-1}\left[N_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right) + \right.$$
$$\left. + \sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \mathbf{H}_{-\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right)\right]$$

$[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИПII 109 (9)

3. $$\int_0^\infty x J_{\frac{1}{2}\nu}(ax^2)\,K_\nu(bx)\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{8a\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}\left[\mathbf{H}_{-\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right) - N_{-\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right)\right]$$

96 $[a>0,\ \operatorname{Re} b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИПII 140 (27)

4. $$\int_0^\infty x N_{\frac{1}{2}\nu}(ax^2)\,J_\nu(bx)\,dx = -(2a)^{-1}\mathbf{H}_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right)$$

$[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИПII 61 (35)

5. $$\int_0^\infty x N_{\frac{1}{2}\nu}(ax^2)\,K_\nu(bx)\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{4a\sin(\nu\pi)}\left[\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\mathbf{H}_{-\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right) - \right.$$
$$\left. - \sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) J_{-\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right) - \mathbf{H}_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right)\right]$$

$[a>0,\ \operatorname{Re} b>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<1]$. ИПII 141 (28)

6. $$\int_0^\infty x K_{\frac{1}{2}\nu}(ax^2)\,J_\nu(bx)\,dx = \frac{\pi}{4a}\left[I_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right) - \mathbf{L}_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right)\right]$$

$[\operatorname{Re} a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИПII 68 (9)

7. $$\int_0^\infty xK_{\frac{1}{2}\nu}(ax^2)N_\nu(bx)\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{4a}\left[\operatorname{cosec}(\nu\pi)\,\mathbf{L}_{-\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right) - \operatorname{ctg}(\nu\pi)\,\mathbf{L}_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right) - \right.$$
$$\left. - \operatorname{tg}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) I_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right) - \frac{1}{\pi}\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) K_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right)\right]$$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1]$. ИПII 112 (25)

8. $$\int_0^\infty xK_{\frac{1}{2}\nu}(ax^2)K_\nu(bx)\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{8a}\left\{\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) K_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right) + \right.$$
$$\left. + \pi\operatorname{cosec}(\nu\pi)\left[\mathbf{L}_{-\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right) - \mathbf{L}_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right)\right]\right\}$$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1]$ ИП II 146 (52)

6.527

1. $$\int_0^\infty x^2 J_{2\nu}(2ax)\, J_{\nu-\frac{1}{2}}(x^2)\,dx = \frac{1}{2} a J_{\nu+\frac{1}{2}}(a^2)$$

$\left[a > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 355 (33)

2. $$\int_0^\infty x^2 J_{2\nu}(2ax)\, J_{\nu+\frac{1}{2}}(x^2)\,dx = \frac{1}{2} a J_{\nu-\frac{1}{2}}(a^2)$$

$[a > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -2]$. ИП II 355 (35)

3. $$\int_0^\infty x^2 J_{2\nu}(2ax)\, N_{\nu+\frac{1}{2}}(x^2)\,dx = -\frac{1}{2} a\mathbf{H}_{\nu-\frac{1}{2}}(a^2)$$

$[a > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -2]$. ИП II 355 (36)

6.528

$$\int_0^\infty xK_{\frac{1}{4}\nu}\left(\frac{x^2}{4}\right) I_{\frac{1}{4}\nu}\left(\frac{x^2}{4}\right) J_\nu(bx)\,dx = K_{\frac{1}{4}\nu}\left(\frac{b^2}{4}\right) I_{\frac{1}{4}\nu}\left(\frac{b^2}{4}\right)$$

$[b > 0,\ \nu > -1]$. МО 183 *u*

6.529

1. $$\int_0^\infty xJ_\nu\left(2\sqrt{ax}\right) K_\nu\left(2\sqrt{ax}\right) J_\nu(bx)\,dx = \frac{1}{2} b^{-2} e^{-\frac{2a}{b}}$$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1]$ ИП II 70 (23)

2. $$\int_0^a xJ_\lambda(2x)\,I_\lambda(2x)\,J_\mu\left(2\sqrt{a^2-x^2}\right)I_\mu\left(2\sqrt{a^2-x^2}\right)dx =$$
$$= \frac{a^{2\lambda+2\mu+2}}{2\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\lambda+\mu+2)} \times$$
$$\times\, {}_1F_4\left(\frac{\lambda+\mu+1}{2};\ \lambda+1,\ \mu+1,\ \lambda+\mu+1,\ \frac{\lambda+\mu+3}{2};\ -a^4\right)$$
$[\operatorname{Re}\lambda > -1,\ \operatorname{Re}\mu > -1]$. ИП II 376 (31)

6.53 — 6.54 Цилиндрические функции и рациональные функции

6.531

1. $$\int_0^\infty \frac{N_\nu(bx)}{x+a}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\nu)}\left[\mathbf{E}_\nu(ab) + N_\nu(ab)\right] +$$
$$+ 2\operatorname{ctg}(\pi\nu)\left[\mathbf{J}_\nu(ab) - J_\nu(ab)\right]$$
$\left[b > 0,\ |\arg a| < \pi,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1,\ \nu \neq 0,\ \pm\frac{1}{2}\right]$. ИП II 97 (5)

2. $$\int_0^\infty \frac{N_\nu(bx)}{x-a}\,dx = \pi\left\{\operatorname{ctg}(\nu\pi)\left[N_\nu(ab) + \mathbf{E}_\nu(ab)\right] +\right.$$
$$\left. + \mathbf{J}_\nu(ab) + 2\left[\operatorname{ctg}(\nu\pi)\right]^2\left[\mathbf{J}_\nu(ab) - J_\nu(ab)\right]\right\}$$
$[b > 0,\ a > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1]$. ИП II 98 (9)

3 $$\int_0^\infty \frac{K_\nu(bx)}{x+a}\,dx = \frac{\pi^2}{2}\left[\operatorname{cosec}(\nu\pi)\right]^2\left[I_\nu(ab) +\right.$$
$$\left. + I_{-\nu}(ab) - e^{-\frac{1}{2}i\nu\pi}\mathbf{J}_\nu(iab) - e^{\frac{1}{2}i\nu\pi}\mathbf{J}_{-\nu}(iab)\right]$$
$[\operatorname{Re} b > 0,\ |\arg a| < \pi,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1]$. ИП II 128 (5)

6.532

1. $$\int_0^\infty \frac{J_\nu(x)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi\left[\mathbf{J}_\nu(a) - J_\nu(a)\right]}{a\sin(\nu\pi)}$$
$[\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1]$. ИП II 340 (2)

2. $$\int_0^\infty \frac{N_\nu(bx)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{\cos\frac{\nu\pi}{2}}\left[-\frac{\pi}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)I_\nu(ab) - \frac{1}{a}K_\nu(ab) +\right.$$
$$\left. + \frac{b\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{1-\nu^2}\,{}_1F_2\left(1;\ \frac{3-\nu}{2},\ \frac{3+\nu}{2};\ \frac{a^2b^2}{4}\right)\right]$$
$[b > 0,\ \operatorname{Re} a > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1]$. ИП II 99 (13)

3. $$\int_0^\infty \frac{N_\nu(bx)}{x^2-a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\left\{J_\nu(ab) + \operatorname{tg}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)[\mathbf{J}_\nu(ab) - J_\nu(ab)] - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \mathbf{E}_\nu(ab) - N_\nu(ab)\right\}\right\}$$
$[b > 0,\ a > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1]$. ИП II 101 (21)

4. $$\int_0^\infty \frac{xJ_0(ax)}{x^2+k^2}\,dx = K_0(ak) \quad [a > 0,\ \operatorname{Re} k > 0].$$ В 466 (5)

5. $$\int_0^\infty \frac{N_0(ax)}{x^2+k^2}\,dx = -\frac{K_0(ak)}{k} \quad [a > 0,\ \operatorname{Re} k > 0].$$ В 466 (6)

6. $$\int_0^\infty \frac{J_0(ax)}{x^2+k^2}\,dx = \frac{\pi}{2k}[I_0(ak) - \mathbf{L}_0(ak)] \quad [a > 0,\ \operatorname{Re} k > 0].$$ В 467 (7)

6.533

1. $$\int_0^z J_p(x)\,J_q(z-x)\,\frac{dx}{x} = \frac{J_{p+q}(z)}{p} \qquad [\operatorname{Re} p > 0,\ \operatorname{Re} q > -1].$$ В 415 (3)

2. $$\int_0^z \frac{J_p(x)}{x}\,\frac{J_q(z-x)}{z-x}\,dx = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\frac{J_{p+q}(z)}{z}$$
$[\operatorname{Re} p > 0. \quad \operatorname{Re} q > 0]$ В 415 (5)

3. $$\int_0^\infty [J_0(ax) - 1]J_1(bx)\frac{dx}{x^2} = \frac{-b}{4}\left[1 + 2\ln\frac{a}{b}\right] \quad [0 < b < a];$$
$$= -\frac{a^2}{4b} \quad [0 < a < b].$$ ИП II 21 (28) u

4. $$\int_0^\infty [1 - J_0(ax)]\,J_0(bx)\,\frac{dx}{x} = 0 \qquad [0 < a < b];$$
$$= \ln\frac{a}{b} \quad [0 < b < a].$$ ИП II 14 (16)

6.534 $$\int_0^\infty \frac{x^3 J_0(x)}{x^4 - a^4}\,dx = \frac{1}{2}K_0(a) - \frac{1}{4}\pi N_0(a) \quad [a > 0].$$ ИП II 340 (5)

6.535 $$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+a^2}[J_\nu(x)]^2\,dx = I_\nu(a)\,K_\nu(a) \quad [\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1].$$
ИП II 342 (26)

6.536 $$\int_0^\infty \frac{x^3 J_0(bx)}{x^4+a^4}\,dx = \operatorname{ker}(ab) \quad \left[b > 0,\ |\arg a| < \frac{1}{4}\pi\right].$$
ИП II 8 (9), МО 46 u

6.537 $$\int_0^\infty \frac{xJ_0(bx)}{x^4+a^4}\,dx = -\frac{1}{a^2}\operatorname{kei}(ab) \quad \left[b > 0,\ |\arg a| < \frac{\pi}{4}\right].$$ МО 46 u

6.538

1 $$\int_0^\infty J_1(ax)\,J_1(bx)\,\frac{dx}{x^2}=\frac{a+b}{\pi}\left[E\left(\frac{2i\sqrt{ab}}{|b-a|}\right)-K\left(\frac{2i\sqrt{ab}}{|b-a|}\right)\right]$$

$[a>0,\ b>0]$. ИП II 21 (30

2. $$\int_0^\infty x^{-1}J_{\nu+2n+1}(x)\,J_{\nu+2m+1}(x)\,dx=0 \quad [m\neq n \quad \nu>-1];$$

$$=(4n+2\nu+2)^{-1} \quad [m=n,\ \nu>-1].$$ ВТФ II 64

6.539

1 $$\int_a^b \frac{dx}{x\,[J_\nu(x)]^2}=\frac{\pi}{2}\left[\frac{N_\nu(b)}{J_\nu(b)}-\frac{N_\nu(a)}{J_\nu(a)}\right].$$ ИП II 338 (41)

2 $$\int_a^b \frac{dx}{x\,[N_\nu(x)]^2}=\frac{\pi}{2}\left[\frac{J_\nu(a)}{N_\nu(a)}-\frac{J_\nu(b)}{N_\nu(b)}\right].$$ ИП II 339 (49)

3. $$\int_a^b \frac{dx}{xJ_\nu(x)\,N_\nu(x)}=\frac{\pi}{2}\ln\left[\frac{J_\nu(a)\,N_\nu(b)}{J_\nu(b)\,N_\nu(a)}\right].$$ ИП II 339 (50)

6.541

1 $$\int_0^\infty xJ_\nu(ax)\,J_\nu(bx)\,\frac{dx}{x^2+c^2}=$$

$$=I_\nu(bc)\,K_\nu(ac) \quad [0<b<a,\ \operatorname{Re} c>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1];$$

$$=I_\nu(ac)\,K_\nu(bc) \quad [0<a<b,\ \operatorname{Re} c>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1].$$

В 471 (4) *и*, ИП II 49 (10)

2. $$\int_0^\infty x^{1-2n}J_\nu(ax)\,J_\nu(bx)\,\frac{dx}{x^2+c^2}=$$

$$=(-1)^n c^{-2n} I_\nu(bc)\,K_\nu(ac) \quad [0<b<a,\ \operatorname{Re} c>0,\ \operatorname{Re}\nu>n-1,\ n=0,\ 1,\ \ldots];$$

$$=(-1)^n c^{-2n} I_\nu(ac)\,K_\nu(bc) \quad [0<a<b,\ \operatorname{Re} c>0,\ \operatorname{Re}\nu>n-1,\ n=0,\ 1,\ \ldots].$$

ИП II 49 (11)

6.542 $$\int_0^\infty \frac{J_\nu(ax)\,N_\nu(bx)-J_\nu(bx)\,N_\nu(ax)}{x\,\{[J_\nu(bx)]^2+[N_\nu(bx)]^2\}}\,dx=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^\nu \quad [0<b<a].$$ ИП II 352 (16)

6.543 $$\int_0^\infty J_\mu(bx)\left\{\cos\left[\frac{1}{2}(\nu-\mu)\pi\right]J_\nu(ax)-\right.$$

$$\left.-\sin\left[\frac{1}{2}(\nu-\mu)\pi\right]N_\nu(ax)\right\}\frac{x\,dx}{x^2+r^2}=I_\mu(br)\,K_\nu(ar)$$

$[\operatorname{Re} r>0,\ a\geqslant b>0,\ \operatorname{Re}\mu>|\operatorname{Re}\nu|-2]$. В 471 (5)

6.544

1. $$\int_0^\infty J_\nu\left(\frac{a}{x}\right) N_\nu\left(\frac{x}{b}\right)\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{a}\left[\frac{2}{\pi}K_{2\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) - N_{2\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)\right]$$
$\left[a>0,\ b>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right]$. ИП II 357 (47)

2. $$\int_0^\infty J_\nu\left(\frac{a}{x}\right) J_\nu\left(\frac{x}{b}\right)\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}J_{2\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)$$
$\left[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$. ИП II 57 (10)

3. $$\int_0^\infty J_\nu\left(\frac{a}{x}\right) K_\nu\left(\frac{x}{b}\right)\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}e^{\frac{1}{2}i\nu\pi}K_{2\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}}e^{\frac{1}{4}i\pi}\right) + \frac{1}{a}e^{-\frac{1}{2}i\nu\pi}K_{2\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}}e^{-\frac{1}{4}i\pi}\right)$$
$\left[\operatorname{Re} b>0,\ a>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right]$. ИП II 142 (32)

4. $$\int_0^\infty N_\nu\left(\frac{a}{x}\right) J_\nu\left(\frac{x}{b}\right)\frac{dx}{x^2} = \frac{2}{a\pi}\left[K_{2\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) + \frac{\pi}{2}N_{2\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)\right]$$
$\left[a>0,\ b>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right]$. ИП II 62 (38)

5. $$\int_0^\infty N_\nu\left(\frac{a}{x}\right) K_\nu\left(\frac{x}{b}\right)\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}\left[e^{\frac{1}{2}i(\nu+1)\pi}K_{2\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}}e^{\frac{1}{4}i\pi}\right) + e^{-\frac{1}{2}i(\nu+1)\pi}K_{2\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}}e^{-\frac{1}{4}i\pi}\right)\right]$$
$\left[\operatorname{Re} b>0,\ a>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right]$. ИП II 143 (38)

6. $$\int_0^\infty K_\nu\left(\frac{a}{x}\right) J_\nu\left(\frac{x}{b}\right)\frac{dx}{x^2} = \frac{i}{a}\left[e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}K_{2\nu}\left(e^{\frac{1}{4}\pi i}\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) - e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}K_{2\nu}\left(e^{-\frac{1}{4}\pi i}\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)\right]$$
$\left[\operatorname{Re} a>0,\ b>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{5}{2}\right]$. ИП II 70 (19)

7. $$\int_0^\infty K_\nu\left(\frac{a}{x}\right) N_\nu\left(\frac{x}{b}\right)\frac{dx}{x^2} = \frac{2}{a}\left[\sin\left(\frac{3}{2}\pi\nu\right)\operatorname{kei}_{2\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\pi\nu\right)\operatorname{ker}_{2\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)\right]$$
$\left[\operatorname{Re} a>0,\ b>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{5}{2}\right]$. ИП II 113 (29)

8. $$\int_0^\infty K_\nu\left(\frac{a}{x}\right) K_\nu\left(\frac{x}{b}\right)\frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{a}K_{2\nu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)$$
$[\operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re} b>0]$. ИП II 146 (55)

6.55 Цилиндрические и алгебраические функции

6.551

1 $$\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{2}} J_\nu(xy)\,dx = \sqrt{2}\, y^{-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\nu\right)} + \\ + y^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\nu-\frac{1}{2}\right) + J_\nu(y) S_{-\frac{1}{2},\,\nu-1}(y) - J_{\nu-1}(y) S_{\frac{1}{2},\,\nu}(y)\right]$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}\right].$$ ИП II 21 (1)

2 $$\int\limits_1^\infty x^{\frac{1}{2}} J_\nu(xy)\,dx = y^{-\frac{1}{2}} \left[J_{\nu-1}(y) S_{\frac{1}{2},\,\nu}(y) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2}-\nu\right) J_\nu(y) S_{-\frac{1}{2},\,\nu-1}(y)\right] \qquad [y>0].$$ ИП II 22 (2)

6 552

1 $$\int\limits_0^\infty J_\nu(xy) \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = I_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}ay\right) K_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}ay\right)$$
$$[\operatorname{Re} a>0,\ y>0,\ \operatorname{Re}\nu > -1].$$ ИП II 23 (11), В 477 (3), МО 44

2 $$\int\limits_0^\infty N_\nu(xy) \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\pi}\sec\left(\frac{1}{2}\nu\pi\right) K_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}ay\right) \times \\ \times \left[K_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}ay\right) + \pi\sin\left(\frac{1}{2}\nu\pi\right) I_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}ay\right)\right]$$
$$[y>0,\ \operatorname{Re} a>0,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1].$$ ИП II 100 (18)

3 $$\int\limits_0^\infty K_\nu(xy) \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi^2}{8}\sec\left(\frac{1}{2}\nu\pi\right) \times \\ \times \left\{\left[J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}ay\right)\right]^2 + \left[N_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}ay\right)\right]^2\right\}$$
$$[\operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re} y>0,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1].$$ ИП II 128 (6)

4 $$\int\limits_0^1 J_\nu(xy) \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2}\left[J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}y\right)\right]^2$$
$$[y>0,\ \operatorname{Re}\nu > -1].$$ ИП II 24 (22) *и*

5 $$\int\limits_0^1 N_0(xy) \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2} J_0\left(\frac{1}{2}y\right) N_0\left(\frac{1}{2}y\right)$$
$$[y>0].$$ ИП II 102 (26) *и*

6. $$\int_1^\infty J_\nu(xy)\frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\pi}{2} J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}y\right) N_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}y\right)$$
$[y>0]$. ИП II 24 (23) *и*

7. $$\int_1^\infty N_\nu(xy)\frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{4}\left\{\left[J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}y\right)\right]^2 - \left[N_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}y\right)\right]^2\right\}$$
$[y>0]$. ИП II 102 (27)

6.553 $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} I_\nu(x) K_\nu(x) K_\mu(2x)\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\nu+\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\nu-\frac{1}{2}\mu\right)}{4\Gamma\left(\frac{3}{4}+\nu+\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\nu-\frac{1}{2}\mu\right)}$$
$\left[|\operatorname{Re}\mu|<\frac{1}{2},\ 2\operatorname{Re}\nu>|\operatorname{Re}\mu|-\frac{1}{2}\right]$. ИП II 372 (2)

6.554

1. $$\int_0^\infty xJ_0(xy)\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} = y^{-1}e^{-ay}$$ $[y>0,\ \operatorname{Re} a>0]$. ИП II 7 (4)

2. $$\int_0^1 xJ_0(xy)\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = y^{-1}\sin y$$ $[y>0]$. ИП II 7 (5) *и*

3. $$\int_1^\infty xJ_0(xy)\frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = y^{-1}\cos y$$ $[y>0]$. ИП II 7 (6) *и*

4. $$\int_0^\infty xJ_0(xy)\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = a^{-1}e^{-ay}$$ $[y>0,\ \operatorname{Re} a>0]$. ИП II 7 (7) *и*

5. $$\int_0^\infty \frac{xJ_0(ax)}{\sqrt{x^4+4k^4}}\,dx = K_0(ak)J_0(ak)$$ $[a>0,\ k>0]$. В 473 (1)

6.555 $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} J_{2\nu-1}\left(ax^{\frac{1}{2}}\right) N_\nu(xy)\, dx = -\frac{a}{2y^2}\mathbf{H}_{\nu-1}\left(\frac{a^2}{4y}\right)$$
$\left[a>0,\ y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$. ИП II 111 (17)

6.556 $$\int_0^\infty J_\nu\left[a(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{\pi}{2} J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{a}{2}\right) N_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{a}{2}\right)$$
$[\operatorname{Re}\nu>-1,\ a>0]$. МО 46

6.56—6.58 Цилиндрические и степенные функции

6.561

1. $$\int_0^1 x^\nu J_\nu(ax)\,dx = 2^{\nu-1}a^{-\nu}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\times \left[J_\nu(a)\,\mathbf{H}_{\nu-1}(a)-\mathbf{H}_\nu(a)\,J_{\nu-1}(a)\right] \qquad \left[\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 333 (2) и

2. $$\int_0^1 x^\nu N_\nu(ax)\,dx = 2^{\nu-1}a^{-\nu}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\times \left[N_\nu(a)\,\mathbf{H}_{\nu-1}(a)-\mathbf{H}_\nu(a)\,N_{\nu-1}(a)\right] \qquad \left[\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 338 (43) и

3. $$\int_0^1 x^\nu I_\nu(ax)\,dx = 2^{\nu-1}a^{-\nu}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\times \left[I_\nu(a)\,\mathbf{L}_{\nu-1}(a)-\mathbf{L}_\nu(a)\,I_{\nu-1}(a)\right] \qquad \left[\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 364 (2) и

4. $$\int_0^1 x^\nu K_\nu(ax)\,dx = 2^{\nu-1}a^{-\nu}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\times \left[K_\nu(a)\,\mathbf{L}_{\nu-1}(a)+\mathbf{L}_\nu(a)\,K_{\nu-1}(a)\right] \qquad \left[\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 367 (21) и

5. $$\int_0^1 x^{\nu+1} J_\nu(ax)\,dx = a^{-1}J_{\nu+1}(a) \qquad [\operatorname{Re}\nu>-1].$$ ИП II 333 (3) и

6. $$\int_0^1 x^{\nu+1} N_\nu(ax)\,dx = a^{-1}N_{\nu+1}(a)+2^{\nu+1}a^{-\nu-2}\Gamma(\nu+1) \qquad [\operatorname{Re}\nu>-1].$$ ИП II 339 (44) и

7. $$\int_0^1 x^{\nu+1} I_\nu(ax)\,dx = a^{-1}I_{\nu+1}(a) \qquad [\operatorname{Re}\nu>-1].$$ ИП II 365 (3) и

8. $$\int_0^1 x^{\nu+1} K_\nu(ax)\,dx = 2^{\nu}a^{-\nu-2}\Gamma(\nu+1)-a^{-1}K_{\nu+1}(a) \qquad [\operatorname{Re}\nu>-1].$$ ИП II 367 (22) и

9. $$\int_0^1 x^{1-\nu} J_\nu(ax)\,dx = \frac{a^{\nu-2}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}-a^{-1}J_{\nu-1}(a).$$ ИП II 333 (4) и

10. $$\int_0^1 x^{1-\nu} N_\nu(ax)\,dx = \frac{a^{\nu-2}\operatorname{ctg}(\nu\pi)}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}-a^{-1}N_{\nu-1}(a) \qquad [\operatorname{Re}\nu<1].$$ ИП II 339 (45) и

11 $\int\limits_0^1 x^{1-\nu} I_\nu(ax)\,dx = a^{-1} I_{\nu-1}(a) - \dfrac{a^{\nu-2}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}$. ИП II 365 (4) и

12. $\int\limits_0^1 x^{1-\nu} K_\nu(ax)\,dx = 2^{-\nu} a^{\nu-2}\Gamma(1-\nu) - a^{-1} K_{\nu-1}(a)$

$[\operatorname{Re}\nu < 1]$. ИП II 367 (23) и

13 $\int\limits_0^1 x^\mu J_\nu(ax)\,dx = a^{-\mu-1}\left[(\nu+\mu-1)\,aJ_\nu(a) + \right.$

$\left. + S_{\mu-1,\,\nu-1}(a) - aJ_{\nu-1}(a)\,S_{\mu,\,\nu}(a) + 2^\mu \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu\right)}\right]$

$[a > 0,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1]$. ИП II 22 (8) и

14 $\int\limits_0^\infty x^\mu J_\nu(ax)\,dx = 2^\mu a^{-\mu-1} \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu\right)}$

$\left[-\operatorname{Re}\nu - 1 < \operatorname{Re}\mu < \frac{1}{2},\ a > 0\right]$. ВТФ II 49 (19)

15 $\int\limits_0^\infty x^\mu N_\nu(ax)\,dx = 2^\mu \operatorname{ctg}\left[\frac{1}{2}(\nu+1-\mu)\,\pi\right] a^{-\mu-1} \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu\right)}$

$\left[|\operatorname{Re}\nu| - 1 < \mu < \frac{1}{2},\ a > 0\right]$. ИП II 97 (3) и

16 $\int\limits_0^\infty x^\mu K_\nu(ax)\,dx = 2^{\mu-1} a^{-\mu-1}\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right)$

$[\operatorname{Re}(\mu+1\pm\nu) > 0,\ \operatorname{Re} a > 0]$. ВТФ II 51 (27)

17 $\int\limits_0^\infty \dfrac{J_\nu(ax)}{x^{\nu-q}}\,dx = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}\right)}{2^{\nu-q}a^{q-\nu+1}\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}\right)}$

$\left[-1 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re}\nu - \frac{1}{2}\right]$. В 428 (1), Ку 144 (5)

18 $\int\limits_0^\infty \dfrac{N_\nu(x)}{x^{\nu-\mu}}\,dx = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu-\nu\right)\sin\left(\frac{1}{2}\mu-\nu\right)\pi}{2^{\nu-\mu}\pi}$

$\left[|\operatorname{Re}\nu| < \operatorname{Re}(1+\mu-\nu) < \frac{3}{2}\right]$. В 430 (5)

6.562

1. $$\int_0^\infty x^\mu N_\nu(bx)\frac{dx}{x+a}=$$
$$=(2a)^\mu\pi^{-1}\left\{\sin\left[\frac{1}{2}\pi(\mu-\nu)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(\mu+\nu+1)\right]\times\right.$$
$$\times\Gamma\left[\frac{1}{2}(1+\mu-\nu)\right]S_{-\mu,\nu}(ab)-2\cos\left[\frac{1}{2}\pi(\mu-\nu)\right]\times$$
$$\left.\times\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu\right)S_{-\mu-1,\nu}(ab)\right\}$$
$$\left[b>0,\ |\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}(\mu\pm\nu)>-1,\ \operatorname{Re}\mu<\frac{3}{2}\right].$$

ИП II 98 (8)

2 $$\int_0^\infty \frac{x^\nu J_\nu(ax)}{x+k}dx=\frac{\pi k^\nu}{2\cos\nu\pi}[\mathbf{H}_{-\nu}(ak)-N_{-\nu}(ak)]$$
$$\left[-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2},\ a>0,\ |\arg k|<\pi\right].$$ В 479 (7)

3 $$\int_0^\infty x^\mu K_\nu(bx)\frac{dx}{x+a}=$$
$$=2^{\mu-2}\Gamma\left[\frac{1}{2}(\mu+\nu)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(\mu-\nu)\right]b^{-\mu}\times$$
$$\times{}_1F_2\left(1;\ 1-\frac{\mu+\nu}{2},\ \ 1-\frac{\mu-\nu}{2};\ \frac{a^2b^2}{4}\right)-$$
$$-2^{\mu-3}\Gamma\left[\frac{1}{2}(\mu-\nu-1)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(\mu+\nu-1)\right]ab^{1-\mu}\times$$
$$\times{}_1F_2\left(1;\ \frac{3-\mu-\nu}{2},\ \frac{3-\mu+\nu}{2};\ \frac{a^2b^2}{4}\right)-$$
$$-\pi a^\mu\operatorname{cosec}[\pi(\mu-\nu)]\{K_\nu(ab)+\pi\cos(\mu\pi)\operatorname{cosec}[\pi(\nu+\mu)]I_\nu(ab)\}$$
$$[\operatorname{Re}b>0,\quad|\arg a|<\pi,\quad\operatorname{Re}\mu>|\operatorname{Re}\nu|-1].$$ ИП II 127 (4)

6.563 $$\int_0^\infty x^{\varrho-1}J_\nu(bx)\frac{dx}{(x+a)^{1+\mu}}=\frac{\pi a^{\varrho-\mu-1}}{\sin[(\varrho+\nu-\mu)\pi]\,\Gamma(\mu+1)}\times$$
$$\times\left\{\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m\left(\frac{1}{2}ab\right)^{\nu+2m}\Gamma(\varrho+\nu+2m)}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)\,\Gamma(\varrho+\nu-\mu+2m)}-\right.$$
$$\left.-\sum_{m=0}^\infty\frac{\left(\frac{1}{2}ab\right)^{\mu+1-\varrho+m}\Gamma(\mu+m+1)}{m!\,\Gamma\left[\frac{1}{2}(\mu+\nu-\varrho+m+3)\right]}\frac{\sin\left[\frac{1}{2}(\varrho+\nu-\mu-m)\pi\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(\mu-\nu-\varrho+m+3)\right]}\right\}$$
$$\left[b>0,\ |\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}(\varrho+\nu)>0,\ \operatorname{Re}(\varrho-\mu)<\frac{5}{2}\right].$$

ИП II 23 (10), В 479

6.564

1. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} J_\nu(bx) \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi b}}\, a^{\nu+\frac{1}{2}} K_{\nu+\frac{1}{2}}(ab)$$

$$\left[\operatorname{Re} a > 0, \quad b > 0, \quad -1 < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}\right].$$ ИП II 23(15)

2. $$\int_0^\infty x^{1-\nu} J_\nu(bx) \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2b}}\, a^{\frac{1}{2}-\nu} \left[I_{\nu-\frac{1}{2}}(ab) - \mathbf{L}_{\nu-\frac{1}{2}}(ab)\right]$$

$$\left[\operatorname{Re} a > 0, \quad b > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 23(16)

6.565

1. $$\int_0^\infty x^{-\nu} (x^2+a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} J_\nu(bx)\, dx = 2^\nu a^{-2\nu} b^\nu \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)} I_\nu\left(\frac{ab}{2}\right) K_\nu\left(\frac{ab}{2}\right)$$

$$\left[\operatorname{Re} a > 0, \quad b > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ В 477(4), ИП II 23(17)

2. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} (x^2+a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} J_\nu(bx)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\, b^{\nu-1}}{2^\nu e^{ab}\, \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left[\operatorname{Re} a > 0, \quad b > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 24(18)

3. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} (x^2+a^2)^{-\nu-\frac{3}{2}} J_\nu(bx)\, dx = \frac{b^\nu \sqrt{\pi}}{2^{\nu+1} a e^{ab}\, \Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}$$

$$[\operatorname{Re} a > 0, \quad b > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > -1].$$ ИП II 24(19)

4. $$\int_0^\infty \frac{J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}}{(x^2+a^2)^{\mu+1}}\, dx = \frac{a^{\nu-\mu} b^\mu}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(ab)$$

$$\left[-1 < \operatorname{Re}\nu < \operatorname{Re}\left(2\mu+\frac{3}{2}\right), \quad a > 0, \quad b > 0\right].$$ МО 43

5. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} (x^2+a^2)^\mu N_\nu(bx)\, dx = 2^{\nu-1} \pi^{-1} a^{2\mu+2} (1+\mu)^{-1} \Gamma(\nu) b^{-\nu} \times$$
$$\times {}_1F_2\left(1;\ 1-\nu,\ 2+\mu;\ \frac{a^2b^2}{4}\right) - 2^\mu a^{\mu+\nu+1} [\sin(\nu\pi)]^{-1} \times$$
$$\times \Gamma(\mu+1) b^{-1-\mu} \left[I_{\mu+\nu+1}(ab) - 2\cos(\mu\pi) K_{\mu+\nu+1}(ab)\right]$$

$$[b > 0, \quad \operatorname{Re} a > 0, \quad -1 < \operatorname{Re}\nu < -2\operatorname{Re}\mu].$$ ИП II 100(19)

6. $$\int_0^\infty x^{1-\nu} (x^2+a^2)^\mu N_\nu(bx)\, dx = 2^\mu a^{\mu-\nu+1} b^{-1-\mu} \left\{\frac{\cos(\nu\pi)}{\pi} \Gamma(\mu+1) \times\right.$$
$$\left.\times \Gamma(\nu) I_{\nu-\mu-1}(ab) - 2\operatorname{cosec}(\nu\pi) [\Gamma(-\mu)]^{-1} K_{\nu-\mu-1}(ab)\right\} -$$
$$- \frac{a^{2\mu+2} \operatorname{ctg}(\nu\pi)\, b^\nu}{2^{\nu+1} (\mu+1)\, \Gamma(\nu+1)} {}_1F_2\left(1;\ \nu+1,\ \mu+2;\ \frac{a^2b^2}{4}\right)$$

$$\left[b > 0, \quad \operatorname{Re} a > 0, \quad \frac{1}{2} + 2\operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}\nu < 1\right].$$ ИП II 100(20)

7. $$\int_0^\infty x^{1+\nu}(x^2+a^2)^\mu K_\nu(bx)\,dx = 2^\nu\Gamma(\nu+1)\,a^{\nu+\mu+1}\,b^{-1-\mu}S_{\mu-\nu,\,\mu+\nu+1}(ab)$$

$[\operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re} b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП II 128 (8)

8 $$\int_0^\infty \frac{x^{\varrho-1}J_\nu(ax)}{(x^2+k^2)^{\mu+1}}\,dx = \frac{a^\nu k^{\varrho+\nu-2\mu-2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\varrho+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\mu+1-\frac{1}{2}\varrho-\frac{1}{2}\nu\right)}{2^{\nu+1}\,\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu+1)}\times$$
$$\times\,{}_1F_2\left(\frac{\varrho+\nu}{2};\ \frac{\varrho+\nu}{2}-\mu,\ \nu+1;\ \frac{a^2k^2}{4}\right)+$$
$$+\frac{a^{2\mu+2-\varrho}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\varrho-\mu-1\right)}{2^{2\mu+3-\varrho}\,\Gamma\left(\mu+2+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\varrho\right)}\times$$
$$\times\,{}_1F_2\left(\mu+1;\ \mu+2+\frac{\nu-\varrho}{2},\ \mu+2-\frac{\nu+\varrho}{2};\ \frac{a^2k^2}{4}\right)$$

$\left[a>0,\ -\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}\varrho<2\operatorname{Re}\mu+\frac{7}{2}\right]$. В 477 (1)

6.566

1. $$\int_0^\infty x^\mu N_\nu(bx)\frac{dx}{x^2+a^2} = 2^{\mu-2}\pi^{-1}b^{1-\mu}\times$$
$$\times\cos\left[\frac{\pi}{2}(\mu-\nu+1)\right]\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\right)\times$$
$$\times\,{}_1F_2\left(1;\ 2-\frac{\mu+1+\nu}{2},\ 2-\frac{\mu+1-\nu}{2},\ \frac{a^2b^2}{4}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\pi a^{\mu-1}\operatorname{cosec}\left[\frac{\pi}{2}(\mu+\nu+1)\right]\operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{2}(\mu-\nu+1)\right]I_\nu(ab)-$$
$$-a^{\mu-1}\operatorname{cosec}\left[\frac{\pi}{2}(\mu-\nu+1)\right]K_\nu(ab)$$

$\left[b>0,\ \operatorname{Re} a>0,\ |\operatorname{Re}\nu|-1<\operatorname{Re}\mu<\frac{5}{2}\right]$. ИП II 100 (17)

2 $$\int_0^\infty x^{\nu+1}J_\nu(ax)\frac{dx}{x^2+b^2} = b^\nu K_\nu(ab)$$

$\left[a>0,\ \operatorname{Re} b>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2}\right]$. ВТФ II 96 (58)

3 $$\int_0^\infty x^\nu K_\nu(ax)\frac{dx}{x^2+b^2} = \frac{\pi^2 b^{\nu-1}}{4\cos\nu\pi}\left[\mathbf{H}_{-\nu}(ab)-N_{-\nu}(ab)\right]$$

$\left[a>0,\ \operatorname{Re} b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$. В 468 (9)

4 $$\int_0^\infty x^{-\nu}K_\nu(ax)\frac{dx}{x^2+b^2} = \frac{\pi^2}{4b^{\nu+1}\cos\nu\pi}\left[\mathbf{H}_\nu(ab)-N_\nu(ab)\right]$$

$\left[a>0,\ \operatorname{Re} b>0,\ \operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right]$. В 468 (10)

5. $\int\limits_0^\infty x^{-\nu} J_\nu(ax) \frac{dx}{x^2+b^2} = \frac{\pi}{2b^{\nu+1}} [I_\nu(ab) - \mathbf{L}_\nu(ab)]$

$\left[a > 0,\ \operatorname{Re} b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{5}{2}\right].$ В 468 (11)

6.567

1. $\int\limits_0^1 x^{\nu+1}(1-x^2)^\mu J_\nu(bx)\,dx = 2^\mu \Gamma(\mu+1) b^{-(\mu+1)} J_{\nu+\mu+1}(b)$

$[b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}\mu > -1].$ ИП II 26 (33) *и*

2. $\int\limits_0^1 x^{\nu+1}(1-x^2)^\mu N_\nu(bx)\,dx = b^{-(\mu+1)} [2^\mu \Gamma(\mu+1) N_{\mu+\nu+1}(b) +$

$+ 2^{\nu+1}\pi^{-1}\Gamma(\nu+1) S_{\mu-\nu,\,\mu+\nu+1}(b)]$

$[b > 0,\ \operatorname{Re}\mu > -1,\ \operatorname{Re}\nu > -1].$ ИП II 103 (35) *и*

3. $\int\limits_0^1 x^{1-\nu}(1-x^2)^\mu J_\nu(bx)\,dx = \frac{2^{1-\nu} s_{\nu+\mu,\,\mu-\nu+1}(b)}{b^{\mu+1}\Gamma(\nu)}$

$[b > 0,\ \operatorname{Re}\mu > -1].$ ИП II 25 (31) *и*

4. $\int\limits_0^1 x^{1-\nu}(1-x^2)^\mu N_\nu(bx)\,dx = b^{-(\mu+1)} [2^{1-\nu}\pi^{-1}\cos(\nu\pi)\Gamma(1-\nu) \times$

$\times s_{\mu+\nu,\,\mu-\nu+1}(b) - 2^\mu \operatorname{cosec}(\nu\pi)\Gamma(\mu+1) J_{\mu-\nu+1}(b)]$

$[b > 0,\ \operatorname{Re}\mu > -1,\ \operatorname{Re}\nu < 1].$ ИП II 104 (37) *и*

5. $\int\limits_0^1 x^{1-\nu}(1-x^2)^\mu K_\nu(bx)\,dx = 2^{-\nu-2} b^\nu (\mu+1)^{-1}\Gamma(-\nu) \times$

$\times {}_1F_2\left(1;\ \nu+1,\ \mu+2;\ \frac{b^2}{4}\right) + \pi 2^{\mu-1} b^{-(\mu+1)} \operatorname{cosec}(\nu\pi) \times$

$\times \Gamma(\mu+1) I_{\mu-\nu+1}(b)$ $[\operatorname{Re}\mu > -1,\ \operatorname{Re}\nu < 1].$ ИП II 129 (12) *и*

6. $\int\limits_0^1 x^{1-\nu} J_\nu(bx) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2b}}\, \mathbf{H}_{\nu-\frac{1}{2}}(b)$ $[b > 0].$ ИП II 24 (24) *и*

7. $\int\limits_0^1 x^{1+\nu} N_\nu(bx) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \operatorname{cosec}(\nu\pi) [\cos(\nu\pi) J_{\nu+\frac{1}{2}}(b) - \mathbf{H}_{-\nu-\frac{1}{2}}(b)]$

$[b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1].$ ИП II 102 (28) *и*

8. $\int\limits_0^1 x^{1-\nu} N_\nu(bx) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \{\operatorname{ctg}(\nu\pi) [\mathbf{H}_{\nu-\frac{1}{2}}(b) - N_{\nu-\frac{1}{2}}(b)] - J_{\nu-\frac{1}{2}}(b)\}$

$[b > 0,\ \operatorname{Re}\nu < 1].$ ИП II 102 (30) *и*

9. $\int\limits_0^1 x^\nu (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} J_\nu(bx)\,dx = 2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\, b^{-\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left[J_\nu\left(\frac{b}{2}\right)\right]^2$

$\left[b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$ ИП II 24 (25) *и*

10. $$\int_0^1 x^\nu (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} N_\nu(bx)\,dx = 2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\, b^{-\nu}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) J_\nu\left(\frac{b}{2}\right) N_\nu\left(\frac{b}{2}\right)$$
$\left[b>0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 102 (31) и

11. $$\int_0^1 x^\nu (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} K_\nu(bx)\,dx = 2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\, b^{-\nu}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) I_\nu\left(\frac{b}{2}\right) K_\nu\left(\frac{b}{2}\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 129 (10) и

12. $$\int_0^1 x^\nu (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} I_\nu(bx)\,dx = 2^{-\nu-1}\sqrt{\pi}\, b^{-\nu}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \left[I_\nu\left(\frac{b}{2}\right)\right]^2$$
ИП II 365 (5) и

13. $$\int_0^1 x^{\nu+1} (1-x^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} J_\nu(bx)\,dx = 2^{-\nu}\frac{b^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\sin b$$
$\left[b>0,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right]$. ИП II 25 (27) и

14. $$\int_1^\infty x^\nu (x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} N_\nu(bx)\,dx = 2^{\nu-2}\sqrt{\pi}\, b^{-\nu}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \times \left[J_\nu\left(\frac{b}{2}\right) J_{-\nu}\left(\frac{b}{2}\right) - N_\nu\left(\frac{b}{2}\right) N_{-\nu}\left(\frac{b}{2}\right)\right]$$
$\left[|\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2},\quad b>0\right]$. ИП II 103 (32) и

15. $$\int_1^\infty x^\nu (x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} K_\nu(bx)\,dx = \frac{2^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}}\, b^{-\nu}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \left[K_\nu\left(\frac{b}{2}\right)\right]^2$$
$\left[\operatorname{Re} b>0,\quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 129 (11) и

16. $$\int_1^\infty x^{-\nu} (x^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}} J_\nu(bx)\,dx = -2^{-\nu-1}\sqrt{\pi}\, b^{\nu}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right) J_\nu\left(\frac{b}{2}\right) N_\nu\left(\frac{b}{2}\right)$$
$\left[b>0,\quad |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right]$. ИП II 25 (26) и

17. $$\int_1^\infty x^{-\nu+1} (x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} J_\nu(bx)\,dx = \frac{2^{-\nu}}{\sqrt{\pi}}\, b^{-\nu-1}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\cos b$$
$\left[b>0,\quad |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right]$. ИП II 25 (28)

6.568

1. $$\int_0^\infty x^\nu N_\nu(bx)\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{\pi}{2}a^{\nu-1}J_\nu(ab)$$

$\left[a>0,\quad b>0,\quad -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{5}{2}\right]$. ИП II 101 (22)

2. $$\int_0^\infty x^\mu N_\nu(bx)\frac{dx}{x^2-a^2}=$$
$$=\frac{\pi}{2}a^{\mu-1}J_\nu(ab)+2^\mu\pi^{-1}a^{\mu-1}\cos\left[\frac{\pi}{2}(\mu-\nu+1)\right]\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)S_{-\mu,\,\nu}(ab)$$

$\left[a>0,\quad b>0,\quad |\operatorname{Re}\nu|-1<\operatorname{Re}\mu<\frac{5}{2}\right]$. ИП II (101) (25)

6.569 $$\int_0^1 x^\lambda(1-x)^{\mu-1}J_\nu(ax)\,dx=\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(1+\lambda+\nu)2^{-\nu}a^\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1+\lambda+\mu+\nu)}\times$$
$$\times{}_2F_3\left(\frac{\lambda+1+\nu}{2},\ \frac{\lambda+2+\nu}{2};\ \nu+1,\ \frac{\lambda+1+\mu+\nu}{2},\ \frac{\lambda+2+\mu+\nu}{2};\ -\frac{a^2}{4}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\quad \operatorname{Re}(\lambda+\nu)>-1]$. ИП II 193(56) и

6.571

1. $$\int_0^\infty [(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\pm x]^\mu J_\nu(bx)\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=a^\mu I_{\frac{1}{2}(\nu\mp\mu)}\left(\frac{ab}{2}\right)K_{\frac{1}{2}(\nu\pm\mu)}\left(\frac{ab}{2}\right)$$

$\left[\operatorname{Re}a>0,\quad b>0,\quad \operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}\mu<\frac{3}{2}\right]$. ИП II 26 (38)

2 $$\int_0^\infty \left[(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}-x\right]^\mu N_\nu(bx)\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$
$$=a^\mu\left[\operatorname{ctg}(\nu\pi)I_{\frac{1}{2}(\mu+\nu)}\left(\frac{ab}{2}\right)K_{\frac{1}{2}(\mu-\nu)}\left(\frac{ab}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\operatorname{cosec}(\nu\pi)I_{\frac{1}{2}(\mu-\nu)}\left(\frac{ab}{2}\right)K_{\frac{1}{2}(\mu+\nu)}\left(\frac{ab}{2}\right)\right]$$

$\left[\operatorname{Re}a>0,\quad b>0,\quad \operatorname{Re}\mu>-\frac{3}{2},\quad |\operatorname{Re}\nu|<1\right]$. ИП II 104 (40)

3. $$\int_0^\infty [(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}+x]^\mu K_\nu(bx)\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$
$$=\frac{\pi^2}{4}a^\mu\operatorname{cosec}(\nu\pi)\left[J_{\frac{1}{2}(\nu-\mu)}\left(\frac{ab}{2}\right)N_{-\frac{1}{2}(\nu+\mu)}\left(\frac{ab}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-N_{\frac{1}{2}(\nu-\mu)}\left(\frac{ab}{2}\right)J_{-\frac{1}{2}(\nu+\mu)}\left(\frac{ab}{2}\right)\right]$$

$[\operatorname{Re}a>0,\quad \operatorname{Re}b>0]$. ИП II 130 (15)

6.572

1. $$\int_0^\infty x^{-\mu}\left[(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}+a\right]^{\mu} J_\nu(bx)\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)}{ab\Gamma(\nu+1)}W_{\frac{1}{2}\mu,\frac{1}{2}\nu}(ab)\,M_{-\frac{1}{2}\mu,\frac{1}{2}\nu}(ab)$$
$[\operatorname{Re} a>0,\quad b>0,\quad \operatorname{Re}(\nu-\mu)>-1]$. ИП II 26 (40)

2. $$\int_0^\infty x^{-\mu}\left[(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}+a\right]^{\mu} K_\nu(bx)\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)}{2ab}W_{\frac{1}{2}\mu,\frac{1}{2}\nu}(iab)\,W_{\frac{1}{2}\mu,\frac{1}{2}\nu}(-iab)$$
$[\operatorname{Re} a>0,\quad \operatorname{Re} b>0,\quad \operatorname{Re}\mu+|\operatorname{Re}\nu|<1]$. ИП II 130 (18), Бу 87 (6а)

3. $$\int_0^\infty x^{-\mu}\left[(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}-a\right]^{\mu} N_\nu(bx)\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$
$$=-\frac{1}{ab}W_{-\frac{1}{2}\mu,\frac{1}{2}\nu}(ab)\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)}\operatorname{tg}\left(\frac{\nu-\mu}{2}\pi\right)M_{\frac{1}{2}\mu,\frac{1}{2}\nu}(ab)+\right.$$
$$\left.+\sec\left(\frac{\nu-\mu}{2}\pi\right)W_{\frac{1}{2}\mu,\frac{1}{2}\nu}(ab)\right\}$$
$\left[\operatorname{Re} a>0,\quad b>0,\quad |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\mu\right]$. ИП II 105 (42)

6.573

1. $$\int_0^\infty x^{\nu-M+1}J_\nu(bx)\prod_{i=1}^{k}J_{\mu_i}(a_ix)\,dx=0,\qquad M=\sum_{i=1}^{k}\mu_i$$
$$\left[a_i>0,\quad \sum_{i=1}^{k}a_i<b<\infty,\quad -1<\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}M+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\right].$$
ИП II 54 (42)

2. $$\int_0^\infty x^{\nu-M-1}J_\nu(bx)\prod_{i=1}^{k}J_{\mu_i}(a_ix)\,dx=$$
$$=2^{\nu-M-1}b^{-\nu}\Gamma(\nu)\prod_{i=1}^{k}\frac{a_i^{\mu_i}}{\Gamma(1+\mu_i)},\qquad M=\sum_{i=1}^{k}\mu_i$$
$$\left[a_i>0,\quad \sum_{i=1}^{k}a_i<b<\infty,\quad 0<\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}M+\frac{1}{2}k+\frac{3}{2}\right].$$
В 460 (16) *и*, ИП II 54 (43)

6.574

1. $$\int_0^\infty J_\nu(\alpha t) J_\mu(\beta t) t^{-\lambda}\, dt =$$
$$= \frac{\alpha^\nu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)}{2^\lambda \beta^{\nu-\lambda+1} \Gamma\left(\frac{-\nu+\mu+\lambda+1}{2}\right) \Gamma(\nu+1)} \times$$
$$\times F\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}, \frac{\nu-\mu-\lambda+1}{2};\ \nu+1;\ \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$$
$[\operatorname{Re}(\nu+\mu-\lambda+1) > 0,\quad \operatorname{Re}\lambda > -1,\quad 0 < \alpha < \beta]$. В 439 (2) *и*, МО 49

При одновременной замене ν и μ, а также α и β друг другом функция, стоящая в правой части этого равенства, меняется. Таким образом, правая часть представляет собой функцию от $\frac{\alpha}{\beta}$, не аналитическую при $\frac{\alpha}{\beta} = 1$.

В случае $\alpha = \beta$ справедливо равенство

2. $$\int_0^\infty J_\nu(\alpha t) J_\mu(\alpha t) t^{-\lambda}\, dt =$$
$$= \frac{\alpha^{\lambda-1} \Gamma(\lambda) \Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)}{2^\lambda \Gamma\left(\frac{-\nu+\mu+\lambda+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\lambda+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+1}{2}\right)}$$
$[\operatorname{Re}(\nu+\mu+1) > \operatorname{Re}\lambda > 0,\quad \alpha > 0]$. МО 49, В 441 (2) *и*

3. $$\int_0^\infty J_\nu(\alpha t) J_\mu(\beta t) t^{-\lambda}\, dt =$$
$$= \frac{\beta^\mu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)}{2^\lambda \alpha^{\mu-\lambda+1} \Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+1}{2}\right) \Gamma(\mu+1)} \times$$
$$\times F\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}, \frac{-\nu+\mu-\lambda+1}{2};\ \mu+1;\ \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$$
$[\operatorname{Re}(\nu+\mu-\lambda+1) > 0,\quad \operatorname{Re}\lambda > -1,\quad 0 < \beta < \alpha]$. МО 50, В 440 (3) *и*

Если $\mu-\nu+\lambda+1$ (или $\nu-\mu+\lambda+1$) равно целому отрицательному числу, то правая часть в равенстве 6.574 1. (или 6.574 3.) обращается в нуль. Особенно важны те случаи, когда при этом гипергеометрическая функция F в 6.574 3. (или 6.574 1.) сводится к элементарной функции.

6.575

1. $$\int_0^\infty J_{\nu+1}(\alpha t) J_\mu(\beta t) t^{\mu-\nu}\, dt = 0 \qquad [\alpha < \beta];$$
$$= \frac{(\alpha^2-\beta^2)^{\nu-\mu} \beta^\mu}{2^{\nu-\mu} \alpha^{\nu+1} \Gamma(\nu-\mu+1)} \qquad [\alpha \geqslant \beta]$$
$[\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}(\nu+1) > 0]$. МО 51

2. $$\int_0^\infty \frac{J_\nu(x) J_\mu(x)}{x^{\nu+\mu}} dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu)}{2^{\nu+\mu}\Gamma\left(\nu+\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}$$

$[\operatorname{Re}(\nu+\mu) > 0]$. Ку 147 (17), В 434 (1)

6.576

1. $$\int_0^\infty x^{\mu-\nu+1} J_\mu(x) K_\nu(x)\, dx = \frac{1}{2}\Gamma(\mu-\nu+1)$$

$[\operatorname{Re}\mu > -1, \quad \operatorname{Re}(\mu-\nu) > -1]$. ИП II 370 (47)

2. $$\int_0^\infty x^{-\lambda} J_\nu(ax) J_\nu(bx)\, dx =$$

$$= \frac{a^\nu b^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{1-\lambda}{2}\right)}{2^\lambda (a+b)^{2\nu-\lambda+1}\Gamma(\nu+1)\,\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)} \times$$

$$\times F\left[\nu+\frac{1-\lambda}{2}\quad \nu+\frac{1}{2};\ 2\nu+1;\ \frac{4ab}{(a+b)^2}\right]$$

$[a > 0, \quad b > 0, \quad 2\operatorname{Re}\nu+1 > \operatorname{Re}\lambda > -1]$. ИП II 47 (4)

3. $$\int_0^\infty x^{-\lambda} K_\mu(ax) J_\nu(bx)\, dx =$$

$$= \frac{b^\nu \Gamma\left(\frac{\nu-\lambda+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\lambda-\mu+1}{2}\right)}{2^{\lambda+1} a^{\nu-\lambda+1}\Gamma(1+\nu)} \times$$

$$\times F\left(\frac{\nu-\lambda+\mu+1}{2}, \frac{\nu-\lambda-\mu+1}{2};\ \nu+1;\ -\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$[\operatorname{Re}(a \pm ib) > 0, \quad \operatorname{Re}(\nu-\lambda+1) > |\operatorname{Re}\mu|]$.

ВТФ II 52 (31), ИП II 63 (4), В 449 (1)

4. $$\int_0^\infty x^{-\lambda} K_\mu(ax) K_\nu(bx)\, dx =$$

$$= \frac{2^{-2-\lambda} a^{-\nu+\lambda-1} b^\nu}{\Gamma(1-\lambda)}\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda-\mu+\nu}{2}\right) \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{1-\lambda+\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda-\mu-\nu}{2}\right) \times$$

$$\times F\left(\frac{1-\lambda+\mu+\nu}{2}, \frac{1-\lambda-\mu+\nu}{2};\ 1-\lambda;\ 1-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$[\operatorname{Re}(a+b) > 0, \operatorname{Re}\lambda < 1 - |\operatorname{Re}\mu| - |\operatorname{Re}\nu|]$. ИП II 145 (49), ВТФ II 93 (36)

5. $$\int_0^\infty x^{-\lambda} K_\mu(ax) I_\nu(bx)\, dx =$$

$$= \frac{b^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu\right)}{2^{\lambda+1}\Gamma(\nu+1)\, a^{-\lambda+\nu+1}} \times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu;\ \nu+1;\ \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$[\operatorname{Re}(\nu+1-\lambda \pm \mu) > 0, \ a > b]$. ВТФ II 93 (35)

6. $$\int_0^\infty x^{-\lambda} N_\mu(ax) J_\nu(bx)\,dx = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi(\nu-\mu-\lambda)}{2}\int_0^\infty x^{-\lambda}K_\mu(ax) I_\nu(bx)\,dx$$

$[a > b,\ \operatorname{Re}(\nu-\lambda+1\pm\mu) > 0]$; (см. 6.576 5.). ВТФ II 93(37)

7. $$\int_0^\infty x^{\mu+\nu+1} J_\mu(ax) K_\nu(bx)\,dx = 2^{\mu+\nu} a^\mu b^\nu \frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{(a^2+b^2)^{\mu+\nu+1}}$$

$[\operatorname{Re}\mu > |\operatorname{Re}\nu| - 1,\ \operatorname{Re} b > |\operatorname{Im} a|]$. ИП II 137(16), ВТФ II 93(39), В 449(2)

6.577

1. $$\int_0^\infty x^{\nu-\mu+1+2n} J_\mu(ax) J_\nu(bx) \frac{dx}{x^2+c^2} = (-1)^n c^{\nu-\mu+2n} I_\mu(ac) K_\nu(bc)$$

$[a > 0,\ b > a,\ \operatorname{Re} c > 0,\ 1+\operatorname{Re}\mu - 2n > \operatorname{Re}\nu > -1-n,\ n$ — целое$]$.
ИП II 49(13)

2. $$\int_0^\infty x^{\mu-\nu+1+2n} J_\mu(ax) J_\nu(bx) \frac{dx}{x^2+c^2} = (-1)^n c^{\mu-\nu+2n} I_\nu(bc) K_\mu(ac)$$

$[b > 0,\ a > b,\ \operatorname{Re}\nu - 2n + 1 > \operatorname{Re}\mu > -n-1,\ n$ — целое$]$.
ИП II 49(15)

6.578

1. $$\int_0^\infty x^{\varrho-1} J_\lambda(ax) J_\mu(bx) J_\nu(cx)\,dx =$$
$$= \frac{2^{\varrho-1} a^\lambda b^\mu c^{-\lambda-\mu-\varrho}\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu+\nu+\varrho}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(1-\frac{\lambda+\mu-\nu+\varrho}{2}\right)} \times$$
$$\times F_4\left(\frac{\lambda+\mu-\nu+\varrho}{2}, \frac{\lambda+\mu+\nu+\varrho}{2}; \lambda+1, \mu+1; \frac{a^2}{c^2}, \frac{b^2}{c^2}\right)$$

$\left[\operatorname{Re}(\lambda+\mu+\nu+\varrho) > 0,\ \operatorname{Re}\varrho < \frac{5}{2},\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ c > a+b\right]$.
ИП II 351(9)

2. $$\int_0^\infty x^{\varrho-1} J_\lambda(ax) J_\mu(bx) K_\nu(cx)\,dx =$$
$$= \frac{2^{\varrho-2} a^\lambda b^\mu c^{-\varrho-\lambda-\mu}}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)}\Gamma\left(\frac{\varrho+\lambda+\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+\lambda+\mu+\nu}{2}\right)\times$$
$$\times F_4\left(\frac{\varrho+\lambda+\mu-\nu}{2}, \frac{\varrho+\lambda+\mu+\nu}{2}; \lambda+1, \mu+1; -\frac{a^2}{c^2}, -\frac{b^2}{c^2}\right)$$

$[\operatorname{Re}(\varrho+\lambda+\mu) > |\operatorname{Re}\nu|,\ \operatorname{Re} c > |\operatorname{Im} a| + |\operatorname{Im} b|]$. ИП II 373(8)

3. $$\int_0^\infty x^{\lambda-\mu-\nu+1} J_\nu(ax) J_\mu(bx) J_\lambda(cx)\,dx = 0$$

$\left[\operatorname{Re}\lambda > -1,\ \operatorname{Re}(\lambda-\mu-\nu) < \frac{1}{2},\ c > b > 0,\ 0 < a < c-b\right]$. ИП II 53(36)

4. $$\int_0^\infty x^{\lambda-\mu-\nu-1} J_\nu(ax) J_\mu(bx) J_\lambda(cx)\,dx = \frac{2^{\lambda-\mu-\nu-1} a^\nu b^\mu \Gamma(\lambda)}{c^\lambda \Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}$$

$$\left[\operatorname{Re}\lambda > 0,\ \operatorname{Re}(\lambda-\mu-\nu) < \frac{5}{2},\ c > b > 0,\ 0 < a < c-b\right].$$

ИП II 53 (37)

5 $$\int_0^\infty x^{1+\mu} N_\mu(ax) J_\nu(bx) J_\nu(cx)\,dx = 0 \quad [0 < b < c,\ 0 < a < c-b].$$

ИП II 352 (13)

6. $$\int_0^\infty x^{\mu+1} K_\mu(ax) J_\nu(bx) J_\nu(cx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a^\mu b^{-\mu-1} c^{-\mu-1} e^{-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\pi i} \times$$

$$\times (u^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{4}} Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(u), \quad 2bcu = a^2+b^2+c^2$$

$$[\operatorname{Re} a > |\operatorname{Im} b|,\ c > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1].$$

В 452 (6), ИП II 64 (12)

7. $$\int_0^\infty x^{\mu+1} I_\nu(ax) K_\mu(bx) J_\nu(cx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a^{-\mu-1} b^\mu c^{-\mu-1} e^{-\left(\mu-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4}\right)\pi i} (v^2+1)^{-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{4}} Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(iv),$$

$$2acv = b^2-a^2+c^2$$

$$[\operatorname{Re} b > |\operatorname{Re} a|,\ c > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1].$$ ИП II 66 (22)

8. $$\int_0^\infty x^{1-\mu} J_\mu(ax) J_\nu(bx) J_\nu(cx)\,dx =$$

$$= \frac{c^{\mu-1} (\operatorname{sh} u)^{\mu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi^3 a^\mu b^{1-\mu}}} e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\pi i} \sin[(\nu-\mu)\pi] Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\mu}(\operatorname{ch} u),$$

$$2bc \operatorname{ch} u = a^2-b^2-c^2$$

$$\left[\operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2},\ 0 < c < a-b,\ b > 0\right];$$

$$= \frac{b^{\mu-1} c^{\mu-1}}{\sqrt{2\pi}\, a^\mu} (\sin v)^{\mu-\frac{1}{2}} \mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\mu}(\cos v),\ 2bc\cos v = b^2+c^2-a^2$$

$$\left[\operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2},\ |a-b| < c < a+b,\ a > 0,\ b > 0\right];$$

$$= 0 \left[\operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2},\ 0 < c < b-a \ \text{или}\right.$$

$$\left. a+b < c < \infty,\ a > 0,\ b > 0\right].$$ ИП II 52 (34)

9. $$\int_0^\infty J_\nu(ax) J_\nu(bx) J_\nu(cx) x^{1-\nu}\,dx = \frac{2^{\nu-1}\Delta^{2\nu-1}}{(abc)^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

где Δ — площадь треугольника, стороны которого равны a, b, c; в том случае, когда отрезки, длины которых суть a, b, c, не могут образовать треугольника, величина интеграла равна нулю $\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$.

МО 52, В 451 (3)

10. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} K_\mu(ax) K_\mu(bx) J_\nu(cx)\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\, c^\nu \Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\nu-\mu+1)}{2^{\frac{3}{2}}(ab)^{\nu+1}(u^2-1)^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4}}} P_{\mu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\frac{1}{2}}(u),$$

$$2abu = a^2+b^2+c^2$$

$[\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} b > 0, c > 0, \operatorname{Re}(\nu \pm \mu) > -1, \operatorname{Re}\nu > -1]$. ИП II 67 (30)

11. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} K_\mu(ax) I_\mu(bx) J_\nu(cx)\,dx = \frac{(ab)^{-\nu-1} c^\nu e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi i} Q_{\mu-\frac{1}{2}}^{\nu+\frac{1}{2}}(u)}{\sqrt{2\pi}(u^2-1)^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4}}},$$

$$2abu = a^2+b^2+c^2$$

$[\operatorname{Re} a > |\operatorname{Re} b|, c > 0, \operatorname{Re}\nu > -1, \operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1]$. ИП II 66 (24)

12. $$\int_0^\infty x^{\nu+1}[J_\nu(ax)]^2 N_\nu(bx)\,dx =$$

$$= 0 \qquad \left[a > 0,\ 0 < b < 2a,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right];$$

$$= \frac{2^{3\nu+1} a^{2\nu} b^{-\nu-1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(b^2-4a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}$$

$\left[a > 0,\ 2a < b < \infty,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right]$. ИП II 109 (8)

13. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} J_\nu(ax) N_\nu(ax) J_\nu(bx)\,dx =$$

$$= 0 \qquad \left[a > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2},\ 0 < b < 2a\right];$$

$$= -\frac{2^{3\nu+1} a^{2\nu} b^{-\nu-1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(b^2-4a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}$$

$\left[a > 0,\ 2a < b < \infty,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right]$. ИП II 55 (49)

14. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} J_\mu(xa\sin\psi)\, J_\nu(xa\sin\varphi)\, K_\mu(xa\cos\varphi\cos\psi)\, dx =$$
$$= \frac{2^\nu \Gamma(\mu+\nu+1)(\sin\varphi)^\nu \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2\nu+1}}{a^{\nu+2}(\cos\psi)^{2\nu+2}} P_\nu^{-\mu}(\cos\alpha), \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \operatorname{tg}\psi\cos\varphi$$
$$\left[a>0,\ \frac{\pi}{2}>\varphi>0,\ 0<\psi<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu)>-1\right].$$
ИП II 64 (11)

15. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} J_\nu(ax)\, K_\nu(bx)\, J_\nu(cx)\, dx = \frac{2^{3\nu}(abc)^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,[(a^2+b^2+c^2)^2-4a^2c^2]^{\nu+\frac{1}{2}}}$$
$$\left[\operatorname{Re} b > |\operatorname{Im} a|,\ c>0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$
ИП II 63 (8)

16. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} I_\nu(ax)\, K_\nu(bx)\, J_\nu(cx)\, dx = \frac{2^{3\nu}(abc)^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,[(b^2-a^2+c^2)^2+4a^2c^2]^{\nu+\frac{1}{2}}}$$
$$\left[\operatorname{Re} b > \operatorname{Re} a,\ c>0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$
ИП II 65 (18)

6.579

1. $$\int_0^\infty x^{2\nu+1} J_\nu(ax)\, N_\nu(ax)\, J_\nu(bx)\, N_\nu(bx)\, dx =$$
$$= \frac{a^{2\nu}\Gamma(3\nu+1)}{2\pi b^{4\nu+2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma\left(2\nu+\frac{3}{2}\right)} \times$$
$$\times F\left(\nu+\frac{1}{2},\ 3\nu+1;\ 2\nu+\frac{3}{2};\ \frac{a^2}{b^2}\right)$$
$$\left[0<a<b,\ -\frac{1}{3}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right].$$
ВТФ II 94 (45), ИП II 352 (15)

2. $$\int_0^\infty x^{2\nu+1} J_\nu(ax)\, K_\nu(ax)\, J_\nu(bx)\, K_\nu(bx)\, dx =$$
$$= \frac{2^{\nu-3}a^{2\nu}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, b^{4\nu+2}\Gamma(\nu+1)} \times$$
$$\times F\left(\nu+\frac{1}{2},\ \frac{3\nu+1}{2};\ 2\nu+1;\ 1-\frac{a^4}{b^4}\right)$$
$$\left[0<a<b,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{3}\right].$$
ИП II 373 (10)

3. $$\int_0^\infty x^{1-2\nu}[J_\nu(x)]^4\, dx = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu)}{2\pi\left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]^2\Gamma(3\nu)}$$
$[\operatorname{Re}\nu>0]$.
ИП II 342 (25)

4. $$\int_0^\infty x^{1-2\nu}[J_\nu(ax)]^2[J_\nu(bx)]^2\,dx =$$
$$= \frac{a^{2\nu-1}\Gamma(\nu)}{2\pi b\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2\nu+\frac{1}{2}\right)} F\left(\nu,\ \frac{1}{2}-\nu;\ 2\nu+\frac{1}{2};\ \frac{a^2}{b^2}\right).$$

ИПII 351 (10)

6.581

1. $$\int_0^a x^{\lambda-1}J_\mu(x)\,J_\nu(a-x)\,dx =$$
$$= 2^\lambda \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m\Gamma(\lambda+\mu+m)\,\Gamma(\lambda+m)}{m!\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu+m+1)} J_{\lambda+\mu+\nu+2m}(a)$$

$[\operatorname{Re}(\lambda+\mu)>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИПII 354 (25)

2. $$\int_0^a x^{\lambda-1}(a-x)^{-1}J_\mu(x)\,J_\nu(a-x)\,dx =$$
$$= \frac{2^\lambda}{a\nu} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m\Gamma(\lambda+\mu+m)\,\Gamma(\lambda+m)}{m!\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu+m+1)} (\lambda+\mu+\nu+2m)\,J_{\lambda+\mu+\nu+2m}(a)$$

$[\operatorname{Re}(\lambda+\mu)>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$. ИПII 354 (27)

3. $$\int_0^a x^\mu(a-x)^\nu J_\mu(x)\,J_\nu(a-x)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(\mu+\nu+1)} a^{\mu+\nu+\frac{1}{2}} J_{\mu+\nu+\frac{1}{2}}(a)$$

$\left[\operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$. ИПII 354 (28), ВТФII 46 (6)

4. $$\int_0^a x^\mu(a-x)^{\nu+1}J_\mu(x)\,J_\nu(a-x)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(\mu+\nu+2)} a^{\mu+\nu+\frac{3}{2}} J_{\mu+\nu+\frac{1}{2}}(a)$$

$\left[\operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2}\right]$. ИПII 354 (29)

5. $$\int_0^a x^\mu(a-x)^{-\mu-1}J_\mu(x)\,J_\nu(a-x)\,dx =$$
$$= \frac{2^\mu\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu-\mu)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+\nu+1)} a^\mu J_\nu(a) \quad \left[\operatorname{Re}\nu>\operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2}\right].$$

ИПII 355 (30)

6.582 $$\int\limits_0^\infty x^{\mu-1}|x-b|^{-\mu}K_\mu(|x-b|)K_\nu(x)\,dx=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(2b)^{-\mu}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\Gamma(\mu+\nu)\Gamma(\mu-\nu)K_\nu(b)$$
$$\left[b>0,\ \operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\mu>|\operatorname{Re}\nu|\right].$$ ИПII 374(14)

6.583 $$\int\limits_0^\infty x^{\mu-1}(x+b)^{-\mu}K_\mu(x+b)K_\nu(x)\,dx=$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+\nu)\Gamma(\mu-\nu)}{2^\mu b^\mu\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}K_\nu(b)$$
$$[|\arg b|<\pi,\ \operatorname{Re}\mu>|\operatorname{Re}\nu|].$$ ИПII 374(15)

6.584

1. $$\int\limits_0^\infty \frac{x^{\varrho-1}\left[H_\nu^{(1)}(ax)-e^{\varrho\pi i}H_\nu^{(1)}(axe^{\pi i})\right]}{(x^2-r^2)^{m+1}}\,dx=\frac{\pi i}{m!}\left(\frac{d}{dr^2}\right)^m\left[r^{\varrho-2}H_\nu^{(1)}(ar)\right]$$
$$\left[m=0,1,2,\ldots,\ \operatorname{Im}r>0,\ a>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\operatorname{Re}\varrho<2m+\frac{7}{2}\right].$$ В 465

2. $$\int\limits_0^\infty\left[\cos\frac{1}{2}(\varrho-\nu)\pi J_\nu(ax)+\sin\frac{1}{2}(\varrho-\nu)\pi\cdot N_\nu(ax)\right]\frac{x^{\varrho-1}}{(x^2+k^2)^{m+1}}\,dx=$$
$$=\frac{(-1)^{m+1}}{2^m\cdot m!}\left(\frac{d}{k\,dk}\right)^m\left[k^{\varrho-2}K_\nu(ak)\right]$$
$$\left[m=0,1,2,\ldots,\ \operatorname{Re}k>0,\ a>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\operatorname{Re}\varrho<2m+\frac{7}{2}\right].$$ В 466(2)

3. $$\int\limits_0^\infty\{\cos\nu\pi\,J_\nu(ax)-\sin\nu\pi\,N_\nu(ax)\}\frac{x^{1-\nu}\,dx}{(x^2+k^2)^{m+1}}=\frac{a^mK_{\nu+m}(ak)}{2^m\cdot m!\,k^{\nu+m}}$$
$$\left[m=0,1,2,\ldots,\ \operatorname{Re}k>0,\ a>0,\ -2m-\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\nu<1\right].$$ В 466(3)

4. $$\int\limits_0^\infty\left\{\cos\left[\left(\frac{1}{2}\varrho-\frac{1}{2}\nu-\mu\right)\pi\right]J_\nu(ax)+\right.$$
$$\left.+\sin\left[\left(\frac{1}{2}\varrho-\frac{1}{2}\nu-\mu\right)\pi\right]N_\nu(ax)\right\}\frac{x^{\varrho-1}}{(x^2+k^2)^{\mu+1}}\,dx=$$
$$=\frac{\pi k^{\varrho-2\mu-2}}{2\sin\nu\pi\cdot\Gamma(\mu+1)}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}ak\right)^\nu\Gamma\left(\frac{1}{2}\varrho+\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\varrho+\frac{1}{2}\nu-\mu\right)}\times\right.$$
$$\times{}_1F_2\left(\frac{\varrho+\nu}{2};\ \frac{\varrho+\nu}{2}-\mu,\ \nu+1;\ \frac{a^2k^2}{4}\right)-$$
$$\left.-\frac{\left(\frac{1}{2}ak\right)^{-\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}\varrho-\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma(1-\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}\varrho-\frac{1}{2}\nu-\mu\right)}{}_1F_2\left(\frac{\varrho-\nu}{2};\ \frac{\varrho-\nu}{2}-\mu,\ 1-\nu;\ \frac{a^2k^2}{4}\right)\right]$$
$$\left[a>0,\ \operatorname{Re}k>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\operatorname{Re}\varrho<2\operatorname{Re}\mu+\frac{7}{2}\right].$$ В 470(1)

5. $$\int_0^\infty \left[\prod_{j,n} J_{\mu_j}(b_n x)\right]\left\{\cos\left[\frac{1}{2}\left(\varrho+\sum_j \mu_j-\nu\right)\pi\right] J_\nu(ax)+\right.$$
$$\left.+\sin\left[\frac{1}{2}\left(\varrho+\sum_j \mu_j-\nu\right)\pi\right] N_\nu(ax)\right\}\frac{x^{\varrho-1}}{x^2+k^2}\,dx=$$
$$=-\left[\prod_{j,n} I_{\mu_j}(b_n k)\right] K_\nu(ak)\,k^{\varrho-2}$$
$\left[\operatorname{Re} k>0,\ a>\sum|\operatorname{Re} b_n|,\ \operatorname{Re}\left(\varrho+\sum\mu_j\right)>|\operatorname{Re}\nu|\right]$. В 472(9)

6.59 Цилиндрические функции от более сложных аргументов и степенная функция

6.591

1. $$\int_0^\infty x^{2\nu+\frac{1}{2}} J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{x}\right) K_\nu(bx)\,dx=$$
$$=\sqrt{2\pi}\,b^{-\nu-1}a^{\nu+\frac{1}{2}} J_{1+2\nu}\left(\sqrt{2ab}\right) K_{1+2\nu}\left(\sqrt{2ab}\right)$$
$[a>0,\ \operatorname{Re} b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИПII 142(35)

2. $$\int_0^\infty x^{2\nu+\frac{1}{2}} N_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{x}\right) K_\nu(bx)\,dx=$$
$$=\sqrt{2\pi}\,b^{-\nu-1}a^{\nu+\frac{1}{2}} N_{2\nu+1}\left(\sqrt{2ab}\right) K_{2\nu+1}\left(\sqrt{2ab}\right)$$
$[a>0,\ \operatorname{Re} b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИПII 143(41)

3. $$\int_0^\infty x^{2\nu+\frac{1}{2}} K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{x}\right) K_\nu(bx)\,dx=$$
$$=\sqrt{2\pi}\,b^{-\nu-1}a^{\nu+\frac{1}{2}} K_{2\nu+1}\left(e^{\frac{1}{4}i\pi}\sqrt{2ab}\right) K_{2\nu+1}\left(e^{-\frac{1}{4}i\pi}\sqrt{2ab}\right)$$
$[\operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re} b>0]$. ИПII 146(56)

4. $$\int_0^\infty x^{-2\nu+\frac{1}{2}} J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{x}\right) K_\nu(bx)\,dx=\sqrt{2\pi}\,b^{\nu-1}a^{\frac{1}{2}-\nu} K_{2\nu-1}\left(\sqrt{2ab}\right)\times$$
$$\times\left[\sin(\nu\pi) J_{2\nu-1}\left(\sqrt{2ab}\right)+\cos(\nu\pi) N_{2\nu-1}\left(\sqrt{2ab}\right)\right]$$
$[a>0,\ \operatorname{Re} b>0,\ \operatorname{Re}\nu<1]$. ИПII 142(34)

5. $$\int_0^\infty x^{-2\nu+\frac{1}{2}} N_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{x}\right) K_\nu(bx)\,dx=$$
$$=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,b^{\nu-1}a^{\frac{1}{2}-\nu}\sec(\nu\pi) K_{2\nu-1}\left(\sqrt{2ab}\right)\times$$
$$\times\left[J_{2\nu-1}\left(\sqrt{2ab}\right)-J_{1-2\nu}\left(\sqrt{2ab}\right)\right]$$
$[a>0,\ \operatorname{Re}\nu<1]$. ИПII 143(40)

6. $$\int_0^\infty x^{-2\nu+\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{a}{x}\right) J_\nu(bx)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2} i \operatorname{cosec}(2\nu\pi)\, b^{\nu-1} a^{\frac{1}{2}-\nu} \left[e^{2\nu\pi i} J_{1-2\nu}(u) J_{2\nu-1}(v) - e^{-2\nu\pi i} J_{2\nu-1}(u) J_{1-2\nu}(v)\right],$$

$$u = \left(\frac{1}{2} ab\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}\pi i};\quad v = \left(\frac{1}{2} ab\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}\pi i}$$

$$\left[a > 0, \quad > 0, \ -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < 3\right].$$ ИПII 58 (12)

7 $$\int_0^\infty x^{-2\nu+\frac{1}{2}} K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{x}\right) N_\nu(bx)\,dx =$$

$$= \sqrt{2\pi}\, b^{\nu-1} a^{\frac{1}{2}-\nu} N_{2\nu-1}\left(\sqrt{2ab}\right) K_{2\nu-1}\left(\sqrt{2ab}\right)$$

$$\left[b > 0,\ \operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re}\nu > \frac{1}{6}\right].$$ ИПII 113 (30)

8 $$\int_0^\infty x^{\varrho-1} J_\mu(ax) J_\nu\left(\frac{b}{x}\right) dx = \frac{a^{\nu-\varrho} b^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\varrho - \frac{1}{2}\nu\right)}{2^{2\nu-\varrho+1}\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\varrho + 1\right)} \times$$

$$\times {}_0F_3\left(\nu+1,\ \frac{\nu-\mu-\varrho}{2}+1,\ \frac{\nu+\mu-\varrho}{2}+1;\ \frac{a^2b^2}{16}\right) +$$

$$+ \frac{a^\mu b^{\mu+\varrho}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\varrho\right)}{2^{2\mu+\varrho+1}\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\varrho + 1\right)} \times$$

$$\times {}_0F_3\left(\mu+1,\ \frac{\mu-\nu+\varrho}{2}+1,\ \frac{\nu+\mu+\varrho}{2}+1;\ \frac{a^2b^2}{16}\right)$$

$$\left[a > 0,\ b > 0,\ -\operatorname{Re}\left(\mu+\frac{3}{2}\right) < \operatorname{Re}\varrho < \operatorname{Re}\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\right].$$ В 480 (1)

6.592

1. $$\int_0^1 x^\lambda (1-x)^{\mu-1} N_\nu\left(a\sqrt{x}\right) dx =$$

$$= 2^{-\nu} a^\nu \operatorname{ctg}(\nu\pi) \frac{\Gamma(\mu)\Gamma\left(\lambda+1+\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma(1+\nu)\Gamma\left(\lambda+1+\mu+\frac{1}{2}\nu\right)} \times$$

$$\times {}_1F_2\left(\lambda+1+\frac{1}{2}\nu;\ 1+\nu,\ \lambda+1+\mu+\frac{1}{2}\nu;\ -\frac{a^2}{4}\right) -$$

$$- 2^\nu a^{-\nu} \operatorname{cosec}(\nu\pi) \frac{\Gamma(\mu)\Gamma\left(\lambda+1-\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma(1-\nu)\Gamma\left(\lambda+1+\mu-\frac{1}{2}\nu\right)} \times$$

$$\times {}_1F_2\left(\lambda-\frac{1}{2}\nu+1;\ 1-\nu,\ \lambda+1+\mu-\frac{1}{2}\nu;\ -\frac{a^2}{4}\right)$$

$$\left[\operatorname{Re}\lambda > -1 + \frac{1}{2}|\operatorname{Re}\nu|,\ \operatorname{Re}\mu > 0\right].$$ ИП II 197 (76) и

2. $$\int_0^1 x^\lambda (1-x)^{\mu-1} K_\nu(a\sqrt{x})\,dx =$$
$$= 2^{\nu-1}a^{-\nu}\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)\Gamma\left(\lambda+1-\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma\left(\lambda+1+\mu-\frac{1}{2}\nu\right)}\times$$
$$\times {}_1F_2\left(\lambda+1-\frac{1}{2}\nu;\ 1-\nu,\ \lambda+1+\mu-\frac{1}{2}\nu;\ \frac{a^2}{4}\right)+$$
$$+2^{1-\nu}a^\nu\frac{\Gamma(-\nu)\Gamma\left(\lambda+1+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\lambda+1+\mu+\frac{1}{2}\nu\right)}\times$$
$$\times {}_1F_2\left(\lambda+1+\frac{1}{2}\nu;\ 1+\nu,\ \lambda+1+\mu+\frac{1}{2}\nu;\ \frac{a^2}{4}\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\lambda > -1+\frac{1}{2}|\operatorname{Re}\nu|,\ \operatorname{Re}\mu>0\right]$. ИП II 198 (87) *и*

3 $$\int_1^\infty x^\lambda (x-1)^{\mu-1} J_\nu(a\sqrt{x})\,dx =$$
$$= 2^{2\lambda}a^{-2\lambda}G_{13}^{20}\left(\frac{a^2}{4}\middle|\begin{matrix} & 0 & \\ -\mu, & \lambda+\frac{1}{2}\nu, & \lambda-\frac{1}{2}\nu\end{matrix}\right)\Gamma(\mu)$$
$\left[a>0,\ \ 0<\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{4}-\operatorname{Re}\lambda\right]$. ИП II 205 (36) *и*

4 $$\int_1^\infty x^\lambda (x-1)^{\mu-1} K_\nu(a\sqrt{x})\,dx =$$
$$= \Gamma(\mu)\,2^{2\lambda-1}a^{-2\lambda}G_{13}^{30}\left(\frac{a^2}{4}\middle|\begin{matrix} & 0 & \\ -\mu, & \frac{1}{2}\nu+\lambda, & -\frac{1}{2}\nu+\lambda\end{matrix}\right)$$
$[\operatorname{Re}a>0,\ \ \operatorname{Re}\mu>0]$. ИП II 209 (60) *и*

5 $$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}J_\nu(a\sqrt{x})\,dx = \pi\left[J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}a\right)\right]^2$$
$[\operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП II 194 (59) *и*

6. $$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}I_\nu(a\sqrt{x})\,dx = \pi\left[I_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}a\right)\right]^2$$
$[\operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП II 197 (79)

7. $$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}K_\nu(a\sqrt{x})\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sec(\nu\pi)\left[I_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)+I_{-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)\right]K_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)$$
$[|\operatorname{Re}\nu|<1]$. ИП II 198 (85) *и*

8. $\int\limits_1^\infty x^{-\frac{1}{2}}(x-1)^{-\frac{1}{2}}K_\nu(a\sqrt{x})\,dx=\left[K_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2$

$[\operatorname{Re} a>0]$. ИП II 208 (56) *и*

9. $\int\limits_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}N_\nu(a\sqrt{x})\,dx=$

$$=\pi\left\{\operatorname{ctg}(\nu\pi)\left[J_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2-\operatorname{cosec}(\nu\pi)\left[J_{-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2\right\}$$

$[|\operatorname{Re}\nu|<1]$. ИП II 195 (68) *и*

10. $\int\limits_1^\infty x^{-\frac{1}{2}\nu}(x-1)^{\mu-1}J_\nu(a\sqrt{x})\,dx=\Gamma(\mu)\,2^\mu a^{-\mu}J_{\nu-\mu}(a)$

$\left[a>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}\operatorname{Re}\nu+\frac{3}{4}\right]$. ИП II 205 (34) *и*

11. $\int\limits_1^\infty x^{-\frac{1}{2}\nu}(x-1)^{\mu-1}J_{-\nu}(a\sqrt{x})\,dx=$

$$=\Gamma(\mu)\,2^\mu a^{-\mu}\left[\cos(\nu\pi)J_{\nu-\mu}(a)-\sin(\nu\pi)N_{\nu-\mu}(a)\right]$$

$\left[a>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}\operatorname{Re}\nu+\frac{3}{4}\right]$. ИП II 205 (35) *и*

12. $\int\limits_1^\infty x^{-\frac{1}{2}\nu}(x-1)^{\mu-1}K_\nu(a\sqrt{x})\,dx=\Gamma(\mu)\,2^\mu a^{-\mu}K_{\nu-\mu}(a)$

$[\operatorname{Re} a>0,\quad \operatorname{Re}\mu>0]$. ИП II 209 (59) *и*

13. $\int\limits_1^\infty x^{-\frac{1}{2}\nu}(x-1)^{\mu-1}N_\nu(a\sqrt{x})\,dx=2^\mu a^{-\mu}N_{\nu-\mu}(a)\,\Gamma(\mu)$

$\left[a>0,\ 0<\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}\operatorname{Re}\nu+\frac{3}{4}\right]$. ИП II 206 (40) *и*

14. $\int\limits_1^\infty x^{-\frac{1}{2}\nu}(x-1)^{\mu-1}H_\nu^{(1)}(a\sqrt{x})\,dx=2^\mu a^{-\mu}H_{\nu-\mu}^{(1)}(a)\,\Gamma(\mu)$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\quad \operatorname{Im} a>0]$. ИП II 206 (45) *и*

15. $\int\limits_1^\infty x^{-\frac{1}{2}\nu}(x-1)^{\mu-1}H_\nu^{(2)}(a\sqrt{x})\,dx=2^\mu a^{-\mu}H_{\nu-\mu}^{(2)}(a)\,\Gamma(\mu)$

$[\operatorname{Re}\mu>0,\quad \operatorname{Im} a<0]$. ИП II 207 (48) *и*

16. $\int\limits_0^1 x^{-\frac{1}{2}\nu}(1-x)^{\mu-1}J_\nu(a\sqrt{x})\,dx=$

$$=\frac{2^{2-\nu}a^{-\mu}}{\Gamma(\nu)}s_{\mu+\nu-1,\,\mu-\nu}(a)$$ $[\operatorname{Re}\mu>0]$. ИП II 194 (64) *и*

17. $\int\limits_0^1 x^{-\frac{1}{2}\nu}(1-x)^{\mu-1}N_\nu(a\sqrt{x})\,dx =$

$$= \frac{2^{2-\nu}a^{-\mu}\operatorname{ctg}(\nu\pi)}{\Gamma(\nu)} s_{\mu+\nu-1,\,\mu-\nu}(a) - 2^\mu a^{-\mu}\operatorname{cosec}(\nu\pi)\,J_{\mu-\nu}(a)\,\Gamma(\mu)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0, \quad \operatorname{Re}\nu < 1]$. ИП II 196 (75) и

6.593

1. $\int\limits_0^\infty \sqrt{x}J_{2\nu-1}(a\sqrt{x})\,J_\nu(bx)\,dx = \frac{1}{2}ab^{-2}J_{\nu-1}\left(\frac{a^2}{4b}\right)$

$\left[b > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 58 (15)

2. $\int\limits_0^\infty \sqrt{x}J_{2\nu-1}(a\sqrt{x})\,K_\nu(bx)\,dx =$

$$= \frac{\pi a}{4b^2}\left[I_{\nu-1}\left(\frac{a^2}{4b}\right) - \mathbf{L}_{\nu-1}\left(\frac{a^2}{4b}\right)\right]$$

$\left[\operatorname{Re} b > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 144 (44)

6.594

1. $\int\limits_0^\infty x^\nu I_{2\nu-1}(a\sqrt{x})J_{2\nu-1}(a\sqrt{x})\,K_\nu(bx)\,dx =$

$$= \sqrt{\pi}\,2^{-\nu}a^{2\nu-1}b^{-2\nu-\frac{1}{2}}J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2}{2b}\right)$$

$[\operatorname{Re} b > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП II 148 (65)

2. $\int\limits_0^\infty x^\nu I_{2\nu-1}(a\sqrt{x})\,N_{2\nu-1}(a\sqrt{x})\,K_\nu(bx)\,dx =$

$$= \sqrt{\pi}\,2^{-\nu-1}a^{2\nu-1}b^{-2\nu-\frac{1}{2}}\operatorname{cosec}(\nu\pi)\left[\mathbf{H}_{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{a^2}{2b}\right) + \cos(\nu\pi)\,J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2}{2b}\right) + \sin(\nu\pi)\,N_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2}{2b}\right)\right]$$

$[\operatorname{Re} b > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП II 148 (66)

3. $\int\limits_0^\infty x^\nu J_{2\nu-1}(a\sqrt{x})\,K_{2\nu-1}(a\sqrt{x})\,K_\nu(bx)\,dx =$

$$= \pi^2 2^{-\nu-2}a^{2\nu-1}b^{-2\nu-\frac{1}{2}}\operatorname{cosec}(\nu\pi)\left[\mathbf{H}_{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{a^2}{2b}\right) - N_{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{a^2}{2b}\right)\right]$$

$[\operatorname{Re} b > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП II 148 (67)

6.595

1. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} J_\nu(cx) \prod_{i=1}^n z_i^{-\mu_i} J_{\mu_i}(a_i z_i)\, dx = 0,$$

$$z_i = \sqrt{x^2 + b_i^2} \qquad \left[a_i > 0, \quad \operatorname{Re} b_i > 0, \quad \sum_{i=1}^n a_i < c;\right.$$

$$\left.\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} n + \sum_{i=1}^n \mu_i - \frac{1}{2}\right) > \operatorname{Re} \nu > -1\right].$$ ВТФII 52 (33), ИП II 60 (26)

2. $$\int_0^\infty x^{\nu-1} J_\nu(cx) \prod_{i=1}^n z_i^{-\mu_i} J_{\mu_i}(a_i z_i)\, dx = 2^{\nu-1} \Gamma(\nu) c^{-\nu} \prod_{i=1}^n [b_i^{-\mu_i} J_{\mu_i}(a_i b_i)],$$

$$z_i = \sqrt{x^2 + b_i^2} \left[a_i > 0, \quad \operatorname{Re} b_i > 0, \sum_{i=1}^n a_i < c, \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} n + \sum_{i=1}^n \mu_i + \frac{3}{2}\right) > \operatorname{Re} \nu > 0\right]$$

ВТФII 52 (34), ИП II 60 (27)

6.596

1. $$\int_0^\infty J_\nu\left(\alpha \sqrt{x^2 + z^2}\right) \frac{x^{2\mu+1}}{\sqrt{(x^2+z^2)^\nu}}\, dx = \frac{2^\mu \Gamma(\mu+1)}{\alpha^{\mu+1} z^{\nu-\mu-1}} J_{\nu-\mu-1}(\alpha z)$$

$$\left[\alpha > 0, \quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4}\right) > \operatorname{Re} \mu > -1\right].$$ В 457 (5)

2. $$\int_0^\infty \frac{J_\nu\left(\alpha \sqrt{t^2+1}\right)}{\sqrt{t^2+1}}\, dt = -\frac{\pi}{2} J_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) N_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$[\operatorname{Re} \nu > -1, \quad \alpha > 0].$$ МО 46

3. $$\int_0^\infty K_\nu\left(\alpha \sqrt{x^2 + z^2}\right) \frac{x^{2\mu+1}}{\sqrt{(x^2+z^2)^\nu}}\, dx = \frac{2^\mu \Gamma(\mu+1)}{\alpha^{\mu+1} z^{\nu-\mu-1}} K_{\nu-\mu-1}(\alpha z)$$

$$[\alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \mu > -1].$$ В 457 (6)

4. $$\int_0^\infty J_\nu(\beta x) \frac{J_{\mu-1}\left\{\alpha \sqrt{x^2+z^2}\right\}}{(x^2+z^2)\sqrt{(x^2+z^2)^\mu}} x^{\nu+1}\, dx = \frac{\alpha^{\mu-1} z^\nu}{2^{\mu-1} \Gamma(\mu)} K_\nu(\beta z)$$

$$[\alpha < \beta, \quad \operatorname{Re}(\mu+2) > \operatorname{Re} \nu > -1].$$ В 459 (11) *и*, ИП II 59 (19)

5. $$\int_0^\infty J_\nu(\beta x) \frac{J_\mu\left\{\alpha \sqrt{x^2+z^2}\right\}}{\sqrt{(x^2+z^2)^\mu}} x^{\nu-1}\, dx = \frac{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)}{\beta^\nu} \frac{J_\mu(\alpha z)}{z^\mu}$$

$$[\operatorname{Re}(\mu+2) > \operatorname{Re} \nu > 0, \quad \beta > \alpha > 0].$$ В 459 (12)

6. $\int\limits_0^\infty J_\nu(\beta x)\frac{J_\mu(\alpha\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{(x^2+z^2)^\mu}}x^{\nu+1}\,dx=0 \qquad [0<\alpha<\beta];$

$=\frac{\beta^\nu}{\alpha^\mu}\left\{\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{z}\right\}^{\mu-\nu-1}J_{\mu-\nu-1}\{z\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\} \qquad [\alpha>\beta>0];$

$[\operatorname{Re}\mu>\operatorname{Re}\nu>-1].$ В 455 (1)

7. $\int\limits_0^\infty J_\nu(\beta x)\frac{K_\mu(\alpha\sqrt{x^2+z^2})}{\sqrt{(x^2+z^2)^\mu}}x^{\nu+1}\,dx=$

$=\frac{\beta^\nu}{\alpha^\mu}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{z}\right)^{\mu-\nu-1}K_{\mu-\nu-1}(z\sqrt{\alpha^2+\beta^2})$

$\left[\alpha>0,\ \beta>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ |\arg z|<\frac{\pi}{2}\right].$ Ку 151 (31), В 456 (2)

8. $\int\limits_0^\infty J_\nu(\beta t)\frac{K_\mu(\alpha\sqrt{t^2-y^2})}{\sqrt{(t^2-y^2)^\mu}}t^{\nu+1}\,dt=\frac{\pi}{2}\frac{\beta^\nu}{\alpha^\mu}\left\{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{y}\right\}^{\mu-\nu-1}\times$

$\times\exp\left[-\frac{\pi}{2}\left(\mu-\nu-\frac{1}{2}\right)\right]\{J_{\mu-\nu-1}[y\sqrt{\alpha^2+\beta^2}]-iN_{\mu-\nu-1}[y\sqrt{\alpha^2+\beta^2}]\}$

[$\operatorname{Re}\mu<1$; при этом предполагается, что контур интегрирования не содержит особенности $t=y$, которая устраняется при помощи обхода сверху, и что знак $\sqrt{t^2-y^2}$ выбирается таким, чтобы рассматриваемое выражение было положительным при $t>y$; $\alpha>0$, $\beta>0$, $y>0$]. В 456 (3)

9. $\int\limits_0^\infty J_\nu(ux)K_\mu(v\sqrt{x^2-y^2})(x^2-y^2)^{-\frac{\mu}{2}}x^{\nu+1}\,dx=$

$=\frac{\pi}{2}\exp\left[-i\pi\left(\mu-\nu-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\frac{u^\nu}{v^\mu}\cdot\left[\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{y}\right]^{\mu-\nu-1}\times$

$\times H^{(2)}_{\mu-\nu-1}(y\sqrt{u^2+v^2})$

$\Big[\operatorname{Re}\mu<1,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ u>0,\ v>0;\ \arg\sqrt{x^2-y^2}=0$ при $x>y$; если $x<y$, то $\arg(x^2-y^2)^\sigma=\pi\sigma$, где $\sigma=\frac{1}{2}$ или $\sigma=-\frac{\mu}{2}\Big]$. МО 43

10. $\int\limits_0^\infty J_\nu(ux)H^{(2)}_\mu(v\sqrt{x^2+y^2})(x^2+y)^{-\frac{\mu}{2}}x^{\nu+1}\,dx=$

$=\frac{u^\nu}{v^\mu}\left[\frac{\sqrt{v^2-u^2}}{y}\right]^{\mu-\nu-1}H^{(2)}_{\mu-\nu-1}(y\sqrt{v^2-u^2}) \qquad [u<v]$

$\Big[\operatorname{Re}\mu<\operatorname{Re}\nu,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ u>0,\ v>0,\ y>0;\ \arg\sqrt{v^2-u^2}=0$ при $v>u$, $\arg(v^2-u^2)^\sigma=-\pi\sigma$ при $v<u$, где $\sigma=\frac{1}{2}$ или $\sigma=\frac{\mu-\nu-1}{2}\Big]$. МО 43

11. $\int\limits_0^\infty J_\nu(\beta x)J_\mu(\alpha\sqrt{x^2+z^2})J_\mu(\gamma\sqrt{x^2+z^2})\frac{x^{\nu-1}}{(x^2+z^2)^\mu}\,dx=$

$=\frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{\beta^\nu}\frac{J_\mu(\alpha z)}{z^\mu}\frac{J_\mu(\gamma z)}{z^\mu}$

$\left[\alpha>0;\ \beta>\alpha+\gamma;\ \gamma>0,\ \operatorname{Re}\left(2\mu+\frac{5}{2}\right)>\operatorname{Re}\nu>0\right]$ В 459 (14)

12. $\int\limits_0^\infty J_\nu(\beta t) \prod\limits_{k=1} J_\mu\left(a_k \sqrt{t^2+x^2}\right) \sqrt{(t^2+x^2)^{-n\mu}}\, t^{\nu-1}\, dt =$

$$= 2^{\nu-1}\beta^{-\nu}\,\Gamma(\nu) \prod_{k=1}^{n} \left[x^{-\mu} J_\mu(a_k x)\right]$$

$\left[x > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \ldots,\ a_n > 0,\ \beta > \sum\limits_{k=1}^{n} a_k;\right.$

$\left.\operatorname{Re}\left(n\mu + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right) > \operatorname{Re}\nu > 0\right].$ МО 43

13 $\int\limits_0^\infty \frac{J_\nu^2\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)}{(a^2+x^2)^\nu} x^{2\nu-2}\, dx = \frac{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}{2a^{\nu+1}\sqrt{\pi}} \mathbf{H}_\nu(2a) \left[\operatorname{Re}\nu > \frac{1}{2}\right].$ В 457 (8)

6.597 $\int\limits_0^\infty t^{\nu+1} J_\mu\left[b(t^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right](t^2+y^2)^{-\frac{1}{2}\mu}(t^2+\beta^2)^{-1} J_\nu(at)\, dt =$

$$= \beta^\nu J_\mu\left[b(y^2-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\right](y^2-\beta^2)^{-\frac{1}{2}\mu} K_\nu(a\beta)$$

$[a \geqslant b,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < 2 + \operatorname{Re}\mu].$ ВТФ II 95 (56)

6.598 $\int\limits_0^1 x^{\frac{\mu}{2}}(1-x)^{\frac{\nu}{2}} J_\mu(a\sqrt{x})\, J_\nu(b\sqrt{1-x})\, dx =$

$$= 2a^\mu b^\nu (a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}(\nu+\mu+1)} J_{\nu+\mu+1}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

$[\operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}\mu > -1].$ ВТФ II 46 *и*

6.61 Цилиндрические и показательная функции

6.611

1. $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} J_\nu(\beta x)\, dx = \frac{\beta^{-\nu}\left[\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha\right]^\nu}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

$[\operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}(\alpha \pm i\beta) > 0].$ ВТФ II 49 (18), В 422 (8)

2 $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} N_\nu(\beta x)\, dx = (\alpha^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cosec}(\nu\pi) \times$

$$\times \left\{\beta^\nu\left[(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}+\alpha\right]^{-\nu}\cos(\nu\pi) - \beta^{-\nu}\left[(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}+\alpha\right]^\nu\right\}$$

$[\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \beta > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1].$ МО 179, ИП II 105 (1)

3 $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} K_\nu(\beta x)\, dx = \frac{\pi}{\beta\sin(\nu\pi)} \frac{\sin(\nu\theta)}{\sin\theta}$

$\left[\cos\theta = \frac{\alpha}{\beta};\ \theta \to \frac{\pi}{2} \text{ при } \beta \to \infty\right];$ ИП II 131 (22)

$$= \frac{\pi \operatorname{cosec}(\nu\pi)}{2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \left[\beta^{-\nu}\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)^\nu - \beta^\nu\left(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\alpha\right)^{-\nu}\right]$$

$[|\operatorname{Re}\nu| < 1,\ \operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 0].$ ИП I 197 (24), МО 180

4. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} I_\nu(\beta x)\,dx = \frac{\beta^\nu}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2})^\nu}$$

$[\operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Re}\beta|]$. МО 180, ИП I 195 (1)

5. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} H_\nu^{(1,2)}(\beta x)\,dx =$$
$$= \frac{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha)^\nu}{\beta^\nu\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left\{1 \pm \frac{i}{\sin(\nu\pi)}\left[\cos(\nu\pi) - \frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^{2\nu}}{\beta^{2\nu}}\right]\right\}$$

$[-1 < \operatorname{Re}\nu < 1$; знак плюс соответствует функции $H_\nu^{(1)}$, знак минус — функции $H_\nu^{(2)}]$. МО 180, ИП I 188 (54) и (55)

6. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} H_0^{(1)}(\beta x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left\{1 - \frac{2i}{\pi}\ln\left[\frac{\alpha}{\beta} + \sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}\right]\right\}$$

$[\operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Im}\beta|]$. МО 180, ИП I 188 (52)

7. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} H_0^{(2)}(\beta x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left\{1 + \frac{2i}{\pi}\ln\left[\frac{\alpha}{\beta} + \sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}\right]\right\}$$

$[\operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Im}\beta|]$. МО 180, ИП I 188 (53)

8. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} N_0(\beta x)\,dx = \frac{-2}{\pi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}$$

$[\operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Im}\beta|]$. МО 47, ИП I 187 (44)

9. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} K_0(\beta x)\,dx = \frac{\arccos\frac{\alpha}{\beta}}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}$$

$[0 < \alpha < \beta,\ \operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 0]$; В 424, ИП II 131 (22)

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\ln\left(\frac{\alpha}{\beta} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}-1}\right) \quad [0 \leqslant \beta < \alpha,\ \operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 0].$$ МО 48

6.612

1. $$\int_0^\infty e^{-2\alpha x} J_0(x) N_0(x)\,dx = \frac{\boldsymbol{K}\left[\alpha(\alpha^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right]}{\pi(\alpha^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$[\operatorname{Re}\alpha > 0]$. ИП II 347 (58)

2. $$\int_0^\infty e^{-2\alpha x} I_0(x) K_0(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{K}\left[(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\right] \quad [0 < \alpha < 1];$$
$$= \frac{1}{2\alpha}\boldsymbol{K}\left[\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad [1 < \alpha < \infty].$$ ИП II 370 (48)

3 $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_\nu(\beta x) J_\nu(\gamma x)\,dx = \frac{1}{\pi\sqrt{\gamma\beta}} Q_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2\beta\gamma}\right)$$

$\left[\operatorname{Re}\alpha > \operatorname{Im}\beta > 0,\quad \gamma > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. В 426 (2), ИП II 50 (17)

4 $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}[J_0(\beta x)]^2\,dx = \frac{2}{\pi\sqrt{\alpha^2+4\beta^2}} \boldsymbol{K}\left(\frac{2\beta}{\sqrt{\alpha^2+4\beta^2}}\right).$$ МО 178

5 $$\int_0^\infty e^{-2\alpha x} J_1^2(\beta x)\,dx = \frac{(2\alpha^2+\beta^2)\boldsymbol{K}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) - 2(\alpha^2+\beta^2)\boldsymbol{E}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)}{\pi\beta^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

В 428 (3)

6.613 $$\int_0^\infty e^{-x z} J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} D_{-\nu-1}\left(z e^{\frac{\pi}{4}i}\right) D_{-\nu-1}\left(z e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)$$

$[\operatorname{Re}\nu > -1]$. МО 122

6.614

1 $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_\nu(\beta\sqrt{x})\,dx = \frac{\beta}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}\exp\left(-\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)\left[I_{\frac{1}{2}(\nu-1)}\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) - I_{\frac{1}{2}(\nu+1)}\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)\right].$$ МО 178

2. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} N_{2\nu}(2\sqrt{\beta x})\,dx = \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}}}{\sqrt{\alpha\beta}}\left\{\operatorname{ctg}(\nu\pi)\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)} M_{\frac{1}{2},\nu}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - \operatorname{cosec}(\nu\pi) W_{\frac{1}{2},\nu}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}$$

$[\operatorname{Re}\alpha > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1]$. ИП I 188 (50) и

3. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} I_{2\nu}(2\sqrt{\beta x})\,dx = \frac{e^{\frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}}}{\sqrt{\alpha\beta}}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)} M_{-\frac{1}{2},\nu}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$[\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1]$. ИП I 197 (20) и

4 $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} K_{2\nu}(2\sqrt{\beta x})\,dx = \frac{e^{\frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}}}{2\sqrt{\alpha\beta}}\Gamma(\nu+1)\Gamma(1-\nu) W_{-\frac{1}{2},\nu}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$[\operatorname{Re}\alpha > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1]$. ИП I 199 (37) и

5 $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} K_1(\beta\sqrt{x})\,dx = \frac{\beta}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}\exp\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)\left[K_1\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) - K_0\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)\right].$$ МО 181

6.615 $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_\nu (2\beta \sqrt{x}) J_\nu (2\gamma \sqrt{x})\, dx = \frac{1}{\alpha} I_\nu \left(\frac{2\beta\gamma}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha}\right)$$

[$\operatorname{Re}\nu > -1$]. МО 178

6.616

1. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_0 (\beta \sqrt{x^2+2\gamma x})\, dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \exp[\gamma(\alpha - \sqrt{\alpha^2+\beta^2})].$$ МО 179

2. $$\int_1^\infty e^{-\alpha x} J_0 (\beta \sqrt{x^2-1})\, dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \exp(-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}).$$ МО 179

3. $$\int_{-\infty}^\infty e^{itx} H_0^{(1)} (r \sqrt{\alpha^2-t^2})\, dt = -2i \frac{e^{i\alpha\sqrt{r^2+x^2}}}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

[$0 \leqslant \arg \sqrt{\alpha^2-t^2} < \pi$, $0 \leqslant \arg\alpha < \pi$; r, x действительны]. МО 49

4. $$\int_{-\infty}^\infty e^{-itx} H_0^{(2)} (r \sqrt{\alpha^2-t^2})\, dt = 2i \frac{e^{-i\alpha\sqrt{r^2+x^2}}}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

[$-\pi < \arg \sqrt{\alpha^2-t^2} \leqslant 0$, $-\pi < \arg\alpha \leqslant 0$, r, x действительны]. МО 49

6.617

1. $$\int_0^\infty K_{q-p} (2z \operatorname{sh} x)\, e^{(p+q)x}\, dx = \frac{\pi^2}{4\sin[(p-q)\pi]} [J_p(z) N_q(z) - J_q(z) N_p(z)]$$

[$\operatorname{Re} z > 0$, $-1 < \operatorname{Re}(p-q) < 1$]. МО 44

2. $$\int_0^\infty K_0 (2z \operatorname{sh} x)\, e^{-2px}\, dx = -\frac{\pi}{4} \left\{ J_p(z) \frac{\partial N_p(z)}{\partial p} - N_p(z) \frac{\partial J_p(z)}{\partial p} \right\}$$

[$\operatorname{Re} z > 0$]. МО 44

6.618

1. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} J_\nu (\beta x)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) I_{\frac{1}{2}\nu} \left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)$$

[$\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\operatorname{Re}\nu > -1$]. В 432 (5), ИП II 29 (8)

2. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} N_\nu (\beta x)\, dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) \times$$
$$\times \left[\operatorname{tg} \frac{\nu\pi}{2} I_{\frac{1}{2}\nu} \left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) + \frac{1}{\pi} \sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) K_{\frac{1}{2}\nu} \left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) \right]$$

[$\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\beta > 0$, $|\operatorname{Re}\nu| < 1$]. В 432 (6), ИП II 106 (3)

3. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} K_\nu (\beta x)\, dx = \frac{1}{4} \sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \exp\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) K_{\frac{1}{2}\nu} \left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)$$

[$\operatorname{Re}\alpha > 0$, $|\operatorname{Re}\nu| < 1$]. ВТФ II 51 (28), ИП II 132 (24)

4 $$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} I_\nu(\beta x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} \exp\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) I_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)$$

$[\operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}\alpha > 0]$. ВТФ II 92(27)

5. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} J_\mu(\beta x) J_\nu(\beta x)\,dx = 2^{-\nu-\mu-1} \alpha^{-\frac{\nu+\mu+1}{2}} \beta^{\nu+\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} \times$$

$$\times {}_3F_3\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}, \frac{\nu+\mu+2}{2}, \frac{\nu+\mu+1}{2}, \mu+1, \nu+1, \nu+\mu+1; -\frac{\beta^2}{\alpha}\right)$$

$[\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1,\ \operatorname{Re}\alpha > 0]$. ВТФ II 50(21) *и*

6.62—6.63 Цилиндрические, показательная и степенная функции

6.621

1. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_\nu(\beta x) x^{\mu-1}\,dx =$$

$$= \frac{\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^\nu \Gamma(\nu+\mu)}{\alpha^\mu \Gamma(\nu+1)} F\left(\frac{\nu+\mu}{2}, \frac{\nu+\mu+1}{2}; \nu+1; -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right);$$ В 421(2)

$$= \frac{\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^\nu \Gamma(\nu+\mu)}{\alpha^\mu \Gamma(\nu+1)} \left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}-\mu} \times$$

$$\times F\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}, \frac{\nu-\mu}{2}+1; \quad \nu+1; -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right);$$ В 421(3)

$$= \frac{\left(\frac{\beta}{2}\right)^\nu \Gamma(\nu+\mu)}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^{\nu+\mu}}\,\Gamma(\nu+1)} F\left(\frac{\nu+\mu}{2}, \frac{1-\mu+\nu}{2}; \nu+1; \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)$$

$[\operatorname{Re}(\nu+\mu) > 0,\ \operatorname{Re}(\alpha+i\beta) > 0,\ \operatorname{Re}(\alpha-i\beta) > 0]$; В 421(3)

$$= (\alpha^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}\mu} \Gamma(\nu+\mu) P_{\mu-1}^{-\nu}\left[\alpha(\alpha^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$[\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \operatorname{Re}(\nu+\mu) > 0]$. ИП II 29(6)

2. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} N_\nu(\beta x) x^{\mu-1}\,dx =$$

$$= \operatorname{ctg}\nu\pi \frac{\left(\frac{\beta}{2}\right)^\nu \Gamma(\nu+\mu)}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^{\nu+\mu}}\,\Gamma(\nu+1)} F\left(\frac{\nu+\mu}{2}, \frac{\nu-\mu+1}{2}; \nu+1; \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right) -$$

$$- \operatorname{cosec}\nu\pi \frac{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\nu} \Gamma(\mu-\nu)}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^{\mu-\nu}}\,\Gamma(1-\nu)} F\left(\frac{\mu-\nu}{2}, \frac{1-\nu-\mu}{2}; 1-\nu; \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu \geqslant |\operatorname{Re}\nu|,\ \operatorname{Re}(\alpha \pm i\beta) > 0]$; В 421(4)

$$= -\frac{2}{\pi} \Gamma(\nu+\mu) (\beta^2+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}\mu} Q_{\mu-1}^{-\nu}\left[\alpha(\alpha^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$[\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \operatorname{Re}\mu > |\operatorname{Re}\nu|]$. ИП II 105(2)

3. $$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-\alpha x}K_\nu(\beta x)\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\,(2\beta)^\nu}{(\alpha+\beta)^{\mu+\nu}}\,\frac{\Gamma(\mu+\nu)\,\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\,F\left(\mu+\nu,\ \nu+\frac{1}{2};\ \mu+\frac{1}{2};\ \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)$$
$[\operatorname{Re}\mu > |\operatorname{Re}\nu|,\ \operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 0].$

ИП II 131 (23) *и*, ВТФ II 50 (26)

4. $$\int_0^\infty x^{m+1}e^{-\alpha x}J_\nu(\beta x)\,dx = (-1)^{m+1}\beta^{-\nu}\frac{d^{m+1}}{d\alpha^{m+1}}\left[\frac{\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha\right)^\nu}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right]$$
$[\beta > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -m-2].$ ИП II 28 (3)

6.622

1. $$\int_0^\infty \left(J_0(x) - e^{-\alpha x}\right)\frac{dx}{x} = \ln 2\alpha \quad [\alpha > 0].$$ НИ 66 (13)

2. $$\int_0^\infty \frac{e^{i(u+x)}}{u+x}J_0(x)\,dx = \frac{\pi}{2}iH_0^{(1)}(u).$$ МО 44

3. $$\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}\alpha}I_p(x)\frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Q_{p-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha).$$ В 424 (5)

6.623

1. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}J_\nu(\beta x)\,x^\nu\,dx = \frac{(2\beta)^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(\alpha^2+\beta^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}$$
$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Im}\beta|\right].$ В 422 (5)

2. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}J_\nu(\beta x)\,x^{\nu+1}\,dx = \frac{2\alpha\,(2\beta)^\nu\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(\alpha^2+\beta^2)^{\nu+\frac{3}{2}}}$$
$[\operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Im}\beta|].$ В 422 (6)

3. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}J_\nu(\beta x)\frac{dx}{x} = \frac{\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha\right)^\nu}{\nu\beta^\nu}$$
$[\operatorname{Re}\nu > 0;\ \operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Im}\beta|]$ (сравни 6.611 1.). В 422 (7)

6.624

1. $$\int_0^\infty xe^{-\alpha x}K_0(\beta x)\,dx = \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\ln\left[\frac{\alpha}{\beta}+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-1}\right]-1\right\}.$$
МО 181

2. $$\int_0^\infty \sqrt{x}\,e^{-\alpha x}K_{\pm\frac{1}{2}}(\beta x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}\,\frac{1}{\alpha+\beta}.$$ МО 181

3. $$\int_0^\infty e^{-tz\,(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}} K_\mu(t)\, t^\nu\, dt = \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{(z^2-1)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}} e^{-i\mu\pi} Q_\nu^\mu(z)$$

$[\operatorname{Re}(\nu\pm\mu) > -1]$. ВТФ II 57 (7)

4. $$\int_0^\infty e^{-tz\,(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}} I_{-\mu}(t)\, t^\nu\, dt = \frac{\Gamma(-\nu-\mu)}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}\nu}} P_\nu^\mu(z) \qquad [\operatorname{Re}(\nu+\mu) < 0].$$

ВТФ II 57 (8)

5. $$\int_0^\infty e^{-tz\,(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}} I_\mu(t)\, t^\nu\, dt = \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{(z^2-1)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}} P_\nu^{-\mu}(z) \quad [\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1].$$

ВТФ II 57 (9)

6. $$\int_0^\infty e^{-t\cos\theta} J_\mu(t\sin\theta)\, t^\nu\, dt = \Gamma(\nu+\mu+1)\, \mathrm{P}_\nu^{-\mu}(\cos\theta)$$

$\left[\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1,\ 0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi\right]$. ВТФ II 57 (10)

7. $$\int_0^\infty \frac{J_\nu(bx)\, x^\nu}{e^{\pi x}-1}\, dx = \frac{(2b)^\nu\, \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n^2\pi^2+b^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}$$

$[\operatorname{Re}\nu > 0,\ |\operatorname{Im} b| < \pi]$. В 423 (9)

6.625

1. $$\int_0^1 x^{\lambda-\nu-1}(1-x)^{\mu-1} e^{\pm i\alpha x} J_\nu(\alpha x)\, dx =$$

$$= \frac{2^{-\nu}\alpha^\nu\, \Gamma(\lambda)\, \Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)\, \Gamma(\nu+1)}\, {}_2F_2\left(\lambda,\ \nu+\frac{1}{2} : \lambda+\mu,\ 2\nu+1;\ \pm 2i\alpha\right)$$

$[\operatorname{Re}\lambda > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. ИП II 194 (58) и

2. $$\int_0^1 x^\nu (1-x)^{\mu-1} e^{\pm i\alpha x} J_\nu(\alpha x)\, dx =$$

$$= \frac{(2\alpha)^\nu\, \Gamma(\mu)\, \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\mu+2\nu+1)}\, {}_1F_1\left(\nu+\frac{1}{2};\ \mu+2\nu+1;\ \pm 2i\alpha\right)$$

$\left[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 194 (57) и

3. $$\int_0^1 x^\nu (1-x)^{\mu-1} e^{\pm \alpha x} I_\nu(\alpha x)\, dx =$$

$$= \frac{(2\alpha)^\nu\, \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \Gamma(\mu)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\mu+2\nu+1)}\, {}_1F_1\left(\nu+\frac{1}{2};\ \mu+2\nu+1;\ \pm 2\alpha\right)$$

$\left[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. Бу 9 (16а), ИП II 197 (77) и

4. $$\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1} e^{\pm\alpha x} I_\nu(\alpha x)\,dx =$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^\nu \Gamma(\lambda+\nu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda+\mu+\nu)}\, {}_2F_2\left(\nu+\frac{1}{2},\ \lambda+\nu;\ 2\nu+1,\ \mu+\lambda+\nu;\ \pm 2\alpha\right)$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}(\lambda+\nu) > 0]$. ИП II 197 (78) и

5. $$\int_0^1 x^{\mu-\varkappa}(1-x)^{2\varkappa-1} I_{\mu-\varkappa}\left(\frac{1}{2}xz\right) e^{-\frac{1}{2}xz}\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(2\varkappa)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+2\mu)} e^{\frac{z}{2}} z^{-\varkappa-\frac{1}{2}} M_{\varkappa,\mu}(z)$$
$\left[\operatorname{Re}\left(\varkappa-\frac{1}{2}-\mu\right) < 0,\ \operatorname{Re}\varkappa > 0\right]$ Бv 129 (14a)

6. $$\int_1^\infty x^{-\lambda}(x-1)^{\mu-1} e^{-\alpha x} I_\nu(\alpha x)\,dx = \frac{(2\alpha)^\lambda \Gamma(\mu)}{\sqrt{\pi}} G_{23}^{21}\left(2\alpha \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}-\lambda,\ 0 \\ -\mu,\ \nu-\lambda,\ -\nu-\lambda \end{matrix}\right)$$
$\left[0 < \operatorname{Re}\mu < \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\lambda,\quad \operatorname{Re}\alpha > 0\right]$. ИП II 207 (50) и

7. $$\int_1^\infty x^{-\lambda}(x-1)^{\mu-1} e^{-\alpha x} K_\nu(\alpha x)\,dx =$$
$$= \Gamma(\mu)\sqrt{\pi}(2\alpha)^\lambda G_{23}^{30}\left(2\alpha \middle| \begin{matrix} 0,\ \frac{1}{2}-\lambda \\ -\mu,\ \nu-\lambda,\ -\nu-\lambda \end{matrix}\right)$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\alpha > 0]$. ИП II 208 (55) и

8. $$\int_1^\infty x^{-\nu}(x-1)^{\mu-1} e^{-\alpha x} I_\nu(\alpha x)\,dx =$$
$$= \frac{(2\alpha)^{\nu-\mu}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+\nu\right)\Gamma(\mu)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\mu+2\nu)}\, {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\mu+\nu;\ 1-\mu+2\nu;\ -2\alpha\right)$$
$\left[0 < \operatorname{Re}\mu < \frac{1}{2} + \operatorname{Re}\nu,\ \operatorname{Re}\alpha > 0\right]$. ИП II 207 (49) и

9. $$\int_1^\infty x^{-\nu}(x-1)^{\mu-1} e^{-\alpha x} K_\nu(\alpha x)\,dx = \sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu)(2\alpha)^{-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}} e^{-\alpha} W_{-\frac{1}{2}\mu,\ \nu-\frac{1}{2}\mu}(2\alpha)$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0,\quad \operatorname{Re}\alpha > 0]$. ИПII 208 (53) и

10. $$\int_1^\infty x^{-\mu-\frac{1}{2}}(x-1)^{\mu-1} e^{-\alpha x} K_\nu(\alpha x)\,dx = \sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu)(2\alpha)^{-\frac{1}{2}} e^{-\alpha} W_{-\mu,\ \nu}(2\alpha)$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0,\quad \operatorname{Re}\alpha > 0]$. ИП II 207 (51) и

6.626

1. $$\int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}J_\mu(\beta x)J_\nu(\gamma x)\,dx =$$
$$= \frac{\beta^\mu\gamma^\nu}{\Gamma(\nu+1)}2^{-\nu-\mu}\alpha^{-\lambda-\mu-\nu}\sum_{m=0}^\infty \frac{\Gamma(\lambda+\mu+\nu+2m)}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)}\times$$
$$\times F\left(-m,\ -\mu-m;\ \nu+1;\ \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)^m$$
$[\operatorname{Re}(\lambda+\mu+\nu)>0,\quad \operatorname{Re}(\alpha\pm i\beta\pm i\gamma)>0]$. ВТФ II 48(15)

2. $$\int_0^\infty e^{-2\alpha x}J_\nu(\beta x)J_\mu(\beta x)x^{\nu+\mu}\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\nu+\mu+\frac{1}{2}\right)\beta^{\nu+\mu}}{\sqrt{\pi^3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu+\mu}\varphi\cos(\nu-\mu)\varphi}{(\alpha^2+\beta^2\cos^2\varphi)^{\nu+\mu}\sqrt{\alpha^2+\beta^2\cos^2\varphi}}\,d\varphi$$
$\left[\operatorname{Re}\alpha>|\operatorname{Im}\beta|,\quad \operatorname{Re}(\nu+\mu)>-\frac{1}{2}\right]$. В 427(1)

3. $$\int_0^\infty e^{-2\alpha x}J_0(\beta x)J_1(\beta x)x\,dx = \frac{\boldsymbol{K}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)-\boldsymbol{E}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)}{2\pi\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$ В 427(2)

4. $$\int_0^\infty e^{-2\alpha x}I_0(\beta x)I_1(\beta x)x\,dx = \frac{1}{2\pi\beta}\left\{\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\boldsymbol{E}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)-\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{K}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}$$
$[\operatorname{Re}\alpha>\operatorname{Re}\beta]$. В 428(5)

6.627 $$\int_0^\infty \frac{(\sqrt{x})^{-1}}{x+a}e^{-x}K_\nu(x)\,dx = \frac{\pi e^a K_\nu(a)}{\sqrt{a}\cos(\nu\pi)}$$
$\left[|\arg a|<\pi,\quad |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right]$. ИПII 368(29)

6.628

1. $$\int_0^\infty e^{-x\cos\beta}J_{-\nu}(x\sin\beta)x^\mu\,dx = \Gamma(\mu-\nu+1)\,\mathrm{P}_\mu^\nu(\cos\beta)$$
$\left[0<\beta<\frac{\pi}{2},\quad \operatorname{Re}(\mu-\nu)>-1\right]$. В 424(3), УВ II 175 *и*

2. $$\int_0^\infty e^{-x\cos\beta}N_\nu(x\sin\beta)x^\mu\,dx =$$
$$= -\frac{\sin\mu\pi}{\sin(\mu+\nu)\pi}\,\frac{\Gamma(\mu-\nu+1)}{\pi}\left[Q_\mu^\nu(\cos\beta+0\cdot i)e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}+\right.$$
$$\left.+Q_\mu^\nu(\cos\beta-0\cdot i)e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}\right]$$
$\left[\operatorname{Re}(\mu+\nu)>-1,\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right]$. В 424(4)

3. $$\int_0^1 e^{\frac{xu}{2}} (1-x)^{2\nu-1} x^{\mu-\nu} J_{\mu-\nu}\left(\frac{ixu}{2}\right) dx =$$
$$= 2^{2(\nu-\mu)} e^{\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)i} \frac{\mathrm{B}(2\nu, 2\mu-2\nu+1)}{\Gamma(\mu-\nu+1)} \frac{e^{\frac{u}{2}}}{u^{\nu+\frac{1}{2}}} M_{\nu,\mu}(u).$$ МО 118 и

4. $$\int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \alpha} I_\nu (x \operatorname{sh} \alpha) x^\mu \, dx = \Gamma(\nu+\mu+1) P_\mu^{-\nu}(\operatorname{ch} \alpha)$$
$[\operatorname{Re} \mu > -2]$. В 423 (1)

5. $$\int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \alpha} K_\nu (x \operatorname{sh} \alpha) x^\mu \, dx = \frac{\sin \mu\pi}{\sin(\nu+\mu)\pi} \Gamma(\mu-\nu+1) Q_\mu^\nu (\operatorname{ch} \alpha)$$
$[\operatorname{Re}(\mu+1) > |\operatorname{Re} \nu|]$. В 423 (2)

6. $$\int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \alpha} I_\nu (x) x^{\mu-1} \, dx = \frac{\cos \nu\pi}{\sin(\mu+\nu)\pi} \frac{Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} \alpha)}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sh} \alpha)^{\mu-\frac{1}{2}}}$$
$[\operatorname{Re}(\mu+\nu) > 0, \quad \operatorname{Re}(\operatorname{ch} \alpha) > 1]$. В 424 (6)

7. $$\int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \alpha} K_\nu (x) x^{\mu-1} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma(\mu-\nu) \Gamma(\mu+\nu) \frac{P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\mu}(\operatorname{ch} \alpha)}{(\operatorname{sh} \alpha)^{\mu-\frac{1}{2}}}$$
$[\operatorname{Re} \mu > |\operatorname{Re} \nu|, \ \operatorname{Re}(\operatorname{ch} \alpha) > -1]$. В 424 (7)

6.629 $$\int_0^\infty \left(\sqrt{x}\right)^{-1} e^{-x\alpha \cos \varphi \cos \psi} J_\mu (\alpha x \sin \varphi) J_\nu (\alpha x \sin \psi) \, dx =$$
$$= \Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right) \alpha^{-\frac{1}{2}} \mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{-\mu} (\cos \varphi) \mathrm{P}_{\mu-\frac{1}{2}}^{-\nu} (\cos \psi)$$
$\left[\alpha > 0, \quad 0 < \varphi, \quad \psi < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Re}(\mu+\nu) > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 50 (19)

6.631

1. $$\int_0^\infty x^\mu e^{-\alpha x^2} J_\nu (\beta x) \, dx = \frac{\beta^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)}{2^{\nu+1} \alpha^{\frac{1}{2}(\mu+\nu+1)} \Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}; \ \nu+1; \ -\frac{\beta^2}{4\alpha}\right);$$
Бу 8 (15)
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)}{\beta \alpha^{\frac{1}{2}\mu} \Gamma(\nu+1)} \exp\left(-\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) M_{\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}\nu}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$$
$[\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1, \quad \beta > 0]$.

ВТФ II 50 (22), ИПII 30 (14), Бу 14 (13b)

2. $$\int_0^\infty x^\mu e^{-\alpha x^2} N_\nu(\beta x)\,dx = -\alpha^{-\frac{1}{2}\mu}\beta^{-1}\sec\left(\frac{\nu-\mu}{2}\pi\right)\exp\left(-\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)\times$$
$$\times\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma(1+\nu)}\sin\left(\frac{\nu-\mu}{2}\pi\right)M_{\frac{1}{2}\mu,\,\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.+W_{\frac{1}{2}\mu,\,\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\right\}$$

$[\operatorname{Re}\alpha>0,\quad \operatorname{Re}\mu>|\operatorname{Re}\nu|-1,\quad \beta>0]$. ИП II 106 (4)

3 $$\int_0^\infty x^\mu e^{-\alpha x^2} K_\nu(\beta x)\,dx = \frac{1}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}\mu}\beta^{-1}\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu+\mu}{2}\right)\exp\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)W_{-\frac{1}{2}\mu,\,\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$$

$[\operatorname{Re}\mu>|\operatorname{Re}\nu|-1]$. ИП II 132 (25)

4 $$\int_0^\infty x^{\nu+1} e^{-\alpha x^2} J_\nu(\beta x)\,dx = \frac{\beta^\nu}{(2\alpha)^{\nu+1}}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$$

$[\operatorname{Re}\alpha>0,\quad \beta>0,\quad \operatorname{Re}\nu>-1]$. В 431 (4), ИП II 29 (10)

5. $$\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\alpha x^2} J_\nu(\beta x)\,dx = 2^{\nu-1}\beta^{-\nu}\gamma\left(\nu,\ \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$$

$[\operatorname{Re}\alpha>0,\quad \beta>0,\quad \operatorname{Re}\nu>0]$. ИП II 30 (11)

6. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} e^{\pm i\alpha x^2} J_\nu(\beta x)\,dx = \frac{\beta^\nu}{(2\alpha)^{\nu+1}}\exp\left[\pm i\left(\frac{\nu+1}{2}\pi-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\right]$$

$\left[\alpha>0,\quad -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2},\quad \beta>0\right]$. ИП II 30 (12)

7. $$\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} J_\nu(\beta x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\beta}{8\alpha^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)\left[I_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)-I_{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)\right]$$

$[\operatorname{Re}\alpha>0,\quad \beta>0,\quad \operatorname{Re}\nu>-2]$. ИП II 29 (9)

8. $$\int_0^1 x^{n+1} e^{-\alpha x^2} I_n(2\alpha x)\,dx = \frac{1}{4\alpha}\left[e^\alpha - e^{-\alpha}\sum_{r=-n}^{n} I_r(2\alpha)\right]$$

$[n=0,\ 1,\ \ldots]$. ИП II 365 (8) и

9. $$\int_1^\infty x^{1-n} e^{-\alpha x^2} I_n(2\alpha x)\,dx = \frac{1}{4\alpha}\left[e^\alpha - e^{-\alpha}\sum_{r=1-n}^{n-1} I_r(2\alpha)\right]$$

$[n=1,\ 2,\ \ldots]$. ИП II 367 (20) и

10. $$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n+\mu+1}J_\mu(2x\sqrt{z})\,dx = \frac{n!}{2}e^{-z}z^{\frac{1}{2}\mu}L_n^\mu(z)$$

$[n=0,\ 1,\ \ldots;\quad n+\operatorname{Re}\mu > -1].$ Бу 135 (5)

6.632 $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-(x^2+a^2-2ax\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}\right][x^2+a^2-2ax\cos\varphi]^{-\frac{1}{2}}K_\nu(x)\,dx = \pi a^{-\frac{1}{2}}\sec(\nu\pi)P_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\varphi)K_\nu(a)$$

$\left[\,|\arg a|+|\operatorname{Re}\varphi|<\pi,\quad |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right].$ ИП II 368 (32)

6.633

1. $$\int_0^\infty x^{\lambda+1}e^{-\alpha x^2}J_\mu(\beta x)J_\nu(\gamma x)\,dx = \frac{\beta^\mu\gamma^\nu\alpha^{-\frac{\mu+\nu+\lambda+2}{2}}}{2^{\nu+\mu+1}\Gamma(\nu+1)}\sum_{m=0}^\infty \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\lambda+1\right)}{m!\,\Gamma(m+\mu+1)}\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^m \times F\left(-m,\ -\mu-m;\ \nu+1;\ \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)$$

$[\operatorname{Re}\alpha>0,\quad \operatorname{Re}(\mu+\nu+\lambda)>-2,\quad \beta>0,\quad \gamma>0].$
ВТФ II 49 (20) *и*, ИП II 51 (24) *и*

2. $$\int_0^\infty e^{-\varrho^2x^2}J_p(\alpha x)J_p(\beta x)\,x\,dx = \frac{1}{2\varrho^2}\exp\left(-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4\varrho^2}\right)I_p\left(\frac{\alpha\beta}{2\varrho^2}\right)$$

$[\operatorname{Re}p>-1,\ |\arg\varrho|<\frac{\pi}{4},\ \alpha>0,\ \beta>0].$ Ку 146 (16) *и*, В 433 (1)

3. $$\int_0^\infty x^{2\nu+1}e^{-\alpha x^2}J_\nu(x)N_\nu(x)\,dx = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\alpha^{-\frac{3}{2}\nu-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\alpha}\right)W_{\frac{1}{2}\nu,\,\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$\left[\operatorname{Re}\alpha>0,\quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$ ИП II 347 (59)

4. $$\int_0^\infty xe^{-\alpha x^2}I_\nu(\beta x)J_\nu(\gamma x)\,dx = \frac{1}{2\alpha}\exp\left(\frac{\beta^2-\gamma^2}{4\alpha}\right)J_\nu\left(\frac{\beta\gamma}{2\alpha}\right)$$

$[\operatorname{Re}\alpha>0,\quad \operatorname{Re}\nu>-1].$ ИП II 63 (1)

5. $$\int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-\alpha x^2}J_\mu(\beta x)J_\nu(\beta x)\,dx = 2^{-\nu-\mu-1}\alpha^{-\frac{1}{2}(\nu+\lambda+\mu)}\beta^{\nu+\mu}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}\times {}_3F_3\left[\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}+1,\ \frac{\nu+\mu+\lambda}{2};\ \mu+1,\ \nu+1,\ \mu+\nu+1;\ -\frac{\beta^2}{\alpha}\right]$$

$[\operatorname{Re}(\nu+\lambda+\mu)>0,\ \operatorname{Re}\alpha>0].$ В 434, ВТФ II 50 (2)

6.634 $$\int_0^\infty xe^{-\frac{x^2}{2a}}\left[I_\nu(x)+I_{-\nu}(x)\right]K_\nu(x)\,dx=ae^aK_\nu(a)$$

$[\operatorname{Re} a>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<1].$ ИП II 371 (49)

6.635

1. $$\int_0^\infty x^{-1}e^{-\frac{\alpha}{x}}J_\nu(\beta x)\,dx=2J_\nu\left(\sqrt{2\alpha\beta}\right)K_\nu\left(\sqrt{2\alpha\beta}\right)$$ $[\operatorname{Re}\alpha>0,\ \beta>0].$

ИП II 30 (15)

2. $$\int_0^\infty x^{-1}e^{-\frac{\alpha}{x}}N_\nu(\beta x)\,dx=2N_\nu\left(\sqrt{2\alpha\beta}\right)K_\nu\left(\sqrt{2\alpha\beta}\right)$$ $[\operatorname{Re}\alpha>0,\ \beta>0].$

ИП II 106 (5)

3. $$\int_0^\infty x^{-1}e^{-\frac{\alpha}{x}-\beta x}J_\nu(\gamma x)\,dx=$$
$$=2J_\nu\left\{\sqrt{2\alpha}\left[\sqrt{\beta^2+\gamma^2}-\beta\right]^{\frac{1}{2}}\right\}K_\nu\left\{\sqrt{2\alpha}\left[\sqrt{\beta^2+\gamma^2}+\beta\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$[\operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \gamma>0].$ ИП II 30 (16)

6.636 $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-\alpha\sqrt{x}}J_\nu(\beta x)\,dx=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\beta}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)D_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(2^{-\frac{1}{2}}\alpha e^{\frac{1}{4}\pi i}\beta^{-\frac{1}{2}}\right)D_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(2^{-\frac{1}{2}}\alpha e^{-\frac{1}{4}\pi i}\beta^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$\left[\operatorname{Re}\alpha>0,\quad \beta>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$ ИП II 30 (17)

6.637

1. $$\int_0^\infty (\beta^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\alpha(\beta^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]J_\nu(\gamma x)\,dx=$$
$$=I_{\frac{1}{2}\nu}\left\{\frac{1}{2}\beta\left[(\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}-\alpha\right]\right\}K_{\frac{1}{2}\nu}\left\{\frac{1}{2}\beta\left[(\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}+\alpha\right]\right\}.$$

$[\operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \gamma>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1].$ ИП II 31 (20)

2. $$\int_0^\infty (\beta^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\alpha(\beta^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]N_\nu(\gamma x)\,dx=$$
$$=-\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)K_{\frac{1}{2}\nu}\left\{\frac{1}{2}\beta\left[(\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}+\alpha\right]\right\}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\pi}K_{\frac{1}{2}\nu}\left\{\frac{1}{2}\beta\left[(\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}+\alpha\right]\right\}+\right.$$
$$\left.+\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)I_{\frac{1}{2}\nu}\left\{\frac{1}{2}\beta\left[(\alpha^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}-\alpha\right]\right\}\right)$$

$[\operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \gamma>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<1].$ ИП II 106 (6)

3. $$\int\limits_0^\infty (x^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\alpha(x^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\right] K_\nu(\gamma x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) K_{\frac{1}{2}\nu}\left\{\frac{1}{2}\beta\left[\alpha+(\alpha^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\right]\right\} K_{\frac{1}{2}\nu}\left\{\frac{1}{2}\beta\left[\alpha-(\alpha^2-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$$
$[\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}(\gamma+\beta) > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1]$. ИП II 132 (26)

6.64 Цилиндрические функции от более сложных аргументов, показательная и степенная функции

6.641 $$\int\limits_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-\alpha x} J_{\pm\frac{1}{4}}(x^2)\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{4}\left[\mathbf{H}_{\mp\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha^2}{4}\right) - N_{\mp\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)\right].$$ МХд 42

6.642

1. $$\int\limits_0^\infty x^{-1} e^{-\alpha x} N_\nu\left(\frac{2}{x}\right) dx = N_\nu(\sqrt{\alpha})\, K_\nu(\sqrt{\alpha}).$$ МХд 44

2. $$\int\limits_0^\infty x^{-1} e^{-\alpha x} H_\nu^{(1,\,2)}\left(\frac{2}{x}\right) dx = H_\nu^{(1,\,2)}(\sqrt{\alpha})\, K_\nu(\sqrt{\alpha}).$$

МХд 44, ВТФ II 91 (26)

6.643

1. $$\int\limits_0^\infty x^{\mu-\frac{1}{2}} e^{-\alpha x} J_{2\nu}(2\beta\sqrt{x})\,dx = \frac{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\beta\Gamma(2\nu+1)} e^{-\frac{\beta^2}{2\alpha}} \alpha^{-\mu} M_{\mu,\nu}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right) > 0\right]$, (сравни **6.631** 1.). Бу 14 (13а), МХд 42 *u*

2. $$\int\limits_0^\infty x^{\mu-\frac{1}{2}} e^{-\alpha x} I_{2\nu}(2\beta\sqrt{x})\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\nu+1)} \beta^{-1} e^{\frac{\beta^2}{2\alpha}} \alpha^{-\mu} M_{-\mu,\nu}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right) > 0\right]$. МХд 45

3. $$\int\limits_0^\infty x^{\mu-\frac{1}{2}} e^{-\alpha x} K_{2\nu}(2\beta\sqrt{x})\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu-\nu+\frac{1}{2}\right)}{2\beta} e^{\frac{\beta^2}{2\alpha}} \alpha^{-\mu} W_{-\mu,\nu}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right) > 0\right]$, (сравни **6.631** 3.). МХд 47 *u*

4. $$\int_0^\infty x^{n+\frac{1}{2}\nu} e^{-\alpha x} J_\nu\left(2\beta\sqrt{x}\right) dx = n!\beta^\nu e^{-\frac{\beta^2}{\alpha}} \alpha^{-n-\nu-1} L_n^\nu\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)$$

$[n+\nu > -1]$. МО 178 u

5. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-\alpha x} N_{2\nu}\left(\beta\sqrt{x}\right) dx =$$

$$= -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\exp\left(-\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)}{\cos(\nu\pi)} \left[\sin(\nu\pi) I_\nu\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) + \frac{1}{\pi} K_\nu\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)\right]$$

$\left[|\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right]$. МХд 44

6. $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}m} e^{-\alpha x} K_m\left(2\sqrt{x}\right) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(m+1)}{2\alpha} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2\alpha}} W_{-\frac{1}{2}(m+1),\, -\frac{1}{2}m}\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$ МХд 48 u

6.644 $$\int_0^\infty e^{-\beta x} J_{2\nu}\left(2a\sqrt{x}\right) J_\nu(bx)\, dx =$$

$$= \exp\left(-\frac{a^2\beta}{\beta^2+b^2}\right) J_\nu\left(\frac{a^2 b}{\beta^2+b^2}\right) \frac{1}{\sqrt{\beta^2+b^2}}$$

$\left[\operatorname{Re}\beta > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИПІІ 58 (17)

6.645

1. $$\int_1^\infty (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} e^{-\alpha x} J_\nu\left(\beta\sqrt{x^2-1}\right) dx =$$

$$= I_{\frac{1}{2}\nu}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha\right)\right] K_{\frac{1}{2}\nu}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha\right)\right].$$ МО 179 u

2. $$\int_1^\infty (x^2-1)^{\frac{1}{2}\nu} e^{-\alpha x} J_\nu\left(\beta\sqrt{x^2-1}\right) dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta^\nu (\alpha^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}} K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right).$$ МО 179 u

6.646

1. $$\int_1^\infty \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}\nu} e^{-\alpha x} J_\nu\left(\beta\sqrt{x^2-1}\right) dx =$$

$$= \frac{\exp\left(-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \left(\frac{\beta}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^\nu$$ $[\operatorname{Re}\nu > -1]$.

ЭД 89 (52), МО 179

2. $$\int_1^\infty \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}\nu} e^{-\alpha x} I_\nu\left(\beta\sqrt{x^2-1}\right) dx =$$
$$= \frac{\exp\left(-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \left(\frac{\beta}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\right)^\nu \quad [\operatorname{Re}\nu > -1,\ \alpha > \beta].$$ МО 180

3. $$\int_1^\infty \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}\nu} e^{-\alpha x} K_\nu\left(\beta\sqrt{x^2-1}\right) dx =$$
$$= \frac{\pi \exp\left(-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)}{2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\sin(\nu\pi)} \left[\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}\right)^\nu - \left(\frac{\beta}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\right)^\nu\right]$$
$$[|\operatorname{Re}\nu| < 1,\ \alpha+\beta > 0].$$ МХ 39 *u*

6.647

1. $$\int_0^\infty x^{-\lambda-\frac{1}{2}} (\beta+x)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-\alpha x} K_{2\mu}\left[\sqrt{x(\beta+x)}\right] dx =$$
$$= \frac{1}{\beta} e^{\frac{1}{2}\alpha\beta} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda+\mu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right) W_{\lambda,\mu}(z_1) W_{\lambda,\mu}(z_2),$$
$$z_1 = \frac{1}{2}\beta\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right),$$
$$z_2 = \frac{1}{2}\beta\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}\right),$$
$$\left[|\arg\beta| < \pi,\ \operatorname{Re}\alpha > -1,\ \operatorname{Re}\lambda + |\operatorname{Re}\mu| < \frac{1}{2}\right].$$
ИПII 377 (37)

2. $$\int_0^\infty (\alpha+x)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x \operatorname{ch} t} K_\nu\left[\sqrt{x(\alpha+x)}\right] dx =$$
$$= \frac{1}{2}\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) e^{\frac{1}{2}\alpha \operatorname{ch} t} K_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{4}\alpha e^t\right) K_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{4}\alpha e^{-t}\right)$$
$$[-1 < \operatorname{Re}\nu < 1].$$ ИПII 377 (36)

3 $$\int_0^\alpha x^{\lambda-\frac{1}{2}} (\alpha-x)^{-\lambda-\frac{1}{2}} e^{-x \operatorname{sh} t} I_{2\mu}\left[\sqrt{x(\alpha-x)}\right] dx =$$
$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda+\mu\right)}{\alpha\left[\Gamma(2\mu+1)\right]^2} M_{\lambda,\mu}\left(\frac{1}{2}\alpha e^t\right) M_{-\lambda,\mu}\left(\frac{1}{2}\alpha e^{-t}\right)$$
$$\left[\operatorname{Re}\mu > |\operatorname{Re}\lambda| - \frac{1}{2}\right].$$ ИПII 377 (32)

6.648 $$\int_{-\infty}^\infty e^{\varrho x}\left(\frac{\alpha+\beta e^x}{\alpha e^x+\beta}\right) K_{2\nu}\left[(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \operatorname{ch} x)^{\frac{1}{2}}\right] dx = 2K_{\nu+\varrho}(\alpha) K_{\nu-\varrho}(\beta)$$
$$[\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0].$$ ИПII 379 (45)

6.649

1. $$\int_0^\infty K_{\mu-\nu}(2z \operatorname{sh} x) e^{(\nu+\mu)x} dx = \frac{\pi^2}{4\sin[(\nu-\mu)\pi]}\left[J_\nu(z) N_\mu(z) - J_\mu(z) N_\nu(z)\right]$$
$$[\operatorname{Re} z > 0,\ -1 < \operatorname{Re}(\nu-\mu) < 1].$$ МО 44

2. $$\int_0^\infty J_{\nu+\mu}(2x\,\mathrm{sh}\,t)\,e^{(\nu-\mu)t}\,dt = K_\nu(x)\,I_\mu(x)$$

$$\left[\operatorname{Re}(\nu-\mu) < \frac{3}{2},\ \operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1,\ x > 0\right].$$ ВТФ II 97(68)

3. $$\int_0^\infty N_{\nu-\mu}(2x\,\mathrm{sh}\,t)\,e^{-(\nu+\mu)t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sin[\pi(\mu-\nu)]}\left\{I_\mu(x)\,K_\nu(x) - \cos[(\nu-\mu)\pi]\,I_\nu(x)\,K_\mu(x)\right\}$$

$$\left[|\operatorname{Re}(\nu-\mu)| < 1,\ \operatorname{Re}(\nu+\mu) > -\frac{1}{2},\ x > 0\right].$$ ВТФ II 97 (73)

4. $$\int_0^\infty K_0(2z\,\mathrm{sh}\,x)\,e^{-2\nu x}\,dx = -\frac{\pi}{4}\left\{J_\nu(z)\,\frac{\partial N_\nu(z)}{\partial\nu} - N_\nu(z)\,\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\right\}.$$

6.65 Цилиндрические и показательная функции от более сложных аргументов и степенная функция

6.651

1. $$\int_0^\infty x^{\lambda+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}\alpha^2x^2} I_\mu\left(\frac{1}{4}\alpha^2x^2\right) J_\nu(\beta x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,2^{\lambda+1}\beta^{-\lambda-\frac{3}{2}}\,G_{23}^{21}\left(\frac{\beta^2}{2\alpha^2}\,\middle|\,\begin{matrix}1-\mu,\ 1+\mu\\ h,\ \frac{1}{2},\ k\end{matrix}\right),$$

$$h = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\nu,$$

$$k = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\nu$$

$$\left[|\arg\alpha| < \frac{\pi}{4},\ \beta > 0,\ -\frac{3}{2} - \operatorname{Re}(2\mu+\nu) < \operatorname{Re}\lambda < 0\right].$$ ИП II 68(8)

2. $$\int_0^\infty x^{\lambda+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}\alpha^2x^2} K_\mu\left(\frac{1}{4}\alpha^2x^2\right) J_\nu(\beta x)\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,2^{\lambda+1}\beta^{-\lambda-\frac{3}{2}}\,G_{23}^{12}\left(\frac{\beta^2}{2\alpha^2}\,\middle|\,\begin{matrix}1-\mu,\ 1+\mu\\ h,\ \frac{1}{2},\ k\end{matrix}\right),$$

$$h = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\nu,$$

$$k = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\nu$$

$$\left[|\arg\alpha| < \frac{\pi}{4},\ \operatorname{Re}(\lambda+\nu\pm2\mu) > -\frac{3}{2}\right].$$ ИП II 69 (15)

3. $$\int_0^\infty x^{2\mu-\nu+1}e^{-\frac{1}{4}\alpha x^2} I_\mu\left(\frac{1}{4}\alpha x^2\right) J_\nu(\beta x)\,dx =$$
$$= 2^{2\mu-\nu+\frac{1}{2}}(\pi\alpha)^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)\frac{\beta^{\nu-2\mu-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+\nu\right)}\times$$
$$\times\, {}_1F_1\left(\frac{1}{2}+\mu;\ \frac{1}{2}-\mu+\nu;\ -\frac{\beta^2}{2\alpha}\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\alpha>0,\ \beta>0,\ \operatorname{Re}\nu>2\operatorname{Re}\mu+\frac{1}{2}>-\frac{1}{2}\right]$. ИП II 68 (6)

4. $$\int_0^\infty x^{2\mu+\nu+1}e^{-\frac{1}{4}\alpha^2x^2} K_\mu\left(\frac{1}{4}\alpha^2x^2\right) J_\nu(\beta x)\,dx =$$
$$= \sqrt{\pi}\,2^\mu\alpha^{-2\mu-2\nu-2}\beta^\nu\frac{\Gamma(1+2\mu+\nu)}{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{3}{2}\right)}\times$$
$$\times\, {}_1F_1\left(1+2\mu+\nu;\ \mu+\nu+\frac{3}{2};\ -\frac{\beta^2}{2\alpha^2}\right)$$
$\left[|\arg\alpha|<\frac{1}{4}\pi,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}(2\mu+\nu)>-1,\ \beta>0\right]$. ИП II 69 (13)

5. $$\int_0^\infty x^{2\mu+\nu+1}e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2} I_\mu\left(\frac{1}{2}\alpha x^2\right) K_\nu(\beta x)\,dx =$$
$$= \frac{2^{\mu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\beta^{-\mu-\frac{3}{2}}\alpha^{-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}}\Gamma(2\mu+\nu+1)\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\exp\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)W_{k,m}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right),$$
$$2k=-3\mu-\nu-\frac{1}{2},$$
$$2m=\mu+\nu+\frac{1}{2}$$
$\left[\operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(2\mu+\nu)>-1\right]$. ИП II 146 (53)

6. $$\int_0^\infty xe^{-\frac{1}{4}\alpha x^2} J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{4}\beta x^2\right) J_\nu(\gamma x)\,dx =$$
$$= 2(\alpha^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\alpha\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2}\right) J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)$$
$[\gamma>0,\ \operatorname{Re}\alpha>|\operatorname{Im}\beta|,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП II 56 (2)

7. $$\int_0^\infty xe^{-\frac{1}{4}\alpha x^2} I_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{4}\alpha x^2\right) J_\nu(\beta x)\,dx = \left(\frac{1}{2}\pi\alpha\right)^{-\frac{1}{2}}\beta^{-1}\exp\left(-\frac{\beta^2}{2\alpha}\right)$$
$[\operatorname{Re}\alpha>0,\ \beta>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП II 67 (3)

8. $$\int_0^\infty x^{1-\nu}e^{-\frac{1}{4}\alpha^2x^2} I_\nu\left(\frac{1}{4}\alpha^2x^2\right) J_\nu(\beta x)\,dx =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta^{\nu-1}}{\alpha}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right) D_{-2\nu}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$
$\left[|\arg\alpha|<\frac{1}{4}\pi,\ \beta>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$. ИП II 67 (1)

9. $$\int_0^\infty x^{-\nu-1} e^{-\frac{1}{4}\alpha^2 x^2} I_{\nu+1}\left(\frac{1}{4}\alpha^2 x^2\right) J_\nu(\beta x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\beta^\nu \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right) D_{-2\nu-3}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$\left[|\arg\alpha| < \frac{1}{4}\pi,\ \operatorname{Re}\nu > -1,\ \beta > 0\right]$. ИПШ 67 (2)

6.652 $$\int_0^\infty x^{2\nu} e^{-\left(\frac{x^2}{8}+\alpha x\right)} I_\nu\left(\frac{x^2}{8}\right) dx = \frac{\Gamma(4\nu+1)}{2^{4\nu}\Gamma(\nu+1)} \frac{e^{\frac{\alpha^2}{2}}}{\alpha^{\nu+1}} W_{-\frac{3}{2}\nu,\frac{1}{2}\nu}(\alpha^2)$$

$\left[\operatorname{Re}\left(\nu+\frac{1}{4}\right) > 0\right]$. МХд 45

6.653

1. $$\int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}(a^2+b^2)\right] I_\nu\left(\frac{ab}{x}\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= 2I_\nu(a)K_\nu(b) \qquad [0 < a < b];$$
$$= 2K_\nu(a)I_\nu(b) \qquad [0 < b < a]$$

$[\operatorname{Re}\nu > -1]$. В 482 (2) и, ВТФ II 53 (37), В 482 (3) и

2 $$\int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}(z^2+w^2)\right] K_\nu\left(\frac{zw}{x}\right)\frac{dx}{x} = 2K_\nu(z)K_\nu(w)$$

$\left[|\arg z| < \pi,\ |\arg w| < \pi,\ |\arg(z+w)| < \frac{1}{4}\pi\right]$. В 483 (1), ВТФ II 53 (36)

6.654 $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\beta^2}{8x}-\alpha x} K_\nu\left(\frac{\beta^2}{8x}\right) dx = \sqrt{4\pi}\,\alpha^{-\frac{1}{2}} K_{2\nu}(\beta\sqrt{\alpha}).$$ МХ 39

6.655 $$\int_0^\infty x(\beta^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha^2\beta}{\beta^2+x^2}\right) J_\nu\left(\frac{\alpha^2 x}{\beta^2+x^2}\right) J_\nu(\gamma x)\,dx = \gamma^{-1} e^{-\beta\gamma} J_{2\nu}(2\alpha\sqrt{\gamma})$$

$\left[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \gamma > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИПШ 58 (14)

6.656

1 $$\int_0^\infty e^{-(\xi-z)\operatorname{ch} t} J_{2\nu}\left[2(z\xi)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sh} t\right] dt = I_\nu(z)K_\nu(\xi)$$

$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(\xi - z) > 0\right]$. ВТФ II 98 (78)

2. $$\int_0^\infty e^{-(\xi+z)\operatorname{ch} t} K_{2\nu}\left[2(z\xi)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sh} t\right] dt = \frac{1}{2}K_\nu(z)K_\nu(\xi)\sec(\nu\pi)$$

$\left[|\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(z^{\frac{1}{2}}+\xi^{\frac{1}{2}})^2 \geqslant 0\right]$. ВТФ II 98 (79)

6.66 Цилиндрические, гиперболические и показательная функции

Цилиндрические и гиперболические функции

6.661

1. $$\int_0^\infty \operatorname{sh}(ax) K_\nu(bx)\,dx = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{cosec}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \sin\left[\nu \arcsin\left(\frac{a}{b}\right)\right]}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

[$\operatorname{Re} b > |\operatorname{Re} a|$, $|\operatorname{Re}\nu| < 2$]. ИП II 133 (32)

2. $$\int_0^\infty \operatorname{ch}(ax) K_\nu(bx)\,dx = \frac{\pi \cos\left[\nu \arcsin\left(\frac{a}{b}\right)\right]}{2\sqrt{b^2-a^2}\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}$$

[$\operatorname{Re} b > |\operatorname{Re} a|$, $|\operatorname{Re}\nu| < 1$]. ИП II 134 (33)

6.662

1. $$\int_0^\infty \operatorname{ch}(\beta x) K_0(\alpha x) J_0(\gamma x)\,dx = \frac{K(k)}{\sqrt{u+v}},$$

$$u = \frac{1}{2}\{[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2]^{\frac{1}{2}} + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2\},$$

$$v = \frac{1}{2}\{[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2]^{\frac{1}{2}} - \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\},$$

$$k^2 = v(u+v)^{-1}$$

[$\operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Re}\beta|$, $\gamma > 0$]. ИП II 15 (23)

2. $$\int_0^\infty \operatorname{sh}(\beta x) K_1(\alpha x) J_0(\gamma x)\,dx =$$

$$= \alpha^{-1}\left[uE(k) - K(k)E(u) + \frac{K(k)\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right],$$

$$\operatorname{cn}^2 u = 2\gamma^2\{[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2]^{\frac{1}{2}} - \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\}^{-1},$$

$$k^2 = \frac{1}{2}\{1 - (\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2]^{-\frac{1}{2}}\}$$

[$\operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Re}\beta|$, $\gamma > 0$]. ИП II 15 (24)

6.663

1. $$\int_0^\infty K_{\nu\pm\mu}(2z \operatorname{ch} t) \operatorname{ch}[(\mu \mp \nu)t]\,dt = \frac{1}{2} K_\mu(z) K_\nu(z)$$

[$\operatorname{Re} z > 0$]. В 484 (1), ВТФ II 54 (39)

2. $$\int_0^\infty N_{\mu+\nu}(2z \operatorname{ch} t) \operatorname{ch}[(\mu-\nu)t]\,dt = \frac{\pi}{4}[J_\mu(z) J_\nu(z) - N_\mu(z) N_\nu(z)]$$

[$z > 0$]. ВТФ II 96 (64)

3. $\int\limits_0^\infty J_{\mu+\nu}(2z \operatorname{ch} t) \operatorname{ch}[(\mu-\nu)t]\,dt = -\frac{\pi}{4}[J_\mu(z) N_\nu(z) + J_\nu(z) N_\mu(z)]$

$[z > 0]$. ВТФ II 97 (65)

4. $\int\limits_0^\infty J_{\mu+\nu}(2z \operatorname{sh} t) \operatorname{ch}[(\mu-\nu)t]\,dt = \frac{1}{2}[I_\nu(z) K_\mu(z) + I_\mu(z) K_\nu(z)]$

$\left[\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1,\ |\operatorname{Re}(\mu-\nu)| < \frac{3}{2},\ z > 0\right]$. ВТФ II 97 (71)

5. $\int\limits_0^\infty J_{\mu+\nu}(2z \operatorname{sh} t) \operatorname{sh}[(\mu-\nu)t]\,dt = \frac{1}{2}[I_\nu(z) K_\mu(z) - I_\mu(z) K_\nu(z)]$

$\left[\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1,\ |\operatorname{Re}(\mu-\nu)| < \frac{3}{2},\ z > 0\right]$. ВТФ II 97 (72)

6.664

1. $\int\limits_0^\infty J_0(2z \operatorname{sh} t) \operatorname{sh}(2\nu t)\,dt = \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi}[K_\nu(z)]^2$

$\left[|\operatorname{Re}\nu| < \frac{3}{4},\ z > 0\right]$. ВТФ II 97 (69)

2. $\int\limits_0^\infty N_0(2z \operatorname{sh} t) \operatorname{ch}(2\nu t)\,dt = -\frac{\cos(\nu\pi)}{\pi}[K_\nu(z)]^2$

$\left[|\operatorname{Re}\nu| < \frac{3}{4},\ z > 0\right]$. ВТФ II 97 (70)

3. $\int\limits_0^\infty N_0(2z \operatorname{sh} t) \operatorname{sh}(2\nu t)\,dt =$

$= \frac{1}{\pi}\left[I_\nu(z)\frac{\partial K_\nu(z)}{\partial\nu} - K_\nu(z)\frac{\partial I_\nu(z)}{\partial\nu}\right] - \frac{1}{\pi}\cos(\nu\pi)[K_\nu(z)]^2$

$\left[|\operatorname{Re}\nu| < \frac{3}{4},\ z > 0\right]$. ВТФ II 97 (75)

4. $\int\limits_0^\infty K_0(2z \operatorname{sh} t) \operatorname{ch} 2\nu t\,dt = \frac{\pi^2}{8}\{J_\nu^2(z) + N_\nu^2(z)\}$ $[\operatorname{Re} z > 0]$. МО 44

5. $\int\limits_0^\infty K_{2\mu}(z \operatorname{sh} 2t) \operatorname{cth}^{2\nu} t\,dt =$

$= \frac{1}{4z}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\nu\right) W_{\nu,\mu}(iz) W_{\nu,\mu}(-iz)$

$\left[|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2},\ |\operatorname{Re}\mu| + \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}\right]$. МО 119

6. $\int\limits_0^\infty \operatorname{ch}(2\mu x) K_{2\nu}(2a \operatorname{ch} x)\,dx = \frac{1}{2}K_{\mu+\nu}(a) K_{\mu-\nu}(a)$ $[\operatorname{Re} a > 0]$.

ИП II 378 (42)

6.665 $\int\limits_0^\infty \operatorname{sech} x \operatorname{ch}(2\lambda x) I_{2\mu}(a \operatorname{sech} x)\,dx =$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda+\mu\right)}{2a\,[\Gamma(2\mu+1)]^2} M_{\lambda,\,\mu}(a) M_{-\lambda,\,\mu}(a)$$

$\left[\,|\operatorname{Re}\lambda| - \operatorname{Re}\mu < \frac{1}{2}\right]$. ИПII 378 (43)

Цилиндрические, гиперболические и алгебраические функции

6.666 $\int\limits_0^\infty x^{\nu+1} \operatorname{sh}(\alpha x) \operatorname{cosech} \pi x\, J_\nu(\beta x)\,dx =$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} n^{\nu+1} \sin(n\alpha) K_\nu(n\beta)$$

$[|\operatorname{Re}\alpha| < \pi,\ \operatorname{Re}\nu > -1]$. ИПII 41 (3), В 469 (12)

6.667

1. $\int\limits_0^a y^{-1} \operatorname{ch}(y \operatorname{sh} t) I_{2\nu}(x)\,dx = \frac{\pi}{2} I_\nu(ae^t) I_\nu(ae^{-t}),$

$y = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ $\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИПII 365 (10)

2. $\int\limits_0^a y^{-1} \operatorname{ch}(y \operatorname{sh} t) K_{2\nu}(x)\,dx =$

$$= \frac{\pi^2}{4} \operatorname{cosec}(\nu\pi) \left[I_{-\nu}(ae^t) I_{-\nu}(ae^{-t}) - I_\nu(ae^t) I_\nu(ae^{-t})\right],$$

$y = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ $\left[|\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right]$. ИПII 367 (25)

Показательная, гиперболические и цилиндрические функции

6.668

1. $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \operatorname{sh}(\beta x) J_0(\gamma x)\,dx = (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}} r_1^{-1} r_2^{-1} (r_2 - r_1)^{\frac{1}{2}} (r_2 + r_1)^{-\frac{1}{2}},$

$r_1 = [\gamma^2 + (\beta - \alpha)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad r_2 = [\gamma^2 + (\beta + \alpha)^2]^{\frac{1}{2}}$

$[\operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Re}\beta|,\ \gamma > 0]$. ИПII 12 (52)

2. $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} \operatorname{ch}(\beta x) J_0(\gamma x)\,dx = (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}} r_1^{-1} r_2^{-1} (r_2 + r_1)^{\frac{1}{2}} (r_2 - r_1)^{-\frac{1}{2}},$

$r_1 = [\gamma^2 + (\beta - \alpha)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad r_2 = [\gamma^2 + (\beta + \alpha)^2]^{\frac{1}{2}}$

$[\operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Re}\beta|,\ \gamma > 0]$. ИПII 12 (54)

6.669

1 $$\int_0^\infty \left[\operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}x\right)\right]^{2\lambda} e^{-\beta \operatorname{ch} x} J_{2\mu}(\alpha \operatorname{sh} x)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda+\mu\right)}{\alpha\Gamma(2\mu+1)} M_{-\lambda,\,\mu}\left[(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}-\beta\right] W_{\;,\,\mu}\left[(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}+\beta\right]$$

$\left[\operatorname{Re}\beta > |\operatorname{Re}\alpha|,\ \operatorname{Re}(\mu-\lambda) > -\frac{1}{2}\right].$ Бу 86 (5b) *и*, ИПП 363 (34)

2. $$\int_0^\infty \left[\operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}x\right)\right]^{2\lambda} e^{-\beta \operatorname{ch} x} N_{2\mu}(\alpha \operatorname{sh} x)\,dx =$$

$$= -\frac{\sec[(\mu+\lambda)\pi]}{\alpha} W_{\lambda,\,\mu}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\beta\right) W_{-\lambda,\,\mu}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\beta\right) -$$

$$-\frac{\operatorname{tg}[(\mu+\lambda)\pi]\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda+\mu\right)}{\alpha\Gamma(2\mu+1)} W_{\lambda,\,\mu}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\beta\right) M_{-\lambda,\,\mu}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\beta\right)$$

$\left[\operatorname{Re}\beta > |\operatorname{Re}\alpha|,\ \operatorname{Re}\lambda < \frac{1}{2}-|\operatorname{Re}\mu|\right].$ ИПП 363 (35)

3. $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(a_1+a_2)t \operatorname{ch} x} \left[\operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}x\right)\right]^{2\nu} K_{2\mu}\left(t\sqrt{a_1a_2}\operatorname{sh} x\right)dx =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\nu\right)}{2t\sqrt{a_1a_2}} W_{\nu,\,\mu}(a_1t)\,W_{\nu,\,\mu}(a_2t)$$

$\left[\operatorname{Re}\nu < \operatorname{Re}\frac{1\pm 2\mu}{2},\ \operatorname{Re}\left[t\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}\right)^2\right] > 0\right].$ Бу 85 (4a)

4 $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(a_1+a_2)t \operatorname{ch} x} \left[\operatorname{cth}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{2\nu} I_{2\mu}\left(t\sqrt{a_1a_2}\operatorname{sh} x\right)dx =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\nu\right)}{t\sqrt{a_1a_2}\,\Gamma(1+2\mu)} W_{\nu,\,\mu}(a_1t)\,M_{\nu,\,\mu}(a_2t)$$

$\left[\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}+\mu-\nu\right) > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ a_1 > a_2\right].$ Бу 86 (5c)

5. $$\int_{-\infty}^\infty e^{2\nu s-\frac{x-y}{2}\operatorname{th} s} I_{2\mu}\left(\frac{\sqrt{xy}}{\operatorname{ch} s}\right)\frac{ds}{\operatorname{ch} s} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\nu\right)}{\sqrt{xy}\,[\Gamma(1+2\mu)]^2} M_{\nu,\,\mu}(x)\,M_{-\nu,\,\mu}(y)$$

$\left[\operatorname{Re}\left(\pm\nu+\frac{1}{2}+\mu\right) > 0\right].$ Бу 83 (3a) *и*

6. $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\nu s-\frac{x+y}{2}\operatorname{th} s} J_{2\mu}\left(\frac{\sqrt{xy}}{\operatorname{ch} s}\right)\frac{ds}{\operatorname{ch} s}=$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\nu\right)}{\sqrt{xy}\,[\Gamma(1+2\mu)]^2} M_{\nu,\mu}(x) M_{\nu,\mu}(y)$$
$$\left[\operatorname{Re}\left(\mp\nu+\frac{1}{2}+\mu\right)>0\right].$$ Бу 84 (3b) *и*

6.67—6.68 Цилиндрические и тригонометрические функции

6.671

1. $$\int_0^\infty J_\nu(\alpha x)\sin\beta x\,dx=\frac{\sin\left(\nu\arcsin\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\qquad[\beta<\alpha];$$
$$=\infty \text{ или } 0\qquad[\beta=\alpha];$$
$$=\frac{\alpha^\nu\cos\frac{\nu\pi}{2}}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\right)^\nu}\qquad[\beta>\alpha].$$
$[\operatorname{Re}\nu>-2]$. В 444 (4)

2. $$\int_0^\infty J_\nu(\alpha x)\cos\beta x\,dx=\frac{\cos\left(\nu\arcsin\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\qquad[\beta<\alpha];$$
$$=\infty \text{ или } 0\qquad[\beta=\alpha];$$
$$=-\frac{\alpha^\nu\sin\frac{\nu\pi}{2}}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\right)^\nu}\qquad[\beta>\alpha].$$
$[\operatorname{Re}\nu>-1]$. В 444 (5)

3. $$\int_0^\infty N_\nu(ax)\sin(bx)\,dx=\operatorname{ctg}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)(a^2-b^2)^{-\frac{1}{2}}\sin\left[\nu\arcsin\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$
$[0<b<a,\ |\operatorname{Re}\nu|<2]$;
$$=\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)(b^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\left\{a^{-\nu}\cos(\nu\pi)\left[b-(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right]^\nu-a^\nu\left[b-(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\nu}\right\}$$
$[0<a<b,\ |\operatorname{Re}\nu|<2]$. ИП I 103 (33)

4. $$\int_0^\infty N_\nu(ax)\cos(bx)\,dx=-\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}\cos\left[\nu\arcsin\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$
$[0<b<a,\ |\operatorname{Re}\nu|<1]$;
$$=-\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)(b^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}\left\{a^{-\nu}\left[b-(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right]^\nu+\operatorname{ctg}(\nu\pi)+\right.$$
$$\left.+a^\nu\left[b-(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\nu}\operatorname{cosec}(\nu\pi)\right\}$$
$[0<a<b,\ |\operatorname{Re}\nu|<1]$. ИП I 47 (29)

5. $\int\limits_0^\infty K_\nu(ax)\sin(bx)\,dx=$

$$=\frac{1}{4}\pi a^{-\nu}\operatorname{cosec}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}\{[(b^2+a^2)^{\frac{1}{2}}+b]^\nu-[(b^2+a^2)^{\frac{1}{2}}-b]^\nu\}$$

$[\operatorname{Re}a>0,\ b>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<2,\ \nu\neq 0]$. ИПI 105 (48)

6. $\int\limits_0^\infty K_\nu(ax)\cos(bx)\,dx=$

$$=\frac{\pi}{4}(b^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\{a^{-\nu}[b+(b^2+a^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu+a^\nu[b+(b^2+a^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu}\}$$

$[\operatorname{Re}a>0,\ b>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<1]$. ИПI 49 (40)

7 $\int\limits_0^\infty J_0(ax)\sin(bx)\,dx=0\quad[0<b<a];$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\quad[0<a<b].$$ ИПI 99 (1)

8. $\int\limits_0^\infty J_0(ax)\cos(bx)\,dx=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\quad[0<b<a];$

$=\infty\quad[a=b];$

$=0\quad[0<a<b]$. ИПI 43 (1)

9. $\int\limits_0^\infty J_{2n+1}(ax)\sin(bx)\,dx=$

$$=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}T_{2n+1}\left(\frac{b}{a}\right)\quad[0<b<a];$$

$=0\quad[0<a<b]$. ИПI 99 (2)

10. $\int\limits_0^\infty J_{2n}(ax)\cos(bx)\,dx=$

$$=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}T_{2n}\left(\frac{b}{a}\right)\quad[0<b<a];$$

$=0\quad[0<a<b]$. ИПI 43 (2)

11. $\int\limits_0^\infty N_0(ax)\sin(bx)\,dx=\frac{2\arcsin\left(\frac{b}{a}\right)}{\pi\sqrt{a^2-b^2}}\quad[0<b<a];$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left[\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right]\quad[0<a<b].$$ ИПI 103 (31)

12. $\int\limits_0^\infty N_0(ax)\cos(bx)\,dx=0\quad[0<b<a];$

$$=-\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\quad[0<a<b].$$ ИПI 47 (28)

13. $$\int_0^\infty K_0(\beta x)\sin\alpha x\,dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}+\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2}+1}\right)$$

$[\alpha > 0,\ \beta > 0]$. В 425 (11) *и*, МО 48

14 $$\int_0^\infty K_0(\beta x)\cos\alpha x\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

[α и β — действительные числа; $\beta > 0$]. В 425 (10) *и*, МО 48

6.672

1. $$\int_0^\infty J_\nu(ax)J_\nu(bx)\sin(cx)\,dx =$$

$= 0 \quad [\operatorname{Re}\nu > -1,\ 0 < c < b-a,\ 0 < a < b];$

$= \frac{1}{2\sqrt{ab}}\,\mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}\right) \quad [\operatorname{Re}\nu > -1,\ b-a < c < b+a,\ 0 < a < b];$

$= -\frac{\cos(\nu\pi)}{\pi\sqrt{ab}}\,\mathrm{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}\right) \quad [\operatorname{Re}\nu > -1,\ b+a < c,\ 0 < a < b]$

ИП I 102 (27)

2. $$\int_0^\infty J_\nu(x)J_{-\nu}(x)\cos(bx)\,dx =$$

$= \frac{1}{2}\mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}b^2-1\right) \quad [0 < b < 2];$

$= 0 \quad [2 < b].$ ИП I 46 (21)

3. $$\int_0^\infty K_\nu(ax)K_\nu(bx)\cos(cx)\,dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{4\sqrt{ab}}\sec(\nu\pi)\,\mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}\left[(a^2+b^2+c^2)(2ab)^{-1}\right]$$

$\left[\operatorname{Re}(a+b) > 0,\ c > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right]$. ИП I 50 (51)

4. $$\int_0^\infty K_\nu(ax)I_\nu(bx)\cos(cx)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\,\mathrm{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}\right)$$

$\left[\operatorname{Re}a > |\operatorname{Re}b|,\ c > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП I 49 (47)

5. $$\int_0^\infty \sin(2ax)\left[J_\nu(x)\right]^2 dx =$$

$= \frac{1}{2}\mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}(1-2a^2) \quad [0 < a < 1,\ \operatorname{Re}\nu > -1];$

$= \frac{1}{\pi}\cos(\nu\pi)\,\mathrm{Q}_{\nu-\frac{1}{2}}(2a^2-1) \quad [a > 1,\ \operatorname{Re}\nu > -1].$ ИП II 343 (30)

6. $\int\limits_0^\infty \cos(2ax)[J_\nu(x)]^2\,dx =$

$= \frac{1}{\pi} Q_{\nu-\frac{1}{2}}(1-2a^2) \qquad \left[0 < a < 1,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right];$

$= -\frac{1}{\pi}\sin(\nu\pi)\, Q_{\nu-\frac{1}{2}}(2a^2-1) \quad \left[a > 1,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$ ИПII 344 (32)

7. $\int\limits_0^\infty \sin(2ax)\, J_0(x)\, N_0(x)\,dx = 0 \qquad [0 < a < 1];$

$= -\frac{\boldsymbol{K}\left[(1-a^{-2})^{\frac{1}{2}}\right]}{\pi a} \quad [a > 1].$ ИПII 348 (60)

8. $\int\limits_0^\infty K_0(ax)\, I_0(bx)\cos(cx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{c^2+(a+b)^2}}\, \boldsymbol{K}\left\{\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{c^2+(a+b)^2}}\right\}$

$[\operatorname{Re} a > |\operatorname{Re} b|,\ c > 0].$ ИПI 49 (46)

9. $\int\limits_0^\infty \cos(2ax)\, J_0(x)\, N_0(x)\,dx =$

$= -\frac{1}{\pi}\boldsymbol{K}(a) \qquad [0 < a < 1];$

$= -\frac{1}{\pi a}\boldsymbol{K}\left(\frac{1}{a}\right) \qquad [a > 1].$ ИП II 348 (61)

10. $\int\limits_0^\infty \cos(2ax)[N_0(x)]^2\,dx =$

$= \frac{1}{\pi}\boldsymbol{K}\left(\sqrt{1-a^2}\right) \qquad [0 < a < 1];$

$= \frac{2}{\pi a}\boldsymbol{K}\left(\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\right) \qquad [a > 1].$ ИП II 348 (62)

6.673

1. $\int\limits_0^\infty \left[J_\nu(ax)\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) - N_\nu(ax)\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]\sin(bx)\,dx = 0$

$[0 < b < a,\ |\operatorname{Re}\nu| < 2];$

$= \frac{1}{2a^\nu\sqrt{b^2-a^2}}\left\{[b+(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu + [b-(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu\right\}$

$[0 < a < b,\ |\operatorname{Re}\nu| < 2].$ ИП I 104 (39)

2. $\int\limits_0^\infty \left[N_\nu(ax)\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) + J_\nu(ax)\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\right]\cos(bx)\,dx = 0$

$[0 < b < a,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1];$

$= -\frac{1}{2a^\nu\sqrt{b^2-a^2}}\left\{[b+(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu + [b-(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]^\nu\right\}$

$[0 < a < b,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1].$ ИП I 48 (32)

6.674

1. $$\int_0^a \sin(a-x) J_\nu(x)\,dx = aJ_{\nu+1}(a) - 2\nu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{\nu+2n+2}(a)$$
[$\operatorname{Re}\nu > -1$]. ИП II 334 (12)

2. $$\int_0^a \cos(a-x) J_\nu(x)\,dx = aJ_\nu(a) - 2\nu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{\nu+2n+1}(a)$$
[$\operatorname{Re}\nu > -1$]. ИП II 336 (23)

3. $$\int_0^a \sin(a-x) J_{2n}(x)\,dx = aJ_{2n+1}(a) + (-1)^n 2n \left[\cos a - J_0(a) - 2\sum_{m=1}^{n} (-1)^m J_{2m}(a)\right]$$
[$n = 0, 1, 2, \ldots$]. ИП II 334 (10)

4. $$\int_0^a \cos(a-x) J_{2n}(x)\,dx = aJ_{2n}(a) - (-1)^n 2n \left[\sin a - 2\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m J_{2m+1}(a)\right]$$
[$n = 0, 1, 2, \ldots$]. ИП II 335 (21)

5. $$\int_0^a \sin(a-x) J_{2n+1}(x)\,dx = aJ_{2n+2}(a) + (-1)^n (2n+1) \left[\sin a - 2\sum_{m=0}^{n} (-1)^m J_{2m+1}(a)\right]$$
[$n = 0, 1, 2, \ldots$]. ИП II 334 (11)

6. $$\int_0^a \cos(a-x) J_{2n+1}(x)\,dx = aJ_{2n+1}(a) + (-1)^n (2n+1) \left[\cos a - J_0(a) - 2\sum_{m=1}^{n} (-1)^m J_{2m}(a)\right]$$
[$n = 0, 1, 2, \ldots$]. ИП II 336 (22)

7. $$\int_0^z \sin(z-x) J_0(x)\,dx = zJ_1(z).$$ В 415 (2)

8. $$\int_0^z \cos(z-x) J_0(x)\,dx = zJ_0(z).$$ В 415 (1)

6.675

1. $$\int_0^\infty J_\nu\left(a\sqrt{x}\right)\sin(bx)\,dx =$$
$$= \frac{a\sqrt{\pi}}{4b^{\frac{3}{2}}}\left[\cos\left(\frac{a^2}{8b}-\frac{\nu\pi}{4}\right)J_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2}{8b}\right)-\right.$$
$$\left.-\sin\left(\frac{a^2}{8b}-\frac{\nu\pi}{4}\right)J_{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2}{8b}\right)\right]$$
$[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-4]$. ИП I 110 (23)

2. $$\int_0^\infty J_\nu\left(a\sqrt{x}\right)\cos(bx)\,dx =$$
$$= -\frac{a\sqrt{\pi}}{4b^{\frac{3}{2}}}\left[\sin\left(\frac{a^2}{8b}-\frac{\nu\pi}{4}\right)J_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2}{8b}\right)+\right.$$
$$\left.+\cos\left(\frac{a^2}{8b}-\frac{\nu\pi}{4}\right)J_{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2}{8b}\right)\right]$$
$[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-2]$. ИП I 53 (22) *u*

3. $$\int_0^\infty J_0\left(a\sqrt{x}\right)\sin(bx)\,dx = \frac{1}{b}\cos\left(\frac{a^2}{4b}\right)$$
$[a>0,\ b>0]$. ИП I 110 (22)

4 $$\int_0^\infty J_0\left(a\sqrt{x}\right)\cos(bx)\,dx = \frac{1}{b}\sin\left(\frac{a^2}{4b}\right)$$
$[a>0,\ b>0]$. ИП I 53 (21)

6.676

1. $$\int_0^\infty J_\nu\left(a\sqrt{x}\right)J_\nu\left(b\sqrt{x}\right)\sin(cx)\,dx =$$
$$= \frac{1}{c}J_\nu\left(\frac{ab}{2c}\right)\cos\left(\frac{a^2+b^2}{4c}-\frac{\nu\pi}{2}\right)$$
$[a>0,\ b>0,\ c>0,\ \operatorname{Re}\nu>-2]$. ИП I 111 (29) *u*

2. $$\int_0^\infty J_\nu\left(a\sqrt{x}\right)J_\nu\left(b\sqrt{x}\right)\cos(cx)\,dx =$$
$$= \frac{1}{c}J_\nu\left(\frac{ab}{2c}\right)\sin\left(\frac{a^2+b^2}{4c}-\frac{\nu\pi}{2}\right)$$
$[a>0,\ b>0,\ c>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП I 54 (27)

3. $$\int_0^\infty J_0\left(a\sqrt{x}\right)K_0\left(a\sqrt{x}\right)\sin(bx)\,dx = \frac{1}{2b}K_0\left(\frac{a^2}{2b}\right)$$
$[\operatorname{Re}a>0,\ b>0]$. ИП I 111 (31)

4. $$\int_0^\infty J_0(\sqrt{ax})\,K_0(\sqrt{ax})\cos(bx)\,dx = \frac{\pi}{4b}\left[I_0\left(\frac{a}{2b}\right)-\mathbf{L}_0\left(\frac{a}{2b}\right)\right]$$
$[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0]$. ИП I 54 (29)

5. $$\int_0^\infty K_0(\sqrt{ax})\,N_0(\sqrt{ax})\cos(bx)\,dx = -\frac{1}{2b}K_0\left(\frac{a}{2b}\right)$$
$[\operatorname{Re}\sqrt{a} > 0,\ b > 0]$. ИП I 54 (30)

6. $$\int_0^\infty K_0\left(\sqrt{ax}\,e^{\frac{1}{4}\pi i}\right)K_0\left(\sqrt{ax}\,e^{-\frac{1}{4}\pi i}\right)\cos(bx)\,dx = \frac{\pi^2}{8b}\left[\mathbf{H}_0\left(\frac{a}{2b}\right)-N_0\left(\frac{a}{2b}\right)\right]$$
$[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0]$. ИП I 54 (31)

6.677

1. $$\int_a^\infty J_0\left(b\sqrt{x^2-a^2}\right)\sin(cx)\,dx =$$
$$= 0 \qquad [0 < c < b];$$
$$= \frac{\cos\left(a\sqrt{c^2-b^2}\right)}{\sqrt{c^2-b^2}} \qquad [0 < b < c].$$ ИП I 113 (47)

2. $$\int_a^\infty J_0\left(b\sqrt{x^2-a^2}\right)\cos(cx)\,dx = \frac{\exp\left(-a\sqrt{b^2-c^2}\right)}{\sqrt{b^2-c^2}} \qquad [0 < c < b];$$
$$= \frac{-\sin\left(a\sqrt{c^2-b^2}\right)}{\sqrt{c^2-b^2}} \qquad [0 < b < c].$$ ИП I 57 (48) *и*

3. $$\int_0^\infty J_0\left(\alpha\sqrt{x^2+z^2}\right)\cos\beta x\,dx = \frac{\cos z\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \qquad [0 < \beta < \alpha,\ z > 0];$$
$$= 0 \qquad [0 < \alpha \leqslant \beta,\ z > 0].$$ МО 47 *и*

4 $$\int_0^\infty N_0\left(\alpha\sqrt{x^2+z^2}\right)\cos\beta x\,dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\sin\left(z\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)$$
$[0 < \beta < \alpha,\ z > 0]$;
$$= -\frac{1}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\exp\left(-z\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\right)$$
$[0 < \alpha < \beta,\ z > 0]$. МО 47 *и*

5. $$\int_0^\infty K_0\left[\alpha\sqrt{x^2+\beta^2}\right]\cos(\gamma x)\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}\exp\left(-\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}\right)$$
$[\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ \gamma > 0]$. ИП I 56 (43)

6. $\int\limits_0^a J_0\left(b\sqrt{a^2-x^2}\right)\cos(cx)\,dx=\frac{\sin\left(a\sqrt{b^2+c^2}\right)}{\sqrt{b^2+c^2}}$

$[b>0]$. МО 48 *a*, ИП I 57 (47)

7. $\int\limits_0^\infty J_0\left(b\sqrt{x^2-a^2}\right)\cos(cx)\,dx=$

$=\frac{\operatorname{ch}\left(a\sqrt{b^2-c^2}\right)}{\sqrt{b^2-c^2}}\qquad[0<c<b,\ a>0];$

$=0\qquad[0<b<c,\ a>0].$ ИП I 57 (49)

8. $\int\limits_0^\infty H_0^{(1)}\left(\alpha\sqrt{\beta^2-x^2}\right)\cos(\gamma x)\,dx=-i\,\frac{\exp\left(i\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}$

$\left[\pi>\arg\sqrt{\beta^2-x^2}\geqslant 0,\ \alpha>0,\ \gamma>0\right].$ ИП I 59 (59)

9. $\int\limits_0^\infty H_0^{(2)}\left(\alpha\sqrt{\beta^2-x^2}\right)\cos(\gamma x)\,dx=\frac{i\exp\left(-i\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}$

$\left[-\pi<\arg\sqrt{\beta^2-x^2}\leqslant 0,\ \alpha>0,\ \gamma>0\right].$ ИП I 58 (58)

6.678 $\int\limits_0^\infty\left[K_0\left(2\sqrt{x}\right)+\frac{\pi}{2}N_0\left(2\sqrt{x}\right)\right]\sin(bx)\,dx=\frac{\pi}{2b}\sin\left(\frac{1}{b}\right)$

$[b>0]$. ИП I 111 (34)

6.679

1 $\int\limits_0^\infty J_{2\nu}\left[2b\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right]\sin(bx)\,dx=-i\left[I_{\nu-ib}(a)\,K_{\nu+ib}(a)-\right.$

$\left.-I_{\nu+ib}(a)\,K_{\nu-ib}(a)\right]\qquad[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1].$ ИП I 115 (59)

2. $\int\limits_0^\infty J_{2\nu}\left[2a\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right]\cos(bx)\,dx=$

$=I_{\nu-ib}(a)\,K_{\nu+ib}(a)+I_{\nu+ib}(a)\,K_{\nu-ib}(a)$

$\left[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$ ИП I 59 (64)

3. $\int\limits_0^\infty J_{2\nu}\left[2a\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right]\cos(bx)\,dx=$

$=-\frac{\pi}{2}\left[J_{\nu+ib}(a)\,N_{\nu-ib}(a)+J_{\nu-ib}(a)\,N_{\nu+ib}(a)\right].$ ИП I 59 (63)

4. $\int\limits_0^\infty J_0\left[2a\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right]\sin(bx)\,dx=$

$=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}(\pi b)\left[K_{ib}(a)\right]^2\qquad[a>0,\ b>0].$ ИП I 115 (58)

5. $\int\limits_0^\infty J_0\left[2a\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right]\cos(bx)\,dx =$

$= [I_{ib}(a) + I_{-ib}(a)]\,K_{ib}(a) \qquad [a>0,\ b>0].$ ИП I 59 (62)

6. $\int\limits_0^\infty N_0\left[2a\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right]\cos(bx)\,dx =$

$= -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{ch}(\pi b)\,[K_{ib}(a)]^2 \qquad [a>0,\ b>0].$ ИП I 59 (65)

7. $\int\limits_0^\infty K_0\left[2a\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right]\cos(bx)\,dx =$

$= \frac{\pi^2}{4}\{[J_{ib}(a)]^2 + [N_{ib}(a)]^2\} \qquad [\mathrm{Re}\,a>0,\ b>0].$ ИП I 59 (66)

6.681

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\mu x)\,J_{2\nu}(2a\cos x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,J_{\nu+\mu}(a)\,J_{\nu-\mu}(a)$

$\left[\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}\right].$ ИП II 361 (23)

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\mu x)\,N_{2\nu}(2a\cos x)\,dx =$

$= \frac{\pi}{2}\,[\mathrm{ctg}(2\nu\pi)\,J_{\nu+\mu}(a)\,J_{\nu-\mu}(a) - \mathrm{cosec}(2\nu\pi)\,J_{\mu-\nu}(a)\,J_{-\mu-\nu}(a)]$

$\left[|\mathrm{Re}\,\nu| < \frac{1}{2}\right].$ ИП II 361 (24)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\mu x)\,I_{2\nu}(2a\cos x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,I_{\nu-\mu}(a)\,I_{\nu+\mu}(a)$

$\left[\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}\right].$ ИП I 59 (61)

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\nu x)\,K_\nu(2a\cos x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,I_0(a)\,K_\nu(a)$

$[\mathrm{Re}\,\nu < 1].$ B 484 (3)

5 $\int\limits_0^{\pi} J_0(2z\cos x)\cos 2nx\,dx = (-1)^n\,\pi J_n^2(z).$ MO 45

6. $\int\limits_0^{\pi} J_0(2z\sin x)\cos 2nx\,dx = \pi J_n^2(z).$ B 43 (3), MO 45

7 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx)\,N_0(2a\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,J_n(a)\,N_n(a)$

$[n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots].$ ИП II 360 (16)

8. $\int\limits_0^{\pi} \sin(2\mu x) J_{2\nu}(2a \sin x)\,dx =$

$= \pi \sin(\mu\pi) J_{\nu-\mu}(a) J_{\nu+\mu}(a)$ $[\operatorname{Re}\nu > -1]$. ИПII 360 (13)

9. $\int\limits_0^{\pi} \cos(2\mu x) J_{2\nu}(2a \sin x)\,dx =$

$= \pi \cos(\mu\pi) J_{\nu-\mu}(a) J_{\nu+\mu}(a)$ $\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИПII 360 (14)

10. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} J_{\nu+\mu}(2z \cos x) \cos[(\nu-\mu) x]\,dx = \frac{\pi}{2} J_\nu(z) J_\mu(z)$

$[\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1]$. MO 42

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[(\mu-\nu) x] I_{\mu+\nu}(2a \cos x)\,dx = \frac{\pi}{2} I_\mu(a) I_\nu(a)$

$[\operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1]$. В 484 (2), ИПII 378 (39)

12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[(\mu-\nu) x] K_{\mu+\nu}(2a \cos x)\,dx =$

$= \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec}[(\mu+\nu)\pi][I_{-\mu}(a) I_{-\nu}(a) - I_\mu(a) I_\nu(a)]$

$[|\operatorname{Re}(\mu+\nu)| < 1]$. ИПII 378 (40)

13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} K_{\nu-m}(2a \cos x) \cos[(m+\nu) x]\,dx =$

$= (-1)^m \frac{\pi}{2} I_m(a) K_\nu(a)$ $[|\operatorname{Re}(\nu-m)| < 1]$. В 485 (4)

6.682

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} {}_{\nu-\frac{1}{2}}(x \sin t) \sin^{\nu+\frac{1}{2}} t\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_\nu(x)$

[ν может быть нулем, натуральным числом, одной второй, натуральным числом плюс одна вторая; $x > 0$]. MO 42 *u*

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu(z \sin x) \sin^\nu x \cos^{2\nu} x\,dx = 2^{\nu-1} \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) z^{-\nu} J_\nu^2\left(\frac{z}{2}\right)$

$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. MO 42 *u*

6.683

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu(z\sin x)\, I_\mu(z\cos x)\,\mathrm{tg}^{\nu+1} x\, dx = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+1\right)} J_\mu(z)$$

$[\operatorname{Re}\nu > \operatorname{Re}\mu > -1]$. B 407 (4)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu(z_1\sin x)\, J_\mu(z_2\cos x)\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu+1} x\, dx =$$

$$= \frac{z_1^\nu z_2^\mu J_{\nu+\mu+1}\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2}\right)}{\sqrt{(z_1^2+z_2^2)^{\nu+\mu+1}}}$$ $[\operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}\mu > -1]$. B 410 (1)

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu(z\cos^2 x)\, J_\mu(z\sin^2 x)\sin x\cos x\, dx =$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{\nu+\mu+2k+1}(z)$$ $[\operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}\mu > -1]$

(см. также 6.513 6.). B 414 (1)

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\mu(z\sin\theta)\,(\sin\theta)^{1-\mu}(\cos\theta)^{2\nu+1}\, d\theta =$$

$$= \frac{s_{\mu+\nu,\ \nu-\mu+1}(z)}{2^{\mu-1} z^{\nu+1}\,\Gamma(\mu)}$$ $[\operatorname{Re}\nu > -1]$. B 407 (2)

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\mu(z\sin\theta)(\sin\theta)^{1-\mu}\, d\theta = \frac{\mathbf{H}_{\mu-\frac{1}{2}}(z)}{\sqrt{\frac{2z}{\pi}}}.$$ B 407 (3)

6. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\mu(a\sin\theta)(\sin\theta)^{\mu+1}(\cos\theta)^{2\varrho+1}\, d\theta = 2^\varrho\Gamma(\varrho+1)\, a^{-\varrho-1} J_{\varrho+\mu+1}(a)$$

$[\operatorname{Re}\varrho > -1,\ \operatorname{Re}\mu > -1]$. B 406 (1), ВТФ II 46 (5)

7. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu(2z\sin\theta)(\sin\theta)^\nu(\cos\theta)^{2\nu}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{\nu+2m}\Gamma\left(\nu+m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)\,\Gamma(2\nu+m+1)};$$

$$= \frac{1}{2} z^{-\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)[J_\nu(z)]^2$$ $\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ВТФ II 47 (10)

8. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu(z\sin\theta)(\sin\theta)^{\nu+1}(\cos\theta)^{-2\nu}\,d\theta = 2^{-\nu}\frac{z^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\sin z$$
$$\left[-1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right].$$ ВТФII 68 (39)

9. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu(z\sin^2\theta)J_\nu(z\cos^2\theta)(\sin\theta)^{2\nu+1}(\cos\theta)^{2\nu+1}\,d\theta =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)J_{2\nu+\frac{1}{2}}(z)}{2^{2\nu+\frac{3}{2}}\Gamma(\nu+1)\sqrt{z}} \qquad \left[\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ В 409 (1)

10. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\mu(z\sin^2\theta)J_\nu(z\cos^2\theta)\sin^{2\mu+1}\theta\cos^{2\nu+1}\theta\,d\theta =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)J_{\mu+\nu+\frac{1}{2}}(z)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+\nu+1)\sqrt{2z}}$$
$$\left[\operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ В 417 (1)

6.684

1. $$\int_0^{\pi}(\sin x)^{2\nu}\frac{J_\nu\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x}\right)}{\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x}\right)^\nu}\,dx =$$
$$= 2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{J_\nu(\alpha)}{\alpha^\nu}\frac{J_\nu(\beta)}{\beta^\nu} \qquad \left[\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИПII 362 (27)

2. $$\int_0^{\pi}(\sin x)^{2\nu}\frac{N_\nu\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x}\right)}{\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x}\right)^\nu}\,dx =$$
$$= 2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{J_\nu(\alpha)}{\alpha^\nu}\frac{N_\nu(\beta)}{\beta^\nu}$$
$$\left[|\alpha|<|\beta|,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИПII 362 (28)

6.685 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec x\cos(2\lambda x)K_{2\mu}(a\sec x)\,dx = \frac{\pi}{2a}W_{\lambda,\mu}(a)W_{-\lambda,\mu}(a) \qquad [\operatorname{Re}a>0].$$ ИПII 378 (41)

6.686

1. $$\int_0^{\infty}\sin(ax^2)J_\nu(bx)\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\sin\left(\frac{b^2}{8a}-\frac{\nu+1}{4}\pi\right)J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{8a}\right)$$
$$[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-3].$$ ИПII 34 (13)

2. $$\int_0^\infty \cos(ax^2) J_\nu(bx)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \cos\left(\frac{b^2}{8a} - \frac{\nu+1}{4}\pi\right) J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{8a}\right)$$

$[a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1]$. ИПII 38 (38)

3. $$\int_0^\infty \sin(ax^2) N_\nu(bx)\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{a}} \sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \times \left[\cos\left(\frac{b^2}{8a} - \frac{3\nu+1}{4}\pi\right) J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{8a}\right) - \sin\left(\frac{b^2}{8a} + \frac{\nu-1}{4}\pi\right) N_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{8a}\right)\right]$$

$[a > 0,\ b > 0,\ -3 < \operatorname{Re}\nu < 3]$. ИПII 107 (7)

4. $$\int_0^\infty \cos(ax^2) N_\nu(bx)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{a}} \sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{b^2}{8a} - \frac{3\nu+1}{4}\pi\right) J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{8a}\right) + \cos\left(\frac{b^2}{8a} + \frac{\nu-1}{4}\pi\right) N_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{8a}\right)\right]$$

$[a > 0,\ b > 0,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < 1]$. ИПII 107 (8)

5. $$\int_0^\infty \sin(ax^2) J_1(bx)\,dx = \frac{1}{b} \sin\frac{b^2}{4a} \qquad [a > 0,\ b > 0].$$ ИПII 19 (16)

6. $$\int_0^\infty \cos(ax^2) J_1(bx)\,dx = \frac{2}{b} \sin^2\left(\frac{b^2}{8a}\right) \qquad [a > 0,\ b > 0].$$ ИПII 20 (20)

7. $$\int_0^\infty \sin^2(ax^2) J_1(bx)\,dx = \frac{1}{2b} \cos\left(\frac{b^2}{8a}\right) \qquad [a > 0,\ b > 0].$$ ИПII 19 (17)

6.687 $$\int_0^\infty \cos\left(\frac{x^2}{2a}\right) K_{2\nu}\left(xe^{i\frac{\pi}{4}}\right) K_{2\nu}\left(xe^{-i\frac{\pi}{4}}\right) dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\nu\right)\sqrt{\pi}}{8\sqrt{a}} W_{\frac{1}{4},\nu}\left(ae^{i\frac{\pi}{2}}\right) W_{\frac{1}{4},\nu}\left(ae^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$$

$\left[a > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{4}\right]$. ИПII 372 (1)

6.688

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu(\mu z \sin t) \cos(\mu x \cos t)\,dt = \frac{\pi}{2} J_{\frac{\nu}{2}}\left(\mu \frac{\sqrt{x^2+z^2}+x}{2}\right) J_{\frac{\nu}{2}}\left(\mu \frac{\sqrt{x^2+z^2}-x}{2}\right)$$

$[\operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re} z > 0]$. МО 46

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\nu+1} \cos(\beta \cos x) J_\nu(\alpha \sin x)\, dx =$

$= 2^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}\, \alpha^\nu (\alpha^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}} J_{\nu+\frac{1}{2}} \left[(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\right]$ $[\operatorname{Re} \nu > -1]$. ИПII 361 (19)

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[(z-\zeta)\cos\theta] J_{2\nu}[2\sqrt{z\zeta}\sin\theta]\, d\theta = \frac{\pi}{2} J_\nu(z) J_\nu(\zeta)$

$\left[\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}\right]$. ВТФ II 47 (8)

6.69—6.74 Цилиндрические, тригонометрические и степенная функции

6.691 $\int\limits_0^\infty x \sin(bx) K_0(ax)\, dx = \frac{\pi b}{2} (a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}}$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0]$. ИП I 105 (47)

6.692

1. $\int\limits_0^\infty x K_\nu(ax) I_\nu(bx) \sin(cx)\, dx =$

$= -\frac{1}{2} (ab)^{-\frac{3}{2}} c (u^2-1)^{-\frac{1}{2}} Q^1_{\nu-\frac{1}{2}}(u), \qquad u = (2ab)^{-1}(a^2+b^2+c^2)$

$\left[\operatorname{Re} a > |\operatorname{Re} b|,\ c > 0,\ \operatorname{Re} \nu > -\frac{3}{2}\right]$. ИП I 106 (54)

2. $\int\limits_0^\infty x K_\nu(ax) K_\nu(bx) \sin(cx)\, dx =$

$= \frac{\pi}{4} (ab)^{-\frac{3}{2}} c (u^2-1)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right) P^{-1}_{\nu-\frac{1}{2}}(u),$

$u = (2ab)^{-1}(a^2+b^2+c^2)$

$\left[\operatorname{Re}(a+b) > 0,\ c > 0,\ |\operatorname{Re} \nu| < \frac{3}{2}\right]$. ИП I 107 (61)

6.693

1. $\int\limits_0^\infty J_\nu(\alpha x) \sin \beta x \frac{dx}{x} = \frac{1}{\nu} \sin\left(\nu \arcsin \frac{\beta}{\alpha}\right)$ $[\beta \leqslant \alpha]$

$= \frac{\alpha^\nu \sin \frac{\nu\pi}{2}}{\nu \left(\beta + \sqrt{\beta^2-\alpha^2}\right)^\nu}$ $[\beta \geqslant \alpha]$

$[\operatorname{Re} \nu > -1]$. В 443 (2)

2. $\int\limits_0^\infty J_\nu(\alpha x) \cos \beta x \frac{dx}{x} = \frac{1}{\nu} \cos\left(\nu \arcsin \frac{\beta}{\alpha}\right)$ $[\beta \leqslant \alpha]$

$= \frac{\alpha^\nu \cos \frac{\nu\pi}{2}}{\nu \left(\beta + \sqrt{\beta^2-\alpha^2}\right)^\nu}$ $[\beta \geqslant \alpha]$

$[\operatorname{Re} \nu > 0]$. В 443 (3)

3. $$\int_0^\infty N_\nu(ax)\sin(bx)\frac{dx}{x} = -\frac{1}{\nu}\operatorname{tg}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\sin\left[\nu\arcsin\left(\frac{b}{a}\right)\right] \qquad [0 < b < a,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1];$$

$$= \frac{1}{2\nu}\sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\left\{a^{-\nu}\cos(\nu\pi)\left[b-(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\nu} - a^{\nu}\left[b-(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\nu}\right\} \qquad [0 < a < b,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1].$$ ИПI 103 (35)

4. $$\int_0^\infty J_\nu(ax)\sin(bx)\frac{dx}{x^2} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}\sin\left[\nu\arcsin\left(\frac{b}{a}\right)\right]}{\nu^2-1} - \frac{b\cos\left[\nu\arcsin\left(\frac{b}{a}\right)\right]}{\nu(\nu^2-1)} \qquad [0 < b < a,\ \operatorname{Re}\nu > 0];$$

$$= \frac{-a^{\nu}\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)\left[b+\nu\sqrt{b^2-a^2}\right]}{\nu(\nu^2-1)\left[b+\sqrt{b^2-a^2}\right]^{\nu}} \qquad [0 < a < b,\ \operatorname{Re}\nu > 0].$$ ИПI 99 (6)

5. $$\int_0^\infty J_\nu(ax)\cos(bx)\frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{a\cos\left[(\nu-1)\arcsin\left(\frac{b}{a}\right)\right]}{2\nu(\nu-1)} + \frac{a\cos\left[(\nu+1)\arcsin\left(\frac{b}{a}\right)\right]}{2\nu(\nu+1)} \qquad [0 < b < a,\ \operatorname{Re}\nu > 1];$$

$$= \frac{a^{\nu}\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{2\nu(\nu-1)\left[b+\sqrt{b^2-a^2}\right]^{\nu-1}} - \frac{a^{\nu+2}\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{2\nu(\nu+1)\left[b+\sqrt{b^2-a^2}\right]^{\nu+1}} \qquad [0 < a < b,\ \operatorname{Re}\nu > 1].$$ ИПI 44 (6)

6. $$\int_0^\infty J_0(\alpha x)\sin x\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad [0 < \alpha < 1];$$

$$= \operatorname{arccosec}\alpha \qquad [\alpha > 1].$$ УВ II 200

7. $$\int_0^\infty J_0(x)\sin\beta x\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad [\beta > 1];$$

$$= \arcsin\beta \qquad [\beta^2 < 1];$$

$$= -\frac{\pi}{2} \qquad [\beta < -1].$$

8. $$\int_0^\infty [J_0(x) - \cos\alpha x]\frac{dx}{x} = \ln 2\alpha.$$ НИ 66 (13)

9. $$\int_0^z J_\nu(x)\sin(z-x)\frac{dx}{x} = \frac{2}{\nu}\sum_{k=0}^\infty(-1)^k J_{\nu+2k+1}(z) \qquad [\operatorname{Re}\nu > 0].$$ В 416 (4)

10. $\int\limits_0^z J_\nu(x)\cos(z-x)\frac{dx}{x}=\frac{1}{\nu}J_\nu(z)+\frac{2}{\nu}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{\nu+2k}(z)$

$[\operatorname{Re}\nu>0]$. В 416 (5)

6.694 $\int\limits_0^\infty\left[\frac{J_1(ax)}{x}\right]^2\sin(bx)\,dx=\frac{1}{2}b-\left(\frac{4a}{3\pi}\right)\left[\left(1+\frac{b^2}{4a^2}\right)E\left(\frac{b}{2a}\right)+\right.$

$\left.+\left(1-\frac{b^2}{4a^2}\right)K\left(\frac{b}{2a}\right)\right]$ $[0<b\leqslant 2a]$. ИП I 102 (22)

6.695

1. $\int\limits_0^\infty\frac{\sin\alpha x}{\beta^2+x^2}J_0(ux)\,dx=\frac{\operatorname{sh}\alpha\beta}{\beta}K_0(\beta u)$

$[\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ u>\alpha]$. МО 46

2. $\int\limits_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{\beta^2+x^2}J_0(ux)\,dx=\frac{\pi}{2}\frac{e^{-\alpha\beta}}{\beta}I_0(\beta u)$

$[\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ -\alpha<u<\alpha]$. МО 46

3 $\int\limits_0^\infty\frac{x}{x^2+\beta^2}\sin(\alpha x)J_0(\gamma x)\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}I_0(\gamma\beta)$

$[\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ 0<\gamma<\alpha]$. ИП II 10 (36)

4 $\int\limits_0^\infty\frac{x}{x^2+\beta^2}\cos(\alpha x)J_0(\gamma x)\,dx=\operatorname{ch}(\alpha\beta)K_0(\beta\gamma)$

$[\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \alpha<\gamma]$. ИП II 11 (45)

6.696 $\int\limits_0^\infty[1-\cos(\alpha x)]J_0(\beta x)\frac{dx}{x}=$

$=\operatorname{Arch}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ $[0<\beta<\alpha]$;

$=0$ $[0<\alpha<\beta]$. ИП II 11 (43)

6.697

1 $\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{\sin[\alpha(x+\beta)]}{x+\beta}J_0(x)\,dx=2\int\limits_0^\alpha\frac{\cos\beta u}{\sqrt{1-u^2}}du$

$[0\leqslant\alpha\leqslant 1]$; В 463 (2)

$=\pi J_0(\beta)$ $[1\leqslant\alpha<\infty]$. В 463 (1), ИП II 345 (42)

2. $\int\limits_0^\infty\frac{\sin(x+t)}{x+t}J_0(t)\,dt=\frac{\pi}{2}J_0(x)$ $[x>0]$. В 475 (4)

3. $\int\limits_0^\infty\frac{\cos(x+t)}{x+t}J_0(t)\,dt=-\frac{\pi}{2}N_0(x)$ $[x>0]$. В 475 (5)

4. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{x+\beta} \sin[\alpha(x+\beta)] J_0(bx)\,dx = 0$$

$[0 \leqslant \alpha < b]$. В 464 (5), ИП II 345 (43) *и*

5. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[\alpha(x+\beta)]}{x+\beta} [J_{n+\frac{1}{2}}(x)]^2\,dx = \pi [J_{n+\frac{1}{2}}(\beta)]^2$$

$[2 \leqslant \alpha < \infty,\ n = 0, 1, \ldots]$. ИП II 346 (45)

6. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[\alpha(x+\beta)]}{x+\beta} J_{n+\frac{1}{2}}(x) J_{-n-\frac{1}{2}}(x)\,dx = \pi J_{n+\frac{1}{2}}(\beta) J_{-n-\frac{1}{2}}(\beta) \qquad [2 \leqslant \alpha < \infty,\ n = 0, 1, \ldots].$$

ИП II 346 (46)

7. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_\mu[a(z+x)]}{(z+x)^\mu} \frac{J_\nu[a(\zeta+x)]}{(\zeta+x)^\nu}\,dx = \frac{\Gamma(\mu+\nu)\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2}{a}}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{J_{\mu+\nu-\frac{1}{2}}[a(z-\zeta)]}{(z-\zeta)^{\mu+\nu-\frac{1}{2}}}$$

$[\operatorname{Re}(\mu+\nu) > 0]$. В 463 (3)

6.698

1. $$\int_0^\infty \sqrt{x} J_{\nu+\frac{1}{4}}(ax) J_{-\nu+\frac{1}{4}}(ax) \sin(bx)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi b}} \frac{\cos\left[2\nu \arccos\left(\frac{b}{2a}\right)\right]}{\sqrt{4a^2-b^2}} \qquad [0 < b < 2a];$$
$$= 0 \qquad [0 < 2a < b].$$

ИП I 102 (26)

2. $$\int_0^\infty \sqrt{x} J_{\nu-\frac{1}{4}}(ax) J_{-\nu-\frac{1}{4}}(ax) \cos(bx)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi b}} \frac{\cos\left[2\nu \arccos\left(\frac{b}{2a}\right)\right]}{\sqrt{4a^2-b^2}} \qquad [0 < b < 2a];$$
$$= 0 \qquad [0 < 2a < b].$$

ИП I 46 (24)

3. $$\int_0^\infty \sqrt{x}\, I_{\frac{1}{4}-\nu}\left(\frac{1}{2}ax\right) K_{\frac{1}{4}+\nu}\left(\frac{1}{2}ax\right) \sin(bx)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2b}}\, a^{-2\nu} \frac{(b+\sqrt{a^2+b^2})^{2\nu}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu < \frac{5}{4}\right]$. ИП I 106 (56)

4. $$\int_0^\infty \sqrt{x}\, I_{-\frac{1}{4}-\nu}\left(\frac{1}{2}ax\right) K_{-\frac{1}{4}+\nu}\left(\frac{1}{2}ax\right) \cos(bx)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2b}}\, a^{-2\nu} \frac{(b+\sqrt{a^2+b^2})^{2\nu}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu < \frac{3}{4}\right]$. ИП I 50 (49)

6.699

1. $$\int_0^\infty x^\lambda J_\nu(ax)\sin(bx)\,dx = 2^{1+\lambda} a^{-(2+\lambda)} b \frac{\Gamma\left(\frac{2+\lambda+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\lambda}{2}\right)} \times$$
$$\times F\left(\frac{2+\lambda+\nu}{2}, \frac{2+\lambda-\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{b^2}{a^2}\right)$$
$$\left[0 < b < a,\ -\operatorname{Re}\nu - 1 < 1 + \operatorname{Re}\lambda < \frac{3}{2}\right];$$
$$= \left(\frac{1}{2}a\right)^\nu b^{-(\nu+\lambda+1)} \frac{\Gamma(\nu+\lambda+1)}{\Gamma(\nu+1)} \sin\left[\pi\left(\frac{1+\lambda+\nu}{2}\right)\right] \times$$
$$\times F\left(\frac{2+\lambda+\nu}{2}, \frac{1+\lambda+\nu}{2}; \nu+1; \frac{a^2}{b^2}\right)$$
$$\left[0 < a < b,\ -\operatorname{Re}\nu - 1 < 1 + \operatorname{Re}\lambda < \frac{3}{2}\right].$$ ИП I 100 (11)

2. $$\int_0^\infty x^\lambda J_\nu(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{2^\lambda a^{-(1+\lambda)} \Gamma\left(\frac{1+\lambda+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\lambda+1}{2}\right)} \times$$
$$\times F\left(\frac{1+\lambda+\nu}{2}, \frac{1+\lambda-\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{b^2}{a^2}\right)$$
$$\left[0 < b < a,\ -\operatorname{Re}\nu < 1 + \operatorname{Re}\lambda < \frac{3}{2}\right];$$
$$= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^\nu b^{-(\nu+1+\lambda)} \Gamma(1+\lambda+\nu) \cos\left[\frac{\pi}{2}(1+\lambda+\nu)\right]}{\Gamma(\nu+1)} \times$$
$$\times F\left(\frac{1+\lambda+\nu}{2}, \frac{2+\lambda+\nu}{2}; \nu+1; \frac{a^2}{b^2}\right)$$
$$\left[0 < a < b,\ -\operatorname{Re}\nu < 1 + \operatorname{Re}\lambda < \frac{3}{2}\right].$$ ИП I 45 (13)

3. $$\int_0^\infty x^\lambda K_\mu(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{2^\lambda b \Gamma\left(\frac{2+\mu+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+\lambda-\mu}{2}\right)}{a^{2+\lambda}} \times$$
$$\times F\left(\frac{2+\mu+\lambda}{2}, \frac{2+\lambda-\mu}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{b^2}{a^2}\right)$$
$$[\operatorname{Re}(-\lambda \pm \mu) < 2,\ \operatorname{Re} a > 0,\ b > 0].$$ ИП I 106 (50)

4. $$\int_0^\infty x^\lambda K_\mu(ax)\cos(bx)\,dx = 2^{\lambda-1} a^{-\lambda-1} \Gamma\left(\frac{\mu+\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda-\mu}{2}\right) \times$$
$$\times F\left(\frac{\mu+\lambda+1}{2}, \frac{1+\lambda-\mu}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{b^2}{a^2}\right)$$
$$[\operatorname{Re}(-\lambda \pm \mu) < 1,\ \operatorname{Re} a > 0,\ b > 0].$$ ИП I 49 (42)

5. $\int\limits_0^\infty x^\nu \sin(ax) J_\nu(bx)\,dx =$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\, 2^\nu b^\nu (a^2-b^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} \qquad \left[0<b<a,\ -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right];$$

$$=0 \qquad \left[0<a<b,\ -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right].$$

ИП II 32 (4)

6 $\int\limits_0^\infty x^\nu \cos(ax) J_\nu(bx)\,dx =$

$$= -2^\nu \frac{\sin(\nu\pi)}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right) b^\nu (a^2-b^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} \qquad \left[0<b<a,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right];$$

$$= 2^\nu \frac{b^\nu}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right) (b^2-a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} \qquad \left[0<a<b,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right].$$

ИП II 36 (29)

7. $\int\limits_0^\infty x^{\nu+1} \sin(ax) J_\nu(bx)\,dx =$

$$= -2^{1+\nu} a \frac{\sin(\nu\pi)}{\sqrt{\pi}} b^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right) (a^2-b^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}$$

$$\left[0<b<a,\ -\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\nu<-\frac{1}{2}\right];$$

$$= -\frac{2^{1+\nu}}{\sqrt{\pi}} ab^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right) (b^2-a^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}$$

$$\left[0<a<b,\ -\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\nu<-\frac{1}{2}\right].$$

ИП II 32 (3)

8 $\int\limits_0^\infty x^{\nu+1} \cos(ax) J_\nu(bx)\,dx =$

$$= 2^{1+\nu} \sqrt{\pi}\, ab^\nu \frac{(a^2-b^2)^{-\nu-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\nu\right)} \qquad \left[0<b<a,\ -1<\operatorname{Re}\nu<-\frac{1}{2}\right],$$

$$=0 \qquad \left[0<a<b,\ -1<\operatorname{Re}\nu<-\frac{1}{2}\right]$$

ИП II 36 (28)

9. $\int\limits_0^1 x^\nu \sin(ax) J_\nu(ax)\,dx = \frac{1}{2\nu+1}\left[\sin a J_\nu(a) - \cos a J_{\nu+1}(a)\right]$

$[\operatorname{Re}\nu > -1]$. ИП II 334 (9) *и*

10. $\int\limits_0^1 x^\nu \cos(ax) J_\nu(ax)\,dx = \frac{1}{2\nu+1}\left[\cos a J_\nu(a) + \sin a J_{\nu+1}(a)\right]$

$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 335 (20)

11. $\int\limits_0^\infty x^{1+\nu} K_\nu(ax)\sin(bx)\,dx = \sqrt{\pi}(2a)^\nu \Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu\right) b(b^2+a^2)^{-\frac{3}{2}-\nu}$

$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}\right].$ ИП I 105 (49)

12. $\int\limits_0^\infty x^\mu K_\mu(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}(2a)^\mu \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)(b^2+a^2)^{-\mu-\frac{1}{2}}$

$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2}\right].$ ИП I 49 (41)

13. $\int\limits_0^\infty x^\nu N_{\nu-1}(ax)\sin(bx)\,dx =$

$= 0 \qquad \left[0 < b < a,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right];$

$= \frac{2^\nu\sqrt{\pi}\,a^{\nu-1}b}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(b^2-a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} \qquad \left[0 < a < b,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right].$

ИП I 104 (36)

14. $\int\limits_0^\infty x^\nu N_\nu(ax)\cos(bx)\,dx =$

$= 0 \qquad \left[0 < b < a,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right];$

$= -2^\nu\sqrt{\pi}a^\nu \frac{(b^2-a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} \qquad \left[0 < a < b,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right].$

ИП I 47 (30)

6.711

1. $\int\limits_0^\infty x^{\nu-\mu} J_\mu(ax) J_\nu(bx)\sin(cx)\,dx = 0$

$[0 < c < b-a,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < 1+\operatorname{Re}\mu].$ ИП I 103 (28)

2. $\int\limits_0^\infty x^{\nu-\mu+1} J_\mu(ax) J_\nu(bx)\cos(cx)\,dx = 0$

$[0 < c < b-a,\ a > 0,\ b > 0,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < \operatorname{Re}\mu].$ ИП I 47 (25)

3. $\int\limits_0^\infty x^{\nu-\mu-2} J_\mu(ax) J_\nu(bx)\sin(cx)\,dx = 2^{\nu-\mu-1}a^\mu b^{-\nu}\frac{c\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+1)}$

$[0 < a,\ 0 < b,\ 0 < c < b-a,\ 0 < \operatorname{Re}\nu < \operatorname{Re}\mu+3].$ ИП I 103 (29

4. $\int\limits_0^\infty x^{\varrho-\mu-1} J_\mu(ax) J_\varrho(bx)\cos(cx)\,dx = 2^{\varrho-\mu-1} b^{-\varrho}a^\mu \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\mu+1)}$

$[b > 0,\ a > 0,\ 0 < c < b-a,\ 0 < \operatorname{Re}\varrho < \operatorname{Re}\mu+2].$ ИП I 47 (26)

5. $$\int_0^\infty x^{1-2\nu}\sin(2ax)\,J_\nu(x)\,N_\nu(x)\,dx =$$
$$= -\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)a}{2\Gamma\left(2\nu-\frac{1}{2}\right)\Gamma(2-\nu)}F\left(\frac{3}{2}-\nu,\ \frac{3}{2}-2\nu;\ 2-\nu;\ a^2\right)$$
$$\left[0<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2},\ 0<a<1\right].$$ ИП II 348 (63)

1 $$\int_0^\infty x^\nu\left[J_\nu(ax)\cos(ax)+N_\nu(ax)\sin(ax)\right]\sin(bx)\,dx =$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}\,(2a)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(b^2+2ab)^{-\nu-\frac{1}{2}}$$
$$\left[b>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right].$$ ИП I 104 (40)

2. $$\int_0^\infty x^\nu\left[N_\nu(ax)\cos(ax)-J_\nu(ax)\sin(ax)\right]\cos(bx)\,dx =$$
$$=-\frac{\sqrt{\pi}\,(2a)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(b^2+2ab)^{-\nu-\frac{1}{2}}.$$ ИП I 48 (35)

3. $$\int_0^\infty x^\nu\left[J_\nu(ax)\cos(ax)-N_\nu(ax)\sin(ax)\right]\sin(bx)\,dx = 0$$
$$\left[0<b<2a,\ -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right];$$
$$=\frac{2^\nu\sqrt{\pi}\,b^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(b^2-2ab)^{-\nu-\frac{1}{2}}\qquad\left[2a<b,\ -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right].$$
ИП I 104 (41)

4. $$\int_0^\infty x^\nu\left[J_\nu(ax)\sin(ax)+N_\nu(ax)\cos(ax)\right]\cos(bx)\,dx = 0$$
$$\left[0<b<2a,\quad |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right];$$
$$=-\frac{\sqrt{\pi}\,(2a)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(b^2-2ab)^{-\nu-\frac{1}{2}}\qquad\left[0<2a<b,\quad |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right].$$
ИП I 48 (33)

6.713

1. $$\int_0^\infty x^{1-2\nu}\sin(2ax)\left\{[J_\nu(x)]^2-[N_\nu(x)]^2\right\}dx =$$
$$=\frac{\sin(2\nu\pi)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-2\nu\right)a}{\pi\Gamma(2-\nu)}F\left(\frac{3}{2}-\nu,\ \frac{3}{2}-2\nu;\ 2-\nu;\ a^2\right)$$
$$\left[0<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{4},\ 0<a<1\right].$$ ИП II 348 (64)

2. $\int\limits_0^\infty x^{2-2\nu}\sin(2ax)\,[J_\nu(x)\,J_{\nu-1}(x)-N_\nu(x)\,N_{\nu-1}(x)]\,dx=$

$$=-\frac{\sin(2\nu\pi)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}-2\nu\right)a}{\pi\Gamma(2-\nu)}F\left(\frac{3}{2}-\nu,\ \frac{5}{2}-2\nu;\ 2-\nu;\ a^2\right)$$

$\left[\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{5}{4},\ 0<a<1\right].$ ИП II 348 (65)

3. $\int\limits_0^\infty x^{2-2\nu}\sin(2ax)\,[J_\nu(x)\,N_{\nu-1}(x)+N_\nu(x)\,J_{\nu-1}(x)]\,dx=$

$$=-\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)a}{\Gamma\left(2\nu-\frac{3}{2}\right)\Gamma(2-\nu)}F\left(\frac{3}{2}-\nu,\ \frac{5}{2}-2\nu;\ 2-\nu;\ a^2\right)$$

$\left[\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{5}{2},\ 0<a<1\right].$ ИП II 349 (66)

6.714

1. $\int\limits_0^\infty \sin(2ax)\,[x^\nu J_\nu(x)]^2\,dx=$

$$=\frac{a^{-2\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\nu)}F\left(\frac{1}{2}+\nu,\ \frac{1}{2};\ 1-\nu;\ a^2\right)$$

$\left[0<a<1,\quad |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right],$

$$=\frac{a^{-4\nu-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{2\Gamma(1+\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-2\nu\right)}F\left(\frac{1}{2}+\nu,\ \frac{1}{2}+2\nu;\ 1+\nu;\ \frac{1}{a^2}\right)$$

$\left[a>1,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right].$ ИП II 343 (31)

2. $\int\limits_0^\infty \cos(2ax)\,[x^\nu J_\nu(x)]^2\,dx=$

$$=\frac{a^{-2\nu}\Gamma(\nu)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}F\left(\nu+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1-\nu;\ a^2\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(-\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\nu\right)}{2\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}F\left(\frac{1}{2}+\nu,\ \frac{1}{2}+2\nu;\ 1+\nu;\ a^2\right)$$

$\left[0<a<1,\ -\frac{1}{4}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right];$

$$=-\frac{\sin(\nu\pi)\,a^{-4\nu-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\nu\right)}{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}F\left(\frac{1}{2}+\nu,\ \frac{1}{2}+2\nu;\ 1+\nu;\ \frac{1}{a^2}\right)$$

$\left[a>1,\ -\frac{1}{4}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right].$ ИП II 344 (33)

6.715

1. $$\int_0^\infty \frac{x^\nu}{x+\beta}\sin(x+\beta)\,J_\nu(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\sec(\nu\pi)\,\beta^\nu J_{-\nu}(\beta)$$

$$\left[|\arg\beta| < \pi,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right].$$ ИП II 340 (8)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^\nu}{x+\beta}\cos(x+\beta)\,J_\nu(x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\sec(\nu\pi)\,\beta^\nu N_{-\nu}(\beta)$$

$$\left[|\arg\beta| < \pi,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right].$$ ИП II 340 (9)

6.716

1. $$\int_0^a x^\lambda \sin(a-x)\,J_\nu(x)\,dx =$$
$$= 2a^{\lambda+1}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n\,\Gamma(\nu-\lambda+2n)\,\Gamma(\nu+\lambda+1)}{\Gamma(\nu-\lambda)\,\Gamma(\nu+\lambda+3+2n)}(\nu+2n+1)\,J_{\nu+2n+1}(a)$$

$$[\operatorname{Re}(\lambda+\nu) > -1].$$ ИП II 335 (16)

2. $$\int_0^a x^\lambda \cos(a-x)\,J_\nu(x)\,dx = \frac{a^{\lambda+1}J_\nu(a)}{\lambda+\nu+1} +$$
$$+ 2a^{\lambda+1}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n\,\Gamma(\nu-\lambda+2n-1)\,\Gamma(\nu+\lambda+1)}{\Gamma(\nu-\lambda)\,\Gamma(\nu+\lambda+2n+2)}(\nu+2n)\,J_{\nu+2n}(a)$$

$$[\operatorname{Re}(\lambda+\nu) > -1].$$ ИП II 336 (26)

6.717 $$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin[a(x+\beta)]}{x^\nu(x+\beta)}\,J_{\nu+2n}(x)\,dx = \pi\beta^{-\nu}J_{\nu+2n}(\beta)$$

$$\left[1 \leqslant a < \infty,\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}\right].$$ ИП II 345 (44)

6.718

1. $$\int_0^\infty \frac{x^\nu}{x^2+\beta^2}\sin(\alpha x)\,J_\nu(\gamma x)\,dx = \beta^{\nu-1}\operatorname{sh}(\alpha\beta)\,K_\nu(\beta\gamma)$$

$$\left[0 < \alpha \leqslant \gamma,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < \frac{3}{2}\right].$$ ИП II 33 (8)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^{\nu+1}}{x^2+\beta^2}\cos(\alpha x)\,J_\nu(\gamma x)\,dx = \beta^\nu\operatorname{ch}(\alpha\beta)\,K_\nu(\beta\gamma)$$

$$\left[0 < \alpha \leqslant \gamma,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}\right].$$ ИП II 37 (33)

3. $$\int_0^\infty \frac{x^{1-\nu}}{x^2+\beta^2}\sin(\alpha x)\,J_\nu(\gamma x)\,dx=\frac{\pi}{2}\beta^{-\nu}e^{-\alpha\beta}I_\nu(\beta\gamma)$$

$$\left[0<\gamma\leqslant\alpha,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 33(9)

4. $$\int_0^\infty \frac{x^{-\nu}}{x^2+\beta^2}\cos(\alpha x)\,J_\nu(\gamma x)\,dx=\frac{\pi}{2}\beta^{-\nu-1}e^{-\alpha\beta}I_\nu(\beta\gamma)$$

$$\left[0<\gamma\leqslant\alpha,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2}\right].$$ ИП II 37(34)

6.719

1. $$\int_0^\alpha \frac{\sin(\beta x)}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}J_\nu(x)\,dx=$$

$$=\pi\sum_{n=0}^\infty(-1)^n J_{2n+1}(\alpha\beta)\,J_{\frac{1}{2}\nu+n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)J_{\frac{1}{2}\nu-n-\frac{1}{2}}(\alpha)$$

$[\operatorname{Re}\nu>-2]$. ИП II 335(17)

2. $$\int_0^\alpha \frac{\cos(\beta x)}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}J_\nu(x)\,dx=\frac{\pi}{2}J_0(\alpha\beta)\left[J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right]^2+$$

$$+\pi\sum_{n=1}^\infty(-1)^n J_{2n}(\alpha\beta)\,J_{\frac{1}{2}\nu+n}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)J_{\frac{1}{2}\nu-n}\left(\frac{1}{2}\alpha\right).$$

$[\operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП II 336(27)

6.721

1. $$\int_0^\infty \sqrt{x}\,J_{\frac{1}{4}}(a^2x^2)\sin(bx)\,dx=2^{-\frac{3}{2}}a^{-2}\sqrt{\pi b}\,J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$[b>0]$. ИП I 108(1)

2. $$\int_0^\infty \sqrt{x}\,J_{-\frac{1}{4}}(a^2x^2)\cos(bx)\,dx=2^{-\frac{3}{2}}a^{-2}\sqrt{\pi b}\,J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$[b>0]$. ИП I 51(1)

3. $$\int_0^\infty \sqrt{x}\,N_{\frac{1}{4}}(a^2x^2)\sin(bx)\,dx=$$

$$=-2^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\pi b}\,a^{-2}\mathbf{H}_{\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{4a^2}\right).$$ ИП I 108(7)

4. $$\int_0^\infty \sqrt{x}\,N_{-\frac{1}{4}}(a^2x^2)\cos(bx)\,dx=$$

$$=-2^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\pi b}\,a^{-2}\mathbf{H}_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{4a^2}\right).$$ ИП I 52(7)

5. $$\int_0^\infty \sqrt{x}\, K_{\frac{1}{4}}(a^2x^2) \sin(bx)\, dx =$$
$$= 2^{-\frac{5}{2}} \sqrt{\pi^3 b}\, a^{-2} \left[I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \mathbf{L}_{\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \right]$$
$$\left[|\arg a| < \frac{\pi}{4},\ b > 0 \right].$$ ИП I 109 (11)

6. $$\int_0^\infty \sqrt{x}\, K_{-\frac{1}{4}}(a^2x^2) \cos(bx)\, dx =$$
$$= 2^{-\frac{5}{2}} \sqrt{\pi^3 b}\, a^{-2} \left[I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \mathbf{L}_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \right] \qquad [b > 0].$$
ИП I 52 (10)

6.722

1. $$\int_0^\infty \sqrt{x}\, K_{\frac{1}{8}+\nu}(a^2x^2)\, I_{\frac{1}{8}-\nu}(a^2x^2) \sin(bx)\, dx =$$
$$= \sqrt{2\pi}\, b^{-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{8}-\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} W_{\nu, \frac{1}{8}}\left(\frac{b^2}{8a^2}\right) M_{-\nu, \frac{1}{8}}\left(\frac{b^2}{8a^2}\right)$$
$$\left[\operatorname{Re} \nu < \frac{5}{8},\ |\arg a| < \frac{\pi}{4},\ b > 0 \right].$$ ИП I 109 (13)

2. $$\int_0^\infty \sqrt{x}\, J_{-\frac{1}{8}-\nu}(a^2x^2)\, J_{-\frac{1}{8}+\nu}(a^2x^2) \cos(bx)\, dx =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, b^{-\frac{3}{2}} \left[e^{-\frac{i\pi}{8}} W_{\nu, -\frac{1}{8}}\left(\frac{b^2 e^{-\frac{\pi i}{2}}}{8a^2}\right) W_{-\nu, -\frac{1}{8}}\left(\frac{b^2 e^{-\frac{\pi i}{2}}}{8a^2}\right) + \right.$$
$$\left. + e^{\frac{i\pi}{8}} W_{\nu, -\frac{1}{8}}\left(\frac{b^2 e^{\frac{\pi i}{2}}}{8a^2}\right) W_{-\nu, -\frac{1}{8}}\left(\frac{b^2 e^{\frac{\pi i}{2}}}{8a^2}\right) \right]$$
$$[b > 0].$$ ИП I 52 (6)

3. $$\int_0^\infty \sqrt{x}\, J_{\frac{1}{8}-\nu}(a^2x^2)\, J_{\frac{1}{8}+\nu}(a^2x^2) \sin(bx)\, dx =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, b^{-\frac{3}{2}} \left[e^{\frac{\pi i}{8}} W_{\nu, \frac{1}{8}}\left(\frac{b^2 e^{\frac{\pi i}{2}}}{8a^2}\right) W_{-\nu, \frac{1}{8}}\left(\frac{b^2 e^{\frac{\pi i}{2}}}{8a^2}\right) + \right.$$
$$\left. + e^{-\frac{\pi i}{8}} W_{\nu, \frac{1}{8}}\left(\frac{b^2 e^{-\frac{\pi i}{2}}}{8a^2}\right) W_{-\nu, \frac{1}{8}}\left(\frac{b^2 e^{-\frac{\pi i}{2}}}{8a^2}\right) \right] \qquad [b > 0].$$ ИП I 108 (6)

4. $$\int_0^\infty \sqrt{x}\, K_{\frac{1}{8}-\nu}(a^2x^2)\, I_{-\frac{1}{8}-\nu}(a^2x^2)\cos(bx)\,dx =$$
$$= \sqrt{2\pi}\, b^{-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{8}-\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} W_{\nu,\,-\frac{1}{8}}\left(\frac{b^2}{8a^2}\right) M_{-\nu,\,-\frac{1}{8}}\left(\frac{b^2}{8a^2}\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\nu < \frac{3}{8},\ b>0\right]$. ИП I 52(12)

6.723 $$\int_0^\infty xJ_\nu(x^2)\left[\sin(\nu\pi)J_\nu(x^2)-\cos(\nu\pi)N_\nu(x^2)\right]J_{4\nu}(4ax)\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}J_\nu(a^2)J_{-\nu}(a^2)$$
$[a>0,\ \operatorname{Re}\nu > -1]$. ИП II 375(20)

6.724

1. $$\int_0^\infty x^{2\lambda}J_{2\nu}\left(\frac{a}{x}\right)\sin(bx)\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\, a^{2\nu}\Gamma(\lambda-\nu+1)\, b^{2\nu-2\lambda-1}}{4^{2\nu-\lambda}\Gamma(2\nu+1)\,\Gamma\left(\nu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}\, {}_0F_3\left(2\nu+1,\ \nu-\lambda,\ \nu-\lambda+\frac{1}{2};\ \frac{a^2b^2}{16}\right)+$$
$$+\frac{a^{2\lambda+2}\Gamma(\nu-\lambda-1)\, b}{2^{2\lambda+3}\Gamma(\nu+\lambda+2)}\, {}_0F_3\left(\frac{3}{2},\ \lambda-\nu+2,\ \lambda+\nu+2;\ \frac{a^2b^2}{16}\right)$$
$\left[-\frac{5}{4} < \operatorname{Re}\lambda < \operatorname{Re}\nu,\ a>0,\ b>0\right]$. ИП I 109(15)

2. $$\int_0^\infty x^{2\lambda}J_{2\nu}\left(\frac{a}{x}\right)\cos(bx)\,dx = 4^{\lambda-2\nu}\sqrt{\pi}\, a^{2\nu}b^{2\nu-2\lambda-1}\times$$
$$\times\frac{\Gamma\left(\lambda-\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\nu+1)\,\Gamma(\nu-\lambda)}\, {}_0F_3\left(2\nu+1,\ \nu-\lambda+\frac{1}{2},\ \nu-\lambda;\ \frac{a^2b^2}{16}\right)+$$
$$+4^{-\lambda-1}a^{2\lambda+1}\frac{\Gamma\left(\nu-\lambda-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\lambda+\frac{3}{2}\right)}\, {}_0F_3\left(\frac{1}{2},\ \lambda-\nu+\frac{3}{2},\ \nu+\lambda+\frac{3}{2};\ \frac{a^2b^2}{16}\right)$$
$\left[-\frac{3}{4} < \operatorname{Re}\lambda < \operatorname{Re}\nu-\frac{1}{2},\ a>0,\ b>0\right]$. ИП I 53(14)

6.725

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(bx)}{\sqrt{x}}J_\nu(a\sqrt{x})\,dx = -\sqrt{\frac{\pi}{b}}\sin\left(\frac{a^2}{8b}-\frac{\nu\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)J_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{a^2}{8b}\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\nu > -3,\ a>0,\ b>0\right]$. ИП I 110(27)

2. $$\int_0^\infty \frac{\cos(bx)}{\sqrt{x}}J_\nu(a\sqrt{x})\,dx =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{b}}\cos\left(\frac{a^2}{8b}-\frac{\nu\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)J_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{a^2}{8b}\right)$$
$[\operatorname{Re}\nu > -1,\ a>0,\ b>0]$. ИП I 54(25)

3. $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}\nu} J_\nu (a\sqrt{x}) \sin(bx)\,dx = 2^{-\nu} a^\nu b^{-\nu-1} \cos\left(\frac{a^2}{4b} - \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

$$\left[-2 < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2},\ a > 0,\ b > 0\right].$$ ИП I 110 (28)

4. $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}\nu} J_\nu (a\sqrt{x}) \cos(bx)\,dx = 2^{-\nu} b^{-\nu-1} a^\nu \sin\left(\frac{a^2}{4b} - \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

$$\left[-1 < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2},\ a > 0,\ b > 0\right].$$ ИП I 54 (26)

6.726

1. $$\int_0^\infty x (x^2+b^2)^{-\frac{1}{2}\nu} J_\nu \left(a\sqrt{x^2+b^2}\right) \sin(cx)\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a^{-\nu} b^{-\nu+\frac{3}{2}} c\, (a^2-c^2)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{3}{4}} J_{\nu-\frac{3}{2}}\left(b\sqrt{a^2-c^2}\right)$$

$$\left[0 < c < a,\ \operatorname{Re}\nu > \frac{1}{2}\right];$$

$$= 0 \qquad \left[0 < a < c,\ \operatorname{Re}\nu > \frac{1}{2}\right].$$ ИП I 111 (37)

2 $$\int_0^\infty (x^2+b^2)^{-\frac{1}{2}\nu} J_\nu \left(a\sqrt{x^2+b^2}\right) \cos(cx)\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a^{-\nu} b^{-\nu+\frac{1}{2}} (a^2-c^2)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}} J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(b\sqrt{a^2-c^2}\right)$$

$$\left[0 < c < a,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right];$$

$$= 0 \qquad \left[0 < a < c,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$

ИП I 55 (37)

3. $$\int_0^\infty x (x^2+b^2)^{\frac{1}{2}\nu} K_{\pm\nu} \left(a\sqrt{x^2+b^2}\right) \sin(cx)\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a^\nu b^{\nu+\frac{3}{2}} c\, (a^2+c^2)^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{3}{4}} K_{-\nu-\frac{3}{2}}\left(b\sqrt{a^2+c^2}\right)$$

$$[\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re} b > 0,\ c > 0].$$ ИП I 113 (45)

4. $$\int_0^\infty (x^2+b^2)^{\mp\frac{1}{2}\nu} K_\nu \left(a\sqrt{x^2+b^2}\right) \cos(cx)\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a^{\mp\nu} b^{\frac{1}{2}\mp\nu} (a^2+c^2)^{\pm\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}} K_{\pm\nu-\frac{1}{2}}\left(b\sqrt{a^2+c^2}\right)$$

$$[\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re} b > 0,\ c > 0].$$ ИП I 56 (45)

5. $$\int_0^\infty (x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}\nu} N_\nu\left(b\sqrt{x^2+a^2}\right)\cos(cx)\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{a\pi}{2}}(ab)^{-\nu}(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}} N_{\nu-\frac{1}{2}}\left(a\sqrt{b^2-c^2}\right)$$

$$\left[0<c<b,\ a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right];$$

$$= -\sqrt{\frac{2a}{\pi}}(ab)^{-\nu}(c^2-b^2)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}} K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(a\sqrt{c^2-b^2}\right)$$

$$\left[0<b<c,\ a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИПІ 56 (41)

6.727

1 $$\int_0^a \frac{\sin(cx)}{\sqrt{a^2-x^2}} J_\nu\left(b\sqrt{a^2-x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} J_{\frac{1}{2}\nu}\left[\frac{a}{2}\left(\sqrt{b^2+c^2}-c\right)\right] J_{\frac{1}{2}\nu}\left[\frac{a}{2}\left(\sqrt{b^2+c^2}+c\right)\right]$$

$$[\operatorname{Re}\nu>-1,\ c>0,\ a>0].$$ ИПІ 113 (48)

2 $$\int_a^\infty \frac{\sin(cx)}{\sqrt{x^2-a^2}} J_\nu\left(b\sqrt{x^2-a^2}\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} J_{\frac{1}{2}\nu}\left[\frac{a}{2}\left(c-\sqrt{c^2-b^2}\right)\right] J_{-\frac{1}{2}\nu}\left[\frac{a}{2}\left(c+\sqrt{c^2-b^2}\right)\right]$$

$$[0<b<c,\ a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1].$$ ИПІ 113 (49)

3 $$\int_a^\infty \frac{\cos(cx)}{\sqrt{x^2-a^2}} J_\nu\left(b\sqrt{x^2-a^2}\right)dx =$$

$$= -\frac{\pi}{2} J_{\frac{1}{2}\nu}\left[\frac{a}{2}\left(c-\sqrt{c^2-b^2}\right)\right] N_{-\frac{1}{2}\nu}\left[\frac{a}{2}\left(c+\sqrt{c^2-b^2}\right)\right]$$

$$[0<b<c,\ a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1].$$ ИПІ 58 (54)

4 $$\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}\nu}\cos x\, I_\nu\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx = \frac{\sqrt{\pi}\,a^{2\nu+1}}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}$$

$$\left[\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ В 409 (2)

6.728

1. $$\int_0^\infty x\sin(ax^2) J_\nu(bx)\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,b}{8a^{\frac{3}{2}}}\left[\cos\left(\frac{b^2}{8a}-\frac{\nu\pi}{4}\right) J_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{b^2}{8a}\right) - \right.$$

$$\left. -\sin\left(\frac{b^2}{8a}-\frac{\nu\pi}{4}\right) J_{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{b^2}{8a}\right)\right]$$

$$[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-4].$$ ИПІІ 34 (14)

2. $$\int_0^\infty x\cos(ax^2)\,J_\nu(bx)\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\,b}{8a^{\frac{3}{2}}}\left[\cos\left(\frac{b^2}{8a}-\frac{\nu\pi}{4}\right)J_{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{b^2}{8a}\right)+\right.$$
$$\left.+\sin\left(\frac{b^2}{8a}-\frac{\nu\pi}{4}\right)J_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{b^2}{8a}\right)\right]$$
$[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-2]$. ИПII 38 (39)

3. $$\int_0^\infty J_0(\beta x)\sin(\alpha x^2)\,x\,dx = \frac{1}{2\alpha}\cos\frac{\beta^2}{4\alpha} \qquad [\alpha>0,\ \beta>0].$$ MO 47

4. $$\int_0^\infty J_0(\beta x)\cos(\alpha x^2)\,x\,dx = \frac{1}{2\alpha}\sin\frac{\beta^2}{4\alpha} \qquad [\alpha>0,\ \beta>0].$$ MO 47

5. $$\int_0^\infty x^{\nu+1}\sin(ax^2)\,J_\nu(bx)\,dx = \frac{b^\nu}{2^{\nu+1}a^{\nu+1}}\cos\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{\nu\pi}{2}\right)$$
$\left[a>0,\ b>0,\ -2<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right]$. ИПII 34 (15)

6. $$\int_0^\infty x^{\nu+1}\cos(ax^2)\,J_\nu(bx)\,dx = \frac{b^\nu}{2^{\nu+1}a^{\nu+1}}\sin\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{\nu\pi}{2}\right)$$
$\left[a>0,\ b>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right]$. ИПII 38 (40)

6.729

1. $$\int_0^\infty x\sin(ax^2)\,J_\nu(bx)\,J_\nu(cx)\,dx = \frac{1}{2a}\cos\left(\frac{b^2+c^2}{4a}-\frac{\nu\pi}{2}\right)J_\nu\left(\frac{bc}{2a}\right)$$
$[a>0,\ b>0,\ c>0,\ \operatorname{Re}\nu>-2]$. ИПII 51 (26)

2. $$\int_0^\infty x\cos(ax^2)\,J_\nu(bx)\,J_\nu(cx)\,dx = \frac{1}{2a}\sin\left(\frac{b^2+c^2}{4a}-\frac{\nu\pi}{2}\right)J_\nu\left(\frac{bc}{2a}\right)$$
$[a>0,\ b>0,\ c>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИПII 51 (27)

6.731

1. $$\int_0^\infty x\sin(ax^2)\,J_\nu(bx^2)\,J_{2\nu}(2cx)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}}\sin\left(\frac{ac^2}{b^2-a^2}\right)J_\nu\left(\frac{bc^2}{b^2-a^2}\right) \qquad [0<a<b,\ \operatorname{Re}\nu>-1];$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\cos\left(\frac{ac^2}{a^2-b^2}\right)J_\nu\left(\frac{bc^2}{a^2-b^2}\right) \qquad [0<b<a,\ \operatorname{Re}\nu>-1].$$
ИПII 356 (41) *u*

2. $$\int_0^\infty x\cos(ax^2)\,J_\nu(bx^2)\,J_{2\nu}(2cx)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}}\cos\left(\frac{ac^2}{b^2-a^2}\right)J_\nu\left(\frac{bc^2}{b^2-a^2}\right) \quad \left[0<a<b,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right];$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\sin\left(\frac{ac^2}{a^2-b^2}\right)J_\nu\left(\frac{bc^2}{a^2-b^2}\right) \quad \left[0<b<a,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$
ИП II 356 (42) и

6.732 $$\int_0^\infty x^3\cos\left(\frac{x^2}{2a}\right)N_1(x)\,K_1(x)\,dx = -a^3K_0(a) \quad [a>0].$$ ИП II 371 (52)

6.733

1. $$\int_0^\infty \sin\left(\frac{a}{2x}\right)[\sin x J_0(x)+\cos x N_0(x)]\frac{dx}{x} = \pi J_0(\sqrt{a})\,N_0(\sqrt{a})$$
$[a>0]$. ИП II 346 (51)

2. $$\int_0^\infty \cos\left(\frac{a}{2x}\right)[\sin x N_0(x)-\cos x J_0(x)]\frac{dx}{x} = \pi J_0(\sqrt{a})\,N_0(\sqrt{a})$$
$[a>0]$. ИП II 347 (52)

3. $$\int_0^\infty x\sin\left(\frac{a}{2x}\right)K_0(x)\,dx = \frac{\pi a}{2}J_1(\sqrt{a})\,K_1(\sqrt{a})$$
$[a>0]$. ИП II 368 (34)

4. $$\int_0^\infty x\cos\left(\frac{a}{2x}\right)K_0(x)\,dx = -\frac{\pi a}{2}N_1(\sqrt{a})\,K_1(\sqrt{a})$$
$[a>0]$. ИП II 369 (35)

6.734 $$\int_0^\infty \cos(a\sqrt{x})\,K_\nu(bx)\frac{dx}{\sqrt{x}} =$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt{b}}\sec(\nu\pi)\left[D_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2b}}\right)D_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{a}{\sqrt{2b}}\right)+\right.$$
$$\left.+D_{\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{a}{\sqrt{2b}}\right)D_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2b}}\right)\right]$$
$\left[\operatorname{Re}b>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right]$. ИП II 132 (27)

6.735

1. $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{4}}\sin(2a\sqrt{x})\,J_{-\frac{1}{4}}(x)\,dx = \sqrt{\pi}\,a^{\frac{3}{2}}J_{\frac{3}{4}}(a^2) \quad [a>0].$$ ИП II 341 (10)

2. $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{4}}\cos(2a\sqrt{x})\,J_{\frac{1}{4}}(x)\,dx = \sqrt{\pi}\,a^{\frac{3}{2}}J_{-\frac{3}{4}}(a^2) \quad [a>0].$$ ИП II 341 (12)

3. $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{4}}\sin(2a\sqrt{x})\,J_{\frac{3}{4}}(x)\,dx = \sqrt{\pi}\,a^{\frac{3}{2}}J_{-\frac{1}{4}}(a^2) \quad [a>0].$$ ИП II 341 (11)

4. $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{4}}\cos(2a\sqrt{x})\,J_{-\frac{3}{4}}(x)\,dx = \sqrt{\pi}\,a^{\frac{3}{2}}J_{\frac{1}{4}}(a^2) \quad [a>0].$$ ИП II 341 (13)

6.736

1. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \sin x \cos (4a\sqrt{x})\, J_0(x)\, dx =$$
$$= -2^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\left[\cos\left(a^2-\frac{\pi}{4}\right)J_0(a^2)-\sin\left(a^2-\frac{\pi}{4}\right)N_0(a^2)\right]$$
$[a > 0]$. ИПII 341 (18)

2. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \cos x \cos (4a\sqrt{x})\, J_0(x)\, dx =$$
$$= -2^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\left[\sin\left(a^2-\frac{\pi}{4}\right)J_0(a^2)+\cos\left(a^2-\frac{\pi}{4}\right)N_0(a^2)\right]$$
$[a > 0]$. ИПII 342 (22)

3. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \sin x \sin (4a\sqrt{x})\, J_0(x)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\left(a^2+\frac{\pi}{4}\right)J_0(a^2)$$
$[a > 0]$. ИПII 341 (16)

4. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \cos x \sin (4a\sqrt{x})\, J_0(x)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\left(a^2-\frac{\pi}{4}\right)J_0(a^2)$$
$[a > 0]$. ИПII 342 (20)

5. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \sin x \cos (4a\sqrt{x})\, N_0(x)\, dx =$$
$$= 2^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\left[3\sin\left(a^2-\frac{\pi}{4}\right)J_0(a^2)-\cos\left(a^2-\frac{\pi}{4}\right)N_0(a^2)\right]$$
$[a > 0]$. ИПII 347 (55)

6. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \cos x \cos (4a\sqrt{x})\, N_0(x)\, dx =$$
$$= -2^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\left[3\cos\left(a^2-\frac{\pi}{4}\right)J_0(a^2)+\sin\left(a^2-\frac{\pi}{4}\right)N_0(a^2)\right]$$
$[a > 0]$. ИПII 347 (56)

6.737

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin\left(a\sqrt{x^2+b^2}\right)}{\sqrt{x^2+b^2}}J_\nu(cx)\, dx =$$
$$= \frac{\pi}{2}J_{\frac{1}{2}\nu}\left[\frac{b}{2}\left(a-\sqrt{a^2-c^2}\right)\right]J_{-\frac{1}{2}\nu}\left[\frac{b}{2}\left(a+\sqrt{a^2-c^2}\right)\right]$$
$[a > 0,\ \operatorname{Re} b > 0,\ c > 0,\ a > c,\ \operatorname{Re}\nu > -1]$. ИПII 35 (19)

2. $$\int_0^\infty \frac{\cos\left(a\sqrt{x^2+b^2}\right)}{\sqrt{x^2+b^2}} J_\nu(cx)\,dx =$$
$$= -\frac{\pi}{2} J_{\frac{1}{2}\nu}\left[\frac{b}{2}\left(a-\sqrt{a^2-c^2}\right)\right] N_{-\frac{1}{2}\nu}\left[\frac{b}{2}\left(a+\sqrt{a^2-c^2}\right)\right]$$
$[a>0,\ \operatorname{Re} b>0,\ c>0,\ a>c,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИПII 39(44)

3 $$\int_0^a \frac{\cos\left(b\sqrt{a^2-x^2}\right)}{\sqrt{a^2-x^2}} J_\nu(cx)\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{2} J_{\frac{1}{2}\nu}\left[\frac{a}{2}\left(\sqrt{b^2+c^2}-b\right)\right] J_{\frac{1}{2}\nu}\left[\frac{a}{2}\left(\sqrt{b^2+c^2}+b\right)\right]$$
$[c>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИПII 39(47)

4 $$\int_0^a x^{\nu+1} \frac{\cos\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)}{\sqrt{a^2-x^2}} I_\nu(x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\,a^{2\nu+1}}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}$$
$[\operatorname{Re}\nu>-1]$. ИПII 365(9)

5. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} \frac{\sin\left(a\sqrt{b^2+x^2}\right)}{\sqrt{b^2+x^2}} J_\nu(cx)\,dx =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, b^{\frac{1}{2}+\nu} c^\nu (a^2-c^2)^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu} J_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(b\sqrt{a^2-c^2}\right)$$
$\left[0<c<a,\ \operatorname{Re} b>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right]$;

$=0$ $\left[0<a<c,\ \operatorname{Re} b>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right]$.

ИПII 35(20)

6 $$\int_0^\infty x^{\nu+1} \frac{\cos\left(a\sqrt{x^2+b^2}\right)}{\sqrt{x^2+b^2}} J_\nu(cx)\,dx =$$
$$= -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, b^{\frac{1}{2}+\nu} c^\nu (a^2-c^2)^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu} N_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(b\sqrt{a^2-c^2}\right)$$
$\left[0<c<a,\ \operatorname{Re} b>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right]$;
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, b^{\frac{1}{2}+\nu} c^\nu (c^2-a^2)^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu} K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(b\sqrt{c^2-a^2}\right)$$
$\left[0<a<c,\ \operatorname{Re} b>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right]$.

ИПII 39(45)

6.738

1. $$\int_0^a x^{\nu+1} \sin\left(b\sqrt{a^2-x^2}\right) J_\nu(x)\,dx =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a^{\nu+\frac{3}{2}} b\,(1+b^2)^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{3}{4}} J_{\nu+\frac{3}{2}}\left(a\sqrt{1+b^2}\right)$$
$[\operatorname{Re}\nu>-1]$. ИПII 335(19)

2. $$\int_0^\infty x^{\nu+1}\cos\left(a\sqrt{x^2+b^2}\right)J_\nu(cx)\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,ab^{\nu+\frac{3}{2}}c^\nu\left(a^2-c^2\right)^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{3}{4}}\left[\cos(\pi\nu)J_{\nu+\frac{3}{2}}\left(b\sqrt{a^2-c^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\sin(\pi\nu)N_{\nu+\frac{3}{2}}\left(b\sqrt{a^2-c^2}\right)\right]$$

$$\left[0<c<a,\ \operatorname{Re}b>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<-\frac{1}{2}\right];$$
$$=0 \qquad \left[0<a<c,\ \operatorname{Re}b>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<-\frac{1}{2}\right].$$
ИП II 39 [43]

6.739 $$\int_0^t x^{-\frac{1}{2}}\frac{\cos\left(b\sqrt{t-x}\right)}{\sqrt{t-x}}J_{2\nu}\left(a\sqrt{x}\right)dx =$$
$$=\pi J_\nu\left[\frac{\sqrt{t}}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+b\right)\right]J_\nu\left[\frac{\sqrt{t}}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-b\right)\right]$$
$$\left[\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ВТФ II 47 (7)

6.741

1. $$\int_0^1 \frac{\cos(\mu\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}J_\nu(ax)\,dx = \frac{\pi}{2}J_{\frac{1}{2}(\mu+\nu)}\left(\frac{a}{2}\right)J_{\frac{1}{2}(\nu-\mu)}\left(\frac{a}{2}\right)$$
$[\operatorname{Re}(\mu+\nu)>-1,\ a>0]$. ИП II 41 (54)

2. $$\int_0^1 \frac{\cos[(\nu+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}J_\nu(ax)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\cos\left(\frac{a}{2}\right)J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2}\right).$$
$[\operatorname{Re}\nu>-1,\ a>0]$. ИП II 40 (53)

3. $$\int_0^1 \frac{\cos[(\nu-1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}J_\nu(ax)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\sin\left(\frac{a}{2}\right)J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)$$
$[\operatorname{Re}\nu>0,\ a>0]$. ИП II 40 (52) и

6.75 Цилиндрические, тригонометрические, показательная и степенная функции

6.751

1. $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}ax}\sin(bx)\,I_0\left(\frac{1}{2}ax\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2b}}\,\frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}}\sqrt{b+\sqrt{b^2+a^2}}$$
$[\operatorname{Re}a>0,\ b>0]$. ИП I 105 (44)

2. $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}ax}\cos(bx)\,I_0\left(\frac{1}{2}ax\right)dx = \frac{a}{\sqrt{2b}}\,\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b+\sqrt{a^2+b^2}}}$$
$[\operatorname{Re}a>0,\ b>0]$. ИП I 48 (38)

3. $$\int_0^\infty e^{-bx}\cos(ax)\,J_0(cx)\,dx=\frac{\left[\sqrt{(b^2+c^2-a^2)^2+4a^2b^2}+b^2+c^2-a^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)^2+4a^2b^2}}$$

$[c>0]$. ИП II 11 (46)

6.752

1. $$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)\sin(cx)\frac{dx}{x}=\arcsin\left(\frac{2c}{\sqrt{a^2+(c+b)^2}+\sqrt{a^2+(c-b)^2}}\right)$$

$[\operatorname{Re} a>|\operatorname{Im} b|,\ c>0]$. ИП I 101 (17)

2. $$\int_0^\infty e^{-ax}J_1(cx)\sin(bx)\frac{dx}{x}=\frac{b}{c}(1-r),$$

$$\left[b^2=\frac{c^2}{1-r^2}-\frac{a^2}{r^2},\quad c>0\right].$$ ИП II 19 (15)

6.753

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(xa\sin\psi)}{x}e^{-xa\cos\varphi\cos\psi}J_\nu(xa\sin\varphi)\,dx=\nu^{-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^\nu\sin(\nu\psi)$$

$$\left[\operatorname{Re}\nu>-1,\ a>0,\ 0<\varphi,\ \psi<\frac{\pi}{2}\right].$$ ИП II 33 (10)

2 $$\int_0^\infty \frac{\cos(xa\sin\psi)}{x}e^{-xa\cos\varphi\cos\psi}J_\nu(xa\sin\varphi)\,dx=\nu^{-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^\nu\cos(\nu\psi)$$

$$\left[\operatorname{Re}\nu>0,\ a>0,\ 0<\varphi,\ \psi<\frac{\pi}{2}\right].$$ ИП II 38 (35)

3. $$\int_0^\infty x^{\nu+1}e^{-ax\cos\varphi\cos\psi}\sin(ax\sin\psi)\,J_\nu(ax\sin\varphi)\,dx=$$

$$=2^{\nu+1}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}a^{-\nu-2}(\sin\varphi)^\nu(\cos^2\psi+\sin^2\psi\cos^2\varphi)^{-\nu-\frac{3}{2}}\sin\left[\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\beta\right],$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{tg}\psi\cos\varphi$$

$$\left[a>0,\ 0<\varphi,\ \psi<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2}\right].$$ ИП II 34 (11)

4. $$\int_0^\infty x^{\nu+1}e^{-ax\cos\varphi\cos\psi}\cos(ax\sin\psi)\,J_\nu(ax\sin\varphi)\,dx=$$

$$=2^{\nu+1}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}a^{-\nu-2}(\sin\varphi)^\nu(\cos^2\psi+\sin^2\psi\cos^2\varphi)^{-\nu-\frac{3}{2}}\cos\left[\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\beta\right],$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{tg}\psi\cos\varphi\qquad\left[a>0,\ 0<\varphi,\ \psi<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}\nu>-1\right].$$

ИП II 38 (36)

5. $$\int_0^\infty x^\nu e^{-ax\cos\varphi\cos\psi}\sin(ax\sin\psi)\,J_\nu(ax\sin\varphi)\,dx =$$
$$= 2^\nu \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} a^{-\nu-1}(\sin\varphi)^\nu(\cos^2\psi+\sin^2\psi\cos^2\varphi)^{-\nu-\frac{1}{2}}\sin\left[\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\beta\right],$$
$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{tg}\psi\cos\varphi$$
$$\left[a>0,\ 0<\varphi,\ \psi<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}\nu>-1\right].$$ ИП II 34 (12)

6 $$\int_0^\infty x^\nu e^{-ax\cos\varphi\cos\psi}\cos(ax\sin\psi)\,J_\nu(ax\sin\varphi)\,dx =$$
$$= 2^\nu \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} a^{-\nu-1}(\sin\varphi)^\nu(\cos^2\psi+\sin^2\psi\cos^2\varphi)^{-\nu-\frac{1}{2}}\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\beta\right],$$
$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{tg}\psi\cos\varphi$$
$$\left[a>0,\ 0<\varphi,\ \psi<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 38 (37)

6.754

1 $$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin(bx)\,I_0(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{b^2}{8}} I_0\left(\frac{b^2}{8}\right) \quad [b>0].$$ ИП I 108 (9)

2 $$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(x^2)\,J_0(x^2)\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[J_0\left(\frac{a^2}{16}\right)\cos\left(\frac{a^2}{16}-\frac{\pi}{4}\right)-\right.$$
$$\left.-N_0\left(\frac{a^2}{16}\right)\cos\left(\frac{a^2}{16}+\frac{\pi}{4}\right)\right] \quad [a>0].$$ МХд 42

3 $$\int_0^\infty e^{-ax}\sin(x^2)\,J_0(x^2)\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[J_0\left(\frac{a^2}{16}\right)\sin\left(\frac{a^2}{16}-\frac{\pi}{4}\right)-\right.$$
$$\left.-N_0\left(\frac{a^2}{16}\right)\sin\left(\frac{a^2}{16}+\frac{\pi}{4}\right)\right] \quad [a>0].$$ МХд 42

6.755

1. $$\int_0^\infty x^{-\nu}e^{-x}\sin(4a\sqrt{x})\,I_\nu(x)\,dx = (2^{\frac{3}{2}}a)^{\nu-1}e^{-a^2}W_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\nu,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}(2a^2)$$
$$[a>0,\ \operatorname{Re}\nu>0].$$ ИП II 366 (14)

2. $$\int_0^\infty x^{-\nu-\frac{1}{2}}e^{-x}\cos(4a\sqrt{x})\,I_\nu(x)\,dx = 2^{\frac{3}{2}\nu-1}a^{\nu-1}e^{-a^2}W_{-\frac{3}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu}(2a^2)$$
$$\left[a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 366 (16)

3 $$\int_0^\infty x^{-\nu} e^x \sin\left(4a\sqrt{x}\right) K_\nu(x)\,dx =$$
$$= \left(2^{\frac{3}{2}}a\right)^{\nu-1} \pi \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-2\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)} e^{a^2} W_{\frac{3}{2}\nu-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}(2a^2)$$
$$\left[a>0,\ 0<\operatorname{Re}\nu<\frac{3}{4}\right].$$ ИП II 369 (38)

4 $$\int_0^\infty x^{-\nu-\frac{1}{2}} e^x \cos\left(4a\sqrt{x}\right) K_\nu(x)\,dx =$$
$$= 2^{\frac{3}{2}\nu-1} \pi a^{\nu-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-2\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)} e^{a^2} W_{\frac{3}{2}\nu,\,-\frac{1}{2}\nu}(2a^2)$$
$$\left[a>0,\ -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{4}\right].$$ ИП II 369 (42)

5 $$\int_0^\infty x^{\varrho-\frac{3}{2}} e^{-x} \sin\left(4a\sqrt{x}\right) K_\nu(x)\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\, a \Gamma(\varrho+\nu)\Gamma(\varrho-\nu)}{2^{\varrho-2}\Gamma\left(\varrho+\frac{1}{2}\right)} {}_2F_2\left(\varrho+\nu,\ \varrho-\nu;\ \frac{3}{2},\ \varrho+\frac{1}{2};\ -2a^2\right)$$
$$[\operatorname{Re}\varrho > |\operatorname{Re}\nu|].$$ ИП II 369 (39)

6 $$\int_0^\infty x^{\varrho-1} e^{-x} \cos\left(4a\sqrt{x}\right) K_\nu(x)\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\varrho+\nu)\Gamma(\varrho-\nu)}{2^{\varrho}\Gamma\left(\varrho+\frac{1}{2}\right)} {}_2F_2\left(\varrho+\nu,\ \varrho-\nu;\ \frac{1}{2},\ \varrho+\frac{1}{2};\ -2a^2\right)$$
$$[\operatorname{Re}\varrho > |\operatorname{Re}\nu|].$$ ИП II 370 (43)

7 $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \cos\left(4a\sqrt{x}\right) I_0(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2} K_0(a^2) \quad [a>0].$$
ИП II 366 (15)

8. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{x} \cos\left(4a\sqrt{x}\right) K_0(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{a^2} K_0(a^2) \quad [a>0].$$
ИП II 369 (40)

9. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \cos\left(4a\sqrt{x}\right) K_0(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^{\frac{3}{2}} e^{-a^2} I_0(a^2).$$ ИП II 369 (41)

6.756

1. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-a\sqrt{x}} \sin\left(a\sqrt{x}\right) J_\nu(bx)\,dx =$$
$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi b}} \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) D_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) \times$$
$$\times \left[D_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{ia}{\sqrt{b}}\right) - D_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{ia}{\sqrt{b}}\right)\right]$$
$[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП II 34(17)

2. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-a\sqrt{x}} \cos\left(a\sqrt{x}\right) J_\nu(bx)\,dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) D_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) \times$$
$$\times \left[D_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{ia}{\sqrt{b}}\right) + D_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(-\frac{ia}{\sqrt{b}}\right)\right]$$
$\left[a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$. ИП II 39(42)

3. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-a\sqrt{x}} \sin\left(a\sqrt{x}\right) J_0(bx)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2b} a I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2}{4b}\right) K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2}{4b}\right) \quad \left[|\arg a| < \frac{\pi}{4},\ b>0\right].$$ ИП II 11(40)

4. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-a\sqrt{x}} \cos\left(a\sqrt{x}\right) J_0(bx)\,dx = \frac{a}{2b} I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2}{4b}\right) K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2}{4b}\right)$$
$\left[|\arg a| < \frac{\pi}{4},\ b>0\right]$. ИП II 12(49)

6.757

1. $$\int_0^\infty e^{-bx} \sin\left[a\left(1-e^{-x}\right)\right] J_\nu\left(ae^{-x}\right) dx = 2\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \Gamma(\nu-b+2n+1)\,\Gamma(\nu+b)}{\Gamma(\nu-b+1)\,\Gamma(\nu+b+2n+2)} \times$$
$$\times (\nu+2n+1) J_{\nu+2n+1}(a) \quad [\operatorname{Re} b > -\operatorname{Re}\nu].$$ ИП I 193(26)

2. $$\int_0^\infty e^{-bx} \cos\left[a\left(1-e^{-x}\right)\right] J_\nu\left(ae^{-x}\right) dx =$$
$$= \frac{J_\nu(a)}{\nu+b} + \sum_{n=0}^\infty 2(-1)^n \frac{\Gamma(\nu-b+2n)\,\Gamma(\nu+b)}{\Gamma(\nu-b+1)\,\Gamma(\nu+b+2n+1)} (\nu+2n) J_{\nu+2n}(a)$$
$[\operatorname{Re} b > -\operatorname{Re}\nu]$. ИП I 193(27)

6.758 $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i(\mu-\nu)\theta} (\cos\theta)^{\nu+\mu} (\lambda z)^{-\nu-\mu} J_{\nu+\mu}(\lambda z)\,d\theta =$$
$$= \pi (2az)^{-\mu} (2bz)^{-\nu} J_\mu(az) J_\nu(bz);$$
$$\lambda = \sqrt{2\cos\theta\left(a^2 e^{i\theta} + b^2 e^{-i\theta}\right)} \qquad [\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1].$$ ВТФ II 48(12)

6.76 Цилиндрические, тригонометрические и гиперболические функции

6.761 $\int\limits_0^\infty \operatorname{ch} x \cos(2a \operatorname{sh} x) J_\nu(be^x) J_\nu(be^{-x})\, dx =$

$$= \frac{J_{2\nu}(2\sqrt{b^2-a^2})}{2\sqrt{b^2-a^2}} \qquad [0 < a < b,\ \operatorname{Re}\nu > -1];$$

$$= 0 \qquad [0 < b < a,\ \operatorname{Re}\nu > -1].$$

ИП II 359 (10)

6.762 $\int\limits_0^\infty \operatorname{ch} x \sin(2a \operatorname{sh} x) [J_\nu(be^x) N_\nu(be^{-x}) - N_\nu(be^x) J_\nu(be^{-x})]\, dx =$

$$= 0 \qquad \left[0 < a < b,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right];$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cos(\nu\pi) (a^2-b^2)^{-\frac{1}{2}} K_{2\nu}\left[2(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad \left[0 < b < a,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right].$$

ИП II 360 (12)

6.763 $\int\limits_0^\infty \operatorname{ch} x \cos(2a \operatorname{sh} x) N_\nu(be^x) N_\nu(be^{-x})\, dx =$

$$= -\frac{1}{2}(b^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} J_{2\nu}\left[2(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad [0 < a < b,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1];$$

$$= \frac{2}{\pi} \cos(\nu\pi) (a^2-b^2)^{-\frac{1}{2}} K_{2\nu}\left[2(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$[0 < b < a,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1].$$

ИП II 360 (11)

6.77 Цилиндрические функции, логарифм и арктангенс

6.771 $$\int\limits_0^\infty x^{\mu+\frac{1}{2}} \ln x\, J_\nu(ax)\, dx = \frac{2^{\mu-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+\frac{1}{4}\right) a^{\mu+\frac{3}{2}}} \times$$

$$\times \left[\psi\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\frac{3}{4}\right) + \psi\left(\frac{\nu-\mu}{2}+\frac{1}{4}\right) - \ln\frac{a^2}{4}\right]$$

$$\left[a > 0,\ -\operatorname{Re}\nu - \frac{3}{2} < \operatorname{Re}\mu < 0\right].$$

ИП II 32 (25)

6.772

1. $\int\limits_0^\infty \ln x J_0(ax)\, dx = -\frac{1}{a}[\ln(2a) + C].$ В 430 (4) и, ИП II 10 (27)

2. $\int\limits_0^\infty \ln x J_1(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\left[\ln\left(\frac{a}{2}\right) + C\right].$ ИП II 19 (11)

3. $\int\limits_0^\infty \ln(a^2+x^2) J_1(bx)\, dx = \frac{2}{b}[K_0(ab) + \ln a].$ ИП II 19 (12)

4. $\int\limits_0^\infty J_1(tx)\ln\sqrt{1+t^4}\,dt = \frac{2}{x}\operatorname{ker} x.$ МО 46

6.773 $\int\limits_0^\infty \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}{\sqrt{x^2+a^2}} J_0(bx)\,dx =$

$$= \left[\frac{1}{2}K_0^2\left(\frac{ab}{2}\right) + \ln a I_0\left(\frac{ab}{2}\right)K_0\left(\frac{ab}{2}\right)\right]$$

$[a > 0,\ b > 0].$ ИП II 10 (28)

6.774 $\int\limits_0^\infty \ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x} J_0(bx)\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = K_0^2\left(\frac{ab}{2}\right)$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0].$ ИП II 10 (29)

6.775 $\int\limits_0^\infty x\left[\ln\left(a+\sqrt{a^2+x^2}\right) - \ln x\right] J_0(bx)\,dx =$

$$= \frac{1}{b^2}\left(1-e^{-ab}\right) \qquad [\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0].$$ ИП II 12 (55)

6.776 $\int\limits_0^\infty x\ln\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right) J_0(bx)\,dx = \frac{2}{b}\left[\frac{1}{b} - aK_1(ab)\right]$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0].$ ИП II 10 (30)

6.777 $\int\limits_0^\infty J_1(tx)\operatorname{arctg} t^2\,dt = -\frac{2}{x}\operatorname{kei} x.$ МО 46

6.78 Цилиндрические функции и другие специальные функции

6.781 $\int\limits_0^\infty \operatorname{si}(ax) J_0(bx)\,dx = -\frac{1}{b}\arcsin\left(\frac{b}{a}\right) \qquad [0 < b < a];$

$$= 0 \qquad [0 < a < b].$$

ИП II 13 (6)

6.782

1. $\int\limits_0^\infty \operatorname{Ei}(-x) J_0\left(2\sqrt{zx}\right) dx = \frac{e^{-z}-1}{z}.$ НИ 60 (4)

2. $\int\limits_0^\infty \operatorname{si}(x) J_0\left(2\sqrt{zx}\right) dx = -\frac{\sin z}{z}.$ НИ 60 (6)

3. $\int\limits_0^\infty \operatorname{ci}(x) J_0\left(2\sqrt{zx}\right) dx = \frac{\cos z - 1}{z}.$ НИ 60 (5)

4. $\int\limits_0^\infty \operatorname{Ei}(-x) J_1\left(2\sqrt{zx}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\operatorname{Ei}(-z) - C - \ln z}{\sqrt{z}}.$ НИ 60 (7)

5. $$\int_0^\infty \operatorname{si}(x) J_1\left(2\sqrt{zx}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}} = -\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{si}(z)}{\sqrt{z}}.$$ НИ 60 (9)

6. $$\int_0^\infty \operatorname{ci}(z) J_1\left(2\sqrt{zx}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\operatorname{ci}(z)-C-\ln z}{\sqrt{z}}.$$ НИ 60 (8)

7 $$\int_0^\infty \operatorname{Ei}(-x) N_0\left(2\sqrt{zx}\right)dx = \frac{C+\ln z-e^z \operatorname{Ei}(-z)}{\pi z}.$$ НИ 63 (5)

6.783

1. $$\int_0^\infty x \operatorname{si}(a^2x^2) J_0(bx)\,dx = -\frac{2}{b^2}\sin\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$$
$[a>0]$. ИП II 13 (7) u

2. $$\int_0^\infty x \operatorname{ci}(a^2x^2) J_0(bx)\,dx = \frac{2}{b^2}\left[1-\cos\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$
$[a>0]$. ИП II 13 (8) u

3. $$\int_0^\infty \operatorname{ci}(a^2x^2) J_0(bx)\,dx = \frac{1}{b}\left[\operatorname{ci}\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)+\ln\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)+2C\right]$$
$[a>0]$. ИП II 13 (9) u

4. $$\int_0^\infty \operatorname{si}(a^2x^2) J_1(bx)\,dx = \frac{1}{b}\left[-\operatorname{si}\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$
$[a>0]$. ИП II 20 (25) u

6.784

1. $$\int_0^\infty x^{\nu+1}[1-\Phi(ax)] J_\nu(bx)\,dx =$$
$$= a^{-\nu}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{b^2\Gamma(\nu+2)}\exp\left(-\frac{b^2}{8a^2}\right) M_{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$$
$\left[|\arg a|<\frac{\pi}{4},\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1\right]$. ИП II 92 (22)

2 $$\int_0^\infty x^{\nu}[1-\Phi(ax)] J_\nu(bx)\,dx =$$
$$= \frac{a^{\frac{1}{2}-\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}\, b^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\exp\left(-\frac{b^2}{8a^2}\right) M_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4},\,\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4}}\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)\cdot$$
$\cdot\left[|\arg a|<\frac{\pi}{4},\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\ b>0\right]$. ИП II 92 (23)

6.785 $$\int_0^\infty \frac{\exp\left(\frac{a^2}{2x}-x\right)}{x}\left[1-\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2x}}\right)\right]K_\nu(x)\,dx = \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{4}\sec(\nu\pi)\{[J_\nu(a)]^2+[N_\nu(a)]^2\}$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right].$ ИП II 370 (46)

6.786 $$\int_0^\infty x^{\nu-2\mu+2n+2}e^{x^2}\Gamma(\mu,\ x^2)N_\nu(bx)\,dx = (-1)^n\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\mu+\nu+n\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\mu+n\right)}{b\Gamma(1-\mu)}\times \exp\left(\frac{b^2}{8}\right)W_{\mu-\frac{1}{2}\nu-n-1,\ \frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4}\right)$$

$\left[n\text{ — целое, } b>0.\ \operatorname{Re}(\nu-\mu+n) > -\frac{3}{2},\ \operatorname{Re}(-\mu+n) > -\frac{3}{2},\ \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}-2n\right].$ ИП II 108 (2)

6.787 $$\int_0^\infty \frac{x^{\nu+2n-\frac{1}{2}}}{\mathrm{B}(a+x,\ a-x)}J_\nu(bx)\,dx = 0$$

$\left[\pi \leqslant b < \infty,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < 2a-2n-\frac{7}{2}\right].$ ИП II 92 (21)

6.79 Интегрирование цилиндрических функций по индексу

6.791

1. $$\int_{-\infty}^\infty K_{ix+iy}(a)K_{ix+iz}(b)\,dx = \pi K_{iy-iz}(a+b)$$

$[|\arg a|+|\arg b| < \pi].$ ИП II 382 (21)

2. $$\int_{-\infty}^\infty J_{\nu-x}(a)J_{\mu+x}(a)\,dx = J_{\mu+\nu}(2a) \qquad [\operatorname{Re}(\mu+\nu) > 1].$$ ИП II 379 (1)

3 $$\int_{-\infty}^\infty J_{\varkappa+x}(a)J_{\lambda-x}(a)J_{\mu+x}(a)J_{\nu-x}(a)\,dx = \frac{\Gamma(\varkappa+\lambda+\mu+\nu+1)}{\Gamma(\varkappa+\lambda+1)\Gamma(\lambda+\mu+1)\Gamma(\mu+\nu+1)\Gamma(\nu+\varkappa+1)}\times$$
$$\times {}_4F_5\left(\frac{\varkappa+\lambda+\mu+\nu+1}{2},\ \frac{\varkappa+\lambda+\mu+\nu+1}{2},\ \frac{\varkappa+\lambda+\mu+\nu}{2}+1,\ \frac{\varkappa+\lambda+\mu+\nu}{2}+1;\ \varkappa+\lambda+\mu+\nu+1,\ \varkappa+\lambda+1,\ \lambda+\mu+1,\ \mu+\nu+1,\ \nu+\varkappa+1;\ -4a^2\right)$$

$[\operatorname{Re}(\varkappa+\lambda+\mu+\nu) > -1].$ ИП II 379 (3)

6.792

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi x} K_{ix+iy}(a) K_{ix+iz}(b)\,dx = \pi e^{-\pi z} K_{i(y-z)}(a-b)$$

$[a > b > 0]$. ИП II 382 (22)

2 $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varrho x} K_{\nu+ix}(\alpha) K_{\nu-ix}(\beta)\,dx =$$
$$= \pi \left(\frac{\alpha+\beta e^{\varrho}}{\alpha e^{\varrho}+\beta}\right)^{\nu} K_{2\nu}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \operatorname{ch} \varrho}\right)$$

$[|\arg\alpha|+|\arg\beta|+|\operatorname{Im}\varrho| < \pi]$. ИП II 382 (23)

3 $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\pi-\gamma)x} K_{ix+iy}(a) K_{ix+iz}(b)\,dx = \pi e^{-\beta y-\alpha z} K_{iy-iz}(c)$$

$[0 < \gamma < \pi,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ — углы треугольника со сторонами $a,\ b,\ c]$. ИП II 382 (24), ВТФ II 55 (44) *и*

4. $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cxi} H^{(2)}_{\nu-ix}(a) H^{(2)}_{\nu+ix}(b)\,dx = 2i\left(\frac{h}{k}\right)^{2\nu} H^{(2)}_{2\nu}(hk),$$
$$h = \sqrt{ae^{\frac{1}{2}c} + be^{-\frac{1}{2}c}},\quad k = \sqrt{ae^{-\frac{1}{2}c} + be^{\frac{1}{2}c}}$$

$[a,\ b > 0,\ \operatorname{Im} c = 0]$. ИП II 380 (11)

5 $$\int_{-\infty}^{\infty} a^{-\mu-x} b^{-\nu+x} e^{cxi} J_{\mu+x}(a) J_{\nu-x}(b)\,dx =$$
$$= \left[\frac{2\cos\left(\frac{c}{2}\right)}{a^2 c^{-\frac{1}{2}ci} + b^2 e^{\frac{1}{2}ci}}\right]^{\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu} \exp\left[\frac{c}{2}(\nu-\mu)\,i\right] \times$$
$$\times J_{\mu+\nu}\left\{\left[2\cos\left(\frac{c}{2}\right)\left(a^2 e^{-\frac{1}{2}ci} + b^2 e^{\frac{1}{2}ci}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$[b > 0,\ a > 0,\ |c| < \pi,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu) > 1]$;

$= 0 \qquad [a > 0,\ b > 0,\ |c| \geqslant \pi,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu) > 1]$.

ВТФ II 54 (41), ИП II 379 (2)

6.793

1 $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cxi} \left[J_{\nu-ix}(a) N_{\nu+ix}(b) + N_{\nu-ix}(a) J_{\nu+ix}(b)\right] dx =$$
$$= -2\left(\frac{h}{k}\right)^{2\nu} J_{2\nu}(hk),$$
$$h = \sqrt{ae^{\frac{1}{2}c} + be^{-\frac{1}{2}c}},\quad k = \sqrt{ae^{-\frac{1}{2}c} + be^{\frac{1}{2}c}}$$

$[a,\ b > 0,\ \operatorname{Im} c = 0]$. ИП II 380 ([illegible])

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cxi} [J_{\nu-ix}(a) J_{\nu+ix}(b) - N_{\nu-ix}(a) N_{\nu+ix}(b)]\, dx = $$
$$= 2\left(\frac{h}{k}\right)^{2\nu} N_{2\nu}(hk),$$
$$h = \sqrt{ae^{\frac{1}{2}c} + be^{-\frac{1}{2}c}}, \quad k = \sqrt{ae^{-\frac{1}{2}c} + be^{\frac{1}{2}c}}$$
$[a, \ b > 0, \ \operatorname{Im} c = 0]$. ИП II 380 (10)

6.794

1. $$\int_0^{\infty} K_{ix}(a) K_{ix}(b) \operatorname{ch}[(\pi - \varphi) x]\, dx = $$
$$= \frac{\pi}{2} K_0\left(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}\right).$$ ВТФ II 55 (42)

2. $$\int_0^{\infty} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2} x\right) K_{ix}(a)\, dx = \frac{\pi}{2} \qquad [a > 0].$$ ИП II 382 (19)

3. $$\int_0^{\infty} \operatorname{ch}(\varrho x) K_{ix+\nu}(a) K_{-ix+\nu}(a)\, dx = \frac{\pi}{2} K_{2\nu}\left[2a \cos\left(\frac{\varrho}{2}\right)\right]$$
$[2|\arg a| + |\operatorname{Re} \varrho| < \pi]$. ИП II 383 (28)

4. $$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2} x\right) J_{ix}(a)\, dx = 2 \sin a \qquad [a > 0].$$ ИП II 380 (6)

5. $$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cosech}\left(\frac{\pi}{2} x\right) J_{ix}(a)\, dx = -2i \cos a \qquad [a > 0].$$ ИП II 380 (7)

6. $$\int_0^{\infty} \operatorname{sech}(\pi x) \{[J_{ix}(a)]^2 + [N_{ix}(a)]^2\}\, dx = -N_0(2a) - \mathbf{E}_0(2a)$$
$[a > 0]$. ИП II 380 (12)

7. $$\int_0^{\infty} x \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2} x\right) K_{ix}(a)\, dx = \frac{\pi a}{2} \qquad [a > 0].$$ ИП II 382 (20)

8. $$\int_0^{\infty} x \operatorname{th}(\pi x) K_{ix}(\beta) K_{ix}(\alpha)\, dx = \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha\beta}\, \frac{\exp(-\beta - \alpha)}{\alpha + \beta}$$
$[|\arg\beta| < \pi, \ |\arg\alpha| < \pi]$. ИП II 175 (4)

9. $$\int_0^{\infty} x \operatorname{sh}(\pi x) K_{2ix}(\alpha) K_{ix}(\beta)\, dx = $$
$$= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\alpha}{2^{\frac{5}{2}}\sqrt{\beta}} \exp\left(-\beta - \frac{\alpha^2}{8\beta}\right) \qquad \left[\beta > 0, |\arg\alpha| < \frac{\pi}{4}\right].$$ ИП II 175 (5)

10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sh}\,(\pi x)}{x^2+n^2} K_{ix}(\alpha) K_{ix}(\beta)\,dx =$

$= \frac{\pi^2}{2} I_n(\beta) K_n(\alpha) \quad [0<\beta<\alpha;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots];$

$= \frac{\pi^2}{2} I_n(\alpha) K_n(\beta) \quad [0<\alpha<\beta;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots].$ ИП II 176 (8)

11. $\displaystyle\int_0^\infty x\,\mathrm{sh}\,(\pi x) K_{ix}(\alpha) K_{ix}(\beta) K_{ix}(\gamma)\,dx =$

$= \frac{\pi^2}{4} \exp\left[-\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\right)\right] \quad \left[|\arg\alpha|+|\arg\beta|<\frac{\pi}{2},\ \gamma>0\right].$ ИП II 176 (9)

12. $\displaystyle\int_0^\infty x\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2}x\right) K_{\frac{1}{2}ix}(\alpha) K_{\frac{1}{2}ix}(\beta) K_{ix}(\gamma)\,dx =$

$= \frac{\pi^2\gamma}{2\sqrt{\gamma^2+4\alpha\beta}} \exp\left[-\frac{(\alpha+\beta)\sqrt{\gamma^2+4\alpha\beta}}{2\sqrt{\alpha\beta}}\right]$

$[|\arg\alpha|+|\arg\beta|<\pi,\ \gamma>0].$ ИП II 176 (10)

13. $\displaystyle\int_0^\infty x\,\mathrm{sh}\,(\pi x) K_{\frac{1}{2}ix+\lambda}(\alpha) K_{\frac{1}{2}ix-\lambda}(\alpha) K_{ix}(\gamma)\,dx =$

$= 0 \quad [0<\gamma<2\alpha];$

$= \frac{\pi^2\gamma}{2^{2\lambda+1}\alpha^{2\lambda}z} \quad [(\gamma+z)^{2\lambda}+(\gamma-z)^{2\lambda}],$

$z=\sqrt{\gamma^2-4\alpha^2} \quad [0<2\alpha<\gamma].$ ИП II 176 (11)

6.795

1. $\displaystyle\int_0^\infty \cos(bx) K_{ix}(a)\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-a\,\mathrm{ch}\,b}$

$\left[|\mathrm{Im}\,b|<\frac{\pi}{2},\ a>0\right].$ ВТФ II 55 (46), ИП II 175 (2)

2. $\displaystyle\int_0^\infty J_x(ax) J_{-x}(ax) \cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{4}(1-a^2)^{-\frac{1}{2}} \quad [|a|<1].$ ИП II 380 (4)

3. $\displaystyle\int_0^\infty x \sin(ax) K_{ix}(bx)\,dx = \frac{\pi b}{2}\,\mathrm{sh}\,a \exp(-b\,\mathrm{ch}\,a)$

$\left[|\mathrm{Im}\,a|<\frac{\pi}{2},\ b>0\right].$ ИП II 175 (1)

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin[(\nu+ix)\pi]}{n+\nu+ix} K_{\nu+ix}(a) K_{\nu-ix}(b)\,dx =$

$= \pi^2 I_n(a) K_{n+2\nu}(b) \quad [0<a<b;\ n=0,\ 1,\ \ldots];$

$= \pi^2 K_{n+2\nu}(a) I_n(b) \quad [0<b<a;\ n=0,\ 1,\ \ldots].$ ИП II 382 (25)

5. $$\int_0^\infty x \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) K_{\frac{1}{2}ix}(a) K_{ix}(b)\,dx = \\ = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} b}{\sqrt{2a}} \exp\left(-a - \frac{b^2}{8a}\right) \quad \left[|\arg a| < \frac{\pi}{2},\ b > 0\right].$$ ИП II 175(6)

6.796

1. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\frac{1}{2}\pi x} \cos(bx)}{\operatorname{sh}(\pi x)} J_{ix}(a)\,dx = -i \exp(ia \operatorname{ch} b) \quad [a > 0,\ b > 0].$$ ИП II 380(8)

2. $$\int_0^\infty \cos(bx) \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\pi x\right) K_{ix}(a)\,dx = \frac{\pi}{2} \cos(a \operatorname{sh} b).$$ ВТФ II 55(47)

3. $$\int_0^\infty \sin(bx) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\pi x\right) K_{ix}(a)\,dx = \frac{\pi}{2} \sin(a \operatorname{sh} b).$$ ВТФ II 55(48)

4. $$\int_0^\infty \cos(bx) \operatorname{ch}(\pi x) [K_{ix}(a)]^2\,dx = -\frac{\pi^2}{4} N_0\left[2a \operatorname{sh}\left(\frac{b}{2}\right)\right] \\ [a > 0,\ b > 0].$$ ИП II 383(27)

5. $$\int_0^\infty \sin(bx) \operatorname{sh}(\pi x) [K_{ix}(a)]^2\,dx = \frac{\pi^2}{4} J_0\left[2a \operatorname{sh}\left(\frac{b}{2}\right)\right] \\ [a > 0,\ b > 0].$$ ИП II 382(26)

6.797

1. $$\int_0^\infty x e^{\pi x} \operatorname{sh}(\pi x) \Gamma(\nu + ix) \Gamma(\nu - ix) H_{ix}^{(2)}(a) H_{ix}^{(2)}(b)\,dx = \\ = i 2^\nu \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right) (ab)^\nu (a+b)^{-\nu} K_\nu(a+b) \\ [a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0].$$ ИП II 381(14)

2. $$\int_0^\infty x e^{\pi x} \operatorname{sh}(\pi x) \operatorname{ch}(\pi x) \Gamma(\nu + ix) \Gamma(\nu - ix) H_{ix}^{(2)}(a) H_{ix}^{(2)}(b)\,dx = \\ = \frac{i \pi^{\frac{3}{2}} 2^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)} (b-a)^{-\nu} H_\nu^{(2)}(b-a) \quad \left[0 < a < b,\ 0 < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}\right].$$ ИП II 381(15)

3. $$\int_0^\infty x e^{\pi x} \operatorname{sh}(\pi x) \Gamma\left(\frac{\nu + ix}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu - ix}{2}\right) H_{ix}^{(2)}(a) H_{ix}^{(2)}(b)\,dx = \\ = i\pi 2^{2-\nu} (ab)^\nu (a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}\nu} H_\nu^{(2)}\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right) \\ [a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0].$$ ИП II 381(16)

4. $$\int_0^\infty x \operatorname{sh}(\pi x)\,\Gamma(\lambda+ix)\,\Gamma(\lambda-ix)\,K_{ix}(a)\,K_{ix}(b)\,dx =$$
$$= 2^{\nu-1}\pi^{\frac{3}{2}}(ab)^{\lambda}(a+b)^{-\lambda}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)K_\lambda(a+b)$$
$[|\arg a| < \pi,\ \operatorname{Re}\lambda > 0,\ b > 0]$. ИП II 176 (12)

5 $$\int_0^\infty x \operatorname{sh}(2\pi x)\,\Gamma(\lambda+ix)\,\Gamma(\lambda-ix)\,K_{ix}(a)\,K_{ix}(b)\,dx =$$
$$= \frac{2^{\lambda}\pi^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}\left(\frac{ab}{|b-a|}\right)^{\lambda} K_\lambda(|b-a|)$$
$\left[a > 0,\ 0 < \operatorname{Re}\lambda < \frac{1}{2},\ b > 0\right]$. ИП II 176 (13)

6 $$\int_0^\infty x \operatorname{sh}(\pi x)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}ix\right)\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}ix\right)K_{ix}(a)\,K_{ix}(b)\,dx =$$
$$= 2\pi^2\left(\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right)K_{2\lambda}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)$$
$\left[|\arg a| < \frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}\lambda > 0,\ b > 0\right]$. ИП II 177 (14)

7 $$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{th}(\pi x)\,K_{ix}(a)\,K_{ix}(b)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}ix\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}ix\right)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi ab}{a^2+b^2}}\exp\left(-\sqrt{a^2+b^2}\right)$$
$\left[|\arg a| < \frac{\pi}{2},\ b > 0\right]$, (см. также 7.335). ИП II 177 (15)

6.8 ФУНКЦИИ, РОДСТВЕННЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ

6.81 Функции Струве

6.811

1 $$\int_0^\infty \mathbf{H}_\nu(bx)\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{b}$$ $[-2 < \operatorname{Re}\nu < 0,\ b > 0]$. ИП II 158 (1)

2 $$\int_0^\infty \mathbf{H}_\nu\left(\frac{a^2}{x}\right)\mathbf{H}_\nu(bx)\,dx = -\frac{J_{2\nu}(2a\sqrt{b})}{b}$$
$\left[a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}\right]$. ИП II 170 (37)

3 $$\int_0^\infty \mathbf{H}_{\nu-1}\left(\frac{a^2}{x}\right)\mathbf{H}_\nu(bx)\,\frac{dx}{x} = -\frac{1}{a\sqrt{b}}J_{2\nu-1}(2a\sqrt{b})$$
$\left[a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 170 (38)

6.812

1. $$\int_0^\infty \frac{\mathbf{H}_1(bx)\,dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\left[I_1(ab) - \mathbf{L}_1(ab)\right] \quad [\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0].$$ ИП II 158 (6)

2. $$\int_0^\infty \frac{\mathbf{H}_\nu(bx)}{x^2+a^2}\,dx = -\frac{\pi}{2a\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}\mathbf{L}_\nu(ab) + \frac{b\operatorname{ctg}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{1-\nu^2}\,{}_1F_2\left(1;\ \frac{3-\nu}{2},\ \frac{3+\nu}{2};\ \frac{a^2b^2}{4}\right)$$
$[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < 2].$ ИП II 159 (7)

6.813

1. $$\int_0^\infty x^{s-1}\mathbf{H}_\nu(ax)\,dx = \frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)}{a^s\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}s + 1\right)}\operatorname{tg}\left(\frac{s+\nu}{2}\pi\right)$$
$\left[a > 0,\ -1 - \operatorname{Re}\nu < \operatorname{Re} s < \min\left(\frac{3}{2},\ 1 - \operatorname{Re}\nu\right)\right].$
В 429 (2), ИП I 335 (52)

2. $$\int_0^\infty x^{-\nu-1}\mathbf{H}_\nu(x)\,dx = \frac{2^{-\nu-1}\pi}{\Gamma(\nu+1)} \quad \left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}\right].$$ ИП II 383 (2)

3. $$\int_0^\infty x^{-\mu-\nu}\mathbf{H}_\mu(x)\,\mathbf{H}_\nu(x)\,dx = \frac{2^{-\mu-\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)}$$
$[\operatorname{Re}(\mu+\nu) > 0].$ В 435 (2), ИП II 384 (8)

4. $$\int_0^1 x^{\nu+1}\mathbf{H}_\nu(ax)\,dx = \frac{1}{a}\mathbf{H}_{\nu+1}(a) \quad \left[a > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}\right].$$ ИП II 158 (2) *и*

5. $$\int_0^1 x^{1-\nu}\mathbf{H}_\nu(ax)\,dx = \frac{a^{\nu-1}}{2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{a}\mathbf{H}_{\nu-1}(a) \quad [a > 0].$$
ИП II 158 (3) *и*

6.814

1. $$\int_0^\infty \frac{x^\lambda\mathbf{H}_\nu(bx)}{(x^2+a^2)^{1-\mu}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2b}}\,\frac{a^{\lambda+2\mu-\frac{3}{2}}}{\Gamma(1-\mu)}\,G_{24}^{22}\left(\frac{a^2b^2}{4}\,\middle|\,\begin{matrix} l,\ m \\ l,\ m-\mu,\ h,\ k\end{matrix}\right),$$
$$h = \frac{1}{4} + \frac{\nu}{2},\quad k = \frac{1}{4} - \frac{\nu}{2},\quad l = \frac{3}{4} + \frac{\nu}{2},\quad m = \frac{3}{4} - \frac{\lambda}{2}$$
$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}(\lambda+\nu) > -2,\ \operatorname{Re}(\lambda+2\mu) < \frac{5}{2},\ \operatorname{Re}(\lambda+2\mu+\nu) < 2\right].$
ИП II 159 (10)

2. $$\int_0^\infty \frac{x^{\nu+1}\mathbf{H}_\nu(bx)}{(x^2+a^2)^{1-\mu}}\,dx = \frac{2^{\mu-1}\pi a^{\mu+\nu}b^{-\mu}}{\Gamma(1-\mu)\cos[(\mu+\nu)\pi]}\left[I_{-\mu-\nu}(ab) - \mathbf{L}_{\mu+\nu}(ab)\right]$$

$$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2},\ \operatorname{Re}(\mu+\nu) < \frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(2\mu+\nu) < \frac{3}{2}\right].$$

ИП II 159 (8)

6.815

1 $$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}\nu}(1-x)^{\mu-1}\mathbf{H}_\nu(a\sqrt{x})\,dx = 2^\mu a^{-\mu}\Gamma(\mu)\,\mathbf{H}_{\mu+\nu}(a)$$

$$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2},\ \operatorname{Re}\mu > 0\right].$$ ИП II 199 (88) *и*

2 $$\int_0^1 x^{\lambda-\frac{1}{2}\nu-\frac{3}{2}}(1-x)^{\mu-1}\,\mathbf{H}_\nu(a\sqrt{x})\,dx =$$

$$= \frac{\mathrm{B}(\lambda,\mu)\,a^{\nu+1}}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\,{}_2F_3\left(1,\ \lambda;\ \frac{3}{2},\ \nu+\frac{3}{2},\ \lambda+\mu;\ -\frac{a^2}{4}\right)$$

$$[\operatorname{Re}\lambda > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0].$$ ИП II 199 (89) *и*

6.82 Функции Струве, показательная и степенная функции

6.821

1 $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\mathbf{H}_{-n-\frac{1}{2}}(\beta x)\,dx = (-1)^n\beta^{n+\frac{1}{2}}\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^{-n-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$[\operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Im}\beta|].$$ ИП I 206 (6)

2 $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\mathbf{L}_{-n-\frac{1}{2}}(\beta x)\,dx = \beta^{n+\frac{1}{2}}\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)^{-n-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$$

$$[\operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Re}\beta|].$$ ИП I 208 (26)

3 $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\mathbf{H}_0(\beta x)\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\beta}{\alpha}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \qquad [\operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Im}\beta|].$$ ИП I 205 (1)

4. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\mathbf{L}_0(\beta x)\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{\arcsin\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \qquad [\operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Re}\beta|].$$ ИП I 207 (18)

6.822 $$\int_0^\infty e^{(\nu+1)x}\mathbf{H}_\nu(a\operatorname{sh}x)\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\operatorname{cosec}(\nu\pi)\left[\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{a}{2}\right)I_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)\right]$$

$$[\operatorname{Re} a > 0,\ -2 < \operatorname{Re}\nu < 0].$$ ИП II 385 (11)

6.823

1. $$\int_0^\infty x^\lambda e^{-ax}\mathbf{H}_\nu(bx)\,dx = \frac{b^{\nu+1}\Gamma(\lambda+\nu+2)}{2^\nu a^{\lambda+\nu+2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\times$$
$$\times\,{}_3F_2\left(1,\ \frac{\lambda+\nu}{2}+1,\ \frac{\lambda+\nu+3}{2};\ \frac{3}{2},\ \nu+\frac{3}{2};\ -\frac{b^2}{a^2}\right)$$
$[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}(\lambda+\nu) > -2]$. ИП II 161 (19)

2. $$\int_0^\infty x^\nu e^{-\alpha x}\mathbf{L}_\nu(\beta x)\,dx = \frac{(2\beta)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)^{2\nu+1}} -$$
$$-\frac{\Gamma(2\nu+1)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu}{\sqrt{\frac{\pi}{2}\alpha}\,(\beta^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4}}}P_{-\nu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\alpha > |\operatorname{Re}\beta|,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП I 209 (35) *и*

6.824

1. $$\int_0^\infty t^\nu e^{-at}\mathbf{L}_{2\nu}(2\sqrt{t})\,dt = \frac{1}{a^{2\nu+1}}e^{\frac{1}{a}}\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right).$$ МХд 51

2. $$\int_0^\infty t^\nu e^{-at}\mathbf{L}_{-2\nu}(\sqrt{t})\,dt =$$
$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-2\nu\right)a^{2\nu+1}}e^{\frac{1}{a}}\gamma\left(\frac{1}{2}-2\nu,\ \frac{1}{a}\right).$$ МХд 51

6.825 $$\int_0^\infty x^{s-1}e^{-\alpha^2x^2}\mathbf{H}_\nu(\beta x)\,dx = \frac{\beta^{\nu+1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}\right)}{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}\,\alpha^{\nu+s+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\times$$
$$\times\,{}_2F_2\left(1,\ \frac{\nu+s+1}{2};\ \frac{3}{2},\ \nu+\frac{3}{2};\ -\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)$$
$\left[\operatorname{Re} s > -\operatorname{Re}\nu-1,\ \ |\arg\alpha| < \frac{\pi}{4}\right]$. ИП I 335 (51) *и*, ИП II 162 (20)

6.83 Функции Струве и тригонометрмческме функции

6.831 $$\int_0^\infty x^{-\nu}\sin(ax)\,\mathbf{H}_\nu(bx)\,dx =$$
$$= 0 \qquad \left[0 < b < a,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right];$$
$$= \sqrt{\pi}\,2^{-\nu}b^{-\nu}\frac{(b^2-a^2)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \qquad \left[0 < a < b,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$
ИП II 162 (21)

6.832 $\int\limits_0^\infty \sqrt{x}\sin(ax)\,\mathbf{H}_{\frac{1}{4}}(b^2x^2)\,dx = -2^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{a}}{b^2}N_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2}{4b^2}\right)$

$[a>0].$ ИП I 109 (14)

6.84—6.85 Функции Струве и цилиндрические функции

6.841 $\int\limits_0^\infty \mathbf{H}_{\nu-1}(ax)\,N_\nu(bx)\,dx =$

$= -a^{\nu-1}b^{-\nu} \qquad \left[0<b<a, \quad |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right];$

$=0 \qquad \left[0<a<b, \quad |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right].$ ИП II 114 (36)

6.842 $\int\limits_0^\infty [\mathbf{H}_0(ax)-N_0(ax)]\,J_0(bx)\,dx = \frac{4}{\pi(a+b)}\boldsymbol{K}\left[\frac{|a-b|}{a+b}\right]$

$[a>0, \quad b>0].$ ИП II 15 (22)

6.843

1. $\int\limits_0^\infty J_{2\nu}(a\sqrt{x})\,\mathbf{H}_\nu(bx)\,dx = -\frac{1}{b}N_\nu\left(\frac{a^2}{4b}\right)$

$\left[a>0, \quad b>0, \quad -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{5}{4}\right].$ ИП II 164 (10)

2 $\int\limits_0^\infty K_{2\nu}(2a\sqrt{x})\,\mathbf{H}_\nu(bx)\,dx = \frac{2^\nu}{\pi b}\Gamma(\nu+1)\,S_{-\nu-1,\nu}\left(\frac{a^2}{b}\right)$

$[\operatorname{Re}a>0, \quad b>0, \quad \operatorname{Re}\nu>-1].$ ИП II 168 (27)

6.844 $\int\limits_0^\infty \left[\cos\left(\frac{\mu-\nu}{2}\pi\right)J_\mu(a\sqrt{x})-\sin\left(\frac{\mu-\nu}{2}\pi\right)N_\mu(a\sqrt{x})\right]\times$

$\times K_\mu(a\sqrt{x})\,\mathbf{H}_\nu(bx)\,dx = \frac{1}{a^2}W_{\frac{1}{2}\nu,\frac{1}{2}\mu}\left(\frac{a^2}{2b}\right)W_{-\frac{1}{2}\nu,\frac{1}{2}\mu}\left(\frac{a^2}{2b}\right)$

$\left[|\arg a|<\frac{\pi}{4}, \quad b>0, \quad \operatorname{Re}\nu>|\operatorname{Re}\mu|-2\right].$ ИП II 169 (35)

6.845

1 $\int\limits_0^\infty \left[\mathbf{H}_{-\nu}\left(\frac{a}{x}\right)-N_{-\nu}\left(\frac{a}{x}\right)\right]J_\nu(bx)\,dx = \frac{4}{\pi b}\cos(\nu\pi)\,K_{2\nu}(2\sqrt{ab})$

$\left[|\arg a|<\pi, \quad b>0, \quad |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right].$ ИП II 73 (7)

2. $$\int_0^\infty \left[J_{-\nu}\left(\frac{a^2}{x}\right) + \sin(\nu\pi)\,\mathbf{H}_\nu\left(\frac{a^2}{x}\right) \right] \mathbf{H}_\nu(bx)\,dx = \frac{1}{b}\left[\frac{2}{\pi} K_{2\nu}(2a\sqrt{b}) - N_{2\nu}(2a\sqrt{b})\right]$$

$$\left[a>0, b>0, -\frac{3}{2} < \operatorname{Re}\nu < 0\right].$$ ИП II 170 (39)

6.846 $$\int_0^\infty \left[\frac{2}{\pi} K_{2\nu}(2a\sqrt{x}) + N_{2\nu}(2a\sqrt{x})\right] \mathbf{H}_\nu(bx)\,dx = \frac{1}{b} J_\nu\left(\frac{a^2}{b}\right)$$

$$\left[a>0, \quad b>0, \quad |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right].$$ ИП II 169 (30)

6.847 $$\int_0^\infty \left[\cos\frac{\nu\pi}{2} J_\nu(ax) + \sin\frac{\nu\pi}{2}\mathbf{H}_\nu(ax)\right] \frac{dx}{x^2+k^2} = \frac{\pi}{2k}\left[I_\nu(ak) - \mathbf{L}_\nu(ak)\right]$$

$$\left[a>0, \ \operatorname{Re}k>0, \ -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < 2\right].$$ ИП II 384 (5) *и*, В 467 (8)

6.848

1. $$\int_0^\infty x\left[I_\nu(ax) - \mathbf{L}_{-\nu}(ax)\right] J_\nu(bx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{b}\right)^{\nu-1}\cos(\nu\pi)\,\frac{1}{a^2+b^2}$$

$$\left[\operatorname{Re}a>0, \quad b>0, \quad -1 < \operatorname{Re}\nu < -\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 74 (12)

2. $$\int_0^\infty x\left[\mathbf{H}_{-\nu}(ax) - N_{-\nu}(ax)\right] J_\nu(bx)\,dx = 2\,\frac{\cos(\nu\pi)}{a^\nu \pi}\, b^{\nu-1}\,\frac{1}{a+b}$$

$$\left[|\arg a| < \pi, \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu, \quad b>0\right].$$ ИП II 73 (5)

6.849

1. $$\int_0^\infty x K_\nu(ax)\,\mathbf{H}_\nu(bx)\,dx = a^{-\nu-1} b^{\nu+1}\,\frac{1}{a^2+b^2}$$

$$\left[\operatorname{Re}a>0, \quad b>0, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}\right].$$ ИП II 164 (12)

2. $$\int_0^\infty x\left[K_\mu(ax)\right]^2 \mathbf{H}_0(bx)\,dx = -2^{-\mu-1}\pi a^{-2\mu}\,\frac{\left[(z+b)^{2\mu} + (z-b)^{2\mu}\right]}{bz}\sec(\mu\pi),$$

$$z = \sqrt{4a^2+b^2} \quad \left[\operatorname{Re}a>0, \quad b>0, \quad |\operatorname{Re}\mu| < \frac{3}{2}\right].$$ ИП II 166 (18)

6.851

1. $$\int_0^\infty x\left\{\left[J_{\frac{1}{2}\nu}(ax)\right]^2 - \left[N_{\frac{1}{2}\nu}(ax)\right]^2\right\} \mathbf{H}_\nu(bx)\,dx =$$

$$= 0 \qquad \left[0<b<2a, \ -\frac{3}{2} < \operatorname{Re}\nu < 0\right];$$

$$= \frac{4}{\pi b}\,\frac{1}{\sqrt{b^2-4a^2}} \qquad \left[0<2a<b, \ -\frac{3}{2} < \operatorname{Re}\nu < 0\right].$$ ИП II 164 (7)

2. $$\int_0^\infty x^{\nu+1}\{[J_\nu(ax)]^2-[N_\nu(ax)]^2\}\mathbf{H}_\nu(bx)\,dx=$$

$$=0 \qquad \left[0<b<2a,\ -\frac{3}{4}<\operatorname{Re}\nu<0\right];$$

$$=\frac{2^{3\nu+2}a^{2\nu}b^{-\nu-1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(b^2-4a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} \qquad \left[0<2a<b,\ -\frac{3}{4}<\operatorname{Re}\nu<0\right].$$

ИП II 163 (6)

6.852

1. $$\int_0^\infty x^{1-\mu-\nu}J_\nu(x)\,\mathbf{H}_\mu(x)\,dx=\frac{(2\nu-1)\,2^{-\mu-\nu}}{(\mu+\nu-1)\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left[\operatorname{Re}\nu>\frac{1}{2},\quad \operatorname{Re}(\mu+\nu)>1\right].$$ ИП II 383 (4)

2 $$\int_0^\infty x^{\mu-\nu+1}N_\mu(ax)\,\mathbf{H}_\nu(bx)\,dx=$$

$$=0 \qquad \left[0<b<a,\ \operatorname{Re}(\nu-\mu)>0,\ -\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}\right];$$

$$=\frac{2^{1+\mu-\nu}a^{\mu}b^{-\nu}}{\Gamma(\nu-\mu)}(b^2-a^2)^{\nu-\mu-1}$$

$$\left[0<a<b,\ \operatorname{Re}(\nu-\mu)>0,\ -\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 163 (3)

3 $$\int_0^\infty x^{\mu+\nu+1}K_\mu(ax)\,\mathbf{H}_\nu(bx)\,dx=$$

$$=\frac{2^{\mu+\nu+1}b^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,a^{\mu+2\nu+3}}\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{3}{2}\right)F\left(1,\ \mu+\nu+\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ -\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$\left[\operatorname{Re}a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2},\ \operatorname{Re}(\mu+\nu)>-\frac{3}{2}\right].$$ ИП II 165 (13)

6.853

1 $$\int_0^\infty x^{1-\mu}[\sin(\mu\pi)\,J_{\mu+\nu}(ax)+\cos(\mu\pi)\,N_{\mu+\nu}(ax)]\ \mathbf{H}_\nu(bx)\,dx=0$$

$$\left[0<b<a,\quad 1<\operatorname{Re}\mu<\frac{3}{2},\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2},\quad \operatorname{Re}(\nu-\mu)<\frac{1}{2}\right];$$

$$=\frac{b^{\nu}(b^2-a^2)^{\mu-1}}{2^{\mu-1}a^{\mu+\nu}\Gamma(\mu)}$$

$$\left[0<a<b,\ 1<\operatorname{Re}\mu<\frac{3}{2},\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{3}{2},\ \operatorname{Re}(\nu-\mu)<\frac{1}{2}\right].$$

ИП II 163 (4)

2. $$\int_0^\infty x^{\lambda+\frac{1}{2}} [I_\mu(ax) - \mathbf{L}_{-\mu}(ax)] J_\nu(bx)\,dx =$$
$$= 2^{\lambda+\frac{1}{2}} \frac{\cos(\mu\pi)}{\pi} b^{-\lambda-\frac{3}{2}} G_{33}^{22}\left(\frac{b^2}{a^2}\middle| \begin{matrix} \frac{1+\mu}{2}, & 1-\frac{\mu}{2}, & 1+\frac{\mu}{2} \\ \frac{3}{4}+\frac{\lambda+\nu}{2}, & \frac{1+\mu}{2}, & \frac{3}{4}+\frac{\lambda-\nu}{2} \end{matrix}\right)$$
$$\left[\operatorname{Re} a > 0,\quad b > 0,\quad \operatorname{Re}(\mu+\nu+\lambda) > -\frac{3}{2},\ -\operatorname{Re}\nu - \frac{5}{2} < \operatorname{Re}(\lambda-\mu) < 1\right].$$

ИП II 76 (21)

3. $$\int_0^\infty x^{\lambda+\frac{1}{2}} [\mathbf{H}_\mu(ax) - N_\mu(ax)] J_\nu(bx)\,dx =$$
$$= 2^{\lambda+\frac{1}{2}} \frac{\cos(\mu\pi)}{\pi^2} b^{-\lambda-\frac{3}{2}} G_{33}^{23}\left(\frac{b^2}{a^2}\middle| \begin{matrix} \frac{1-\mu}{2}, & 1-\frac{\mu}{2}, & 1+\frac{\mu}{2} \\ \frac{3}{4}+\frac{\lambda+\nu}{2}, & \frac{1-\mu}{2}, & \frac{3}{4}+\frac{\lambda-\nu}{2} \end{matrix}\right)$$
$$\left[b > 0,\quad |\arg a| < \pi,\quad \operatorname{Re}(\lambda+\mu) < 1,\quad \operatorname{Re}(\lambda+\nu) + \frac{3}{2} > |\operatorname{Re}\mu|\right].$$

ИП II 73 (6)

4. $$\int_0^\infty \sqrt{x}\,[I_{\nu-\frac{1}{2}}(ax) - \mathbf{L}_{\nu-\frac{1}{2}}(ax)] J_\nu(bx)\,dx =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a^{\nu-\frac{1}{2}} b^{-\nu} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \left[\operatorname{Re} a > 0,\quad b > 0,\quad |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right].$$

ИП II 74 (11)

5. $$\int_0^\infty x^{\mu-\nu+1} [I_\mu(ax) - \mathbf{L}_\mu(ax)] J_\nu(bx)\,dx =$$
$$= \frac{2^{\mu-\nu+1} a^{\mu-1} b^{\nu-2\mu-1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu-\mu+\frac{1}{2}\right)} F\left(1, \frac{1}{2};\ \nu-\mu+\frac{1}{2};\ -\frac{b^2}{a^2}\right)$$
$$\left[-1 < 2\operatorname{Re}\mu + 1 < \operatorname{Re}\nu + \frac{1}{2},\ \operatorname{Re} a > 0,\quad b > 0\right].$$

ИП II 74 (13)

6. $$\int_0^\infty x^{\mu-\nu+1} [I_\mu(ax) - \mathbf{L}_{-\mu}(ax)] J_\nu(bx)\,dx =$$
$$= \frac{2^{\mu-\nu+1} a^{-\mu-1} b^{\nu-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)} F\left(1, \frac{1}{2}+\mu;\ \frac{1}{2}+\nu;\ -\frac{b^2}{a^2}\right)$$
$$\left[\operatorname{Re} a > 0,\quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\mu > -1,\quad b > 0\right].$$

ИП II 75 (18)

6.854

1. $$\int_0^\infty x\mathbf{H}_{\frac{1}{2}\nu}(ax^2)K_\nu(bx)\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+1\right)}{2^{1-\frac{1}{2}\nu}a\pi}S_{-\frac{1}{2}\nu-1,\,\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right)$$
$[a > 0,\quad \operatorname{Re} b > 0,\quad \operatorname{Re}\nu > -2]$. ИП II 150 (75)

2. $$\int_0^\infty x\mathbf{H}_{\frac{1}{2}\nu}(ax^2)J_\nu(bx)\,dx = -\frac{1}{2a}N_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right)$$
$\left[a > 0,\quad b > 0,\quad -2 < \operatorname{Re}\nu < \frac{3}{2}\right]$. ИП II 73 (3)

6.855

1 $$\int_0^\infty x^{2\nu+\frac{1}{2}}\left[I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{x}\right) - \mathbf{L}_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{x}\right)\right]J_\nu(bx)\,dx = 2^{\frac{3}{2}}\frac{a^{\nu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,b^{\nu+1}}J_{2\nu+1}\left(\sqrt{2ab}\right)K_{2\nu+1}\left(\sqrt{2ab}\right)$$
$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ b > 0,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}\right]$. ИП II 76 (22)

2 $$\int_0^\infty \left[\mathbf{H}_{-\nu-1}\left(\frac{a}{x}\right) - N_{-\nu-1}\left(\frac{a}{x}\right)\right]J_\nu(bx)\frac{dx}{x} = -\frac{4}{\pi\sqrt{ab}}\cos(\nu\pi)K_{-2\nu-1}\left(2\sqrt{ab}\right)$$
$\left[|\arg a| < \pi,\ b > 0,\ |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right]$. ИП II 74 (8)

3 $$\int_0^\infty x^{2\nu+\frac{1}{2}}\left[\mathbf{H}_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{x}\right) - N_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{x}\right)\right]J_\nu(bx)\,dx = -2^{\frac{5}{2}}\pi^{-\frac{3}{2}}a^{\nu+\frac{1}{2}}b^{-\nu-1}\sin(\nu\pi)K_{2\nu+1}\left(\sqrt{2ab}\,e^{\frac{1}{4}\pi i}\right)K_{2\nu+1}\left(\sqrt{2ab}\,e^{-\frac{1}{4}\pi i}\right)$$
$\left[|\arg a| < \pi,\ b > 0,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < -\frac{1}{6}\right]$. ИП II 74 (9)

6.856 $$\int_0^\infty xN_\nu\left(a\sqrt{x}\right)K_\nu\left(a\sqrt{x}\right)\mathbf{H}_\nu(bx)\,dx = \frac{1}{2b^2}\exp\left(-\frac{a^2}{2b}\right)$$
$\left[b > 0,\ |\arg a| < \frac{\pi}{4},\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}\right]$. ИП II 169 (32)

6.857

1. $$\int_0^\infty x \exp\left(\frac{a^2x^2}{8}\right) K_{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{a^2x^2}{8}\right) \mathbf{H}_\nu(bx)\,dx =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} a^{-\frac{\nu}{2}-1} b^{\frac{\nu}{2}-1} \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\nu\right) \exp\left(\frac{b^2}{2a^2}\right) W_{k,m}\left(\frac{b^2}{a^2}\right),$$
$$k = \frac{1}{4}\nu, \quad m = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\nu$$
$$\left[|\arg a| < \frac{3}{4}\pi, \quad b > 0, \quad -\frac{3}{2} < \operatorname{Re}\nu < 0\right].$$ ИП II 167 (24)

2. $$\int_0^\infty x^{\sigma-2} \exp\left(-\frac{1}{2}a^2x^2\right) K_\mu\left(\frac{1}{2}a^2x^2\right) \mathbf{H}_\nu(bx)\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+2}} a^{-\nu-\sigma} b^{\nu+1} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\sigma}{2}+\mu\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\sigma}{2}-\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\sigma}{2}\right)} \times$$
$$\times {}_3F_3\left(1, \frac{\nu+\sigma}{2}+\mu, \frac{\nu+\sigma}{2}-\mu; \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{\nu+\sigma}{2}; -\frac{b^2}{4a^2}\right)$$
$$\left[b > 0, \ |\arg a| < \frac{\pi}{4}, \ \operatorname{Re}(\sigma+\nu) > 2|\operatorname{Re}\mu|\right].$$ ИП II 167 (23)

6.86 Функции Ломмеля

6.861

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} s_{\mu,\nu}(x)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(1+\lambda+\mu)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(1-\lambda-\mu)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(1+\mu+\nu)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(1+\mu-\nu)\right]}{2^{2-\lambda-\mu}\Gamma\left[\frac{1}{2}(\nu-\lambda)+1\right]\Gamma\left[1-\frac{1}{2}(\lambda+\nu)\right]}$$
$$\left[-\operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}\lambda + 1 < \frac{5}{2}\right].$$ ИП II 385 (17)

6.862

1. $$\int_0^u x^{\lambda-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}} (u-x)^{\sigma-1} s_{\mu,\nu}\left(a\sqrt{x}\right)dx =$$
$$= \Gamma(\sigma) \frac{a^{\mu+1} u^{\lambda+\sigma}\Gamma(\lambda+1)}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)\Gamma(\lambda+\sigma+1)} \times$$
$$\times {}_2F_3\left(1, 1+\lambda; \frac{\mu-\nu+3}{2}, \frac{\mu+\nu+3}{2}, \lambda+\sigma+1; -\frac{a^2u}{4}\right)$$
$$[\operatorname{Re}\lambda > -1, \ \operatorname{Re}\sigma > 0].$$ ИП II 199 (92)

2. $$\int_u^\infty x^{\frac{1}{2}\nu}(x-u)^{\mu-1}S_{\lambda,\nu}\left(a\sqrt{x}\right)dx =$$
$$= \frac{\mathrm{B}\left[\mu, \frac{1}{2}(1-\lambda-\nu)-\mu\right]u^{\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu}}{a^\mu}S_{\lambda+\mu,\mu+\nu}\left(a\sqrt{u}\right)$$
$\left[\left|\arg\left(a\sqrt{u}\right)\right|<\pi,\ 0<2\operatorname{Re}\mu<1-\operatorname{Re}(\lambda+\nu)\right]$. ИП II 211 (71)

6.863 $$\int_0^\infty \sqrt{x}\,e^{-\alpha x}s_{\mu,\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx = 2^{-2\mu-1}\sqrt{\alpha}\,\Gamma\left(2\mu+\frac{3}{2}\right)S_{-\mu-1,\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{3}{4}\right]$. ИП I 209 (38)

6.864 $$\int_0^\infty \exp\left[(\mu+1)x\right]s_{\mu,\nu}(a\operatorname{sh}x)\,dx = 2^{\mu-2}\pi\operatorname{cosec}(\mu\pi)\,\Gamma(\varrho)\,\Gamma(\sigma)\times$$
$$\times\left[I_\varrho\left(\frac{a}{2}\right)I_\sigma\left(\frac{a}{2}\right)-I_{-\varrho}\left(\frac{a}{2}\right)I_{-\sigma}\left(\frac{a}{2}\right)\right],$$
$2\varrho=\mu+\nu+1,\ 2\sigma=\mu-\nu+1$ $[a>0,\ -2<\operatorname{Re}\mu<0]$. ИП II 386 (22)

6.865 $$\int_0^\infty \sqrt{\operatorname{sh}x}\operatorname{ch}(\nu x)\,S_{\mu,\frac{1}{2}}(a\operatorname{ch}x)\,dx =$$
$$= \frac{\mathrm{B}\left(\frac{1}{4}-\frac{\mu+\nu}{2},\ \frac{1}{4}-\frac{\mu-\nu}{2}\right)}{\sqrt{a}\,2^{\mu+\frac{3}{2}}}S_{\mu+\frac{1}{2},\nu}(a)$$
$\left[|\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}\mu+|\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right]$. ИП II 388 (31)

6.866

1. $$\int_0^\infty x^{-\mu-1}\cos(ax)\,s_{\mu,\nu}(x)\,dx = 0 \quad [a>1];$$
$$= 2^{\mu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)(1-a^2)^{\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{4}}\mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{-\mu-\frac{1}{2}}(a)$$
$[0<a<1]$. ИП II 386 (18)

2 $$\int_0^\infty x^{-\mu}\sin(ax)\,S_{\mu,\nu}(x)\,dx =$$
$$= 2^{-\mu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1-\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\mu-\nu}{2}\right)(a^2-1)^{\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{4}}\mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu-\frac{1}{2}}(a)$$
$[a>1,\ \operatorname{Re}\mu<1-|\operatorname{Re}\nu|]$. ИП II 387 (23)

6.867

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\mu x)\, S_{2\mu-1,\,2\nu}(a\cos x)\,dx =$$
$$= \frac{\pi 2^{2\mu-3} a^{2\mu} \operatorname{cosec}(2\nu\pi)}{\Gamma(1-\mu-\nu)\,\Gamma(1-\mu+\nu)} \left[J_{\mu+\nu}\left(\frac{a}{2}\right) N_{\mu-\nu}\left(\frac{a}{2}\right) - J_{\mu-\nu}\left(\frac{a}{2}\right) N_{\mu+\nu}\left(\frac{a}{2}\right) \right]$$
$[\operatorname{Re}\mu > -2,\ |\operatorname{Re}\nu| < 1]$. ИП II 388 (29)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[(\mu+1)x]\, s_{\mu,\nu}(a\cos x)\,dx =$$
$$= 2^{\mu-2}\pi\Gamma(\varrho)\,\Gamma(\sigma)\, J_\varrho\left(\frac{a}{2}\right) J_\sigma\left(\frac{a}{2}\right),$$
$2\varrho = \mu+\nu+1,\quad 2\sigma = \mu-\nu+1\quad [\operatorname{Re}\mu > -2]$. ИП II 386 (21)

6.868 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\mu x)}{\cos x} S_{2\mu,\,2\nu}(a\sec x)\,dx = \frac{\pi 2^{2\mu-1}}{a} W_{\mu,\nu}\left(ae^{i\frac{\pi}{2}}\right) W_{\mu,\nu}\left(ae^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$$
$[|\arg a| < \pi,\ \operatorname{Re}\mu < 1]$. ИП II 388 (30)

6.869

1. $$\int_0^{\infty} x^{1-\mu-\nu} J_\nu(ax)\, S_{\mu,\,-\mu-2\nu}(x)\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\, a^{\nu-1}\,\Gamma(1-\mu-\nu)}{2^{\mu+2\nu}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} (a^2-1)^{\frac{1}{2}(\mu+\nu-1)}\, P_{\mu+\nu}^{\mu+\nu-1}(a)$$
$\left[a > 1,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2},\quad \operatorname{Re}(\mu+\nu) < 1\right]$. ИП II 388 (28)

2. $$\int_0^{\infty} x^{-\mu} J_\nu(ax)\, s_{\nu+\mu,\,-\nu+\mu+1}(x)\,dx =$$
$$= 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)\, a^{-\nu}(1-a^2)^{\mu} \quad \left[0 < a < 1,\ \operatorname{Re}\mu > -1,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < \frac{3}{2}\right];$$
$$= 0 \quad \left[1 < a,\ \operatorname{Re}\mu > -1,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < \frac{3}{2}\right].$$
ИП II 92 (24)

3. $$\int_0^{\infty} xK_\nu(bx)\, s_{\mu,\,\frac{1}{2}\nu}(ax^2)\,dx =$$
$$= \frac{1}{4a}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\nu+1\right)\Gamma\left(\mu-\frac{1}{2}\nu+1\right) S_{-\mu-1,\,\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{b^2}{4a}\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\mu > \frac{1}{2}|\operatorname{Re}\nu| - 2,\quad a > 0,\quad \operatorname{Re}b > 0\right]$. ИП II 151 (78)

6.87 Функции Томсона

6.871

1. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} \operatorname{ber} x\, dx = \frac{\left(\sqrt{\beta^4+1}+\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2(\beta^4+1)}}.$$ МХ 40

2. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} \operatorname{bei} x\, dx = \frac{\left(\sqrt{\beta^4+1}-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2(\beta^4+1)}}.$$ МХ 40

6.872

1. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} \operatorname{ber}_\nu (2\sqrt{x})\, dx = \frac{1}{2\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left[J_{\frac{1}{2}(\nu-1)} \left(\frac{1}{2\beta}\right) \cos\left(\frac{1}{2\beta} + \frac{3\nu\pi}{4}\right) - J_{\frac{1}{2}(\nu+1)} \left(\frac{1}{2\beta}\right) \cos\left(\frac{1}{2\beta} + \frac{3\nu+6}{4}\pi\right)\right].$$ МХд 49

2. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} \operatorname{bei}_\nu (2\sqrt{x})\, dx = \frac{1}{2\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left[J_{\frac{1}{2}(\nu-1)} \left(\frac{1}{2\beta}\right) \sin\left(\frac{1}{2\beta} + \frac{3\nu}{4}\pi\right) - J_{\frac{1}{2}(\nu+1)} \left(\frac{1}{2\beta}\right) \sin\left(\frac{1}{2\beta} + \frac{3\nu+6}{4}\pi\right)\right].$$ МХд 49

3. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} \operatorname{ber} (2\sqrt{x})\, dx = \frac{1}{\beta} \cos\frac{1}{\beta}.$$ МХ 40

4. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} \operatorname{bei} (2\sqrt{x})\, dx = \frac{1}{\beta} \sin\frac{1}{\beta}.$$ МХ 40

5. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} \operatorname{ker} (2\sqrt{x})\, dx = -\frac{1}{2\beta} \left[\cos\frac{1}{\beta} \operatorname{ci}\frac{1}{\beta} + \sin\frac{1}{\beta} \operatorname{si}\frac{1}{\beta}\right].$$ МХд 50

6. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} \operatorname{kei} (2\sqrt{x})\, dx = -\frac{1}{2\beta} \left[\sin\frac{1}{\beta} \operatorname{ci}\frac{1}{\beta} - \cos\frac{1}{\beta} \operatorname{si}\frac{1}{\beta}\right].$$ МХд 50

7. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} \operatorname{ber}_\nu (2\sqrt{x}) \operatorname{bei}_\nu (2\sqrt{x})\, dx = \frac{1}{2\beta} J_\nu \left(\frac{2}{\beta}\right) \sin\left(\frac{2}{\beta} + \frac{3\nu\pi}{2}\right)$$ $[\operatorname{Re} \nu > -1]$. МХд 49

6.873 $$\int_0^\infty \left[\operatorname{ber}_\nu^2 (2\sqrt{x}) + \operatorname{bei}_\nu^2 (2\sqrt{x})\right] e^{-\beta x}\, dx = \frac{1}{\beta} I_\nu \left(\frac{2}{\beta}\right)$$ $[\operatorname{Re} \nu > -1]$. МХ 40

6.874

1. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}}{\sqrt{x}} \operatorname{ber}_{2\nu} (2\sqrt{2x})\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} J_\nu \left(\frac{1}{\beta}\right) \cos\left(\frac{1}{\beta} - \frac{3\pi}{4} + \frac{3\nu\pi}{2}\right)$$ $\left[\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}\right]$. МХд 49

2. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}}{\sqrt{x}} \operatorname{bei}_{2\nu}(2\sqrt{2x})\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} J_\nu\left(\frac{1}{\beta}\right)\sin\left(\frac{1}{\beta}-\frac{3\pi}{4}+\frac{3\nu\pi}{2}\right)$$ $\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. МХд 49

3. $$\int_0^\infty x^{\frac{\nu}{2}} \operatorname{ber}_\nu(\sqrt{x})\, e^{-\beta x}\,dx = \frac{2^{-\nu}}{\beta^{1+\nu}}\cos\left(\frac{1}{4\beta}+\frac{3\nu\pi}{4}\right)$$ $[\operatorname{Re}\nu > -1]$. МХ 40

4. $$\int_0^\infty x^{\frac{\nu}{2}} \operatorname{bei}_\nu(\sqrt{x})\, e^{-\beta x}\,dx = \frac{2^{-\nu}}{\beta^{1+\nu}}\sin\left(\frac{1}{4\beta}+\frac{3\nu\pi}{4}\right)$$ $[\operatorname{Re}\nu > -1]$. МХ 40

6.875

1. $$\int_0^\infty e^{-\beta x}\left[\ker(2\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\ln x \operatorname{ber}(2\sqrt{x})\right]dx = \frac{1}{\beta}\left[\ln\beta\cos\frac{1}{\beta}+\frac{\pi}{4}\sin\frac{1}{\beta}\right].$$ МХд 50

2. $$\int_0^\infty e^{-\beta x}\left[\operatorname{kei}(2\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\ln x \operatorname{bei}(2\sqrt{x})\right]dx = \frac{1}{\beta}\left[\ln\beta\sin\frac{1}{\beta}-\frac{\pi}{4}\cos\frac{1}{\beta}\right].$$ МХд 50

6.876

1. $$\int_0^\infty x \operatorname{kei} x J_1(ax)\,dx = -\frac{1}{2a}\operatorname{arctg} a^2$$ $[a > 0]$. ИП II 21 (32)

2. $$\int_0^\infty x \ker x J_1(ax)\,dx = \frac{1}{2a}\ln(1+a^4)^{\frac{1}{2}}$$ $[a > 0]$. ИП II 21 (33)

6.9 ФУНКЦИИ МАТЬЕ

Обозначение: $k^2 = q$. Определение коэффициентов $A_p^{(m)}$ и $B_p^{(m)}$ см. в гл. 8.6

6.91 Функции Матье

6.911

1. $$\int_0^{2\pi} \operatorname{ce}_m(z, q)\operatorname{ce}_p(z, q)\,dz = 0$$ $[m \neq p]$. М 32 (6)

2. $$\int_0^{2\pi} [\operatorname{ce}_{2n}(z, q)]^2\,dz = 2\pi[A_0^{(2n)}]^2 + \pi\sum_{r=1}^\infty [A_{2r}^{(2n)}]^2 = \pi.$$ М 32 (8)

3. $$\int_0^{2\pi} [\operatorname{ce}_{2n+1}(z, q)]^2\,dz = \pi\sum_{r=0}^\infty [A_{2r+1}^{(2n+1)}]^2 = \pi.$$ М 32 (9) и

4. $\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{se}_m(z, q)\,\mathrm{se}_p(z, q)\,dz = 0 \qquad [m \neq p].$ M 32 (10)

5. $\int\limits_0^{2\pi} [\mathrm{se}_{2n+1}(z, q)]^2\,dz = \pi \sum\limits_{r=0}^{\infty} [B_{2r+1}^{(2n+1)}]^2 = \pi.$ M 32 (11)

6. $\int\limits_0^{2\pi} [\mathrm{se}_{2n+2}(z, q)]^2\,dz = \pi \sum\limits_{r=0}^{\infty} [B_{2r+2}^{(2n+2)}]^2 = \pi.$ M 32 (13)

7. $\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{se}_m(z, q)\,\mathrm{ce}_p(z, q)\,dz = 0 \qquad [m = 1, 2, \ldots;\ p = 1, 2, \ldots].$ M 32 (12)

6.92 Функции Матье, гиперболические и тригонометрические функции

6.921

1. $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{ch}(2k\cos u\,\mathrm{sh}\,z)\,\mathrm{ce}_{2n}(u, q)\,du =$

$$= \frac{\pi A_0^{(2n)}}{\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}(-1)^n\,\mathrm{Ce}_{2n}(z, -q) \qquad [q > 0].$$ M 229 (1)

2. $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{ch}(2k\sin u\,\mathrm{ch}\,z)\,\mathrm{ce}_{2n}(u, q)\,du =$

$$= \frac{\pi A_0^{(2n)}}{\mathrm{ce}_{2n}(0, q)}(-1)^n\,\mathrm{Ce}_{2n}(z, -q) \qquad [q > 0].$$ M 229 (2)

3. $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{sh}(2k\sin u\,\mathrm{ch}\,z)\,\mathrm{se}_{2n+1}(u, q)\,du =$

$$= \frac{\pi k B_1^{(2n+1)}}{\mathrm{se}'_{2n+1}(0, q)}(-1)^n\,\mathrm{Ce}_{2n+1}(z, -q) \qquad [q > 0].$$ M 229 (4)

4. $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{sh}(2k\cos u\,\mathrm{sh}\,z)\,\mathrm{ce}_{2n+1}(u, q)\,du =$

$$= \frac{\pi k A_1^{(2n+1)}}{\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}(-1)^{n+1}\mathrm{Se}_{2n+1}(z, -q) \qquad [q > 0].$$ M 229 (5)

5. $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{sh}(2k\sin u\sin z)\,\mathrm{se}_{2n+1}(u, q)\,du =$

$$= \frac{\pi k B_1^{(2n+1)}}{\mathrm{se}'_{2n+1}(0, q)}\,\mathrm{se}_{2n+1}(z, q) \qquad [q > 0].$$ M 219, M 222 (4)

6.922

1. $\int\limits_0^{\pi} \cos u\,\mathrm{ch}\,z\cos(2k\sin u\,\mathrm{sh}\,z)\,\mathrm{ce}_{2n+1}(u, q)\,du =$

$$= \frac{\pi A_1^{(2n+1)}}{2\mathrm{ce}_{2n+1}(0, q)}\,\mathrm{Ce}_{2n+1}(z, q) \qquad [q > 0].$$ M 228 (4)

2. $$\int_0^{\pi} \sin u \operatorname{sh} z \cos(2k \cos u \operatorname{ch} z)\, \mathrm{se}_{2n+1}(u, q)\, du = \\ = \frac{\pi B_1^{(2n+1)}}{2\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \mathrm{Se}_{2n+1}(z, q) \qquad [q > 0];$$ M 229 (5)

3. $$\int_0^{\pi} \sin u \operatorname{sh} z \sin(2k \cos u \operatorname{ch} z)\, \mathrm{se}_{2n+2}(u, q)\, du = \\ = -\frac{\pi k B_2^{(2n+2)}}{2\mathrm{se}_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \mathrm{Se}_{2n+2}(z, q) \qquad [q > 0]$$ M 228 (7)

4. $$\int_0^{\pi} \cos u \operatorname{ch} z \sin(2k \sin u \operatorname{sh} z)\, \mathrm{se}_{2n+2}(u, q)\, du = \\ = \frac{\pi k B_2^{(2n+2)}}{2\mathrm{se}_{2n+2}(0, q)} \mathrm{Se}_{2n+2}(z, q) \qquad [q > 0]$$ M 228 (8) u

5. $$\int_0^{\pi} \sin u \operatorname{ch} z \operatorname{ch}(2k \cos u \operatorname{sh} z)\, \mathrm{se}_{2n+1}(u, q)\, du = \\ = \frac{\pi B_1^{(2n+1)}}{2\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} (-1)^n \mathrm{Ce}_{2n+1}(z, -q) \qquad [q > 0]$$ M 229 (3)

6. $$\int_0^{\pi} \cos u \operatorname{sh} z \operatorname{ch}(2k \sin u \operatorname{ch} z)\, \mathrm{ce}_{2n+1}(u, q)\, du = \\ = \frac{\pi A_1^{(2n+1)}}{2\mathrm{ce}_{2n+1}(0, q)} (-1)^n \mathrm{Se}_{2n+1}(z, -q) \qquad [q > 0].$$ M 229 (6)

7. $$\int_0^{\pi} \sin u \operatorname{ch} z \operatorname{sh}(2k \cos u \operatorname{sh} z)\, \mathrm{se}_{2n+2}(u, q)\, du = \\ = \frac{\pi k B_2^{(2n+2)}}{2\mathrm{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} (-1)^{n+1} \mathrm{Se}_{2n+2}(z, -q) \qquad [q > 0].$$ M 230 (7)

8. $$\int_0^{\pi} \cos u \operatorname{sh} z \operatorname{sh}(2k \sin u \operatorname{ch} z)\, \mathrm{se}_{2n+2}(u, q)\, du = \\ = \frac{\pi k B_2^{(2n+2)}}{2\mathrm{se}'_{2n+2}(0, q)} (-1)^n \mathrm{Se}_{2n+2}(z, -q) \qquad [q > 0].$$ M 230 (8)

6.923

1. $$\int_0^{\infty} \sin(2k \operatorname{ch} z \operatorname{ch} u) \operatorname{sh} z \operatorname{sh} u\, \mathrm{Se}_{2n+1}(u, q)\, du = \\ = -\frac{\pi B_1^{(2n+1)}}{4\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \mathrm{Se}_{2n+1}(z, q) \qquad [q > 0]$$ M 242 (12)

2. $\int\limits_0^\infty \cos(2k \operatorname{ch} z \operatorname{ch} u) \operatorname{sh} z \operatorname{sh} u \operatorname{Se}_{2n+1}(u, q)\, du =$

$$= -\frac{\pi B_1^{(2n+1)}}{4 \operatorname{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \operatorname{Gey}_{2n+1}(z, q) \qquad [q > 0]. \qquad \text{M 242 (13)}$$

3 $\int\limits_0^\infty \sin(2k \operatorname{ch} z \operatorname{ch} u) \operatorname{sh} z \operatorname{sh} u \operatorname{Se}_{2n+2}(u, q)\, du =$

$$= -\frac{k\pi B_2^{(2n+2)}}{4 \operatorname{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \operatorname{Gey}_{2n+2}(z, q) \qquad [q > 0]. \qquad \text{M 242 (16)}$$

4 $\int\limits_0^\infty \cos(2k \operatorname{ch} z \operatorname{ch} u) \operatorname{sh} z \operatorname{sh} u \operatorname{Se}_{2n+2}(u, q)\, du =$

$$= -\frac{k\pi B_2^{(2n+2)}}{4 \operatorname{se}_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \operatorname{Se}_{2n+2}(z, q) \qquad [q > 0]. \qquad \text{M 242 (15)}$$

5 $\int\limits_0^\infty \sin(2k \operatorname{ch} z \operatorname{ch} u) \operatorname{Ce}_{2n}(u, q)\, du =$

$$= \frac{\pi A_0^{(2n)}}{2 \operatorname{ce}_{2n}\left(\frac{1}{2}\pi, q\right)} \operatorname{Ce}_{2n}(z, q) \qquad [q > 0]. \qquad \text{M 241 (5)}$$

6 $\int\limits_0^\infty \cos(2k \operatorname{ch} z \operatorname{ch} u) \operatorname{Ce}_{2n}(u, q)\, du =$

$$= -\frac{\pi A_0^{(2n)}}{2 \operatorname{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \operatorname{Fey}_{2n}(z, q) \qquad [q > 0]. \qquad \text{M 241 (6)}$$

7 $\int\limits_0^\infty \sin(2k \operatorname{ch} z \operatorname{ch} u) \operatorname{Ce}_{2n+1}(u, q)\, du =$

$$= \frac{k\pi A_1^{(2n+1)}}{2 \operatorname{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \operatorname{Fey}_{2n+1}(z, q) \qquad [q > 0]. \qquad \text{M 241 (9)}$$

8 $\int\limits_0^\infty \cos(2k \operatorname{ch} z \operatorname{ch} u) \operatorname{Ce}_{2n+1}(u, q)\, du =$

$$= \frac{k\pi A_1^{(2n+1)}}{2 \operatorname{ce}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \operatorname{Ce}_{2n+1}(z, q) \qquad [q > 0]. \qquad \text{M 241 (8)}$$

6.924

1 $\int\limits_0^\pi \cos(2k \cos u \cos z) \operatorname{ce}_{2n}(u, q)\, du = \frac{\pi A_0^{(2n)}}{\operatorname{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \operatorname{ce}_{2n}(z, q) \quad [q > 0].$

M 219 (1), M 220 (5)

2. $\int\limits_0^\pi \sin(2k\cos u\cos z)\,\mathrm{ce}_{2n+1}(u, q)\,du =$

$$= -\frac{\pi k A_1^{(2n+1)}}{\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}\mathrm{ce}_{2n+1}(z, q) \quad [q > 0] \qquad \text{M 219, M 221 (4)}$$

3 $\int\limits_0^\pi \cos(2k\cos u\,\mathrm{ch}\,z)\,\mathrm{ce}_{2n}(u, q)\,du =$

$$= \frac{\pi A_0^{(2n)}}{\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}\mathrm{Ce}_{2n}(z, q) \qquad [q > 0] \qquad \text{M 228 (1)}$$

4 $\int\limits_0^\pi \cos(2k\sin u\,\mathrm{sh}\,z)\,\mathrm{ce}_{2n}(u, q)\,du =$

$$= \frac{\pi A_0^{(2n)}}{\mathrm{ce}_{2n}(0, q)}\mathrm{Ce}_{2n}(z, q) \quad [q > 0] \qquad \text{M 228 (2)}$$

5 $\int\limits_0^\pi \sin(2k\cos u\,\mathrm{ch}\,z)\,\mathrm{ce}_{2n+1}(u, q)\,du =$

$$= -\frac{\pi k A_1^{(2n+1)}}{\mathrm{ce}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}\mathrm{Ce}_{2n+1}(z, q) \quad [q > 0] \qquad \text{M 228 (3)}$$

6 $\int\limits_0^\pi \sin(2k\sin u\,\mathrm{sh}\,z)\,\mathrm{se}_{2n+1}(u, q)\,du =$

$$= \frac{\pi k B_1^{(2n+1)}}{\mathrm{se}_{2n+1}(0, q)}\mathrm{Se}_{2n+1}(z, q) \quad [q > 0] \qquad \text{M 228 (6)}$$

6.925 Обозначения $z_1 = 2k\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi - \sin^2\eta}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{th}\,\xi\,\mathrm{tg}\,\eta$

1 $\int\limits_0^{2\pi} \sin[z_1\cos(\theta - \alpha)]\,\mathrm{ce}_{2n}(\theta, q)\,d\theta = 0.$ M 250 (6)

2 $\int\limits_0^{2\pi} \cos[z_1\cos(\theta - \alpha)]\,\mathrm{ce}_{2n}(\theta, q)\,d\theta =$

$$= \frac{2\pi A_0^{(2n)}}{\mathrm{ce}_{2n}(0, q)\,\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}\mathrm{Ce}_{2n}(\xi, q)\,\mathrm{ce}_{2n}(\eta, q) \qquad \text{M 251 (9)}$$

3 $\int\limits_0^{2\pi} \sin[z_1\cos(\theta - \alpha)]\,\mathrm{ce}_{2n+1}(\theta, q)\,d\theta =$

$$= -\frac{2\pi k A_1^{(2n+1)}}{\mathrm{ce}_{2n+1}(0, q)\,\mathrm{ce}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}\mathrm{Ce}_{2n+1}(\xi, q)\,\mathrm{ce}_{2n+1}(\eta, q) \qquad \text{M 251 (2)}$$

4 $$\int_0^{2\pi} \cos[z_1 \cos(\theta-\alpha)]\, \mathrm{ce}_{2n+1}(\theta, q)\, d\theta = 0.$$ M 251 (4)

5 $$\int_0^{2\pi} \sin[z_1 \cos(\theta-\alpha)]\, \mathrm{se}_{2n+1}(\theta, q)\, d\theta =$$
$$= \frac{2\pi k B_1^{(2n+1)}}{\mathrm{se}_{2n+1}(0, q)\, \mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \mathrm{Se}_{2n+1}(\xi, q)\, \mathrm{se}_{2n+1}(\eta, q)$$ M 251 (6)

6 $$\int_0^{2\pi} \cos[z_1 \cos(\theta-\alpha)]\, \mathrm{se}_{2n+1}(\theta, q)\, d\theta = 0.$$ M 251 (8)

7. $$\int_0^{2\pi} \sin[z_1 \cos(\theta-\alpha)]\, \mathrm{se}_{2n+2}(\theta, q)\, d\theta = 0.$$ M 252 (12)

8. $$\int_0^{2\pi} \cos[z_1 \cos(\theta-\alpha)]\, \mathrm{se}_{2n+2}(\theta, q)\, d\theta =$$
$$= \frac{2\pi k^2 B_2^{(2n+2)}}{\mathrm{se}'_{2n+2}(0, q)\, \mathrm{se}_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \mathrm{Se}_{2n+2}(\xi, q)\, \mathrm{se}_{2n+2}(\eta, q)$$ M 252 (10)

6.926 $$\int_0^{\pi} \sin u \sin z \sin(2k \cos u \cos z)\, \mathrm{se}_{2n+2}(u, q)\, du =$$
$$= -\frac{\pi k B_2^{(2n+2)}}{2\, \mathrm{se}_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \mathrm{se}_{2n+2}(z, q) \quad [q > 0]$$ M 219, M 223 (8)

6.93 Функции Матье и цилиндрические функции

6.931

1 $$\int_0^{\pi} J_0\{k[2(\cos 2u + \cos 2z)]^{\frac{1}{2}}\}\, \mathrm{ce}_{2n}(u, q)\, du =$$
$$= \frac{\pi [A_0^{(2n)}]^2}{\mathrm{ce}_{2n}(0, q)\, \mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \mathrm{ce}_{2n}(z, q)$$ M 234 (1)

2 $$\int_0^{2\pi} N_0\{k[2(\cos 2u + \operatorname{ch} 2z)]^{\frac{1}{2}}\}\, \mathrm{ce}_{2n}(u, q)\, du =$$
$$= \frac{2\pi [A_0^{(2n)}]^2}{\mathrm{ce}_{2n}(0, q)\, \mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \mathrm{Fey}_{2n}(z, q)$$ M 239 (1), M 240 (3)

7.1 — 7.2 ШАРОВЫЕ ФУНКЦИИ

7.11 Шаровые функции

7.111 $$\int_{\cos\varphi}^{1} P_\nu(x)\,dx = \sin\varphi P_\nu^{-1}(\cos\varphi).$$ МО 90

7.112

1. $$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_k^m(x)\,dx = 0 \qquad [n \neq k];$$
$$= \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \qquad [n = k].$$ СМ III 185, УВ II 120

2. $$\int_{-1}^{1} Q_n^m(x) P_k^m(x)\,dx = (-1)^m \frac{1-(-1)^{n+k}(n+m)!}{(k-n)(k+n+1)(n-m)!}.$$ ВТФ I 171 (18)

3. $$\int_{-1}^{1} P_\nu(x) P_\sigma(x)\,dx = \frac{2\pi\sin\pi(\sigma-\nu)+4\sin(\pi\nu)\sin(\pi\sigma)[\psi(\nu+1)-\psi(\sigma+1)]}{\pi^2(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)}$$
$$[\sigma+\nu+1 \neq 0];$$ ВТФ I 170 (7)
$$= \frac{\pi^2-2(\sin\pi\nu)^2\psi'(\nu+1)}{\pi^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \qquad [\sigma=\nu].$$ ВТФ I 170 (9) *u*

4 $$\int_{-1}^{1} Q_\nu(x) Q_\sigma(x)\,dx =$$
$$= \frac{[\psi(\nu+1)-\psi(\sigma+1)][1+\cos(\pi\sigma)\cos(\nu\pi)]-\frac{\pi}{2}\sin\pi(\nu-\sigma)}{(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)}$$
$$[\sigma+\nu+1 \neq 0;\ \nu, \sigma \neq -1, -2, -3, \ldots];$$ ВТФ I 170 (11)
$$= \frac{\frac{1}{2}\pi^2-\psi'(\nu+1)[1+(\cos\nu\pi)^2]}{2\nu+1} \qquad [\nu=\sigma,\ \nu \neq -1, -2, -3, \ldots].$$
ВТФ I 170 (12)

5. $$\int_{-1}^{1} P_\nu(x) Q_\sigma(x)\,dx =$$
$$= \frac{1-\cos\pi(\sigma-\nu)-2\pi^{-1}\sin(\pi\nu)\cos(\pi\sigma)[\psi(\nu+1)-\psi(\sigma+1)]}{(\nu-\sigma)(\nu+\sigma+1)}$$
$$[\operatorname{Re}\nu > 0,\ \operatorname{Re}\sigma > 0,\ \sigma \neq \nu];$$ ВТФ I 170 (13)
$$= -\frac{\sin(2\nu\pi)\psi'(\nu+1)}{\pi(2\nu+1)} \qquad [\operatorname{Re}\nu > 0,\ \sigma=\nu].$$ ВТФ I 171 (14)

7.113 Обозначение: $A=\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}$

1. $$\int_0^1 P_\nu(x)\,P_\sigma(x)\,dx=\frac{A\sin\frac{\pi\sigma}{2}\cos\frac{\pi\nu}{2}-A^{-1}\sin\frac{\pi\nu}{2}\cos\frac{\pi\sigma}{2}}{\frac{1}{2}\pi(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)}.$$ ВТФ I 171 (15)

2. $$\int_0^1 Q_\nu(x)\,Q_\sigma(x)\,dx=$$
$$=\frac{\psi(\nu+1)-\psi(\sigma+1)-\frac{\pi}{2}\left[(A-A^{-1})\sin\frac{\pi(\sigma+\nu)}{2}-(A+A^{-1})\sin\frac{\pi(\sigma-\nu)}{2}\right]}{(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)}$$
$[\operatorname{Re}\nu>0,\ \operatorname{Re}\sigma>0]$. ВТФ I 171 (16)

3. $$\int_0^1 P_\nu(x)\,Q_\sigma(x)\,dx=\frac{A^{-1}\cos\frac{\pi(\nu-\sigma)}{2}-1}{(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)}\quad[\operatorname{Re}\nu>0,\ \operatorname{Re}\sigma>0].$$ ВТФ I 171 (17)

7.114

1. $$\int_1^\infty P_\nu(x)\,Q_\sigma(x)\,dx=\frac{1}{(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)}$$
$[\operatorname{Re}(\sigma-\nu)>0,\ \operatorname{Re}(\sigma+\nu)>-1]$. ИПШ 324 (19)

2. $$\int_1^\infty Q_\nu(x)\,Q_\sigma(x)\,dx=\frac{\psi(\sigma+1)-\psi(\nu+1)}{(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)}$$
$[\operatorname{Re}(\nu+\sigma)>-1;\ \ \sigma,\ \nu\neq-1,\ -2,\ -3,\ \ldots]$. ВТФ I 170 (5)

3. $$\int_1^\infty [Q_\nu(x)]^2\,dx=\frac{\psi'(\nu+1)}{2\nu+1}\qquad\left[\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ВТФ I 170 (6)

7.115 $$\int_1^\infty Q_\nu(x)\,dx=\frac{1}{\nu(\nu+1)}\quad[\operatorname{Re}\nu>0].$$ ИПШ 324 (18)

7.12 — 7.13 Шаровые функции и степенная функция

7.121 $$\int_{\cos\varphi}^1 xP_\nu(x)\,dx=\frac{\sin\varphi}{(\nu-1)(\nu+2)}\left[\sin\varphi\,P_\nu(\cos\varphi)+\cos\varphi\,P_\nu^1(\cos\varphi)\right].$$ МО 90

7.122

1. $$\int_0^1 \frac{[P_n^m(x)]^2}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2m}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\quad[0<m\leqslant n].$$ МО 74

2. $$\int_0^1 [P_\nu^\mu(x)]^2\frac{dx}{1-x^2}=-\frac{\Gamma(1+\mu+\nu)}{2\mu\Gamma(1-\mu+\nu)}$$
$[\operatorname{Re}\mu<0,\ \nu+\mu$ — целое положительное$]$. ВТФ I 172 (26)

3. $$\int_0^1 [P_\nu^{n-\nu}(x)]^2 \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{n!}{2(n-\nu)\Gamma(1-n+2\nu)}$$

$[n=0, 1, 2, \ldots; \operatorname{Re}\nu > n]$ ИПП 315 (9)

7.123 $$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_n^k(x) \frac{dx}{1-x^2} = 0 \quad [0 \leqslant m \leqslant n,\ 0 \leqslant k \leqslant n;\ m \neq k].$$ МО 74

7.124 $$\int_{-1}^1 x^k (z-x)^{-1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}m} P_n^m(x)\, dx = (-2)^m (z^2-1)^{\frac{1}{2}m} Q_n^m(z) \cdot z^k$$

$[m \leqslant n;\ k=0, 1, \ldots, n-m;\ z$ — из комплексной плоскости с разрезом вдоль отрезка $(-1, 1)$ на действительной оси]. ИП II 279 (26)

7.125 $$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}m} P_k^m(x) P_l^m(x) P_n^m(x)\, dx =$$

$$= (-1)^m \pi^{-\frac{3}{2}} \frac{(k+m)!\,(l+m)!\,(n+m)!\,(s-m)!}{(k-m)!\,(l-m)!\,(n-m)!\,(s-k)!} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(t-k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(t-l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(t-n+\frac{1}{2}\right)}{(s-l)!\,(s-n)!\,\Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)}$$

$[2s = k+l+n+m$ и $2t = k+l+n-m$ — четные; $l \geqslant m,\ m \leqslant k-l-m \leqslant n \leqslant k+l+m]$. ИПП 280 (32)

7.126

1. $$\int_0^1 P_\nu(x) x^\sigma\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{-\sigma-1}\Gamma(1+\sigma)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}\nu+\frac{3}{2}\right)}$$

$[\operatorname{Re}\sigma > -1]$. ВТФ I 171 (23)

2. $$\int_0^1 x^\sigma P_\nu^m(x)\, dx = \frac{(-1)^m \pi^{\frac{1}{2}} 2^{-2m-1}\Gamma\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\Gamma(1+m+\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{\sigma}{2}+\frac{m}{2}\right)\Gamma(1-m+\nu)} \times$$

$$\times {}_3F_2\left(\frac{m+\nu+1}{2},\ \frac{m-\nu}{2},\ \frac{m}{2}+1;\ m+1,\ \frac{3+\sigma+m}{2};\ 1\right)$$

$[\operatorname{Re}\sigma > -1;\ m=0, 1, 2, \ldots]$. ИПП 313 (2)

3. $$\int_0^1 x^\sigma P_\nu^\mu(x)\, dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} 2^{2\mu-1}\Gamma\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+\sigma-\mu}{2}\right)} \times$$

$$\times {}_3F_2\left(\frac{\nu-\mu+1}{2},\ -\frac{\mu+\nu}{2},\ 1-\frac{\mu}{2};\ 1-\mu,\ \frac{3+\sigma-\mu}{2};\ 1\right)$$

$[\operatorname{Re}\sigma > -1,\ \operatorname{Re}\mu < 2]$. ИПП 313 (3)

4. $$\int_1^\infty x^{\mu-1} Q_\nu(ax)\, dx = e^{\mu\pi i}\Gamma(\mu)\, a^{-\mu} (a^2-1)^{\frac{1}{2}\mu} Q_\nu^{-\mu}(a)$$

$[|\arg(a-1)| < \pi,\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}(\nu-\mu) > -1]$. ИП II 325 (26)

7.127 $\int\limits_{-1}^{1}(1+x)^{\sigma}\,\mathrm{P}_{\nu}(x)\,dx=\frac{2^{\sigma+1}[\Gamma(\sigma+1)]^{2}}{\Gamma(\sigma+\nu+2)\,\Gamma(1+\sigma-\nu)}$

$[\operatorname{Re}\sigma>-1]$. ИПII 316 (15)

7.128

1 $\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{-\frac{1}{2}\mu}(1+x)^{\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}}(z+x)^{\mu-\frac{3}{2}}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,dx=$

$$=-\frac{\Gamma\left(\mu-\frac{1}{2}\right)(z-1)^{\mu-\frac{1}{2}}(z+1)^{-\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}e^{2\mu\pi i}\,\Gamma(\mu+\nu)\,\Gamma(\mu-\nu-1)}\times$$

$$\times\left\{Q_{\nu}^{\mu}\left[\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]Q_{-\nu-1}^{\mu-1}\left[\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+\right.$$

$$\left.+Q_{\nu}^{\mu-1}\left[\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]Q_{-\nu-1}^{\mu}\left[\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$$

$\left[-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\mu<1,\right.$ z — из комплексной плоскости с разрезом вдоль отрезка $(-1,\ 1)$ действительной оси$\left.\right]$. ИПII 317 [20]

2 $\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{-\frac{1}{2}\mu}(1+x)^{\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}}(z+x)^{\mu-\frac{1}{2}}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\,dx=$

$$=\frac{2e^{-2\mu\pi i}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(\mu-\nu)\,\Gamma(\mu+\nu+1)}(z-1)^{\mu}\,Q_{\nu}^{\mu}\left[\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]Q_{-\nu-1}^{\mu}\left[\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$\left[-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\mu<1,\right.$ z — из комплексной плоскости с разрезом вдоль отрезка $(-1,\ 1)$ действительной оси$\left.\right]$. ИПII 316 (18)

7.129 $\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{P}_{\nu}(x)\,\mathrm{P}_{\lambda}(x)\,(1+x)^{\lambda+\nu}\,dx=\frac{2^{\lambda+\nu+1}\,[\Gamma(\lambda+\nu+1)]^{4}}{[\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(\nu+1)]^{2}\,\Gamma(2\lambda+2\nu+2)}$

$[\operatorname{Re}(\nu+\lambda+1)>0]$. ВТФ I 172 (30)

7.131

1 $\int\limits_{1}^{\infty}(x-1)^{-\frac{1}{2}\mu}(x+1)^{\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}}(z+x)^{\mu-\frac{1}{2}}P_{\nu}^{\mu}(x)\,dx=$

$$=\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(-\mu-\nu)\,\Gamma(1-\mu+\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}(z-1)^{\mu}\left\{P_{\nu}^{\mu}\left[\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}^{2}$$

$[\operatorname{Re}(\mu+\nu)<0,\ \operatorname{Re}(\mu-\nu)<1,\ |\arg(z+1)|<\pi]$. ИП II 321 (6)

2. $$\int_1^\infty (x-1)^{-\frac{1}{2}\mu}(x+1)^{\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}}(z+x)^{\mu-\frac{3}{2}} P_\nu^\mu(x)\,dx =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(1-\mu-\nu)\Gamma(2-\mu+\nu)(z-1)^{\mu-\frac{1}{2}}(z+1)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\mu\right)} \times$$

$$\times P_\nu^\mu\left[\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] P_\nu^{\mu-1}\left[\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$[\operatorname{Re}\mu < 1,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu) < 1,\ \operatorname{Re}(\mu-\nu) < 2,\ |\arg(1+z)| < \pi]$

ИП II 321 (7)

7.132

1. $$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-1} \mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,dx =$$

$$= \frac{\pi 2^\mu \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\mu\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\nu+1\right)\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+1\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

$[2\operatorname{Re}\lambda > |\operatorname{Re}\mu|]$. ИП II 316 (16)

2 $$\int_1^\infty (x^2-1)^{\lambda-1} P_\nu^\mu(x)\,dx =$$

$$= \frac{2^{\mu-1}\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(1-\lambda+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(1-\lambda-\frac{1}{2}\mu\right)}$$

$[\operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re}\mu,\ \operatorname{Re}(1-2\lambda-\nu) > 0,\ \operatorname{Re}(2-2\lambda+\nu) > 0]$. ИП II 320 (2)

3. $$\int_1^\infty (x^2-1)^{\lambda-1} Q_\nu^\mu(x)\,dx =$$

$$= e^{\mu\pi i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(1-\lambda+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\mu\right)}{2^{2\lambda-\mu}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\frac{1}{2}\nu\right)}$$

$[|\operatorname{Re}\mu| < 2\operatorname{Re}\lambda < \operatorname{Re}\nu+2]$. ИП II 324 (23)

4. $$\int_0^1 x^\sigma (1-x^2)^{-\frac{1}{2}\mu} \mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,dx =$$

$$= \frac{2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\sigma\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu+\frac{3}{2}\right)}$$

$[\operatorname{Re}\mu < 1,\quad \operatorname{Re}\sigma > -1]$. ВТФ I 172 (24)

5. $$\int_0^1 x^\sigma (1-x^2)^{\frac{1}{2}m} \mathrm{P}_\nu^m(x)\,dx =$$
$$= \frac{(-1)^m 2^{-m-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\sigma\right)\Gamma(1+m+\nu)}{\Gamma(1-m+\nu)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\nu\right)}$$

[$\operatorname{Re}\sigma > -1$, m целое положительное]. ВТФ I 172 (25), ИП II 313 (4)

6. $$\int_0^1 x^\sigma (1-x^2)^\eta \mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,dx = \frac{2^{\mu-1}\Gamma\left(1+\eta-\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma\right)}{\Gamma(1-\mu)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\eta+\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}\mu\right)}\times$$
$$\times {}_3F_2\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}, -\frac{\mu+\nu}{2}, 1+\eta-\frac{\mu}{2}; 1-\mu, \frac{3+\sigma-\mu}{2}+\eta; 1\right)$$

$\left[\operatorname{Re}\left(\eta-\frac{1}{2}\mu\right) > -1,\ \operatorname{Re}\sigma > -1\right]$. ИП II 314 (6)

7. $$\int_1^\infty x^{-\varrho}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu} P_\nu^\mu(x)\,dx = \frac{2^{\varrho+\mu-2}\Gamma\left(\frac{\varrho+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+\mu-\nu-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\varrho)}$$

[$\operatorname{Re}\mu < 1$, $\operatorname{Re}(\varrho+\mu+\nu) > 0$, $\operatorname{Re}(\varrho+\mu-\nu) > 1$]. ИП II 320 (3)

7.133

1. $$\int_u^\infty Q_\nu(x)(x-u)^{\mu-1}\,dx = \Gamma(\mu)\,e^{\mu\pi i}(u^2-1)^{\frac{1}{2}\mu} Q_\nu^{-\mu}(u)$$

[$|\arg(u-1)| < \pi$, $0 < \operatorname{Re}\mu < 1+\operatorname{Re}\nu$]. МО 90 u

2. $$\int_u^\infty (x^2-1)^{\frac{1}{2}\lambda} Q_\nu^{-\lambda}(x)(x-u)^{\mu-1}\,dx = \Gamma(\mu)\,e^{\mu\pi i}(u^2-1)^{\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\mu} Q_\nu^{-\lambda-\mu}(u)$$

[$|\arg(u-1)| < \pi$, $0 < \operatorname{Re}\mu < 1+\operatorname{Re}(\nu-\lambda)$]. ИП II 204 (30)

7.134

1. $$\int_1^\infty (x-1)^{\lambda-1}(x^2-1)^{\frac{1}{2}\mu} P_\nu^\mu(x)\,dx = \frac{2^{\lambda+\mu}\Gamma(\lambda)\Gamma(-\lambda-\mu-\nu)\Gamma(1-\lambda-\mu+\nu)}{\Gamma(1-\mu+\nu)\Gamma(-\mu-\nu)\Gamma(1-\lambda-\mu)}$$

[$\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}(\lambda+\mu+\nu) < 0$, $\operatorname{Re}(\lambda+\mu-\nu) < 1$]. ИП II 321 (4)

2. $$\int_1^\infty (x-1)^{\lambda-1}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu} P_\nu^\mu(x)\,dx =$$
$$= -\frac{2^{\lambda-\mu}\sin\pi\nu\,\Gamma(\lambda-\mu)\Gamma(-\lambda+\mu-\nu)\Gamma(1-\lambda+\mu+\nu)}{\pi\Gamma(1-\lambda)}$$

[$\operatorname{Re}(\lambda-\mu) > 0$, $\operatorname{Re}(\mu-\lambda-\nu) > 0$, $\operatorname{Re}(\mu-\lambda+\nu) > -1$]. ИП II 321 (5)

7.135

1. $$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}\mu}(z-x)^{-1}\mathrm{P}_{\mu+n}^\mu(x)\,dx = 2e^{-i\mu\pi}(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu} Q_{\mu+n}^\mu(z)$$

[$n=0, 1, 2, \ldots$, $\operatorname{Re}\mu+n > -1$, z — из комплексной плоскости с разрезом вдоль отрезка $(-1, 1)$ действительной оси]. ИП II 316 (17)

2. $$\int\limits_1^\infty (x-1)^{\lambda-1}(x^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}(x+z)^{-\varrho}P_\nu^\mu(x)\,dx=$$
$$=\frac{2^{\lambda+\mu-\varrho}\Gamma(\lambda-\varrho)\,\Gamma(\varrho-\lambda-\mu-\nu)\,\Gamma(\varrho-\lambda-\mu+\nu+1)}{\Gamma(1-\mu+\nu)\,\Gamma(-\mu-\nu)\,\Gamma(1+\varrho-\lambda-\mu)}\times$$
$$\times\,{}_3F_2\left(\varrho,\ \varrho-\lambda-\mu-\nu,\ \varrho-\lambda-\mu+\nu+1;\ \ \varrho-\lambda+1,\ \varrho-\lambda-\mu+1;\frac{1+z}{2}\right)+$$
$$+\frac{\Gamma(\varrho-\lambda)\,\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\varrho)\,\Gamma(1-\mu)}2^\mu(z+1)^{\lambda-\varrho}\,{}_3F_2\left(\lambda,\ -\mu-\nu,\ 1-\mu+\nu;\ 1-\mu,\ 1-\varrho+\lambda;\frac{1+z}{2}\right)$$
$[\operatorname{Re}\lambda>0,\ \operatorname{Re}(\varrho-\lambda-\mu-\nu)>0,\quad \operatorname{Re}(\varrho-\lambda-\mu+\nu+1)>0$
$|\arg(z+1)|<\pi]$. ИП II 322 (9)

3. $$\int\limits_1^\infty (x-1)^{\lambda-1}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}(x+z)^{-\varrho}P_\nu^\mu(x)\,dx=$$
$$=-\frac{\sin(\nu\pi)\,\Gamma(\lambda-\mu-\varrho)\,\Gamma(\varrho-\lambda+\mu-\nu)\,\Gamma(\varrho-\lambda+\mu+\nu+1)}{2^{\varrho-\lambda+\mu}\pi\Gamma(1+\varrho-\lambda)}\times$$
$$\times\,{}_3F_2\left(\varrho,\ \varrho-\lambda+\mu-\nu,\ \varrho-\lambda+\mu+\nu+1;\ 1+\varrho-\lambda,\ \ 1+\varrho-\lambda+\mu;\ \frac{1+z}{2}\right)+$$
$$+\frac{\Gamma(\lambda-\mu)\,\Gamma(\varrho-\lambda+\mu)}{\Gamma(\varrho)\,\Gamma(1-\mu)}(z+1)^{\lambda-\varrho-\mu}\times$$
$$\times\,{}_3F_2\left(\lambda-\mu,\ -\nu,\ \nu+1;\ 1+\lambda-\mu-\varrho,\ 1-\mu;\ \frac{1+z}{2}\right)$$
$[\operatorname{Re}(\lambda-\mu)>0,\quad \operatorname{Re}(\varrho-\lambda+\mu-\nu)>0,\ \operatorname{Re}(\varrho-\lambda+\mu+\nu+1)>0,$
$|\arg(z+1)|<\pi]$. ИП II 322 (10)

7.136

1. $$\int\limits_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-1}(1-a^2x^2)^{\frac{1}{2}\mu}\,\mathrm{P}_\nu(ax)\,dx=$$
$$=\frac{\pi 2^\mu\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu\right)}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(-\frac{\mu+\nu}{2},\ \frac{1-\mu+\nu}{2};\ \frac{1}{2}+\lambda;\ a^2\right)$$
$[\operatorname{Re}\lambda>0,\quad -1<a<1]$. ИП II 318 (31)

2. $$\int\limits_1^\infty (x^2-1)^{\lambda-1}(a^2x^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}P_\nu^\mu(ax)\,dx=$$
$$=\frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma\left(1-\lambda-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma(1-\lambda-\mu)}\times$$
$$\times\,2^{\mu-1}a^{\mu-\nu-1}\,{}_2F_1\left(\frac{1-\mu+\nu}{2},\ 1-\lambda-\frac{\mu-\nu}{2};\ 1-\lambda-\mu;\ 1-\frac{1}{a^2}\right)$$
$[\operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}\lambda>0,\ \operatorname{Re}(\nu-\mu-2\lambda)>-2,\quad \operatorname{Re}(2\lambda+\mu+\nu)<1]$.
ИП II 325 (25)

3. $\int\limits_1^\infty (x^2-1)^{\lambda-1}(a^2x^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu} Q_\nu^\mu(ax)\,dx =$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\Gamma(\lambda)\Gamma\left(1-\lambda+\frac{\mu+\nu}{2}\right)2^{\mu-2}e^{\mu\pi i}a^{-\mu-\nu-1}}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu+1}{2},\ 1-\lambda+\frac{\mu+\nu}{2};\ \nu+\frac{3}{2};\ a^{-2}\right)$$

$[|\arg(a-1)|<\pi,\ \operatorname{Re}\lambda>0,\ \operatorname{Re}(2\lambda-\mu-\nu)<2]$. ИП II 325(27)

7.137

1. $\int\limits_1^\infty x^{-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}}(x-1)^{-\mu-\frac{1}{2}}(1+ax)^{\frac{1}{2}\mu} Q_\nu^\mu(1+2ax)\,dx =$

$$= \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\mu\pi i}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)a^{\frac{1}{2}\mu}\left\{Q_\nu^\mu\left[(1+a)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}^2$$

$\left[|\arg a|<\pi,\quad \operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2},\quad \operatorname{Re}(\mu+\nu)>-1\right]$. ИП II 325(28)

2. $\int\limits_1^\infty x^{-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}}(x-1)^{-\mu-\frac{3}{2}}(1+ax)^{\frac{1}{2}\mu} Q_\nu^\mu(1+2ax)\,dx =$

$$= -\pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\mu\pi i}\Gamma\left(-\mu-\frac{1}{2}\right)a^{\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}}(1+a^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^{\mu+1}\left[(1+a)^{\frac{1}{2}}\right] Q_\nu^\mu\left[(1+a)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$\left[|\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}\mu<-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(\mu+\nu+2)>0\right]$. ИП II 326(29)

3. $\int\limits_0^1 x^{-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\mu-\frac{1}{2}}(1+ax)^{\frac{1}{2}\mu} P_\nu^\mu(1+2ax)\,dx =$

$$= \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)a^{\frac{1}{2}\mu}\left\{P_\nu^\mu\left[(1+a)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}^2$$

$\left[\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2},\ |\arg a|<\pi\right]$. ИП II 319(32)

4. $\int\limits_0^1 x^{-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\mu-\frac{3}{2}}(1+ax)^{\frac{1}{2}\mu} P_\nu^\mu(1+2ax)\,dx =$

$$= \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\mu\right)a^{\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}} P_\nu^{\mu+1}\left[(1+a)^{\frac{1}{2}}\right] P_\nu^\mu\left[(1+a)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$\left[\operatorname{Re}\mu<-\frac{1}{2},\ |\arg a|<\pi\right]$. ИП II 319(33)

5. $\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}}(1-x)^{\mu-\frac{1}{2}}(1+ax)^{-\frac{1}{2}\mu} P_\nu^\mu(1+2ax)\,dx =$

$$= \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)a^{-\frac{1}{2}\mu} P_\nu^\mu\left[(1+a)^{\frac{1}{2}}\right] P_\nu^{-\mu}\left[(1+a)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$\left[\operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2},\quad |\arg a|<\pi\right]$. ИП II 319(34)

6. $$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}}(1-x)^{\mu-\frac{3}{2}}(1+ax)^{-\frac{1}{2}\mu}P_\nu^\mu(1+2ax)\,dx =$$
$$=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\mu-\frac{1}{2}\right)a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu}(1+a)^{-\frac{1}{2}}\{P_\nu^{1-\mu}[(1+a)^{\frac{1}{2}}]P_\nu^\mu[(1+a)^{\frac{1}{2}}]+$$
$$+(\mu+\nu)(1-\mu+\nu)P_\nu^{-\mu}[(1+a)^{\frac{1}{2}}]P_\nu^\mu[(1+a)^{\frac{1}{2}}]\}$$
$$\left[\operatorname{Re}\mu>\frac{1}{2},\quad |\arg a|<\pi\right].$$ ИП II 319 (35)

7. $$\int_0^1 x^{-\frac{\mu}{2}-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\mu-\frac{1}{2}}(1+ax)^{\frac{1}{2}\mu}Q_\nu^\mu(1+2ax)\,dx =$$
$$=\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)a^{\frac{1}{2}\mu}P_\nu^\mu[(1+a)^{\frac{1}{2}}]Q_\nu^\mu[(1+a)^{\frac{1}{2}}]$$
$$\left[\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2},\quad |\arg a|<\pi\right].$$ ИП II 320 (38)

8. $$\int_0^1 x^{-\frac{\mu}{2}-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\mu-\frac{3}{2}}(1+ax)^{\frac{1}{2}\mu}Q_\nu^\mu(1+2ax)\,dx =$$
$$=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(-\mu-\frac{1}{2}\right)(1+a)^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\{P_\nu^{\mu+1}[(1+a)^{\frac{1}{2}}]Q_\nu^\mu[(1+a)^{\frac{1}{2}}]+P_\nu^\mu[(1+a)^{\frac{1}{2}}]Q_\nu^{\mu+1}[(1+a)^{\frac{1}{2}}]\}$$
$$\left[\operatorname{Re}\mu<-\frac{1}{2},\quad |\arg a|<\pi\right].$$ ИП II 320 (39)

9. $$\int_0^y (y-x)^{\mu-1}\left[x\left(1+\frac{1}{2}\gamma x\right)\right]^{-\frac{1}{2}\lambda}P_\nu^\lambda(1+\gamma x)\,dx =$$
$$=\Gamma(\mu)\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\mu}\left[y\left(1+\frac{1}{2}\gamma y\right)\right]^{\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\lambda}P_\nu^{\lambda-\mu}(1+\gamma y)$$
$$\left[\operatorname{Re}\lambda<1,\quad \operatorname{Re}\mu>0,\quad |\arg\gamma y|<\pi\right].$$ ИП II 193 (52)

10. $$\int_0^y (y-x)^{\mu-1}x^{\sigma+\frac{1}{2}\lambda-1}\left(1+\frac{1}{2}\gamma x\right)^{-\frac{1}{2}\lambda}P_\nu^\lambda(1+\gamma x)\,dx =$$
$$=\frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\lambda}\Gamma(\sigma)\Gamma(\mu)y^{\sigma+\mu-1}}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(\sigma+\mu)}\times$$
$$\times{}_3F_2\left(-\nu,\ 1+\nu,\ \sigma;\ 1-\lambda,\ \sigma+\mu;\ -\frac{1}{2}\gamma y\right)$$
$$[\operatorname{Re}\sigma>0,\ \operatorname{Re}\mu>0,\ |\gamma y|<1].$$ ИП II 193 (53)

11 $\int\limits_0^y (y-x)^{\mu-1}\left[x(1-x)\right]^{-\frac{1}{2}\lambda} \mathrm{P}_\nu^\lambda(1-2x)\,dx =$

$$= \Gamma(\mu)\left[y(1-y)\right]^{\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\lambda} \mathrm{P}_\nu^{\lambda-\mu}(1-2y)$$

$[\operatorname{Re}\lambda < 1,\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ 0 < y < 1].$ ИП II 193 (54)

12 $\int\limits_0^y (y-x)^{\mu-1} x^{\sigma+\frac{1}{2}\lambda-1}(1-x)^{-\frac{1}{2}\lambda} \mathrm{P}_\nu^\lambda(1-2x)\,dx =$

$$= \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\sigma)\,y^{\sigma+\mu-1}}{\Gamma(\sigma+\mu)\,\Gamma(1-\lambda)}\,{}_3F_2(-\nu,\ 1+\nu,\ \sigma;\ 1-\lambda,\ \sigma+\mu;\ y)$$

$[\operatorname{Re}\sigma > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ 0 < y < 1].$ ИП II 193 (55)

7.138 $\int\limits_0^\infty (a+x)^{-\mu-\nu-2} P_\mu\left(\frac{a-x}{a+x}\right) P_\nu\left(\frac{a-x}{a+x}\right) dx =$

$$= \frac{a^{-\mu-\nu-1}\left[\Gamma(\mu+\nu+1)\right]^4}{\left[\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu+1)\right]^2\,\Gamma(2\mu+2\nu+2)}$$

$[|\arg a| < \pi,\quad \operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1].$ ИП II 326 (3)

7.14 Шаровые, степенная и показательная функции

7.141

1 $\int\limits_1^\infty e^{-ax}(x-1)^{\lambda-}\,(x^2-1)^{\frac{1}{2}\mu} \mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,dx =$

$$= \frac{a^{-\lambda-\mu}e^{-a}}{\Gamma(1-\mu+\nu)\,\Gamma(-\mu-\nu)}\,G_{23}^{31}\left(2a\,\middle|\,\begin{matrix}1+\mu,\ 1\\ \lambda+\mu,\ -\nu,\ 1+\nu\end{matrix}\right)$$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re}\lambda > 0].$ ИП II 323 (13)

2 $\int\limits_1^\infty e^{-ax}(x-1)^{\lambda-1}(x^2-1)^{\frac{1}{2}\mu} Q_\nu^\mu(x)\,dx =$

$$= \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)\,e^{\mu\pi i}}{2\Gamma(\nu-\mu+1)}\,a^{-\lambda-\mu}e^{-a}G_{23}^{22}\left(2a\,\middle|\,\begin{matrix}1+\mu,\ 1\\ \lambda+\mu,\ \nu+1,\ -\nu\end{matrix}\right)$$

$[\operatorname{Re} a > 0,\quad \operatorname{Re}\lambda > 0,\quad \operatorname{Re}(\lambda+\mu) > 0].$ ИП II 325 (24)

3 $\int\limits_1^\infty e^{-ax}(x-1)^{\lambda-1}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu} P_\nu^\mu(x)\,dx =$

$$= -\pi^{-1}\sin(\nu\pi)\,a^{\mu-\lambda}e^{-a}G_{23}^{31}\left(2a\,\middle|\,\begin{matrix}1,\ 1-\mu\\ \lambda-\mu,\ 1+\nu,\ -\nu\end{matrix}\right)$$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re}(\lambda-\mu) > 0].$ ИП II 323 (15)

4 $\int\limits_1^\infty e^{-ax}(x-1)^{\lambda-1}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu} Q_\nu^\mu(x)\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\,e^{\mu\pi i}a^{\mu-\lambda}e^{-a}G_{23}^{22}\left(2a\,\middle|\,\begin{matrix}1-\mu,\ 1\\ \lambda-\mu,\ \nu+1,\ -\nu\end{matrix}\right)$$

$[\operatorname{Re} a > 0,\quad \operatorname{Re}\lambda > 0,\quad \operatorname{Re}(\lambda-\mu) > 0].$ ИП II 323 (14)

5 $$\int_1^\infty e^{-ax}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu} P_\nu^\mu(x)\,dx = 2^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}} a^{\mu-\frac{1}{2}} K_{\nu+\frac{1}{2}}(a)$$

$[\operatorname{Re} a > 0, \quad \operatorname{Re}\mu < 1]$. ИП II 323 (11), МО 90

7.142 $$\int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}ax}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}\mu} P^\mu_{\nu-\frac{1}{2}}(x)\,dx = \frac{2}{a} W_{\mu,\nu}(a)$$

$\left[\operatorname{Re}\mu < 1, \ \nu-\frac{1}{2} \neq 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ \right]$. Бу 79 (34), МО 118

7.143

1. $$\int_0^\infty [x(1+x)]^{-\frac{1}{2}\mu} e^{-\beta x} P_\nu^\mu(1+2x)\,dx =$$

$$= \frac{\beta^{\mu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{1}{2}\beta} K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta}{2}\right)$$ $[\operatorname{Re}\mu < 1, \quad \operatorname{Re}\beta > 0]$ ИП I 179 (1)

2 $$\int_0^\infty \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}\mu} e^{-\beta x} P_\nu^\mu(1+2x)\,dx = \frac{e^{\frac{1}{2}\beta}}{\beta} W_{\mu,\,\nu+\frac{1}{2}}(\beta)$$

$[\operatorname{Re}\mu < 1, \quad \operatorname{Re}\beta > 0]$. ИП I 179 (2)

7.144

1 $$\int_0^\infty e^{-\beta x} x^{\lambda+\frac{1}{2}\mu-1}(x+2)^{\frac{1}{2}\mu} Q_\nu^\mu(1+x)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left\{\frac{\sin(\nu\pi)}{2\beta^{\lambda+\mu}\sin(\mu\pi)} E(-\nu, \ \nu+1, \ \lambda+\mu : \mu+1 : 2\beta) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin[(\mu+\nu)\pi]}{2^{1-\mu}\beta^\lambda \sin(\mu\pi)} E(\nu-\mu+1, \ -\nu-\mu, \ \lambda : 1-\mu : 2\beta)\right\}$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0, \quad \operatorname{Re}(\lambda+\mu) > 0]$. ИП I 181 (16)

2 $$\int_0^\infty e^{-\beta x} x^{\lambda-\frac{1}{2}\mu-1}(x+2)^{\frac{1}{2}\mu} Q_\nu^\mu(1+x)\,dx =$$

$$= -\frac{\sin(\nu\pi)}{2\beta^{\lambda-\mu}\sin(\mu\pi)} E(-\nu, \ \nu+1, \ \lambda-\mu : 1-\mu : 2\beta) -$$

$$- \frac{\sin[(\mu-\nu)\pi]}{2^{1+\mu}\beta^\lambda \sin(\mu\pi)} E(\mu+\nu+1, \ \mu-\nu, \ \lambda : 1+\mu : 2\beta)$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0, \quad \operatorname{Re}(\lambda-\mu)] > 0$. ИП I 181 (17)

7.145

1 $$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}}{1+x} \mathrm{P}_\nu\left[\frac{1}{(1+x)^2} - 1\right] dx = \frac{e^\beta}{\beta} W_{\nu+\frac{1}{2},0}(\beta)\, W_{-\nu-\frac{1}{2},0}(\beta)$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0]$ ИП I 180 (6)

2. $$\int_0^\infty x^{-1}e^{-\beta x}Q_{-\frac{1}{2}}(1+2x^{-2})\,dx = \frac{\pi^2}{8}\left\{\left[J_0\left(\frac{1}{2}\beta\right)\right]^2+\left[N_0\left(\frac{1}{2}\beta\right)\right]^2\right\}$$

$[\operatorname{Re}\beta>0]$. ИП II 327 (5)

3. $$\int_0^\infty x^{-1}e^{-ax}Q_\nu(1+2x^{-2})\,dx = \frac{1}{2}[\Gamma(\nu+1)]^2 a^{-1}W_{-\nu-\frac{1}{2},0}(ai)W_{-\nu-\frac{1}{2},0}(-ai)$$

$[\operatorname{Re}a>0,\quad \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП II 327 (6)

7.146

1. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}\mu}e^{-\beta x}P_\nu^\mu(\sqrt{1+x})\,dx = 2^\mu\beta^{\frac{1}{2}\mu-\frac{5}{4}}e^{\frac{\beta}{2}}W_{\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4}}(\beta)$$

$[\operatorname{Re}\mu<1,\quad \operatorname{Re}\beta>0]$. ИП I 180 (7)

2. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}\mu}\frac{e^{-\beta x}}{\sqrt{1+x}}P_\nu^\mu(\sqrt{1+x})\,dx = 2^\mu\beta^{\frac{1}{2}\mu-\frac{3}{4}}e^{\frac{1}{2}\beta}W_{\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4}}(\beta)$$

$[\operatorname{Re}\mu<1,\quad \operatorname{Re}\beta>0]$. ИП I 180 (8) и

3. $$\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-\beta x}P_\nu^{\frac{1}{4}}(\sqrt{1+x^2})\,P_\nu^{-\frac{1}{4}}(\sqrt{1+x^2})\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}H^{(1)}_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\beta\right)H^{(2)}_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\beta\right)\quad [\operatorname{Re}\beta>0].$$ ИП I 180 (9)

7.147 $$\int_0^\infty x^{\lambda-1}(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}\nu}e^{-\beta x}\mathrm{P}_\nu^\mu\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\right]dx =$$

$$=\frac{2^{-\nu-2}a^{\lambda+\nu}}{\pi\Gamma(-\mu-\nu)}G_{24}^{32}\left(\frac{a^2\beta^2}{4}\,\middle|\,\begin{matrix}1-\frac{\lambda}{2}, & \frac{1-\lambda}{2} & & \\ 0, & \frac{1}{2}, & -\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}, & -\frac{\lambda-\mu+\nu}{2}\end{matrix}\right)$$

$[a>0,\quad \operatorname{Re}\beta>0,\quad \operatorname{Re}\lambda>0]$. ИП II 327 (7)

7.148 $$\int_{-1}^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}\mu}(1+x)^{\frac{1}{2}\mu+\nu-1}\exp\left(-\frac{1-x}{1+x}y\right)\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,dx =$$

$$=2^\nu y^{\frac{1}{2}\mu+\nu-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}y}W_{\frac{1}{2}\mu-\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\mu}(y)\qquad [\operatorname{Re}y>0].$$ ИП II 317 (21)

7.149 $$\int_1^\infty (\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta x)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta x)^{\frac{1}{2}}\right]P_\nu(x)\,dx =$$

$$=2\pi^{-1}(\alpha\beta)^{-\frac{1}{2}}K_{\nu+\frac{1}{2}}(\alpha)K_{\nu+\frac{1}{2}}(\beta)\qquad [\operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta>0].$$ ИП II 323 (16)

7.15 Шаровые и гиперболические функции

7.151

1. $$\int_0^\infty (\operatorname{sh} x)^{\alpha-1} P_\nu^{-\mu}(\operatorname{ch} x)\, dx =$$
$$= \frac{2^{-1-\mu}\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\alpha+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\alpha\right)}$$
$[\operatorname{Re}(\alpha+\mu)>0,\ \operatorname{Re}(\nu-\alpha+2)>0,\ \operatorname{Re}(1-\alpha-\nu)>0]$. ВТФ I 172 (28)

2. $$\int_0^\infty (\operatorname{sh} x)^{\alpha-1} Q_\nu^{\mu}(\operatorname{ch} x)\, dx =$$
$$= \frac{e^{i\mu\pi}2^{\mu-\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\alpha\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\alpha\right)}\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\mu\right)$$
$[\operatorname{Re}(\alpha\pm\mu)>0,\quad \operatorname{Re}(\nu-\alpha+2)>0]$ ВТФ I 172 (29)

7.152 $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\operatorname{sh}^{2\mu}\left(\frac{1}{2}x\right)P_{2n}^{-2\mu}\left[\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}x\right)\right]dx =$$
$$= \frac{\Gamma\left(2\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha-n-\mu)\Gamma\left(\alpha+n-\mu+\frac{1}{2}\right)}{4^\mu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+n+\mu+1)\Gamma\left(\alpha-n+\mu+\frac{1}{2}\right)}$$
$\left[\operatorname{Re}\alpha>n+\operatorname{Re}\mu,\quad \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{4}\right]$. ИП I 181 (15)

7.16 Шаровые, степенная и тригонометрические функции

7.161

1. $$\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}\mu}\sin(ax)\,\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,dx =$$
$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}2^{\mu-\lambda-1}\Gamma(\lambda+1)\,a}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda-\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+\lambda-\mu+\nu}{2}\right)}\times$$
$$\times{}_2F_3\left(\frac{1+\lambda}{2},\ 1+\frac{\lambda}{2};\ \frac{3}{2},\ 1+\frac{\lambda-\mu-\nu}{2},\ \frac{3+\lambda-\mu+\nu}{2};\ -\frac{a^2}{4}\right)$$
$[\operatorname{Re}\lambda>-1,\quad \operatorname{Re}\mu<1]$. ИП II 314 (7)

2 $$\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}\mu}\cos(ax)\,\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\,dx =$$
$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}2^{\mu-\lambda}\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda-\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda-\mu-\nu}{2}\right)}\times$$
$$\times\,{}_2F_4\left(\frac{\lambda}{2},\ \frac{\lambda+1}{2};\ \frac{1}{2},\ \frac{1+\lambda-\mu-\nu}{2},\ 1+\frac{\lambda-\mu+\nu}{2},\ -\frac{a^2}{4}\right)$$
$[\operatorname{Re}\lambda > 0,\quad \operatorname{Re}\mu < 1]$. ИПИ I 314 (8)

3 $$\int_1^\infty (x^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}\sin(ax)\,P_\nu^\mu(x)\,dx =$$
$$= \frac{2^\mu \pi^{\frac{1}{2}} a^{-\mu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu\right)} S_{\mu+\frac{1}{2},\,\nu+\frac{1}{2}}(a)$$
$\left[a > 0,\quad \operatorname{Re}\mu < \frac{3}{2},\quad \operatorname{Re}(\mu+\nu) < 1\right]$. ИПИ I 320 (1)

7.162

1 $$\int_a^\infty P_\nu(2x^2a^{-2}-1)\sin(bx)\,dx =$$
$$= -\frac{\pi a}{4\cos(\nu\pi)}\left\{\left[J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{ab}{2}\right)\right]^2 - \left[J_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{ab}{2}\right)\right]^2\right\}$$
$[a > 0,\ b > 0,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < 0]$. ИПИ I 326 (1)

2 $$\int_a^\infty P_\nu(2x^2a^{-2}-1)\cos(bx)\,dx =$$
$$= -\frac{\pi}{4}a\left[J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{ab}{2}\right)J_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{ab}{2}\right) - N_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{ab}{2}\right)N_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{ab}{2}\right)\right]$$
$[a > 0,\ b > 0,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < 0]$ ИПИ I 326 (2)

3 $$\int_0^\infty (x^2+2)^{-\frac{1}{2}}\sin(ax)\,P_\nu^{-1}(x^2+1)\,dx = 2^{-\frac{1}{2}}\pi^{-1}a\sin(\nu\pi)\left[K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(2^{-\frac{1}{2}}a\right)\right]^2$$
$[a > 0,\quad -2 < \operatorname{Re}\nu < 1]$. ИП I 98 (22)

4 $$\int_0^\infty (x^2+2)^{-\frac{1}{2}}\sin(ax)\,Q_\nu^1(x^2+1)\,dx = -2^{-\frac{3}{2}}\pi a K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(2^{-\frac{1}{2}}a\right)I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(2^{-\frac{1}{2}}a\right)$$
$\left[a > 0,\quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{2}\right]$. ИП I 98 (23)

5 $$\int_0^\infty \cos(ax)\,P_\nu(1+x^2)\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin(\nu\pi)\left[K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right]^2$$
$[a > 0,\quad -1 < \operatorname{Re}\nu < 0]$ ИП I 42 (23)

6. $$\int_0^\infty \cos(ax)\,Q_\nu(1+x^2)\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$
$[a > 0,\quad \operatorname{Re}\nu > -1]$. ИП I 42 (24)

7. $\int_0^1 \cos(ax)\, P_\nu(2x^2-1)\, dx = \frac{\pi}{2} J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2}\right) J_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)$

$[a > 0]$. ИП I 42 (25)

7.163

1. $\int_a^\infty (x^2-a^2)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}} \sin(bx)\, P_0^{\frac{1}{2}-\nu}(ax^{-1})\, dx = b^{-\nu-\frac{1}{2}} \cos\left(ab - \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

$\left[a > 0, \quad |\operatorname{Re}\nu| < \frac{1}{2}\right]$. ИП I 98 (24)

2. $\int_0^1 x^{-1} \cos(ax)\, P_\nu(2x^{-2}-1)\, dx =$

$= -\frac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}(\nu\pi)\, {}_1F_1(\nu+1;\ 1;\ ai)\, {}_1F_1(\nu+1;\ 1;\ -ai)$

$[a > 0, \ -1 < \operatorname{Re}\nu < 0]$. ИП II 327 (4)

7.164

1. $\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \sin(bx) \left[P_\nu^{-\frac{1}{4}}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right)\right]^2 dx =$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a^{-1} b^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\nu\right)} \left[K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{2a}\right)\right]^2$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0, \quad b > 0, \quad -\frac{5}{4} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{4}\right]$. ИП II 327 (8)

2. $\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \sin(bx)\, P_\nu^{-\frac{1}{4}}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right) Q_\nu^{-\frac{1}{4}}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right) dx =$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{1}{4}\pi i}\, \Gamma\left(\nu+\frac{5}{4}\right)}{a b^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\nu+\frac{3}{4}\right)} I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{2a}\right) K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{2a}\right)$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0, \quad b > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{5}{4}\right]$. ИП II 327 (9)

3. $\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \sin(bx)\, P_\nu^{-\frac{1}{4}}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right) P_{\nu-1}^{-\frac{1}{4}}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right) \frac{dx}{\sqrt{1+a^2x^2}} =$

$$= \frac{a^{-2} b^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\, \Gamma\left(\frac{5}{4}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}-\nu\right)} K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{2a}\right) K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{2a}\right)$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0, \quad b > 0, \quad -\frac{5}{4} < \operatorname{Re}\nu < \frac{5}{4}\right]$. ИП II 328 (10)

4 $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \sin(bx)\, P_\nu^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right) P_\nu^{-\frac{3}{4}}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right) \frac{dx}{\sqrt{1+a^2x^2}} =$$

$$= \frac{a^{-2} b^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\, \Gamma\left(\frac{7}{4}+\nu\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}-\nu\right)} \left[K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{2a}\right)\right]^2$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0, \quad b > 0, \quad -\frac{7}{4} < \operatorname{Re}\nu < \frac{3}{4}\right]$ ИП II 328(11)

5 $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \cos(bx) \left[P_\nu^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right)\right]^2 dx =$$

$$= \frac{a^{-1}\left(\frac{\pi b}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\nu\right) \Gamma\left(-\frac{1}{4}-\nu\right)} \left[K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{2a}\right)\right]^2$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0, \quad b > 0, \quad -\frac{3}{4} < \operatorname{Re}\nu < -\frac{1}{4}\right]$. ИП II 328(12)

6 $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \cos(bx)\, P_\nu^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right) Q_\nu^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{\frac{1}{4}\pi i}\, \Gamma\left(\nu+\frac{3}{4}\right)}{a b^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\nu+\frac{5}{4}\right)} I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{2a}\right) K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{2a}\right)$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0, \quad b > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{3}{4}\right]$ ИП II 328(13)

7 $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \cos(bx)\, P_\nu^{-\frac{1}{4}}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right) P_\nu^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right) \frac{dx}{\sqrt{1+a^2x^2}} =$$

$$= \frac{a^{-2} b^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\, \Gamma\left(\frac{5}{4}+\nu\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}-\nu\right)} \left[K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{2a}\right)\right]^2$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0, \quad b > 0, \quad -\frac{5}{4} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{4}\right]$ ИП II 328(14)

8 $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \cos(bx)\, P_\nu^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right) P_{\nu-1}^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right) \frac{dx}{\sqrt{1+a^2x^2}} =$$

$$= \frac{a^{-2} b^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\, \Gamma\left(\frac{3}{4}+\nu\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}-\nu\right)} K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{2a}\right) K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{2a}\right)$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0, \quad b > 0, \quad |\operatorname{Re}\nu| < \frac{3}{4}\right]$. ИП II 329(15)

7.165 $\int\limits_0^\infty \cos(ax)\,P_\nu(\operatorname{ch}x)\,dx =$

$$= -\frac{\sin(\nu\pi)}{4\pi^2}\Gamma\left(\frac{1+\nu+ia}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu-ia}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu+ia}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu-ia}{2}\right)$$

$[a>0,\quad -1<\operatorname{Re}\nu<0]$. ИП II 329 (18)

7.166 $\int\limits_0^\pi \mathrm{P}_\nu^{-\mu}(\cos\varphi)\sin^{\alpha-1}\varphi\,d\varphi =$

$$= \frac{2^{-\mu}\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

$[\operatorname{Re}(\alpha\pm\mu)>0]$. МО 90, ВТФ I 172 (27)

7.167 $\int\limits_0^a \mathrm{P}_\nu^{-\mu}(\cos x)\,\mathrm{P}_\nu^{-\eta}[\cos(a-x)]\left[\frac{\sin(a-x)}{\sin x}\right]^\eta \frac{dx}{\sin x} =$

$$= \frac{2^\eta\Gamma(\mu-\eta)\Gamma\left(\eta+\frac{1}{2}\right)(\sin a)^\eta}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\eta+\mu+1)}\mathrm{P}_\nu^{-\mu}(\cos a)$$

$\left[\operatorname{Re}\mu>\operatorname{Re}\eta>-\frac{1}{2}\right]$. ИП II 329 (16)

7.17 Шаровые функции и интеграл вероятности

7.171 $\int\limits_1^\infty (x^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}\exp(a^2x^2)[1-\Phi(ax)]\,P_\nu^\mu(x)\,dx =$

$$= \pi^{-1}2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)a^{\mu-\frac{3}{2}}e^{\frac{a^2}{2}}W_{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\mu,\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\nu}(a^2)$$

$[\operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}\mu<1,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu)>-1,\ \operatorname{Re}(\mu-\nu)>0]$. ИП II 324 (17)

7.18 Шаровые и цилиндрические функции

7.181

1 $\int\limits_1^\infty P_{\nu-\frac{1}{2}}(x)\,x^{\frac{1}{2}}N_\nu(ax)\,dx =$

$$= 2^{-\frac{1}{2}}a^{-1}\left[\cos\left(\frac{1}{2}a\right)J_\nu\left(\frac{1}{2}a\right)-\sin\left(\frac{1}{2}a\right)N_\nu\left(\frac{1}{2}a\right)\right]$$

$\left[a>0,\quad \operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right]$ ИП II 108 (3) u

2 $\int\limits_1^\infty P_{\nu-\frac{1}{2}}(x)\,x^{\frac{1}{2}}J_\nu(ax)\,dx =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}\,a}\left[\cos\left(\frac{1}{2}a\right)N_\nu\left(\frac{1}{2}a\right)+\sin\left(\frac{1}{2}a\right)J_\nu\left(\frac{1}{2}a\right)\right]$$

$\left[|\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right]$. ИП II 344 (36) u

7.182

1. $$\int\limits_1^\infty x^\nu (x^2-1)^{\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}} P_\lambda^{\lambda-1}(x) J_\nu(ax)\,dx = \frac{2^{\lambda+\nu} a^{-\lambda} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(1-\lambda)} S_{\lambda-\nu,\,\lambda+\nu}(a)$$

$$\left[a>0,\quad \operatorname{Re}\nu<\frac{5}{2},\quad \operatorname{Re}(2\lambda+\nu)<\frac{3}{2}\right].$$ ИП II 345 (38) и

2. $$\int\limits_1^\infty x^{\frac{1}{2}-\mu}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu} P^\mu_{\nu-\frac{1}{2}}(x) J_\nu(ax)\,dx =$$

$$= -2^{-\frac{3}{2}}\pi^{\frac{1}{2}} a^{\mu-\frac{1}{2}}\left[J_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}a\right)N_\nu\left(\frac{1}{2}a\right)+N_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}a\right)J_\nu\left(\frac{1}{2}a\right)\right]$$

$$\left[-\frac{1}{4}<\operatorname{Re}\mu<1,\ a>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}+2\operatorname{Re}\mu\right].$$

ИП II 344 (37) и

3. $$\int\limits_1^\infty x^{\frac{1}{2}-\mu}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu} P^\mu_{\nu-\frac{1}{2}}(x) N_\nu(ax)\,dx =$$

$$= 2^{-\frac{3}{2}}\pi^{\frac{1}{2}} a^{\mu-\frac{1}{2}}\left[J_\nu\left(\frac{1}{2}a\right)J_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}a\right)-N_\nu\left(\frac{1}{2}a\right)N_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}a\right)\right]$$

$$\left[-\frac{1}{4}<\operatorname{Re}\mu<1,\ a>0,\ \operatorname{Re}(2\mu-\nu)>-\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 349 (67) и

4. $$\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{2}-\mu}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}\mu} \mathrm{P}^\mu_\nu(x) J_{\nu+\frac{1}{2}}(ax)\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a^{\mu-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}-\mu}\left(\frac{1}{2}a\right) J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}a\right)$$

$$[\operatorname{Re}\mu<1,\ \operatorname{Re}(\mu-\nu)<2].$$ ИП II 337 (33) и

5. $$\int\limits_1^\infty x^{\frac{1}{2}-\mu}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu} P^\mu_{\nu-\frac{1}{2}}(x) K_\nu(ax)\,dx =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} a^{\mu-\frac{1}{2}} K_\nu\left(\frac{1}{2}a\right) K_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}a\right)\quad [\operatorname{Re}\mu<1,\ \operatorname{Re}a>0].$$ ИП II 135 (5) и

6. $$\int\limits_1^\infty x^{\mu+\frac{1}{2}}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu} P^\mu_{\nu-\frac{1}{2}}(x) K_\nu(ax)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}a} W_{\mu,\nu}(a)$$

$$[\operatorname{Re}\mu<1,\ \operatorname{Re}a>0].$$ ИП II 135 (3) и

7. $$\int\limits_1^\infty x^{\mu-\frac{3}{2}}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu} P^\mu_{\nu-\frac{1}{2}}(x) K_\nu(ax)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}a} W_{\mu-1,\,\nu}(a)$$

$$[\operatorname{Re}\mu<1,\quad \operatorname{Re}a>0].$$ ИП II 135 (4) и

8. $\int\limits_1^\infty x^{\mu-\frac{1}{2}}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu} P^{\mu}_{\nu-\frac{3}{2}}(x) K_\nu(ax)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a^{-1} e^{-\frac{1}{2}a} W_{\mu-\frac{1}{2},\,\nu-\frac{1}{2}}(a)$

$[\operatorname{Re}\mu < 1]$. ИП II 135 (6) и

9. $\int\limits_1^\infty x^{\frac{1}{2}}(x^2-1)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}} P_\mu^{\frac{1}{2}-\nu}(2x^2-1) K_\nu(ax)\,dx = \pi^{-\frac{1}{2}} a^{-\nu} 2^{\nu-1}\left[K_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2$

$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}a > 0\right]$. ИП II 136 (11) и

10. $\int\limits_1^\infty x^{\frac{1}{2}}(x^2-1)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}} P_\mu^{\frac{1}{2}-\nu}(2x^2-1) N_\nu(ax)\,dx =$

$= \pi^{\frac{1}{2}} 2^{\nu-2} a^{-\nu}\left[J_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2}\right) J_{-\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2}\right) - N_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2}\right) N_{-\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)\right]$

$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2},\ a > 0,\ \operatorname{Re}\nu + |2\operatorname{Re}\mu + 1| < \frac{3}{2}\right]$. ИП II 108 (5) и

11. $\int\limits_1^\infty x^{\frac{1}{2}}(x^2-1)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}} P_\mu^{\frac{1}{2}-\nu}(2x^2-1) J_\nu(ax)\,dx =$

$= -2^{\nu-2} a^{-\nu} \pi^{\frac{1}{2}} \sec(\mu\pi)\left\{\left[J_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2 - \left[J_{-\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2\right\}$

$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2},\ a > 0,\ \operatorname{Re}\nu - \frac{3}{2} < 2\operatorname{Re}\mu < \frac{1}{2} - \operatorname{Re}\nu\right]$. ИП II 345 (39) и

12 $\int\limits_1^\infty x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\nu} P_\mu^\nu(2x^2-1) K_\nu(ax)\,dx = 2^{-\nu} a^{\nu-1} K_{\mu+1}(a)$

$[\operatorname{Re}a > 0,\ \operatorname{Re}\nu < 1]$ ИП II 136 (10) и

13 $\int\limits_0^\infty x(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}\nu} P_\mu^\nu(1+2x^2a^{-2}) K_\nu(xy)\,dx = 2^{-\nu} a y^{-\nu-1} S_{2\nu,\,2\mu+1}(ay)$

$[\operatorname{Re}a > 0,\ \operatorname{Re}y > 0,\ \operatorname{Re}\nu < 1]$. ИП II 135 (7)

14. $\int\limits_0^\infty x(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}\nu}\left[(\mu-\nu) P_\mu^\nu(1+2x^2a^{-2}) + \right.$

$\left. + (\mu+\nu) P_{-\mu}^\nu(1+2x^2a^{-2})\right] K_\nu(xy)\,dx = 2^{1-\nu}\mu y^{-\nu-2} S_{2\nu+1,\,2\mu}(ay)$

$[\operatorname{Re}a > 0,\ \operatorname{Re}y > 0,\ \operatorname{Re}\nu < 1]$. ИП II 136 (8)

15 $\int\limits_0^\infty x(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}\nu-1}\left[P_\mu^\nu(1+2x^2a^{-2}) + \right.$

$\left. + P_{-\mu}^\nu(1+2x^2a^{-2})\right] K_\nu(xy)\,dx = 2^{1-\nu} y^{-\nu} S_{2\nu-1,\,2\mu}(ay)$

$[\operatorname{Re}a > 0,\ \operatorname{Re}y > 0,\ \operatorname{Re}\nu < 1]$. ИП II 136 (9)

16. $\int\limits_0^\infty x^{\frac{1}{2}}(x^2+2)^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}} P_\mu^{-\nu-\frac{1}{2}}(x^2+1) J_\nu(xy)\,dx = \dfrac{y^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}-\nu} \pi^{-\frac{1}{2}} \left[K_{\mu+\frac{1}{2}}(2^{-\frac{1}{2}} y)\right]^2}{\Gamma\left(\nu+\mu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu-\mu+\frac{1}{2}\right)}$

$\left[-\frac{3}{2} - \operatorname{Re}\nu < \operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}\nu + \frac{1}{2},\ y > 0\right].$ ИП II 44(1)

17. $\int\limits_0^\infty x^{\frac{1}{2}}(x^2+2)^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}} Q_\mu^{\nu+\frac{1}{2}}(x^2+1) J_\nu(xy)\,dx =$

$= 2^{-\nu-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} e^{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi i} y^\nu K_{\mu+\frac{1}{2}}(2^{-\frac{1}{2}} y) I_{\mu+\frac{1}{2}}(2^{-\frac{1}{2}} y)$

$\left[\operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}(2\mu+\nu) > -\frac{5}{2},\ y > 0\right].$ ИП II 46(12)

7.183 $\int\limits_0^\infty x^{1-\mu}(1+a^2x^2)^{-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{4}} Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(\pm iax) J_\nu(xy)\,dx =$

$= i(2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi\left(\mu \mp \frac{1}{2}\nu \mp \frac{1}{4}\right)} a^{-1} y^{\mu-1} I_\nu\left(\frac{1}{2}a^{-1}y\right) K_\mu\left(\frac{1}{2}a^{-1}y\right)$

$\left[-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{Re}\nu < \operatorname{Re}\mu < 1 + \operatorname{Re}\nu,\ y > 0,\ \operatorname{Re} a > 0\right].$ ИП II 46(11)

7.184

1. $\int\limits_1^\infty x^{\frac{1}{2}}(x^2-1)^{\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{4}} \mathrm{P}_{-\frac{1}{2}+\nu}^{-\frac{1}{2}-\mu}(x^{-1}) J_\nu(xa)\,dx =$

$= 2^{\frac{1}{2}} a^{-1-\mu} \pi^{-\frac{1}{2}} \cos\left[a + \frac{1}{2}(\nu-\mu)\pi\right]$

$\left[|\operatorname{Re}\mu| < \frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\nu > -1,\ a > 0\right].$ ИП II 44(2)и

2 $\int\limits_1^\infty x^{-\nu}(x^2-1)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu} \mathrm{P}_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(2x^{-2}-1) K_\nu(ax)\,dx =$

$= \pi^{\frac{1}{2}} 2^{-\nu} a^{-2+\nu} W_{\mu+\frac{1}{2},\,\nu-\frac{1}{2}}(a) W_{-\mu-\frac{1}{2},\,\nu-\frac{1}{2}}(a)$

$\left[\operatorname{Re}\nu < \frac{3}{2},\ a > 0\right].$ ИП II 370(45)и

3. $\int\limits_0^\infty x^\nu (1+x^2)^{\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}} Q_\mu^{\nu+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{x^2}\right) J_\nu(ax)\,dx =$

$= -ie^{i\pi\nu} \pi^{-\frac{1}{2}} 2^\nu a^{-\nu-2} \left[\Gamma\left(\frac{3}{2}+\mu+\nu\right)\right]^2 \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-\mu\right) \times$

$\times W_{-\mu-\frac{1}{2},\,\nu+\frac{1}{2}}(a) \left[\frac{\cos(\mu\pi)}{\Gamma(2+2\nu)} M_{\mu+\frac{1}{2},\,\nu+\frac{1}{2}}(a) + \frac{\sin(\nu\pi)}{\Gamma\left(\nu+\mu+\frac{3}{2}\right)} W_{\mu+\frac{1}{2},\,\nu+\frac{1}{2}}(a)\right]$

$\left[a > 0,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu) > -\frac{3}{2},\ \operatorname{Re}(\mu-\nu) < \frac{1}{2}\right].$ ИП II 46(14)

4 $$\int_0^1 x^{\nu}(1-x^2)^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4}} P_{\mu}^{-\nu-\frac{1}{2}}(2x^{-2}-1)\, J_{\nu}(xy)\, dx =$$

$$= 2^{\nu+\frac{1}{2}} y^{\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\mu+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-\mu\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu\right)\right]^2} \times$$

$$\times {}_1F_1\left(\nu+\mu+\frac{3}{2};\ 2\nu+2;\ iy\right) {}_1F_1\left(\nu+\mu+\frac{3}{2};\ 2\nu+2;\ -iy\right)$$

$$\left[y>0,\ -\frac{3}{2}-\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}\mu<\operatorname{Re}\nu+\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 45 (3)

5 $$\int_0^{\infty} x^{-\nu}(x^2+a^2)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu} Q_{\mu}^{\frac{1}{2}-\nu}(1+2a^2x^{-2})\, K_{\nu}(xy)\, dx =$$

$$= ie^{-i\pi\nu}\pi^{\frac{1}{2}} 2^{-\nu-1} a^{-\nu-\frac{1}{2}} y^{\nu-2}\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}+\mu-\nu\right)\right]^2 \times$$

$$\times W_{-\mu-\frac{1}{2},\ \nu-\frac{1}{2}}(iay)\, W_{-\mu-\frac{1}{2},\ \nu-\frac{1}{2}}(-iay)$$

$$\left[\operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}y>0,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{3}{2},\ \operatorname{Re}(\mu-\nu)>-\frac{3}{2}\right].$$ ИП II 137 (13)

6 $$\int_0^{\infty} x^{-\nu}(x^2+1)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu} Q_{\mu}^{\frac{1}{2}-\nu}(1+2x^{-2})\, J_{\nu}(ax)\, dx =$$

$$= 2^{-\nu} a^{-\nu-2} \frac{ie^{-i\nu\pi}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}+\mu-\nu\right)}{\Gamma(2\nu)} M_{\mu+\frac{1}{2},\ \nu-\frac{1}{2}}(a)\, W_{-\mu-\frac{1}{2},\ \nu-\frac{1}{2}}(a)$$

$$\left[a>0,\ 0<\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}\mu+\frac{3}{2}\right].$$ ИП II 47 (15) и

7 $$\int_0^{\infty} x^{-\nu}(x^2+a^2)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu} Q_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\nu}(1+2a^2x^{-2})\, K_{\nu}(xy)\, dx =$$

$$= ie^{-i\pi\nu}\pi^{\frac{3}{2}} 2^{-\nu-3} a^{\frac{1}{2}-\nu} y^{\nu-1}[\Gamma(1-\nu)]^2 \times$$

$$\times\left\{\left[J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{ay}{2}\right)\right]^2+\left[N_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{ay}{2}\right)\right]^2\right\}$$

$$[\operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}y>0,\ \operatorname{Re}\nu<1].$$ ИП II 136 (12)

7.185 $$\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} Q_{\nu-\frac{1}{2}}[(a^2+x^2)x^{-1}]\, J_{\nu}(xy)\, dx =$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}}\pi y^{-1}\exp\left[-\left(a^2-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} y\right] J_{\nu}\left(\frac{1}{2}y\right)$$

$$\left[\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\ y>0\right].$$ ИП II 46 (10)

7.186 $$\int_0^\infty x(1+x^2)^{-\nu-1} \mathrm{P}_\nu\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) J_0(xy)\,dx =$$
$$= y^{2\nu}[2^\nu \Gamma(\nu+1)]^{-2} K_0(y) \qquad [\operatorname{Re}\nu > 0].$$ ИП II 13(10)

7.187

1. $$\int_0^\infty x P_\mu^\nu(\sqrt{1+x^2}) K_\nu(xy)\,dx = y^{-\frac{3}{2}} S_{\nu+\frac{1}{2},\,\mu+\frac{1}{2}}(y)$$
$$[\operatorname{Re}\nu < 1,\ \operatorname{Re} y > 0].$$ ИП II 137(14)

2. $$\int_0^\infty x\left[P_{\lambda-\frac{1}{2}}(\sqrt{1+a^2x^2})\right]^2 J_0(xy)\,dx = 2\pi^{-2}y^{-1}a^{-1}\cos(\lambda\pi)\left[K_\lambda\left(\frac{y}{2a}\right)\right]^2$$
$$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ |\operatorname{Re}\lambda| < \frac{1}{4},\ y > 0\right].$$ ИП II 13(11)

3. $$\int_0^\infty x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} P_\mu^\nu(\sqrt{1+x^2}) K_\nu(xy)\,dx = y^{-\frac{1}{2}} S_{\nu-\frac{1}{2},\,\mu+\frac{1}{2}}(y)$$
$$[\operatorname{Re}\nu < 1,\ \operatorname{Re} y > 0].$$ ИП II 137(15)

4. $$\int_0^\infty x P_\mu^{-\frac{1}{2}\nu}(\sqrt{1+a^2x^2})\, Q_\mu^{-\frac{1}{2}\nu}(\sqrt{1+a^2x^2}) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{y^{-1}e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}\Gamma\left(1+\mu+\frac{1}{2}\nu\right)}{a\Gamma\left(1+\mu-\frac{1}{2}\nu\right)} I_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{2a}\right) K_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{2a}\right)$$
$$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ y > 0,\ \operatorname{Re}\mu > -\frac{3}{4},\ \operatorname{Re}\nu > -1\right].$$ ИП II 47(16)

5. $$\int_0^\infty x P_{\sigma-\frac{1}{2}}^\mu(\sqrt{1+a^2x^2})\, Q_{\sigma-\frac{1}{2}}^\mu(\sqrt{1+a^2x^2}) J_0(xy)\,dx =$$
$$= y^{-2}e^{\mu\pi i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\sigma-\mu\right)}{\Gamma(1+2\sigma)} W_{\mu,\sigma}\left(\frac{y}{a}\right) M_{-\mu,\sigma}\left(\frac{y}{a}\right)$$
$$\left[\operatorname{Re} a \gtrless 0,\ y > 0,\ \operatorname{Re}\sigma > -\frac{1}{4},\ \operatorname{Re}\mu < 1\right].$$ ИП II 14(15)

6. $$\int_0^\infty x P_{\sigma-\frac{1}{2}}^\mu(\sqrt{1+a^2x^2})\, P_{\sigma-\frac{1}{2}}^{-\mu}(\sqrt{1+a^2x^2}) J_0(xy)\,dx =$$
$$= 2\pi^{-1}y^{-2}\cos(\sigma\pi) W_{\mu,\sigma}\left(\frac{y}{a}\right) W_{-\mu,\sigma}\left(\frac{y}{a}\right)$$
$$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ y > 0,\ |\operatorname{Re}\sigma| < \frac{1}{4}\right].$$ ИП II 14(14)

7. $$\int_0^\infty x\left\{P_{\sigma-\frac{1}{2}}^\mu(\sqrt{1+a^2x^2})\right\}^2 J_0(xy)\,dx =$$
$$= -i\pi^{-1}y^{-2}W_{\mu,\sigma}\left(\frac{y}{a}\right)\left[W_{\mu,\sigma}\left(e^{\pi i}\frac{y}{a}\right) - W_{\mu,\sigma}\left(e^{-\pi i}\frac{y}{a}\right)\right]$$
$$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ y > 0,\ |\operatorname{Re}\sigma| < \frac{1}{4},\ \operatorname{Re}\mu < 1\right].$$ ИП II 14(13)

8. $$\int_0^\infty x\left(1+a^2x^2\right)^{-\frac{1}{2}} P_\mu^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right) P_\mu^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{\left[K_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{2a}\right)\right]^2}{\pi a^2 \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu+\frac{1}{2}\right)}$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ y > 0,\ -\frac{5}{4} < \operatorname{Re}\mu < \frac{1}{4}\right]$. ИП II 46 (9)

9. $$\int_0^\infty x\left\{P_\mu^{-\frac{1}{2}\nu}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right)\right\}^2 J_\nu(xy)\,dx = \frac{2\left[K_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{2a}\right)\right]^2 y^{-1}}{\pi a \Gamma\left(1+\mu+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu-\mu\right)}$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ y > 0,\ -\frac{3}{4} < \operatorname{Re}\mu < -\frac{1}{4},\ \operatorname{Re}\nu > -1\right]$. ИП II 45 (7)

10. $$\int_0^\infty x\left(1+a^2x^2\right)^{-\frac{1}{2}} P_\mu^{-\frac{1}{2}\nu}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right) P_{\mu+1}^{-\frac{1}{2}\nu}\left(\sqrt{1+a^2x^2}\right) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{K_{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{2a}\right) K_{\mu+\frac{3}{2}}\left(\frac{y}{2a}\right)}{\pi a^2 \Gamma\left(2+\frac{1}{2}\nu+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu-\mu\right)}$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ y > 0,\ -\frac{7}{4} < \operatorname{Re}\mu < -\frac{1}{4}\right]$. ИП II 45 (8)

7.188

1. $$\int_0^\infty x\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}\mu} \mathrm{P}_{\mu-1}^{-\nu}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right] J_\nu(xy)\,dx = \frac{y^{\mu-2}e^{-ay}}{\Gamma(\mu+\nu)}$$

$\left[\operatorname{Re} a > 0,\ y > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}\mu > \frac{1}{2}\right]$. ИП II 45 (4)

2. $$\int_0^\infty x^{\nu+1}\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}\nu} P_\nu\left(\frac{x^2+2a^2}{2a\sqrt{x^2+a^2}}\right) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{(2a)^{\nu+1}y^{-\nu-1}}{\pi\Gamma(-\nu)}\left[K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{ya}{2}\right)\right]^2$$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < 0,\ y > 0]$. ИП II 45 (5)

3. $$\int_0^\infty x^{1-\nu}\left(x^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}\nu} P_{\nu-1}\left(\frac{x^2+2a^2}{2a\sqrt{x^2+a^2}}\right) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{(2a)^{1-\nu}y^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} I_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{ay}{2}\right) K_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{ay}{2}\right)$$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ y > 0,\ 0 < \operatorname{Re}\nu < 1]$ ИП II 45 (6)

7.189

1. $$\int_0^\infty (a+x)^\mu e^{-x} P_\nu^{-2\mu}\left(1+\frac{2x}{a}\right) I_\mu(x)\,dx = 0$$

$$\left[-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\mu < 0,\ -\frac{1}{2}+\operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}\nu < -\frac{1}{2}-\operatorname{Re}\mu\right].$$ ИП II 366 (18)

2. $$\int_0^\infty (x+a)^{-\mu} e^{-x} P_\nu^{-2\mu}\left(1+\frac{2x}{a}\right) I_\mu(x)\,dx =$$

$$= \frac{2^{\mu-1}\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu-\nu-\frac{1}{2}\right)e^a}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2\mu+\nu+1)\Gamma(2\mu-\nu)} W_{\frac{1}{2}-\mu,\ \frac{1}{2}+\nu}(2a)$$

$$\left[|\arg a| < \pi,\ \operatorname{Re}\mu > \left|\operatorname{Re}\nu+\frac{1}{2}\right|\right].$$ ИП II 367 (19)

3. $$\int_0^\infty x^{-\mu} e^x P_\nu^{2\mu}\left(1+\frac{2x}{a}\right) K_\mu(x+a)\,dx =$$

$$= \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{\mu-1}\cos(\mu\pi)\,\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu-\nu+\frac{1}{2}\right) W_{\frac{1}{2}-\mu,\ \frac{1}{2}+\nu}(2a)$$

$$\left[|\arg a| < \pi,\ \operatorname{Re}\mu > \left|\operatorname{Re}\nu+\frac{1}{2}\right|\right].$$ ИП II 373 (11)

4. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}\mu}(x+a)^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \mathrm{P}^\mu_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a-x}{a+x}\right) K_\nu(a+x)\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a^{-\frac{1}{2}\mu}\Gamma(\mu, 2a) \qquad [a > 0,\ \operatorname{Re}\mu < 1].$$ ИП II 374 (12)

5. $$\int_0^\infty (\operatorname{sh} x)^{\mu+1}(\operatorname{ch} x)^{-2\mu-\frac{3}{2}} P_\nu^{-\mu}[\operatorname{ch}(2x)]\, I_{\mu-\frac{1}{2}}(a \operatorname{sech} x)\,dx =$$

$$= \frac{2^{\mu-\frac{1}{2}}\Gamma(\mu-\nu)\Gamma(\mu+\nu+1)}{\pi^{\frac{1}{2}} a^{\mu+\frac{3}{2}}[\Gamma(\mu+1)]^2} M_{\nu+\frac{1}{2},\ \mu}(a)\, M_{-\nu-\frac{1}{2},\ \mu}(a)$$

$$[\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\nu,\ \operatorname{Re}\mu > -\operatorname{Re}\nu - 1].$$ ИП II 378 (44)

7.19 Шаровые функции и функции, родственные цилиндрическим

7.191

1. $$\int_a^\infty x^{\frac{1}{2}}(x^2-a^2)^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu} P_\mu^{\nu+\frac{1}{2}}(2x^2a^{-2}-1)\,[\mathbf{H}_\nu(x) - N_\nu(x)]\,dx =$$

$$= 2^{-\nu-2}\pi^{\frac{1}{2}} a \operatorname{cosec}(\mu\pi)\cos(\nu\pi)\left\{\left[N_\nu\left(\frac{1}{2}a\right)\right]^2 - \left[J_\nu\left(\frac{1}{2}a\right)\right]^2\right\}$$

$$\left[-1 < \operatorname{Re}\mu < 0,\ \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}\right].$$ ИП II 384 (6)

2. $$\int_a^\infty x^{\frac{1}{2}}(x^2-a^2)^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu} P_\mu^{\nu+\frac{1}{2}}(2x^2a^{-2}-1)\left[I_{-\nu}(x)-\mathbf{L}_\nu(x)\right]dx =$$
$$= 2^{-\nu-1}\pi^{\frac{1}{2}} a \operatorname{cosec}(2\mu\pi)\cos(\nu\pi)\left\{\left[I_\nu\left(\frac{1}{2}a\right)\right]^2-\left[I_{-\nu}\left(\frac{1}{2}a\right)\right]^2\right\}$$
$$\left[-1<\operatorname{Re}\mu<0,\ \operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 385 (15)

7.192

1. $$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}(\nu-\mu-1)}(1-x^2)^{\frac{1}{4}(\nu-\mu-2)} \mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}(\mu-\nu+2)}(x) S_{\mu,\nu}(ax)\,dx =$$
$$= 2^{\mu-\frac{3}{2}}\pi^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}(\nu-\mu-1)}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-3\nu+3}{4}\right)\cos\left(\frac{\mu-\nu}{2}\pi\right)\times$$
$$\times\left[J_\nu\left(\frac{1}{2}a\right)N_{-\frac{1}{2}(\mu-\nu+1)}\left(\frac{1}{2}a\right)-N_\nu\left(\frac{1}{2}a\right)J_{-\frac{1}{2}(\mu-\nu+1)}\left(\frac{1}{2}a\right)\right]$$
$$[\operatorname{Re}(\mu-\nu)<0,\ a>0,\ |\operatorname{Re}(\mu+\nu)|<1,\ \operatorname{Re}(\mu-3\nu)<1]$$
ИП II 387 (24) *и*

2 $$\int_1^\infty x^{\frac{1}{2}}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\beta} P_\nu^\beta(x) S_{\mu,\frac{1}{2}}(ax)\,dx =$$
$$=\frac{2^{-\frac{3}{2}+\beta-\mu}a^{\beta-1}\Gamma\left(\frac{\beta-\mu+\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\beta-\mu-\nu}{2}-\frac{1}{4}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)} S_{\mu-\beta+1,\ \nu+\frac{1}{2}}(a)$$
$$\left[\operatorname{Re}\beta<1,\ a>0,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu-\beta)<-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(\mu-\nu-\beta)<\frac{1}{2}\right].$$
ИП II 387 (25) *и*

7.193

1 $$\int_1^\infty x^{-\nu}(x^2-1)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu} \mathrm{P}_{\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu}^{\nu-\frac{1}{2}}(2x^{-2}-1) S_{\mu,\nu}(ax)\,dx =$$
$$=\frac{2^{\mu-\nu}a^{\nu-2}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{3\nu-\mu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)} W_{\varrho,\sigma}\left(ae^{i\frac{\pi}{2}}\right)W_{\varrho,\sigma}\left(ae^{-i\frac{\pi}{2}}\right);$$
$$\varrho=\frac{1}{2}(\mu+1-\nu),\quad \sigma=\nu-\frac{1}{2}$$
$$\left[\operatorname{Re}(\mu-\nu)<0,\ a>0,\ \operatorname{Re}\nu<\frac{3}{2},\ \operatorname{Re}(3\nu-\mu)>1\right].$$ ИП II 387 (27) *и*

2. $$\int_1^\infty x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}\nu} P_\lambda^\nu(2x^2-1) S_{\mu,\nu}(ax)\,dx =$$
$$=\frac{a^{\nu-1}\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu-1}{2}-\lambda\right)}{2\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}\right)} S_{\mu-\nu+1,\ 2\lambda+1}(a)$$
$$[\operatorname{Re}\nu<1,\ a>0,\ \operatorname{Re}(\mu-\nu+\lambda)<-1,\ \operatorname{Re}(\mu-\nu+\lambda)<0].$$
ИП II 387 (26) *и*

7.21 Интегрирование шаровых функций по индексу

7.211

1 $$\int\limits_0^\infty P_{-x-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}\theta\right) \qquad [0<\theta<\pi].$$ ИП II 329 (19)

2 $$\int\limits_{-\infty}^\infty P_x(\cos\theta)\,dx = \operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}\theta\right) \qquad [0<\theta<\pi].$$ ИП II 329 (20)

7.212 $$\int\limits_0^\infty x^{-1}\operatorname{th}(\pi x)\,P_{-\frac{1}{2}+ix}(\operatorname{ch} a)\,dx = 2e^{-\frac{1}{2}a}\boldsymbol{K}(e^{-a}) \qquad [a>0].$$ ИП II 330 (22)

7.213 $$\int\limits_0^\infty \frac{x\operatorname{th}(\pi x)}{a^2+x^2}P_{-\frac{1}{2}+ix}(\operatorname{ch} b)\,dx = Q_{a-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} b) \qquad [\operatorname{Re} a>0].$$ ИП II 387 (23)

7.214 $$\int\limits_0^\infty \operatorname{sh}(\pi x)\cos(ax)\,P_{-\frac{1}{2}+ix}(b)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2(b+\operatorname{ch} a)}}$$ $$[a>0,\ |b|<1].$$ ИП I 42 (27)

7.215 $$\int\limits_0^\infty \cos(bx)\,P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+ix}(\operatorname{ch} a)\,dx = 0 \qquad [0<a<b];$$ $$= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sh} a)^{\mu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)(\operatorname{ch} a-\operatorname{ch} b)^{\mu+\frac{1}{2}}} \qquad [0<b<a].$$ ИП II 330 (21)

7.216 $$\int\limits_0^\infty \cos(bx)\,\Gamma(\mu+ix)\,\Gamma(\mu-ix)\,P^{\frac{1}{2}-\mu}_{-\frac{1}{2}+ix}(\operatorname{ch} a)\,dx =$$ $$= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\Gamma(\mu)(\operatorname{sh} a)^{\mu-\frac{1}{2}}}{(\operatorname{ch} a+\operatorname{ch} b)^{\mu}} \qquad [a>0,\ b>0,\ \operatorname{Re}\mu>0].$$ ИП II 330 (24)

7.217

1 $$\int\limits_{-\infty}^\infty \left(\nu-\frac{1}{2}+ix\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-ix\right)\Gamma\left(2\nu-\frac{1}{2}+ix\right)\times$$ $$\times P^{\frac{1}{2}-\nu}_{\nu+ix-1}(\cos\theta)\,I_{\nu-\frac{1}{2}+ix}(a)\,K_{\nu-\frac{1}{2}+ix}(b)\,dx =$$ $$= \sqrt{2\pi}(\sin\theta)^{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{ab}{\omega}\right)^{\nu}K_{\nu}(\omega);\quad \omega=(a^2+b^2+2ab\cos\theta)^{\frac{1}{2}}.$$ ИП II 383 (20)

2 $$\int\limits_0^\infty xe^{\pi x}\operatorname{th}(\pi x)\,P_{-\frac{1}{2}+ix}(-\cos\theta)\,H^{(2)}_{ix}(ka)\,H^{(2)}_{ix}(kb)\,dx = -\frac{2(ab)^{\frac{1}{2}}}{\pi R}e^{-ikR};$$ $$R=(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$$ $$[a>0,\ b>0,\ 0<\theta<\pi,\ \operatorname{Im} k\leqslant 0].$$ ИП II 381 (17)

3. $$\int_0^\infty xe^{\pi x}\,\mathrm{sh}\,(\pi x)\,\Gamma(\nu+ix)\,\Gamma(\nu-ix)\,P^{\frac{1}{2}-\nu}_{-\frac{1}{2}+ix}(-\cos\theta)\,H^{(2)}_{ix}(a)\,H^{(2)}_{ix}(b)\,dx =$$
$$= i(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\sin\theta)^{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{ab}{R}\right)^{\nu} H^{(2)}_{\nu}(R); \qquad R=(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$$
$[a>0,\ b>0,\ 0<\theta<\pi,\ \mathrm{Re}\,\nu>0]$. ИП II 381 (18)

4. $$\int_0^\infty x\,\mathrm{sh}\,(\pi x)\,\Gamma(\lambda+ix)\,\Gamma(\lambda-ix)\,K_{ix}(a)\,K_{ix}(b)\,P^{\frac{1}{2}-\lambda}_{-\frac{1}{2}+ix}(\beta)\,dx =$$
$$=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}\left(\frac{ab}{z}\right)^{\lambda}(\beta^2-1)^{\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{4}}K_\lambda(z); \qquad z=\sqrt{a^2+b^2+2ab\beta}$$
$\left[|\arg a|<\frac{\pi}{2},\ |\arg(\beta-1)|<\pi,\ \mathrm{Re}\,\lambda>0\right]$. ИП II 177 (16)

7.22 Полиномы Лежандра, рациональные и алгебраические функции

7.221

1. $$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = 0 \qquad [m\neq n]$$
$$=\frac{2}{2n+1} \qquad [m=n].$$ УВ II 94, ВТФ I 170 (8,10)

2. $$\int_0^1 P_n(x)\,P_m(x)\,dx=\frac{1}{2n+1} \qquad [m=n];$$
$$=0 \qquad [n-m \text{ четное},\ m\neq n];$$
$$=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m+n-1)}\,m!\,n!}{2^{m+n-1}(n-m)(n+m+1)\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{m-1}{2}\right)!\right]^2}$$
$[n$ — четное, m — нечетное$]$ УВ II 96

3. $$\int_0^{2\pi} P_{2n}(\cos\varphi)\,d\varphi = 2\pi\left[\binom{2n}{n}2^{-2n}\right]^2.$$ МО 70, ВТФ II 183 (50)

7.222

1. $$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)\,dx = 0 \qquad [m<n].$$

2. $$\int_{-1}^{1}(1+x)^{m+n}P_m(x)\,P_n(x)\,dx=\frac{2^{m+n+1}[(m+n)!]^4}{(m!\,n!)^2(2m+2n+1)!}.$$ ИП II 277 (15)

3. $$\int_{-1}^{1}(1+x)^{m-n-1}P_m(x)\,P_n(x)\,dx=0 \qquad [m>n].$$ ИП II 278 (16)

4. $\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^n P_{2m}(x)\,dx = \frac{2n^2}{(n-m)(2m+2n+1)} \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^{n-1} P_{2m}(x)\,dx$

$[m < n]$. УВ II 102

5. $\int\limits_{0}^{1} x^2 P_{n+1}(x) P_{n-1}(x)\,dx = \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$. УВ II 129

7.223 $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{z-x} \{P_n(x) P_{n-1}(z) - P_{n-1}(x) P_n(z)\}\,dx = -\frac{2}{n}$. УВ II 131

7.224 [z принадлежит комплексной плоскости с разрезом вдоль интервала от -1 до $+1$].

1. $\int\limits_{-1}^{1} (z-x)^{-1} P_n(x)\,dx = 2Q_n(z)$. ИП II 277 (7)

2. $\int\limits_{-1}^{1} x(z-x)^{-1} P_0(x)\,dx = 2Q_1(z)$. ИП II 277 (8)

3. $\int\limits_{-1}^{1} x^{n+1}(z-x)^{-1} P_n(x)\,dx = 2z^{n+1}Q_n(z) - \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$. ИП II 277 (9)

4. $\int\limits_{-1}^{1} x^m (z-x)^{-1} P_n(x)\,dx = 2z^m Q_n(z)$ $[m \leqslant n]$. ИП II 277 (10) *и*

5. $\int\limits_{-1}^{1} (z-x)^{-1} P_m(x) P_n(x)\,dx = 2P_m(z) Q_n(z)$ $[m \leqslant n]$. ИП II 278 (18) *и*

6. $\int\limits_{-1}^{1} (z-x)^{-1} P_n(x) P_{n+1}(x)\,dx = 2P_{n+1}(z) Q_n(z) - \frac{2}{n+1}$. ИП II 278 (19)

7. $\int\limits_{-1}^{1} x(z-x)^{-1} P_m(x) P_n(x)\,dx = 2zP_m(z) Q_n(z)$ $[m < n]$. ИП II 278 (21)

8. $\int\limits_{-1}^{1} x(z-x)^{-1} [P_n(x)]^2\,dx = 2zP_n(z) Q_n(z) - \frac{2}{2n+1}$. ИП II 278 (20)

7.225

1. $\int\limits_{-1}^{x} (x-t)^{-\frac{1}{2}} P_n(t)\,dt = \left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1} (1+x)^{-\frac{1}{2}} [T_n(x) + T_{n+1}(x)]$.

ВТФ II 187 (43)

2. $\int\limits_{x}^{1} (t-x)^{-\frac{1}{2}} P_n(t)\,dt = \left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} [T_n(x) - T_{n+1}(x)]$.

ВТФ II 187 (44)

3. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} P_n(x)\,dx = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2n+1}.$$ ВТФ II 183(49)

4. $$\int_{-1}^{1} (\operatorname{ch} 2p - x)^{-\frac{1}{2}} P_n(x)\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{2n+1} \exp[-(2n+1)p] \quad [p>0].$$ УВ II 96

7.226

1. $$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} P_{2m}(x)\,dx = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}{m!}\right]^2.$$ ИП II 276(4)

2. $$\int_{-1}^{1} x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} P_{2m+1}(x)\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)}{m!\,(m+1)!}.$$ ИП II 276(5)

3. $$\int_{-1}^{1} (1+px^2)^{-m-\frac{3}{2}} P_{2m}(x)\,dx = \frac{2}{2m+1}(-p)^m (1+p)^{-m-\frac{1}{2}}$$ $[|p|<1]$. МО 71

7.227 $$\int_{0}^{1} x(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} P_n(1-2x^2)\,dx = \frac{\left[a+(a^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]^{-2n-1}}{2n+1}$$ $[\operatorname{Re} a > 0]$. ИП II 278(23)

7.23 Полиномы Лежандра и степенная функция

7.231

1. $$\int_{0}^{1} x^{\lambda} P_{2m}(x)\,dx = \frac{(-1)^m \Gamma\left(m-\frac{1}{2}\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda\right)}{2\Gamma\left(-\frac{1}{2}\lambda\right)\Gamma\left(m+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\lambda\right)}$$ $[\operatorname{Re}\lambda > -1]$. ВТФ II 183(51)

2. $$\int_{0}^{1} x^{\lambda} P_{2n+1}(x)\,dx = \frac{(-1)^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\lambda\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda\right)\Gamma\left(m+2+\frac{1}{2}\lambda\right)}$$ $[\operatorname{Re}\lambda > -2]$. ВТФ II 183(52)

7.232

1. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{a-1} P_m(x) P_n(x)\,dx =$$
$$= \frac{2^a \Gamma(a)\Gamma(n-a+1)}{\Gamma(1-a)\Gamma(n+a+1)}\, {}_4F_3(-m,\ m+1,\ a,\ a;\ 1,\ a+n+1,\ a-n;\ 1)$$ $[\operatorname{Re} a > 0]$. ИП II 278(17)

2. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{a-1}(1+x)^{b-1} P_n(x)\,dx =$$
$$= \frac{2^{a+b-1}\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\, {}_3F_2(-n,\ 1+n,\ a;\ 1,\ a+b;\ 1)$$
$[\operatorname{Re} a > 0,\quad \operatorname{Re} b > 0]$. ИП II 276 (6)

3. $$\int_0^1 (1-x)^{\mu-1} P_n(1-\gamma x)\,dx = \frac{\Gamma(\mu)\,n!}{\Gamma(\mu+n+1)} P_n^{(\mu,\,-\mu)}(1-\gamma)$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0]$. ИП II 190 (37) и

4. $$\int_0^1 (1-x)^{\mu-1} x^{\nu-1} P_n(1-\gamma x)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}\, {}_3F_2\left(-n,\ n+1,\ \nu;\ 1,\ \mu+\nu;\ \frac{1}{2}\gamma\right)$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП II 190 (38)

7.233 $$\int_0^1 x^{2\mu-1} P_n(1-2x^2)\,dx = \frac{(-1)^n[\Gamma(\mu)]^2}{2\Gamma(\mu+n)\Gamma(\mu-n)}$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0]$. ИП II 278 (22)

7.24. Полиномы Лежандра и другие элементарные функции

7.241 $$\int_0^\infty P_n(1-x)e^{-ax}\,dx = e^{-a}a^n\left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^n\left(\frac{e^a}{a}\right);$$
$$= a^n\left(1+\frac{1}{2}\frac{d}{da}\right)^n\left(\frac{1}{a^{n+1}}\right)$$
$[\operatorname{Re} a > 0]$. ИП I 171 (2)

7.242 $$\int_0^\infty P_n(e^{-x})e^{-ax}\,dx = \frac{(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{(a+n)(a+n-2)\ldots(a-n+2)}$$
$[n \geqslant 2,\ \operatorname{Re} a > 0]$. ИП I 171 (3)

7.243

1. $$\int_0^\infty P_{2n}(\operatorname{ch} x)e^{-ax}\,dx = \frac{(a^2-1^2)(a^2-3^2)\ldots[a^2-(2n-1)^2]}{a(a^2-2^2)(a^2-4^2)\ldots[a^2-(2n)^2]}$$
$[\operatorname{Re} a > 2n]$. ИП I 171 (6)

2. $$\int_0^\infty P_{2n+1}(\operatorname{ch} x)e^{-ax}\,dx = \frac{a(a^2-2^2)(a^2-4^2)\ldots[a^2-(2n)^2]}{(a^2-1)(a^2-3^2)\ldots[a^2-(2n+1)^2]}$$
$[\operatorname{Re} a > 2n+1]$. ИП I 171 (7)

3. $$\int_0^\infty P_{2n}(\cos x)e^{-ax}\,dx = \frac{(a^2+1^2)(a^2+3^2)\ldots[a^2+(2n-1)^2]}{a(a^2+2^2)(a^2+4^2)\ldots[a^2+(2n)^2]}$$
$[\operatorname{Re} a > 0]$. ИП I 171 (4)

4. $$\int_0^\infty P_{2n+1}(\cos x)\, e^{-ax}\, dx = \frac{a(a^2+2^2)(a^2+4^2)\ldots[a^2+(2n)^2]}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)\ldots[a^2+(2n+1)^2]}$$

$[\operatorname{Re} a > 0]$. ИП I 171 (5)

7.244

1. $$\int_0^1 P_n(1-2x^2)\sin ax\, dx = \frac{\pi}{2}\left[J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2 \qquad [a>0].$$ ИП I 94(2)

2. $$\int_0^1 P_n(1-2x^2)\cos ax\, dx = \frac{\pi}{2}(-1)^n J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2}\right) J_{-n-\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)$$

$[a>0]$. ИП I 38 (1)

7.245

1. $$\int_0^{2\pi} P_{2m+1}(\cos\theta)\cos\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2^{4m+1}}\binom{2m}{m}\binom{2m+2}{m+1}.$$

МО 70, ВТФ II 183 (50)

2. $$\int_0^\pi P_m(\cos\theta)\sin n\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{2(n-m+1)(n-m+3)\ldots(n+m-1)}{(n-m)(n-m+2)\ldots(n+m)}$$

$[n>m, \quad n+m$ нечетно];

$$=0 \quad [n \leqslant m \quad \text{или} \quad n+m \text{ четно}].$$ МО 71

7.246 $$\int_0^\pi P_n(1-2\sin^2 x\sin^2\theta)\sin x\, dx = \frac{2\sin(2n+1)\theta}{(2n+1)\sin\theta}.$$ МО 71

7.247 $$\int_0^1 P_{2n+1}(x)\sin ax\frac{dx}{\sqrt{x}} = (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}J_{2n+\frac{3}{2}}(a)$$

$[a>0]$. ИП I 94 (1)

7.248

1. $$\int_{-1}^1 (a^2+b^2-2abx)^{-\frac{1}{2}}\sin[\lambda(a^2+b^2-2abx)^{\frac{1}{2}}]P_n(x)\, dx =$$

$$= \pi(ab)^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(a\lambda) J_{n+\frac{1}{2}}(b\lambda)$$

$[a>0, \quad b>0]$. ИП II 277 (11)

2. $$\int_{-1}^1 (a^2+b^2-2abx)^{-\frac{1}{2}}\cos[\lambda(a^2+b^2-2abx)^{\frac{1}{2}}]P_n(x)\, dx =$$

$$= \pi(ab)^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(a\lambda) N_{n+\frac{1}{2}}(b\lambda) \qquad [0 \leqslant a \leqslant b].$$ ИП II 277 (12)

7.249 $\int\limits_{-1}^{1} P_n(x) \arcsin x \, dx = 0 \qquad [n - \text{четное}];$

$$= \pi \left\{ \frac{(n-2)!!}{2^{\frac{1}{2}(n+1)} \left(\frac{n+1}{2}\right)!} \right\}^2 \quad [n - \text{нечетное}]. \qquad \text{УВ II 129}$$

7.25 Полиномы Лежандра и цилиндрические функции

7.251

1 $\int\limits_0^1 x P_n(1-2x^2) N_\nu(xy) \, dx = \pi^{-1} y^{-1} [S_{2n+1}(y) + \pi N_{2n+1}(y)]$

$[n = 0, 1, \ldots; y > 0, \ \nu > 0]. \qquad$ ИП II 108 (1)

2 $\int\limits_0^1 x P_n(1-2x^2) K_0(xy) \, dx = y^{-1} \left[(-1)^{n+1} K_{2n+1}(y) + \frac{i}{2} S_{2n+1}(iy) \right]$

$[y > 0]. \qquad$ ИП II 134 (1)

3 $\int\limits_0^1 x P_n(1-2x^2) J_0(xy) \, dx = y^{-1} J_{2n+1}(y) \qquad [y > 0]. \qquad$ ИП II 13 (1)

4 $\int\limits_0^1 x P_n(1-2x^2) [J_0(ax)]^2 \, dx = \frac{1}{2(2n+1)} \{[J_n(a)]^2 + [J_{n+1}(a)]^2\}.$

ИП II 338 (39) *и*

5 $\int\limits_0^1 x P_n(1-2x^2) J_0(ax) N_0(ax) \, dx =$

$$= \frac{1}{2(2n+1)} [J_n(a) N_n(a) + J_{n+1}(a) N_{n+1}(a)].$$

ИП II 339 (48) *и*

6 $\int\limits_0^1 x^2 P_n(1-2x^2) J_1(xy) \, dx = y^{-1} (2n+1)^{-1} [(n+1) J_{2n+2}(y) -$

$- n J_{2n}(y)] \quad [y > 0]. \qquad$ ИП II 20 (23)

7 $\int\limits_0^1 x^{\mu-1} P_n(2x^2-1) J_\nu(ax) \, dx =$

$$= \frac{2^{-\nu-1} a^\nu \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu\right) \right]^2}{\Gamma(\nu+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + n + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu - n\right)} \times$$

$$\times {}_2F_3\left(\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{\mu+\nu}{2}; \nu+1, \frac{\mu+\nu}{2}+n+1, \frac{\mu+\nu}{2}-n; -\frac{a^2}{4}\right)$$

$[a > 0, \ \mathrm{Re}(\mu+\nu) > 0]. \qquad$ ИП II 337 (32) *и*

7.252 $$\int_0^1 e^{-ax} P_n(1-2x) I_0(ax)\,dx = \frac{e^{-a}}{2n+1}[I_n(a)+I_{n+1}(a)]$$

$[a>0]$. ИП II 366 (11) и

7.253 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) P_n(\cos 2x) J_0(a\sin x)\,dx = a^{-1} J_{2n+1}(a).$$ ИП II 361 (20)

7.254 $$\int_0^1 xP_n(1-2x^2)[I_0(ax)-\mathbf{L}_0(ax)]\,dx = (-1)^n[I_{2n+1}(a)-\mathbf{L}_{2n+1}(a)]$$

$[a>0]$. ИП II 385 (14) и

7.3—7.4 ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

7.31. Многочлены Гегенбауэра $C_n^\nu(x)$ и степенная функция

7.311

1. $$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} C_n^\nu(x)\,dx = 0 \quad \left[n>0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 280 (1)

2. $$\int_0^1 x^{n+2\varrho}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} C_n^\nu(x)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(2\nu+n)\Gamma(2\varrho+n+1)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\varrho+\frac{1}{2}\right)}{2^{n+1}\Gamma(2\nu)\Gamma(2\varrho+1)\,n!\,\Gamma(n+\nu+\varrho+1)}$$
$\left[\operatorname{Re}\varrho > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 280 (2)

3. $$\int_{-1}^1 (1-x)^{\nu-\frac{1}{2}}(1+x)^\beta C_n^\nu(x)\,dx =$$
$$= \frac{2^{\beta+\nu+\frac{1}{2}}\Gamma(\beta+1)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\nu+n)\Gamma\left(\beta-\nu+\frac{3}{2}\right)}{n!\,\Gamma(2\nu)\Gamma\left(\beta-\nu-n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\nu+n+\frac{3}{2}\right)}$$
$\left[\operatorname{Re}\beta > -1,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 280 (3)

4. $$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha(1+x)^\beta C_n^\nu(x)\,dx =$$
$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)\Gamma(\alpha+\beta+2)} \times$$
$$\times {}_3F_2\left(-n,\ n+2\nu,\ \alpha+1;\ \nu+\frac{1}{2},\ \alpha+\beta+2;\ 1\right)$$
$[\operatorname{Re}\alpha > -1,\ \operatorname{Re}\beta > -1]$. ИП II 281 (4)

7.312 В нижеследующих интегралах z принадлежит комплексной плоскости с разрезом вдоль интервала действительной оси от -1 до 1.

1. $$\int_{-1}^{1} x^m (z-x)^{-1} (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} C_n^\nu(x)\,dx =$$
$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{3}{2}-\nu}}{\Gamma(\nu)} e^{-\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi i} z^m (z^2-1)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}} Q_{n+\nu-\frac{1}{2}}^{\nu-\frac{1}{2}}(z)$$
$$\left[m \leqslant n,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 281 (5)

2. $$\int_{-1}^{1} x^{n+1} (z-x)^{-1} (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} C_n^\nu(x)\,dx =$$
$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{3}{2}-\nu}}{\Gamma(\nu)} e^{-\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi i} z^{n+1} (z^2-1)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}} Q_{n+\nu-\frac{1}{2}}^{\nu-\frac{1}{2}}(z) -$$
$$- \frac{\pi\, 2^{1-2\nu-n} n!}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\nu+n+1)}$$
$$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 281 (6)

3. $$\int_{-1}^{1} (z-x)^{-1} (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} C_m^\nu(x)\, C_n^\nu(x)\,dx =$$
$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}-\nu}}{\Gamma(\nu)} e^{-\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi i} (z^2-1)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}} C_m^\nu(z)\, Q_{n+\nu-\frac{1}{2}}^{\nu-\frac{1}{2}}(z)$$
$$\left[m \leqslant n,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 283 (17)

7.313

1. $$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} C_m^\nu(x)\, C_n^\nu(x)\,dx = 0$$
$$\left[m \neq n,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 282 (12), МО 98 *и*, ВТФ I 177 (16)

2. $$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} [C_n^\nu(x)]^2\,dx = \frac{\pi 2^{1-2\nu}\Gamma(2\nu+n)}{n!\,(n+\nu)\,[\Gamma(\nu)]^2}$$
$$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 281 (8), МО 98 *и*, ВТФ I 177 (17)

7.314

1. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\nu-\frac{3}{2}} (1+x)^{\nu-\frac{1}{2}} [C_n^\nu(x)]^2\,dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\nu+n)}{n!\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(2\nu)}$$
$$\left[\operatorname{Re}\nu > \frac{1}{2}\right].$$ ИП II 281 (9)

2. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\nu-\frac{1}{2}} (1+x)^{2\nu-1} [C_n^\nu(x)]^2\, dx = \frac{2^{3\nu-\frac{1}{2}} [\Gamma(2\nu+n)]^2 \Gamma\left(2n+\nu+\frac{1}{2}\right)}{(n!)^2 \Gamma(2\nu) \Gamma\left(3\nu+2n+\frac{1}{2}\right)}$$

$[\operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП II 282 (10)

3. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{3\nu+2n-\frac{3}{2}} (1+x)^{\nu-\frac{1}{2}} [C_n^\nu(x)]^2\, dx =$$
$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]^2 \Gamma\left(\nu+2n+\frac{1}{2}\right) \Gamma(2\nu+2n) \Gamma\left(3\nu+2n-\frac{1}{2}\right)}{2^{2\nu+2n}\left[n!\,\Gamma\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\nu)\right]^2 \Gamma\left(2\nu+2n+\frac{1}{2}\right)}$$

$\left[\operatorname{Re}\nu > \frac{1}{6}\right]$. ИП II 282 (11)

4 $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\nu-\frac{1}{2}} (1+x)^{\nu+m-n-\frac{3}{2}} C_m^\nu(x) C_n^\nu(x)\, dx =$$
$$= (-1)^m \frac{2^{2-2\nu-m+n} \pi^{\frac{3}{2}} \Gamma(2\nu+n)}{m!\,(n-m)!\,[\Gamma(\nu)]^2 \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+m\right)} \times$$
$$\times \frac{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}+m-n\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu+m-n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu-n\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+m-n\right)}$$

$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2};\ n \geqslant m\right]$. ИП II 282 (13) и

5 $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{2\nu-1} (1+x)^{\nu-\frac{1}{2}} C_m^\nu(x) C_n^\nu(x)\, dx =$$
$$= \frac{2^{3\nu-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \Gamma(2\nu+m) \Gamma(2\nu+n)}{m!\,n!\,\Gamma(2\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} \times$$
$$\times \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+m+n\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu+n-m\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+n-m\right) \Gamma\left(3\nu+\frac{1}{2}+m+n\right)}$$

$[\operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП II 282 (14)

6. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\nu-\frac{1}{2}} (1+x)^{3\nu+m+n-\frac{3}{2}} C_m^\nu(x) C_n^\nu(x)\, dx =$$
$$= \frac{2^{4\nu+m+n-1} \left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \Gamma(2\nu+m+n)\right]^2}{\Gamma\left(\nu+m+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right) \Gamma(2\nu+m)} \times$$
$$\times \frac{\Gamma\left(\nu+m+n+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(3\nu+m+n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\nu+n) \Gamma(4\nu+2m+2n)}$$

$\left[\operatorname{Re}\nu > \frac{1}{6}\right]$. ИП II 282 (15)

7. $$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\nu-\frac{1}{2}}C_m^{\mu}(x)C_n^{\nu}(x)\,dx=$$

$$=\frac{2^{\alpha+\nu+\frac{1}{2}}\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu-\alpha+n-\frac{1}{2}\right)}{m!n!\Gamma\left(\nu-\alpha-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu-\alpha+n+\frac{3}{2}\right)}\frac{\Gamma(2\mu+m)\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma(2\mu)\Gamma(2\nu)}\times$$

$$\times\,{}_4F_3\left(-m,\ m+2\mu,\ \alpha+1,\ \alpha-\nu+\frac{3}{2};\right.$$

$$\left.\mu+\frac{1}{2},\ \nu+\alpha+n+\frac{3}{2},\ \alpha-\nu-n+\frac{3}{2};\ 1\right)$$

$\left[\operatorname{Re}\alpha>-1,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$. ИП II 283 (16)

7.315 $$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}\nu-1}C_{2n}^{\nu}(ax)\,dx=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)}C_n^{\frac{1}{2}\nu}(2a^2-1)$$

$[\operatorname{Re}\nu>0]$. ИП II 283 (19)

7.316 $$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\nu-1}C_n^{\nu}(\cos\alpha\cos\beta+x\sin\alpha\sin\beta)\,dx=$$

$$=\frac{2^{2\nu-1}n!\,[\Gamma(\nu)]^2}{\Gamma(2\nu+n)}C_n^{\nu}(\cos\alpha)\,C_n^{\nu}(\cos\beta)$$

$[\operatorname{Re}\nu>0]$. ИП II 283 (20)

7.317

1 $$\int_{0}^{1}(1-x)^{\mu-1}x^{\lambda-\frac{1}{2}}C_n^{\lambda}(1-\gamma x)\,dx=\frac{\Gamma(2\lambda+n)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\lambda+\mu+n+\frac{1}{2}\right)}P_n^{(\alpha,\beta)}(1-\gamma),$$

$$\alpha=\lambda+\mu-\frac{1}{2},\quad \beta=\lambda-\mu-\frac{1}{2}$$

$\left[\operatorname{Re}\lambda>-1,\ \lambda\neq 0,\ -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\mu>0\right]$. ИП II 190 (39) и

2 $$\int_{0}^{1}(1-x)^{\mu-1}x^{\nu-1}C_n^{\lambda}(1-\gamma x)\,dx=\frac{\Gamma(2\lambda+n)\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{n!\Gamma(2\lambda)\Gamma(\mu+\nu)}\times$$

$$\times\,{}_3F_2\left(-n,\ n+2\lambda,\ \nu;\ \lambda+\frac{1}{2},\ \mu+\nu;\ \frac{\gamma}{2}\right)$$

$[2\lambda\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ \operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$. ИП II 191 (40) и

7.318 $$\int_{0}^{1}x^{2\nu}(1-x^2)^{\sigma-1}C_n^{\nu}(1-x^2y)\,dx=$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu+n)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\sigma)}{2\Gamma(2\nu)\Gamma\left(n+\nu+\sigma+\frac{1}{2}\right)}P_n^{(\alpha,\beta)}(1-y),$$

$$\alpha=\nu+\sigma-\frac{1}{2},\quad \beta=\nu-\sigma-\frac{1}{2}$$

$\left[\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\sigma>0\right]$. ИП II 283 (21)

7.319

1. $$\int_0^1 (1-x)^{\mu-1} x^{\nu-1} C_{2n}^{\lambda}\left(\gamma x^{\frac{1}{2}}\right) dx = (-1)^n \frac{\Gamma(\lambda+n)\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{n!\,\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu+\nu)} \times$$
$$\times {}_3F_2\left(-n,\ n+\lambda,\ \nu;\ \frac{1}{2},\ \mu+\nu;\ \gamma^2\right)$$
$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП II 191 (41) *и*

2. $$\int_0^1 (1-x)^{\mu-1} x^{\nu-1} C_{2n+1}^{\lambda}\left(\gamma x^{\frac{1}{2}}\right) dx =$$
$$= \frac{(-1)^n 2\gamma\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda+n+1)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)} \times$$
$$\times {}_3F_2\left(-n,\ n+\lambda+1,\ \nu+\frac{1}{2};\ \frac{3}{2},\ \mu+\nu+\frac{1}{2};\ \gamma^2\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 191 (42)

7.32 Многочлены $C_n^{\nu}(x)$ и другие элементарные функции

7.321 $$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{iax} C_n^{\nu}(x)\, dx =$$
$$= \frac{\pi 2^{1-\nu} i^n \Gamma(2\nu+n)}{n!\,\Gamma(\nu)} a^{-\nu} J_{\nu+n}(a)$$
$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 281 (7), МО 99 *и*

7.322 $$\int_0^{2a} [x(2a-x)]^{\nu-\frac{1}{2}} C_n^{\nu}\left(\frac{x}{a}-1\right) e^{-bx}\, dx =$$
$$= (-1)^n \frac{\pi\Gamma(2\nu+n)}{n!\,\Gamma(\nu)} \left(\frac{a}{2b}\right)^{\nu} e^{-ab} I_{\nu+n}(ab)$$
$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. ИП I 171 (9)

7.323

1. $$\int_0^{\pi} C_n^{\nu}(\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu}\, d\varphi = 0 \qquad [n = 1, 2, 3, \ldots];$$
$$= 2^{-2\nu}\pi\Gamma(2\nu+1)[\Gamma(1+\nu)]^{-2} \qquad [n=0].$$
ВТФ I 177 (18)

2. $$\int_0^{\pi} C_n^{\nu}(\cos\psi\cos\psi' + \sin\psi\sin\psi'\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu-1}\, d\varphi =$$
$$= 2^{2\nu-1} n!\,[\Gamma(\nu)]^2 C_n^{\nu}(\cos\psi) C_n^{\nu}(\cos\psi')[\Gamma(2\nu+n)]^{-1}$$
$[\operatorname{Re}\nu > 0]$. ВТФ I 177 (20)

7.324

1. $$\int_0^1 (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} C_{2n+1}^{\nu}(x) \sin ax\, dx =$$
$$= (-1)^n \pi \frac{\Gamma(2n+2\nu+1) J_{2n+\nu+1}(a)}{(2n+1)!\, \Gamma(\nu)(2a)^{\nu}}$$
$$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2},\ a > 0\right].$$ ИП I 94 (4)

2. $$\int_0^1 (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} C_{2n}^{\nu}(x) \cos ax\, dx =$$
$$= \frac{(-1)^n \pi \Gamma(2n+2\nu) J_{\nu+2n}(a)}{(2n)!\, \Gamma(\nu)(2a)^{\nu}} \qquad \left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2},\ a > 0\right].$$
ИП I 38 (3) и

7.33 Многочлены $C_n^{\nu}(x)$ и цилиндрические функции. Интегрирование по индексу функций Гегенбауэра

7.331

1. $$\int_1^{\infty} x^{2n+1-\nu} (x^2-1)^{\nu-2n-\frac{1}{2}} C_{2n}^{\nu-2n}\left(\frac{1}{x}\right) J_{\nu}(xy)\, dx =$$
$$= (-1)^n 2^{2n-\nu+1} y^{-\nu+2n-1} [(2n)!]^{-1} \Gamma(2\nu-2n) [\Gamma(\nu-2n)]^{-1} \cos y$$
$$\left[y > 0,\ 2n-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < 2n+\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 44 (10) и

2. $$\int_1^{\infty} x^{4n-\nu+2} (x^2-1)^{\nu-2n-\frac{3}{2}} C_{2n+1}^{\nu-2n-1}\left(\frac{1}{x}\right) J_{\nu}(xy)\, dx =$$
$$= (-1)^n 2^{2n-\nu+2} y^{-\nu+2n} \Gamma(2\nu-2n-1) \times$$
$$\times [(2n+1)!\, \Gamma(\nu-2n-1)]^{-1} \sin y$$
$$\left[y > 0,\ 2n+\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < 2n+\frac{3}{2}\right].$$ ИП II 44 (11) и

7.332

1. $$\int_0^{\infty} x^{\nu+1} (x^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{3}{4}} C_{2n+1}^{\nu+\frac{1}{2}} \left[(x^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\beta\right] \times$$
$$\times J_{\nu+\frac{3}{2}+2n}\left[(x^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}} a\right] J_{\nu}(xy)\, dx =$$
$$= (-1)^n 2^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}-\nu} y^{\nu} (a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \sin\left[\beta(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\right] \times$$
$$\times C_{2n+1}^{\nu+\frac{1}{2}}\left[\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad [0 < y < a];$$
$$= 0 \qquad [a < y < \infty]$$
$$[a > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1].$$ ИП II 59 (23)

2. $$\int_0^\infty x^{\nu+1}(x^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{3}{4}} C_{2n}^{\nu+\frac{1}{2}}\left[\beta(x^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\times$$
$$\times J_{\nu+\frac{1}{2}+2n}\left[(x^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}a\right] J_\nu(xy)\,dx =$$
$$=(-1)^n 2^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}-\nu} y^\nu (a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\left[\beta(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\right]\times$$
$$\times C_{2n}^{\nu+\frac{1}{2}}\left[\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad [0<y<a];$$
$$=0 \qquad [a<y<\infty]$$
$[a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП II 59 (24)

7.333

1. $$\int_0^\pi (\sin x)^{\nu+1}\cos(a\cos\theta\cos x)\, C_n^{\nu+\frac{1}{2}}(\cos x) J_\nu(a\sin\theta\sin x)\,dx =$$
$$=(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}(\sin\theta)^\nu C_n^{\nu+\frac{1}{2}}(\cos\theta) J_{\nu+\frac{1}{2}+n}(a) \qquad [n=0,\ 2,\ 4,\ \ldots];$$
$$=0 \qquad [n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots]$$
$[\operatorname{Re}\nu>-1]$. В 414 (2) *u*

2. $$\int_0^\pi (\sin x)^{\nu+1}\sin(a\cos\theta\cos x)\, C_n^{\nu+\frac{1}{2}}(\cos x) J_\nu(a\sin\theta\sin x)\,dx =$$
$$=0 \qquad [n=0,\ 2,\ 4,\ \ldots];$$
$$=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}(\sin\theta)^\nu C_n^{\nu+\frac{1}{2}}(\cos\theta) J_{\nu+\frac{1}{2}+n}(a) \qquad [n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots]$$
$[\operatorname{Re}\nu>-1]$. В 414 (3) *u*

7.334

1. $$\int_0^\pi (\sin x)^{2\nu} C_n^\nu(\cos x)\frac{J_\nu(\omega)}{\omega^\nu}\,dx =$$
$$=\frac{\pi\Gamma(2\nu+n)}{2^{\nu-1}n!\,\Gamma(\nu)}\,\frac{J_{\nu+n}(\alpha)}{\alpha^\nu}\,\frac{J_{\nu+n}(\beta)}{\beta^\nu},$$
$$\omega=(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x)^{\frac{1}{2}} \qquad \left[n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$
ИП II 362 (29)

2. $$\int_0^\pi (\sin x)^{2\nu} C_n^\nu(\cos x)\frac{N_\nu(\omega)}{\omega^\nu}\,dx =$$
$$=\frac{\pi\Gamma(2\nu+n)}{2^{\nu-1}n!\,\Gamma(\nu)}\,\frac{J_{\nu+n}(\alpha)}{\alpha^\nu}\,\frac{N_{\nu+n}(\beta)}{\beta^\nu},$$
$$\omega=(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos x)^{\frac{1}{2}} \qquad \left[|\alpha|<|\beta|,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$
ИП II 362 (30)

Интегрирование по индексу функций Гегенбауэра

7.335 $$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [\sin(\alpha\pi)]^{-1} t^{\alpha} C_{\alpha}^{\nu}(z)\, d\alpha = -2i(1+2tz+t^2)^{-\nu}$$

$$[-2 < \operatorname{Re}\nu < c < 0, \ |\arg(z \pm 1)| < \pi].$$ ВТФ I 178 (25)

7.336 $$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(\pi x)\left(\nu - \frac{1}{2} + ix\right) K_{\nu-\frac{1}{2}+ix}(a) I_{\nu-\frac{1}{2}+ix}(b) C^{\nu}_{-\frac{1}{2}+ix}(-\cos\varphi)\, dx =$$

$$= \frac{2^{-\nu+1}(ab)^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \omega^{-\nu} K_{\nu}(\omega),$$

$$\omega = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}$$ ВТФ II 55 (45)

7.34 Многочлены Чебышёва и степенная функция

7.341 $$\int_{-1}^{1} [T_n(x)]^2\, dx = 1 - (4n^2-1)^{-1}.$$ ИП II 271 (6)

7.342 $$\int_{-1}^{1} U_n\left[x(1-y^2)^{\frac{1}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{2}} + yz\right] dx =$$

$$= \frac{2}{n+1} U_n(y)\, U_n(z) \qquad [|y| < 1, \ |z| < 1].$$ ИП II 275 (34)

7.343

1. $$\int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad [m \neq n];$$

$$= \frac{\pi}{2} \qquad [m = n \neq 0];$$

$$= \pi \qquad [m = n = 0].$$

МО 104

2. $$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, U_n(x)\, U_m(x)\, dx = 0 \qquad [m \neq n \ \text{или} \ m = n = 0];$$

ИП II 274 (28)

$$= \frac{\pi}{2} \qquad [m = n \neq 0].$$

ИП II 274 (27), МО 105 и

7.344

1. $$\int_{-1}^{1} (y-x)^{-1}(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(y)\, dy = \pi U_{n-1}(x)$$

$$[n = 1, 2, \ldots].$$ ВТФ II 187 (47)

2. $$\int_{-1}^{1} (y-x)^{-1}(1-y^2)^{\frac{1}{2}} U_{n-1}(y)\, dy = -\pi T_n(x)$$

$$[n = 1, 2, \ldots].$$ ВТФ II 187 (48)

7.345

1 $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{m-n-\frac{3}{2}} T_m(x) T_n(x)\, dx = 0 \quad [m > n].$$ ИП II 272(10)

2. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{m+n-\frac{3}{2}} T_m(x) T_n(x)\, dx = \frac{\pi (2m+2n-2)!}{2^{m+n} (2m-1)!\,(2n-1)!}$$ $[m+n \neq 0]$. ИП II 272(11)

3. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\frac{1}{2}} (1+x)^{m+n+\frac{3}{2}} U_m(x) U_n(x)\, dx = \frac{\pi (2m+2n+2)!}{2^{m+n+2} (2m+1)!\,(2n+1)!}.$$ ИП II 274(31)

4. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\frac{1}{2}} (1+x)^{m-n-\frac{1}{2}} U_m(x) U_n(x)\, dx = 0 \quad [m > n].$$ ИП II 274(30)

5 $$\int_{-1}^{1} (1-x)(1+x)^{\frac{1}{2}} U_m(x) U_n(x)\, dx = \frac{2^{\frac{5}{2}}(m+1)(n+1)}{\left(m+n+\frac{3}{2}\right)\left(m+n+\frac{5}{2}\right)[1-4(m-n)^2]}.$$ ИП II 274(29)

6 $$\int_{-1}^{1} (1+x)^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\alpha-1} T_m(x) T_n(x)\, dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} 2^{\alpha-\frac{1}{2}} \Gamma(\alpha) \Gamma\left(n-\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) \Gamma\left(\alpha+n+\frac{1}{2}\right)} \times {}_4F_3\left(-m, m, \alpha, \alpha+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \alpha+n+\frac{1}{2}, \alpha-n+\frac{1}{2}; 1\right)$$ $[\operatorname{Re}\alpha > 0]$. ИП II 272(12)

7 $$\int_{-1}^{1} (1+x)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\alpha-1} U_m(x) U_n(x)\, dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} 2^{\alpha-\frac{1}{2}} (m+1)(n+1) \Gamma(\alpha) \Gamma\left(n-\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\alpha\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}+\alpha+n\right)} \times {}_4F_3\left(-m, m+2, \alpha, \alpha-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \alpha+n+\frac{3}{2}, \alpha-n-\frac{1}{2}; 1\right)$$ $[\operatorname{Re}\alpha > 0]$. ИП II 275(32)

7.346 $$\int_{0}^{1} x^{s-1} T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{s 2^s \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}n\right)}$$ $[\operatorname{Re} s > 0]$. ИП I 324(2)

7.347

1. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} T_n(x)\, dx =$$
$$= \frac{2^{\alpha+\beta+2n+1} (n!)^2 \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{(2n)!\, \Gamma(\alpha+\beta+2)} {}_3F_2\left(-n, n, \alpha+1; \frac{1}{2}, \alpha+\beta+2; 1\right)$$
$[\operatorname{Re}\alpha > -1, \ \operatorname{Re}\beta > -1]$. ИП II 271 (2)

2 $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} U_n(x)\, dx = \frac{2^{\alpha+\beta+2n+2} [(n+1)!]^2 \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{(2n+2)!\, \Gamma(\alpha+\beta+2)} \times$$
$$\times {}_3F_2\left(-n, n+1, \alpha+1; \frac{3}{2}, \alpha+\beta+2; 1\right).$$ ИП II 273 (22)

7.348 $$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} U_{2n}(xz)\, dx = \pi P_n(2z^2-1) \qquad [|z| < 1].$$ ИП II 275 (33)

7.349 $$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(1-x^2 y)\, dx = \frac{1}{2}\pi [P_n(1-y) + P_{n-1}(1-y)].$$
ИП II 272 (14)

7.35 Многочлены Чебышёва и другие элементарные функции

7.351 $$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{2a}{x}} T_n(x)\, dx = \pi^{\frac{1}{2}} D_{n-\frac{1}{2}}\left(2a^{\frac{1}{2}}\right) D_{-n-\frac{1}{2}}\left(2a^{\frac{1}{2}}\right)$$
$[\operatorname{Re} a > 0]$. ИП II 272 (13)

7.352

1. $$\int_0^{\infty} \frac{x U_n\left[a (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}n+1} (e^{\pi x}+1)}\, dx = \frac{a^{-n}}{2n} - 2^{-n-1} \zeta\left(n+1, \frac{a+1}{2}\right)$$
$[\operatorname{Re} a > 0]$. ИП II 275 (39)

2 $$\int_0^{\infty} \frac{x U_n\left[a (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}n+1} (e^{2\pi x}-1)}\, dx = \frac{1}{2}\zeta(n+1, a) - \frac{a^{-n-1}}{4} - \frac{a^{-n}}{2n}$$
$[\operatorname{Re} a > 0]$. ИП II 276 (40)

7.353

1. $$\int_0^{\infty} (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}n} \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\pi x\right) T_n\left[a (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] dx =$$
$$= 2^{1-2n}\left[\zeta\left(n, \frac{a+1}{4}\right) - \zeta\left(n, \frac{a+3}{4}\right)\right] =$$
$$= 2^{1-n}\Phi\left(-1, n, \frac{a+1}{2}\right)$$
$[\operatorname{Re} a > 0]$. ИП II 273 (19)

2 $$\int_0^{\infty} (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}n} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\pi x\right)\right]^{-2} T_n\left[a (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] dx =$$
$$= \pi^{-1} n 2^{1-n} \zeta\left(n+1, \frac{a+1}{2}\right) \qquad [\operatorname{Re} a > 0].$$ ИП II 273 (20)

7.354

1. $$\int_{-1}^{1} \sin(xyz)\cos\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-y^2)^{\frac{1}{2}}z\right] T_{2n+1}(x)\,dx = (-1)^n \pi T_{2n+1}(y) J_{2n+1}(z).$$ ИП II 271 (4)

2. $$\int_{-1}^{1} \sin(xyz)\sin\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-y^2)^{\frac{1}{2}}z\right] U_{2n+1}(x)\,dx = (-1)^n \pi (1-y^2)^{\frac{1}{2}} U_{2n+1}(y) J_{2n+2}(z).$$ ИП II 274 (25)

3. $$\int_{-1}^{1} \cos(xyz)\cos\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-y^2)^{\frac{1}{2}}z\right] T_{2n}(x)\,dx = (-1)^n \pi T_{2n}(y) J_{2n}(z).$$ ИП II 271 (5)

4. $$\int_{-1}^{1} \cos(xyz)\sin\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-y^2)^{\frac{1}{2}}z\right] U_{2n}(x)\,dx = (-1)^n \pi (1-y^2)^{\frac{1}{2}} U_{2n}(y) J_{2n+1}(z).$$ ИП II 274 (24)

7.355

1. $$\int_0^1 T_{2n+1}(x)\sin ax \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (-1)^n \frac{\pi}{2} J_{2n+1}(a) \qquad [a>0].$$ ИП I 94 (3) *и*

2. $$\int_0^1 T_{2n}(x)\cos ax \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (-1)^n \frac{\pi}{2} J_{2n}(a) \qquad [a>0].$$ ИП I 38 (2) *и*

7.36 Многочлены Чебышёва и цилиндрические функции

7.361 $$\int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(x) J_\nu(xy)\,dx = \frac{1}{2}\pi J_{\frac{1}{2}(\nu+n)}\left(\frac{1}{2}y\right) J_{\frac{1}{2}(\nu-n)}\left(\frac{1}{2}y\right) \qquad [y>0,\ \operatorname{Re}\nu > -n-1].$$ ИП II 42 (1)

7.362 $$\int_1^\infty (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} T_n\left(\frac{1}{x}\right) K_{2\mu}(ax)\,dx = \frac{\pi}{2a} W_{\frac{1}{2}n,\mu}(a) W_{-\frac{1}{2}n,\mu}(a) \qquad [\operatorname{Re} a > 0].$$ ИП II 366 (17) *и*

7.37—7.38 Полиномы Эрмита

7.371 $$\int_0^x H_n(y)\,dy = [2(n+1)]^{-1}[H_{n+1}(x) - H_{n+1}(0)].$$ ВТФ II 194 (27)

7.372 $$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} H_{2n}(\sqrt{x}\,t)\,dt = \frac{(-1)^n \pi^{\frac{1}{2}} (2n)!\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) L_n^\alpha(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \qquad \left[\operatorname{Re}\alpha > -\frac{1}{2}\right].$$ ВТФ II 195 (34)

7.373

1. $\int\limits_0^x e^{-y^2}H_n(y)\,dy = H_{n-1}(0) - e^{-x^2}H_{n-1}(x).$ ВТФ II 194 (26)

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_{2m}(xy)\,dx = \sqrt{\pi}\,\frac{(2m)!}{m!}\,(y^2-1)^m.$ ВТФ II 195 (28)

7.374

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)\,H_m(x)\,dx = 0 \qquad [m \neq n];$ СМ III 567

$= 2^n\cdot n!\,\sqrt{\pi} \qquad [m = n].$ СМ III 568

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}H_m(x)\,H_n(x)\,dx = (-1)^{\frac{1}{2}(m+n)}\,2^{\frac{m+n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right)$

$[m+n$ четно$]$. ИП II 289 (10) и

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(ax)\,H_n(x)\,dx = 0 \qquad [m < n].$ ИП II 290 (20) и

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_{2m+n}(ax)\,H_n(x)\,dx = \sqrt{\pi}\,2^{-m+\frac{1}{2}}\,\frac{(2m+n)!}{m!}\,(a^2-1)^m a^n.$

ИП II 291 (21) и

5 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha^2x^2}H_m(x)H_n(x)dx = 2^{\frac{m+n-1}{2}}\,\alpha^{-m-n-1}\,(1-2\alpha^2)^{\frac{m+n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right)\times$

$\times\,{}_2F_1\left(-m,\ -n;\ \frac{1-m-n}{2};\ \frac{\alpha^2}{2\alpha^2-1}\right)$

$[\operatorname{Re}\alpha^2 > 0,\ m+n$ четно$]$. ИП II 289 (12) и

6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2}H_n(x)\,dx = \pi^{\frac{1}{2}}\,y^n 2^n.$ ИП II 288 (2) и, ВТФ II 195 (31)

7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2}H_m(x)\,H_n(x)\,dx = 2^n\pi^{\frac{1}{2}}m!\,y^{n-m}L_n^{n-m}(-2y^2)$

$[m \leqslant n]$. Бу 148 (15), ИП II 289 (13) и

8 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2}H_n(\alpha x)\,dx = \pi^{\frac{1}{2}}(1-\alpha^2)^{\frac{n}{2}}H_n\left[\frac{\alpha y}{(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}\right].$ ИП II 290 (17) и

9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2}H_m(\alpha x)\,H_n(\alpha x)\,dx =$

$$= \pi^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\min(m,n)} 2^k k!\binom{m}{k}\binom{n}{k}(1-\alpha^2)^{\frac{m+n}{2}-k}H_{m+n-2k}\left[\frac{\alpha y}{(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

ИП II 291 (26) и

10 $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2u}} H_n(x)\,dx = (2\pi u)^{\frac{1}{2}} (1-2u)^{\frac{n}{2}} H_n\left[y(1-2u)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$\left[0 \leqslant u < \tfrac{1}{2}\right].$$ ВТФ II 195 (30)

7.375

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} H_k(x) H_m(x) H_n(x)\,dx =$$
$$= \pi^{-1} 2^{\frac{1}{2}(m+n+k-1)} \Gamma(s-k)\,\Gamma(s-m)\,\Gamma(s-n),$$
$$2s = k+m+n+1 \quad [k+m+n \text{ четно}].$$ ИП II 290 (14) u

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_k(x) H_m(x) H_n(x)\,dx = \frac{2^{\frac{m+n+k}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} k!\, m!\, n!}{(s-k)!\,(s-m)!\,(s-n)!},$$
$$2s = m+n+k \quad [k+m+n \text{ четно}].$$ ИП II 290 (15) u

7.376

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)\,dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y)\, i^n.$$ МО 165 u

2. $$\int_0^{\infty} e^{-2\alpha x^2} x^{\nu} H_{2n}(x)\,dx = (-1)^n 2^{2n-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\nu} \times$$
$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\alpha^{\frac{1}{2}(\nu+1)}} F\left(-n, \frac{\nu+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2\alpha}\right)$$
$$[\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1].$$ Бу 150 (18a)

3. $$\int_0^{\infty} e^{-2\alpha x^2} x^{\nu} H_{2n+1}(x)\,dx =$$
$$= (-1)^n 2^{2n-\frac{1}{2}\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\alpha^{\frac{1}{2}\nu+1}} F\left(-n, \frac{\nu}{2}+1; \frac{3}{2}, \frac{1}{2\alpha}\right)$$
$$[\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -2].$$ Бу 150 (18b)

7.377 $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x+y) H_n(x+z)\,dx = 2^n \pi^{\frac{1}{2}} m!\, z^{n-m} L_m^{n-m}(-2yz)$$
$$[m \leqslant n].$$ ИП II 292 (30) u

7.378 $$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} H_n(x)\,dx =$$
$$= 2^n \sum_{m=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{n!\,\Gamma(\alpha+n-2m)}{m!\,(n-2m)!} (-1)^m 2^{-2m} \beta^{2m-\alpha-n}$$
[$\operatorname{Re}\alpha > 0$, если n четно, $\operatorname{Re}\alpha > -1$, если n нечетно, $\operatorname{Re}\beta > 0$].

ИП I 172 (11) u

7.379

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}H_{2m+1}(xy)\,dx=\pi^{\frac{1}{2}}\frac{(2m+1)!}{m!}\,y\,(y^2-1)^m.$$ ВТФ II 195 (28)

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2}H_n(xy)\,dx=\pi^{\frac{1}{2}}\,n!\,P_n(y).$$ ВТФ II 195 (29)

7.381 $$\int_{-\infty}^{\infty}(x\pm ic)^{\nu}e^{-x^2}H_n(x)\,dx=2^{n-1-\nu}\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}\right)}{\Gamma(-\nu)}\exp\left[\pm\frac{1}{2}\pi(\nu+n)\,i\right]$$

$[c>0]$. ИП II 288 (3) *и*

7.382 $$\int_0^{\infty} x^{-1}(x^2+a^2)^{-1}e^{-x^2}H_{2n+1}(x)\,dx=$$
$$=(-2)^n(\pi)^{\frac{1}{2}}a^{-2}\left[2^n n!-(2n+1)!\,e^{\frac{1}{2}a^2}D_{-2n-2}\left(a\sqrt{2}\right)\right].$$ ИП II 288 (4) *и*

7.383

1. $$\int_0^{\infty} e^{-xp}H_{2n+1}\left(\sqrt{x}\right)dx=(-1)^n2^n(2n+1)!!\,\pi^{\frac{1}{2}}(p-1)^n\,p^{-n-\frac{3}{2}}$$

$[\operatorname{Re} p>0]$ ЭД 151 (261) *и*, ИП I 172 (12) *и*

2. $$\int_0^{\infty} e^{-(b-\beta)x}H_{2n+1}\left(\sqrt{(\alpha-\beta)x}\right)dx=(-1)^n\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha-\beta}\,\frac{(2n+1)!}{n!}\,\frac{(b-\alpha)^n}{(b-\beta)^{n+\frac{3}{2}}}$$

$[\operatorname{Re}(b-\beta)>0]$ ИП I 172 (15) *и*

3. $$\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{-(b-\beta)x}H_{2n}\left(\sqrt{(\alpha-\beta)x}\right)dx=(-1)^n\sqrt{\pi}\,\frac{(2n)!}{n!}\,\frac{(b-\alpha)^n}{(b-\beta)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$[\operatorname{Re}(b-\beta)>0]$. ИП I 172 (16) *и*

4. $$\int_0^{\infty} x^{a-\frac{1}{2}n-1}e^{-bx}H_n\left(\sqrt{x}\right)dx=2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(a)\,b^{-a}{}_2F_1\left(-\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}n;\ 1-a;\ b\right)$$

$\Big[\operatorname{Re} a>\frac{1}{2}n$, если n четное; $\operatorname{Re} a>\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$, если n нечетное; $\operatorname{Re} b>0$. Если a целое, то в ряде для ${}_2F_1$ сохраняются лишь первые $1+E\left(\frac{n}{2}\right)$ членов$\Big]$. ИП I 172 (14) *и*

5. $$\int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-px}H_{2n}\left(\sqrt{x}\right)dx=(-1)^n2^n(2n-1)!!\,\pi^{\frac{1}{2}}(p-1)^n p^{-n-\frac{1}{2}}.$$

МО 177 *и*

7.384 $$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-bx}\left[H_n\left(\frac{\alpha+\sqrt{x}}{\lambda}\right)+H_n\left(\frac{\alpha-\sqrt{x}}{\lambda}\right)\right]dx =$$
$$=\sqrt{\frac{2\pi}{b}}\left(1-\lambda^{-2}b^{-1}\right)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2-\frac{1}{b}}}\right) \quad [\operatorname{Re} b > 0].$$ ИП I 173 (17) *и*

7.385

1. $$\int_0^\infty \frac{e^{-bx}}{\sqrt{e^x-1}} H_{2n}\left[\sqrt{s\left(1-e^{-x}\right)}\right]dx =$$
$$=(-1)^n 2^{2n}\sqrt{\pi}\,\frac{(2n)!\,\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+b+1)} L_n^b(s) \quad \left[\operatorname{Re} b > -\frac{1}{2}\right].$$ ИП I 174 (23) *и*

2. $$\int_0^\infty e^{-bx} H_{2n+1}\left[\sqrt{s}\sqrt{1-e^{-x}}\right]dx = (-1)^n 2^{2n}\sqrt{\pi s}\,\frac{(2n+1)!\,\Gamma(b)}{\Gamma\left(n+b+\frac{3}{2}\right)} L_n^b(s) \quad [\operatorname{Re} b > 0].$$ ИП I 174 (24) *и*

7.386 $$\int_0^\infty x^{-\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{q^2}{4x}} H_n\left(\frac{q}{2\sqrt{x}}\right) e^{-px}\,dx = 2^n \pi^{\frac{1}{2}} p^{\frac{n-1}{2}} e^{-q\sqrt{p}}.$$ ЭД 129 (117)

7.387

1. $$\int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{sh}\left(\sqrt{2}\,\beta x\right) H_{2n+1}(x)\,dx = 2^{n-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{2n+1}e^{\frac{1}{2}\beta^2}.$$ ИП II 289 (7) *и*

2. $$\int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{ch}\left(\sqrt{2}\,\beta x\right) H_{2n}(x)\,dx = 2^{n-1}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{2n}e^{\frac{1}{2}\beta^2}.$$ ИП II 289 (8) *и*

7.388

1. $$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\left(\sqrt{2}\,\beta x\right) H_{2n+1}(x)\,dx = (-1)^n 2^{n-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{2n+1}e^{-\frac{1}{2}\beta^2}.$$ ИП II 288 (5) *и*

2. $$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\left(\sqrt{2}\,\beta x\right) H_{2n+1}(ax)\,dx =$$
$$=(-1)^n 2^{-1}\pi^{\frac{1}{2}}\left(a^2-1\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2} H_{2n+1}\left(\frac{a\beta}{\sqrt{2}\left(a^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}\right).$$ ИП II 290 (18) *и*

3. $$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\left(\sqrt{2}\,\beta x\right) H_{2n}(x)\,dx = (-1)^n 2^{n-1}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{2n}e^{-\frac{1}{2}\beta^2}.$$ ИП II 289 (6) *и*

4. $$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\left(\sqrt{2}\,\beta x\right) H_{2n}(ax)\,dx = 2^{-1}\pi^{\frac{1}{2}}\left(1-a^2\right)^n e^{-\frac{1}{2}\beta^2} H_{2n}\left[\frac{a\beta}{\sqrt{2}\left(a^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}\right].$$ ИП II 290 (19) *и*

5. $\int\limits_0^\infty e^{-y^2}[H_n(y)]^2\cos(\sqrt{2}\,\beta y)\,dy = \pi^{\frac{1}{2}}2^{n-1}n!\,L_n(\beta^2).$ ВТФ II 195 (33)

6. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\sin(bx)\,H_n(x)\,H_{n+2m+1}(x)\,dx =$

$$= 2^n(-1)^m\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,n!\,b^{2m}e^{-\frac{b^2}{4}}L_n^{2m+1}\left(\frac{b^2}{2}\right)$$

$[b > 0]$. ИП I 95 (11) *u*

7 $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos(bx)\,H_n(x)\,H_{n+2m}(x)\,dx =$

$$= 2^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,n!\,(-1)^m b^{2m}e^{-\frac{b^2}{4}}L_n^{2m}\left(\frac{b^2}{2}\right)$$

$[b > 0]$. ИП I 39 (11) *u*

7.389 $\int\limits_0^\pi (\cos x)^n H_{2n}\left[a(1-\sec x)^{\frac{1}{2}}\right]dx = 2^{-n}(-1)^n\pi\frac{(2n)!}{(n!)^2}[H_n(a)]^2.$

ИП II 292 (31)

7.39 Полиномы Якоби

7.391

1. $\int\limits_{-1}^1 (1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx =$

$= 0$ $[m \neq n,\ \operatorname{Re}\alpha > -1,\ \operatorname{Re}\beta > -1]$;

$= \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,(\alpha+\beta+1+2n)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$ $[m = n,\ \operatorname{Re}\alpha > -1,\ \operatorname{Re}\beta > -1]$.

ИП II 285 (5,9)

2. $\int\limits_{-1}^1 (1-x)^\varrho(1+x)^\sigma P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx = \frac{2^{\varrho+\sigma+1}\Gamma(\varrho+1)\,\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\varrho+\sigma+2)}\times$

$\times\,{}_3F_2(-n,\ \alpha+\beta+n+1,\ \varrho+1;\ \alpha+1,\ \varrho+\sigma+2;\ 1)$

$[\operatorname{Re}\varrho > -1,\ \operatorname{Re}\sigma > -1]$. ИП II 284 (3)

3. $\int\limits_{-1}^1 (1-x)^\alpha(1+x)^\sigma P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx = \frac{2^{\alpha+\sigma+1}\Gamma(\sigma+1)\,\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\sigma-\beta+1)}{\Gamma(\sigma-\beta-n+1)\,\Gamma(\alpha+\sigma+n+2)}$

$[\operatorname{Re}\alpha > -1,\ \operatorname{Re}\sigma > -1]$. ИП II 284 (1)

4. $\int\limits_{-1}^1 (1-x)^\varrho(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx = \frac{2^{\beta+\varrho+1}\Gamma(\varrho+1)\,\Gamma(\beta+n+1)\,\Gamma(\alpha-\varrho+n)}{n!\,\Gamma(\alpha-\varrho)\,\Gamma(\beta+\varrho+n+2)}$

$[\operatorname{Re}\varrho > -1,\ \operatorname{Re}\beta > -1]$. ИП II 284 (2)

5. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta}\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2 dx = \frac{2^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,\alpha\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$$
$[\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\beta > -1]$. ИП II 285(6)

6. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{2\alpha}(1+x)^{\beta}\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2 dx =$$
$$= \frac{2^{4\alpha+\beta+1}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)[\Gamma(\alpha+n+1)]^2\Gamma(\beta+2n+1)}{\sqrt{\pi}\,(n!)^2\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+\beta+2n+2)}$$
$\left[\operatorname{Re}\alpha > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\beta > -1\right]$. ИП II 285(7)

7. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\varrho}(1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\varrho,\beta)}(x)\, dx =$$
$$= \frac{2^{\varrho+\beta+1}\Gamma(\varrho+n+1)\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{n!\,\Gamma(\beta+\varrho+2n+2)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$$
$[\operatorname{Re}\varrho > -1,\ \operatorname{Re}\beta > -1]$. ИП II 285(10)

8. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\varrho-1}(1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\varrho,\beta)}(x)\, dx =$$
$$= \frac{2^{\varrho+\beta}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\varrho)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\varrho+\beta+n+1)}$$ $[\operatorname{Re}\beta > -1,\ \operatorname{Re}\varrho > 0]$. ИП II 286(11)

9. $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\sigma} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\sigma)}(x)\, dx =$$
$$= \frac{2^{\alpha+\sigma+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+m+n+1)\Gamma(\sigma+m+1)\Gamma(\sigma-\beta+1)}{m!\,(n-m)!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\sigma+m+n+2)\Gamma(\sigma-\beta+m+1)}$$
$[\operatorname{Re}\alpha > -1,\ \operatorname{Re}\sigma > -1]$. ИП II 286(12)

10 $$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\varrho}(1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\varrho,\beta)}(x)\, dx =$$
$$= \frac{2^{\beta+\varrho+1}\Gamma(\alpha+\beta+m+n+1)\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\varrho+m+1)}{n!\,(n-m)!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\beta+\varrho+m+n+2)}\,\frac{\Gamma(\varrho-\alpha-m+n)}{\Gamma(\varrho-\alpha)}$$
$[\operatorname{Re}\beta > -1,\ \operatorname{Re}\varrho > -1]$. ИП II 287(16)

11 $$\int_{0}^{x} (1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(y)\, dy = \frac{1}{2n}\left[P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(0) - \right.$$
$$\left. -(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)\right].$$ ВТФ II 173(38)

7.392

1 $$\int_{0}^{1} x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1} P_n^{(\alpha,\beta)}(1-\gamma x)\, dx =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\lambda+\mu)}\, {}_3F_2\left(-n,\ n+\alpha+\beta+1,\ \lambda;\ \alpha+1\ \ \lambda+\mu;\ \frac{1}{2}\gamma\right)$$
$[\operatorname{Re}\lambda > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. ИП II 192(46)и

2. $$\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1} P_n^{(\alpha,\beta)}(\gamma x-1)\,dx =$$
$$=(-1)^n \frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{n!\,\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda+\mu)}\,{}_3F_2\left(-n,\ n+\alpha+\beta+1,\ \lambda;\ \beta+1,\ \lambda+\mu;\ \frac{1}{2}\gamma\right)$$
$[\operatorname{Re}\lambda>0,\ \operatorname{Re}\mu>0]$. ИП II 192(47)*u*

3. $$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\mu-1} P_n^{(\alpha,\beta)}(1-\gamma x)\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu+n+1)} P_n^{(\alpha+\mu,\,\beta-\mu)}(1-\gamma)$$
$[\operatorname{Re}\alpha>-1,\ \operatorname{Re}\mu>0]$. ИП II 191(43)*u*

4. $$\int_0^1 x^{\beta}(1-x)^{\mu-1} P_n^{(\alpha,\beta)}(\gamma x-1)\,dx = \frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\beta+\mu+n+1)} P_n^{(\alpha-\mu,\,\beta+\mu)}(\gamma-1)$$
$[\operatorname{Re}\beta>-1,\ \operatorname{Re}\mu>0]$ ИП II 191(44)*u*

7.393

1. $$\int_0^1 (1-x^2)^{\nu}\sin bx\, P_{2n+1}^{(\nu,\nu)}(x)\,dx = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n+\nu+2)\,J_{2n+\nu+\frac{3}{2}}(b)}{2^{\frac{1}{2}-\nu}(2n+1)!\,b^{\nu+\frac{1}{2}}}$$
$[b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП I 94(5)

2. $$\int_0^1 (1-x^2)^{\nu}\cos bx\, P_{2n}^{(\nu,\nu)}(x)\,dx = \frac{(-1)^n 2^{\nu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n+\nu-1)\,J_{2n+\nu+\frac{1}{2}}(b)}{(2n)!\,b^{\nu+\frac{1}{2}}}$$
$[b>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП I 38(4)

7.41—7.42 Полиномы Лагерра

7.411

1. $$\int_0^t L_n(x)\,dx = L_n(t)-L_{n+1}(t).$$ МО 110

2. $$\int_0^t L_n^{\alpha}(x)\,dx = L_n^{\alpha}(t)-L_{n+1}^{\alpha}(t)-\binom{n+\alpha}{n}+\binom{n+1+\alpha}{n+1}.$$
ВТФ II 189(16)*u*

3. $$\int_0^t L_{n-1}^{\alpha+1}(x)\,dx = -L_n^{\alpha}(t)+\binom{n+\alpha}{n}.$$ ВТФ II 189(15)*u*

4. $$\int_0^t L_m(x)L_n(t-x)\,dx = L_{m+n}(t)-L_{m+n+1}(t).$$ ВТФ II 191(31)

5. $$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_0^t L_k(x)\,dx\right]^2 = e^t-1\quad [t\geqslant 0].$$ МО 110

7.412

1. $$\int_0^1 (1-x)^{\mu-1} x^{\alpha} L_n^{\alpha}(ax)\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu+n+1)} L_n^{\alpha+\mu}(a)$$

$[\operatorname{Re}\alpha > -1,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. ВТФ II 191 (30) u, Бу 129 (14c)

2. $$\int_0^1 (1-x)^{\mu-1} x^{\lambda-1} L_n^{\alpha}(\beta x)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\lambda+\mu)}\, {}_2F_2(-n, \lambda; \alpha+1, \lambda+\mu; \beta)$$

$[\operatorname{Re}\lambda > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. ИП II 192 (50) u

7.413 $$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta} L_m^{\alpha}(xy)\, L_n^{\beta}[(1-x)y]\,dx =$$
$$= \frac{(m+n)!\,\Gamma(\alpha+m+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{m!\,n!\,\Gamma(\alpha+\beta+m+n+2)} L_{m+n}^{\alpha+\beta+1}(y)$$

$[\operatorname{Re}\alpha > -1, \operatorname{Re}\beta > -1]$. ИП II 293 (7)

7.414

1 $$\int_y^{\infty} e^{-x} L_n^{\alpha}(x)\,dx = e^{-y}[L_n^{\alpha}(y) - L_{n-1}^{\alpha}(y)].$$ ВТФ II 191 (29)

2 $$\int_0^{\infty} e^{-bx} L_n(\lambda x)\, L_n(\mu x)\,dx = \frac{(b-\lambda-\mu)^n}{b^{n+1}} P_n\left[\frac{b^2-(\lambda+\mu)b+2\lambda\mu}{b(b-\lambda-\mu)}\right]$$

$[\operatorname{Re} b > 0]$. ИП I 175 (34)

3 $$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} L_n^{\alpha}(x)\, L_m^{\alpha}(x)\,dx =$$
$$= 0 \qquad [m \neq n,\ \operatorname{Re}\alpha > -1];$$ Бу 115 (8), ИП II 293 (3)
$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \qquad [m = n,\ \operatorname{Re}\alpha > 0].$$ Бу 115 (8), ИП II 292 (2)

4 $$\int_0^{\infty} e^{-bx} x^{\alpha} L_n^{\alpha}(\lambda x)\, L_m^{\alpha}(\mu x)\,dx = \frac{\Gamma(m+n+\alpha+1)}{m!\,n!} \frac{(b-\lambda)^n (b-\mu)^m}{b^{m+n+\alpha+1}} \times$$
$$\times F\left[-m, -n; -m-n-\alpha; \frac{b(b-\lambda-\mu)}{(b-\lambda)(b-\mu)}\right]$$

$[\operatorname{Re}\alpha > -1,\ \operatorname{Re} b > 0]$. ИП I 175 (35)

5 $$\int_0^{\infty} e^{-bx} L_n^{a}(x)\,dx = \sum_{m=0}^{n} \binom{a+m-1}{m} \frac{(b-1)^{n-m}}{b^{n-m+1}}$$ $[\operatorname{Re} b > 0]$. ИП I 174 (27)

6. $$\int_0^{\infty} e^{-bx} L_n(x)\,dx = (b-1)^n b^{-n-1}$$ $[\operatorname{Re} b > 0]$. ИП I 174 (25)

7. $$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta} L_n^{\alpha}(t)\,dt = \frac{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} s^{-\beta-1} F\left(-n, \beta+1; \alpha+1; \frac{1}{s}\right)$$

$[\operatorname{Re}\beta > -1,\ \operatorname{Re} s > 0]$. Бу 119 (4b), ВТФ II 191 (33)

8. $$\int\limits_0^\infty e^{-st}t^\alpha L_n^\alpha(t)\,dt = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)(s-1)^n}{n!\,s^{\alpha+n+1}}$$

$[\operatorname{Re}\alpha > -1,\ \operatorname{Re}s > 0]$. ВТФ II 191 (32), МО 176 и

9 $$\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{\alpha+\beta}L_m^\alpha(x)\,L_n^\beta(x)\,dx = (-1)^{m+n}\binom{\alpha+m}{n}\binom{\beta+n}{m}$$

$[\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > -1]$. ИП II 293 (4)

10 $$\int\limits_0^\infty e^{-bx}x^{2a}\,[L_n^a(x)]^2\,dx = \frac{2^{2a}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\pi(n!)^2\,b^{2a+1}}\times$$
$$\times F\left(-n,\ a+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-n;\ \left(1-\frac{2}{b}\right)^2\right)$$

$\left[\operatorname{Re}a > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}b > 0\right]$. ИП I 174 (30)

11. $$\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{\gamma-1}L_n^\mu(x)\,dx = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1+\mu+n-\gamma)}{n!\,\Gamma(1+\mu-\gamma)}$$ $[\operatorname{Re}\gamma > 0]$. Бу 120 (4β)

12. $$\int\limits_0^\infty e^{-x\left(s+\frac{a_1+a_2}{2}\right)}x^{\mu+\beta}L_k^\mu(a_1x)\,L_k^\mu(a_2x)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(1+\mu+\beta)\,\Gamma(1+\mu+k)}{k!\,k!\,\Gamma(1+\mu)}\left\{\frac{d^k}{dh^k}\left[\frac{F\left(\frac{1+\mu+\beta}{2},\ 1+\frac{\mu+\beta}{2},\ 1+\mu,\ \frac{A^2}{B^2}\right)}{(1-h)^{1+\mu}\,B^{1+\mu+\beta}}\right]\right\}_{h=0},$$
$$A^2 = \frac{4a_1a_2h}{(1-h)^2};\quad B = s+\frac{a_1+a_2}{2}\,\frac{1+h}{1-h}$$
$$\left[\operatorname{Re}\left(s+\frac{a_1+a_2}{2}\right) > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \operatorname{Re}(\mu+\beta) > -1\right].$$

Бу 142 (19)

13 $$\int\limits_0^\infty e^{-x\left(s+\frac{a_1+a_2}{2}\right)}x^\mu L_k^\mu(a_1x)\,L_k^\mu(a_2x)\,dx = \frac{\Gamma(1+\mu+k)}{b_0^{1+\mu+k}}\cdot\frac{b_2^k}{k!}\cdot P_k^{(\mu,\,0)}\left(\frac{b_1^2}{b_0b_2}\right),$$
$$b_0 = s+\frac{a_1+a_2}{2},\quad b_1^2 = b_0b_2+2a_1a_2,\quad b_2 = s-\frac{a_1+a_2}{2}$$
$$\left[\operatorname{Re}\mu > -1,\ \operatorname{Re}\left(s+\frac{a_1+a_2}{2}\right) > 0\right].$$ Бу 144 (22)

7.415 $$\int\limits_0^1 (1-x)^{\mu-1}\,x^{\lambda-1}e^{-\beta x}L_n^\alpha(\beta x)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}\,\mathrm{B}(\lambda,\ \mu)\,{}_2F_2(\alpha+n+1,\ \lambda;\ \alpha+1,\ \lambda+\mu;\ -\beta)$$

$[\operatorname{Re}\lambda > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0]$. ИП II 193 (51) и

7.416 $$\int_{-\infty}^{\infty} x^{m-n} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-y)^2\right] L_n^{m-n}(x^2)\,dx =$$
$$= \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{n!} i^{n-m} 2^{-\frac{n+m}{2}} H_n\left(\frac{iy}{\sqrt{2}}\right) H_m\left(\frac{iy}{\sqrt{2}}\right).$$

Бу 149 (15b) *и*, ИП II 293 (8) *и*

7.417

1. $$\int_0^{\infty} x^{\nu-2n-1} e^{-ax} \sin(bx)\, L_{2n}^{\nu-2n-1}(ax)\,dx =$$
$$= (-1)^n i\Gamma(\nu)\, \frac{b^{2n}\left[(a-ib)^{-\nu}-(a+ib)^{-\nu}\right]}{2\,(2n)!}$$
$[b > 0,\quad \operatorname{Re} a > 0,\quad \operatorname{Re}\nu > 2n]$. ИП I 95 (12)

2. $$\int_0^{\infty} x^{\nu-2n-2} e^{-ax} \sin(bx)\, L_{2n+1}^{\nu-2n-2}(ax)\,dx =$$
$$= (-1)^{n+1}\Gamma(\nu)\, \frac{b^{2n+1}\left[(a+ib)^{-\nu}+(a-ib)^{-\nu}\right]}{2\,(2n+1)!}$$
$[b > 0,\quad \operatorname{Re} a > 0,\quad \operatorname{Re}\nu > 2n+1]$. ИП I 95 (13)

3. $$\int_0^{\infty} x^{\nu-2n} e^{-ax} \cos(bx)\, L_{2n-1}^{\nu-2n}(ax)\,dx =$$
$$= i(-1)^{n+1}\Gamma(\nu)\, \frac{b^{2n-1}\left[(a-ib)^{-\nu}-(a+ib)^{-\nu}\right]}{2\,(2n-1)!}$$
$[b > 0,\quad \operatorname{Re} a > 0,\quad \operatorname{Re}\nu > 2n-1]$. ИП I 39 (12)

4. $$\int_0^{\infty} x^{\nu-2n-1} e^{-ax} \cos(bx)\, L_{2n}^{\nu-2n-1}(ax)\,dx =$$
$$= (-1)^n \Gamma(\nu)\, \frac{b^{2n}\left[(a+ib)^{-\nu}+(a-ib)^{-\nu}\right]}{2\,(2n)!}$$
$[b > 0,\quad \operatorname{Re}\nu > 2n,\quad \operatorname{Re} a > 0]$. ИП I 39 (13)

7.418

1. $$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sin(bx) L_n(x^2)\,dx = (-1)^n \frac{i}{2} n! \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{\left[D_{-n-1}(ib)\right]^2 - \left[D_{-n-1}(-ib)\right]^2\right\}$$
$[b > 0]$. ИП I 95 (14)

2. $$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos(bx)\, L_n(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(n!)^{-1} e^{-\frac{1}{2}b^2}\, 2^{-n} \left[H_n\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)\right]^2$$
$[b > 0]$. ИП I 39 (14)

3. $$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sin(bx)\, L_n^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) dx =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, b^{2n+1} e^{-\frac{1}{2}b^2} L_n^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{b^2}{2}\right)$$ $[b > 0]$. ИП I 95 (15)

4. $$\int_0^\infty x^{2n} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos(bx) L_n^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, b^{2n} e^{-\frac{1}{2}b^2} L_n^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}b^2\right)$$

$[b > 0]$. ИП I 39 (16)

5. $$\int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}x^2} L_n^\alpha\left(\frac{1}{2}x^2\right) L_n^{\frac{1}{2}-\alpha}\left(\frac{1}{2}x^2\right) \sin(xy)\, dx =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} y e^{-\frac{1}{2}y^2} L_n^\alpha\left(\frac{1}{2}y^2\right) L_n^{\frac{1}{2}-\alpha}\left(\frac{1}{2}y^2\right).$$ ИП II 294 (11)

6. $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} L_n^\alpha\left(\frac{1}{2}x^2\right) L_n^{-\frac{1}{2}-\alpha}\left(\frac{1}{2}x^2\right) \cos(xy)\, dx =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y^2} L_n^\alpha\left(\frac{1}{2}y^2\right) L_n^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}y^2\right).$$ ИП II 294 (12)

7.419 $$\int_0^\infty x^{n+2\nu-\frac{1}{2}} \exp[-(1+a)x]\, L_n^{2\nu}(ax) K_\nu(x)\, dx =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n+3\nu+\frac{1}{2}\right)}{2^{n+2\nu+\frac{1}{2}} n!\, \Gamma(2\nu+1)} F\left(n+\nu+\frac{1}{2},\ n+3\nu+\frac{1}{2};\ 2\nu+1;\ -\frac{1}{2}a\right)$$

$\left[\operatorname{Re} a > -2,\quad \operatorname{Re}(n+\nu) > -\frac{1}{2},\quad \operatorname{Re}(n+3\nu) > -\frac{1}{2}\right]$. ИП II 370 (44)

7.421

1. $$\int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2} L_n\left(\frac{1}{2}\beta x^2\right) J_0(xy)\, dx = \frac{(\alpha-\beta)^n}{\alpha^{n+1}} e^{-\frac{1}{2\alpha}y^2} L_n\left[\frac{\beta y^2}{2\alpha(\beta-\alpha)}\right]$$

$[y > 0,\quad \operatorname{Re}\alpha > 0]$. ИП II 13 (4) и

2. $$\int_0^\infty x e^{-x^2} L_n(x^2) J_0(xy)\, dx = \frac{2^{-2n-1}}{n!} y^{2n} e^{-\frac{1}{4}y^2}.$$ ИП II 13 (5)

3. $$\int_0^\infty x^{2n+\nu+1} e^{-\frac{1}{2}x^2} L_n^{\nu+n}\left(\frac{1}{2}x^2\right) J_\nu(xy)\, dx = y^{2n+\nu} e^{-\frac{1}{2}y^2} L_n^{\nu+n}\left(\frac{1}{2}y^2\right)$$

$[y > 0,\quad \operatorname{Re}\nu > -1]$. МО 183

4. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} e^{-\beta x^2} L_n^\nu(\alpha x^2) J_\nu(xy)\, dx =$$

$$= 2^{-\nu-1} \beta^{-\nu-n-1} (\beta-\alpha)^n y^\nu e^{-\frac{y^2}{4\beta}} L_n^\nu\left[\frac{\alpha y^2}{4\beta(\alpha-\beta)}\right].$$ ИП II 43 (5)

5. $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2q}x^2} x^{\nu+1} L_n^\nu\left[\frac{x^2}{2q(1-q)}\right] J_\nu(xy)\, dx =$$

$$= \frac{q^{n+\nu+1}}{(q-1)^n} e^{-\frac{qy^2}{2}} y^\nu L_n^\nu\left(\frac{y^2}{2}\right) \qquad [\nu > 0].$$ МО 183

7.422

1. $$\int_0^\infty x^{\nu+1}e^{-\beta x^2}\left[L_n^{\frac{1}{2}\nu}(\alpha x^2)\right]^2 J_\nu(xy)\,dx = \frac{y^\nu}{\pi n!}\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\nu\right)(2\beta)^{-\nu-1}e^{-\frac{y^2}{4\beta}}\times$$
$$\times\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^l\,\Gamma\left(n-l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(l+1+\frac{1}{2}\nu\right)(n-l)!}\left(\frac{2\alpha-\beta}{\beta}\right)^{2l}L_{2l}^{\nu}\left[\frac{\alpha y^2}{2\beta(2\alpha-\beta)}\right]$$
$[y>0,\quad \operatorname{Re}\beta>0,\quad \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП II 43(7)

2 $$\int_0^\infty x^{\nu+1}e^{-\alpha x^2}L_m^{\nu-\sigma}(\alpha x^2)\,L_n^{\sigma}(\alpha x^2)\,J_\nu(xy)\,dx =$$
$$=(-1)^{m+n}(2\alpha)^{-\nu-1}y^\nu e^{-\frac{y^2}{4\alpha}}L_n^{\sigma-m+n}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right)L_m^{\nu-\sigma+m-n}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right)$$
$[y>0,\quad \operatorname{Re}\alpha>0,\quad \operatorname{Re}\nu>-1]$ ИП II 43(8)

7.423

1. $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}L_n\left(\frac{1}{2}x^2\right)H_{2n+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)\sin(xy)\,dx =$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}y^2}L_n\left(\frac{1}{2}y^2\right)H_{2n+1}\left(\frac{y}{2\sqrt{2}}\right)$$ ИП II 294(13)*и*

2 $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}L_n\left(\frac{1}{2}x^2\right)H_{2n}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)\cos(xy)\,dx =$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}y^2}L_n\left(\frac{1}{2}y^2\right)H_{2n}\left(\frac{y}{2\sqrt{2}}\right)$$ ИП II 294(14)*и*

7.5 ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

7.51 Гипергеометрические и степенная функции

7.511 $$\int_0^\infty F(a, b; c; -z)\,z^{-s-1}\,dz = \frac{\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s)\,\Gamma(c)\,\Gamma(-s)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c+s)}$$
$[c\neq 0, -1, -2, \ldots,\ \operatorname{Re}s<0,\ \operatorname{Re}(a+s)>0,\ \operatorname{Re}(b+s)>0]$
ВТФ I 79(4)

7.512

1 $$\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}F(\alpha, \beta; \gamma; x)\,dx =$$
$$=\frac{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma\left(\gamma-\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\Gamma\left(\gamma-\frac{\alpha}{2}\right)}$$
$$\left[\operatorname{Re}\alpha+1>\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\beta,\quad \operatorname{Re}\left(\gamma-\frac{\alpha}{2}-\beta\right)>0\right].$$
ИП II 398(1)

2. $$\int_0^1 x^{\varrho-1}(1-x)^{\beta-\gamma-n}F(-n, \beta; \gamma; x)\,dx = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\varrho)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)\,\Gamma(\gamma-\varrho+n)}{\Gamma(\gamma+n)\,\Gamma(\gamma-\varrho)\,\Gamma(\beta-\gamma+\varrho+1)}$$

$[n=0, 1, 2, \ldots;\quad \operatorname{Re}\varrho>0,\quad \operatorname{Re}(\beta-\gamma)>n-1]$. ИП II 398 (2)

3 $$\int_0^1 x^{\varrho-1}(1-x)^{\beta-\varrho-1}F(\alpha, \beta; \gamma; x)\,dx = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\varrho)\,\Gamma(\beta-\varrho)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\varrho)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\varrho)}$$

$[\operatorname{Re}\varrho>0,\quad \operatorname{Re}(\beta-\varrho)>0,\quad \operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\varrho)>0]$. ИП II 399 (3)

4 $$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\varrho-1}F(\alpha, \beta; \gamma; x)\,dx = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\varrho)\,\Gamma(\gamma+\varrho-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma+\varrho-\alpha)\,\Gamma(\gamma+\varrho-\beta)}$$

$[\operatorname{Re}\gamma>0,\quad \operatorname{Re}\varrho>0,\quad \operatorname{Re}(\gamma+\varrho-\alpha-\beta)>0]$. ИП II 399 (4)

5. $$\int_0^1 x^{\varrho-1}(1-x)^{\sigma-1}F(\alpha, \beta; \gamma; x)\,dx = \frac{\Gamma(\varrho)\,\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\varrho+\sigma)}\,{}_3F_2(\alpha, \beta, \varrho; \gamma, \varrho+\sigma; 1)$$

$[\operatorname{Re}\varrho>0,\quad \operatorname{Re}\sigma>0,\quad \operatorname{Re}(\gamma+\sigma-\alpha-\beta)>0]$. ИП II 399 (5)

6. $$\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\beta-\lambda-1}F\left(\alpha, \beta; \lambda; \frac{zx}{b}\right)dx = \mathrm{B}(\lambda, \beta-\lambda)\,F\left(\alpha, b; \beta; \frac{z}{b}\right).$$

Бу 9

7. $$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta-\gamma-1}F(\alpha, \beta; \gamma; xz)\,F(\delta-\alpha, \delta-\beta; \delta-\gamma; (1-x)\zeta)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\delta-\gamma)}{\Gamma(\delta)}(1-\zeta)^{2\alpha-\delta}F(\alpha, \beta; \delta; z+\zeta-z\zeta)$$

$[0<\operatorname{Re}\gamma<\operatorname{Re}\delta,\quad |\arg(1-z)|<\pi,\quad |\arg(1-\zeta)|<\pi]$.

ИП II 400 (11)

8. $$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\varepsilon-1}(1-xz)^{-\delta}F(\alpha, \beta; \gamma; xz)\,F\left[\delta, \beta-\gamma; \varepsilon; \frac{(1-x)z}{(1-xz)}\right]dx =$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\gamma+\varepsilon)}F(\alpha+\delta, \beta; \gamma+\varepsilon; z)$$

$[\operatorname{Re}\gamma>0,\ \operatorname{Re}\varepsilon>0,\ |\arg(z-1)|<\pi]$. ИП II 400 (12), ВТФ I 78 (3)

9. $$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\varrho-1}(1-zx)^{-\sigma}F(\alpha, \beta; \gamma; x)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\varrho)\,\Gamma(\gamma+\varrho-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma+\varrho-\alpha)\,\Gamma(\gamma+\varrho-\beta)}(1-z)^{\sigma}\times$$
$$\times\,{}_3F_2\left(\varrho, \sigma, \gamma+\varrho-\alpha-\beta; \gamma+\varrho-\alpha; \gamma+\varrho-\beta; \frac{z}{z-1}\right)$$

$[\operatorname{Re}\gamma>0,\ \operatorname{Re}\varrho>0,\ \operatorname{Re}(\gamma+\varrho-\alpha-\beta)>0,\ |\arg(1-z)|<\pi]$.

ИП II 399 (6)

10. $$\int_0^\infty x^{\gamma-1}(x+z)^{-\sigma}F(\alpha, \beta; \gamma; -x)\,dx = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\gamma+\sigma)\,\Gamma(\beta-\gamma+\sigma)}{\Gamma(\sigma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+\sigma)}\times$$
$$\times F(\alpha-\gamma+\sigma, \beta-\gamma+\sigma; \alpha+\beta-\gamma+\sigma; 1-z)$$

$[\operatorname{Re}\gamma>0,\ \operatorname{Re}(\alpha-\gamma+\sigma)>0,\ \operatorname{Re}(\beta-\gamma+\sigma)>0,\ |\arg z|<\pi]$. ИП II 400 (10)

11 $\int\limits_0^1 (1-x)^{\mu-1} x^{\nu-1} {}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; \quad \nu, b_2, \ldots, b_q; \quad ax)\, dx =$

$$= \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} {}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; \mu+\nu, b_2, \ldots, b_q; a)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > 0, \quad p \leqslant q+1; \quad$ если $p = q+1, \quad$ то $|a| < 1]$.

ИП II 200 (94)

12 $\int\limits_0^1 (1-x)^{\mu-1} x^{\nu-1} {}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; ax)\, dx =$

$$= \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} {}_{p+1}F_{q+1}(\nu, a_1, \ldots, a_p; \mu+\nu, b_1, \ldots, b_q; a)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0, \operatorname{Re}\nu > 0, p \leqslant q+1,$ если $p = q+1,$ то $|a| < 1]$

ИП II 200 (95)

7.513 $\int\limits_0^1 x^{s-1}(1-x^2)^{\nu} F(-n, a; b; x^2)\, dx =$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\nu+1, \frac{s}{2}\right) {}_3F_2\left(-n, a, \frac{s}{2}; b, \nu+1+\frac{s}{2}, 1\right)$$

$[\operatorname{Re} s > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > -1]$ ИП I 336 (4)

7.52 Гипергеометрические и показательная функции

7.521 $\int\limits_0^\infty e^{-st} {}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q, t)\, dt =$

$$= \frac{1}{s} {}_{p+1}F_q(1, a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q, s^{-1}) \qquad [p \leqslant q].$$

ВТФ I 192

7.522

1. $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} x^{\gamma-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \delta; -x)\, dx = \frac{\Gamma(\delta)\lambda^{-\gamma}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} E(\alpha, \beta, \gamma: \delta : \lambda)$

$[\operatorname{Re}\lambda > 0, \operatorname{Re}\gamma > 0]$. ВТФ I 205 (10)

2 $\int\limits_0^\infty e^{-bx} x^{a-1} F\left(\frac{1}{2}+\nu, \frac{1}{2}-\nu; a; -\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(a)(2b)^{\frac{1}{2}-a} K_\nu(b)$

$[\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} b > 0]$. ИП I 212 (1)

3 $\int\limits_0^\infty e^{-bx} x^{\gamma-1} F(2\alpha, 2\beta; \gamma; -\lambda x)\, dx =$

$$= \Gamma(\gamma) b^{-\gamma} \left(\frac{b}{\lambda}\right)^{\alpha+\beta-\frac{1}{2}} e^{\frac{b}{2\lambda}} W_{\frac{1}{2}-\alpha-\beta, \alpha-\beta}\left(\frac{b}{2\lambda}\right)$$

$[\operatorname{Re} b > 0, \operatorname{Re}\gamma > 0, |\arg\lambda| < \pi]$. Бу 78 (30), ИП I 212 (4)

4 $\int\limits_0^\infty e^{-xt} t^{b-1} F(a, a-c+1; b; -t)\, dt = x^{b-a}\Gamma(b)\Psi(a, c; x)$

$[\operatorname{Re} b > 0, \operatorname{Re} x > 0]$. ВТФ I 273 (11)

5. $\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{s-1}{}_pF_q(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q; ax)\,dx =$

$= \Gamma(s)_{p+1}F_q(s, a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; a)$

$[p < q, \operatorname{Re} s > 0]$. ИП I 337 (11)

6 $\int\limits_0^\infty x^{\beta-1}e^{-\mu x}{}_2F_2(-n, n+1; 1, \beta; x)\,dx = \Gamma(\beta)\mu^{-\beta}P_n\left(1-\frac{2}{\mu}\right)$

$[\operatorname{Re}\mu > 0, \operatorname{Re}\beta > 0]$. ИП I 218 (6)

7. $\int\limits_0^\infty x^{\beta-1}e^{-\mu x}{}_2F_2\left(-n, n; \beta, \frac{1}{2}; x\right)dx = \Gamma(\beta)\mu^{-\beta}\cos\left[2n \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)\right]$

$[\operatorname{Re}\mu > 0, \operatorname{Re}\beta > 0]$. ИП I 218 (7)

8. $\int\limits_0^\infty x^{\varrho_n-1}e^{-\mu x}{}_mF_n(a_1, \ldots, a_m; \varrho_1, \ldots, \varrho_n; \lambda x)\,dx =$

$= \Gamma(\varrho_n)\mu^{-\varrho_n}{}_mF_{n-1}\left(a_1, \ldots, a_m; \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}; \frac{\lambda}{\mu}\right)$

$[m \leqslant n, \operatorname{Re}\varrho_n > 0, \operatorname{Re}\mu > 0$, если $m < n$, $\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\lambda$, если $m = n]$

ИП I 219 (16) u

9. $\int\limits_0^\infty x^{\sigma-1}e^{-\mu x}{}_mF_n(a_1, \ldots, a_m; \varrho_1, \ldots, \varrho_n; \lambda x)\,dx =$

$= \Gamma(\sigma)\mu^{-\sigma}{}_{m+1}F_n\left(a_1, \ldots, a_m, \sigma; \varrho_1, \ldots, \varrho_n; \frac{\lambda}{\mu}\right)$

$[m \leqslant n, \operatorname{Re}\sigma > 0, \operatorname{Re}\mu > 0$, если $m < n$; $\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\lambda$, если $m = n]$.

ИП I 219 (17)

7.523 $\int\limits_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\varrho-1}e^{-xz}F(\alpha, \beta; \gamma; x)\,dx =$

$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\varrho)\Gamma(\gamma+\varrho-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma+\varrho-\alpha)\Gamma(\gamma+\varrho-\beta)}e^{-z}{}_2F_2(\varrho, \gamma+\varrho-\alpha-\beta; \gamma+\varrho-\alpha, \gamma+\varrho-\beta; z)$

$[\operatorname{Re}\gamma > 0, \operatorname{Re}\varrho > 0, \operatorname{Re}(\gamma+\varrho-\alpha-\beta) > 0]$. ИП II 400 (8)

7.524

1. $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}F\left(\alpha, \beta; \frac{1}{2}; -x^2\right)dx = \lambda^{\alpha+\beta-1}S_{1-\alpha-\beta, \alpha-\beta}(\lambda)$

$[\operatorname{Re}\lambda > 0]$. ИП II 401 (13)

2 $\int\limits_0^\infty e^{-st}{}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; t^2)\,dt =$

$= s^{-1}{}_{p+2}F_q\left(a_1, \ldots, a_p, 1, \frac{1}{2}; b_1, \ldots, b_q; \frac{4}{s^2}\right)$ $[p < q]$. МО 176

3 $\int\limits_0^\infty e^{-st}{}_0F_q\left(\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}, 1; \frac{t^q}{q^q}\right)dt = s^{-1}\exp(s^{-q})$. МО 176

7.525

1. $$\int_0^\infty x^{\sigma-1}e^{-\mu x}{}_mF_n[a_1, \ldots, a_m;\ \varrho_1, \ldots, \varrho_n;\ (\lambda x)^k]\,dx =$$
$$= \Gamma(\sigma)\mu^{-\sigma}{}_{m+k}F_n\left[a_1, \ldots, a_m, \frac{\sigma}{k}, \frac{\sigma+1}{k}, \ldots, \frac{\sigma+k-1}{k};\ \varrho_1, \ldots, \varrho_n;\ \left(\frac{k\lambda}{\mu}\right)^k\right]$$
$[m+k \leqslant n+1,\ \operatorname{Re}\sigma > 0;\ \operatorname{Re}\mu > 0$, если $m+k \leqslant n$,
$\operatorname{Re}(\mu + k\lambda e^{\frac{2\pi r i}{k}}) > 0;\ r = 0, 1, \ldots, k-1$ при $m+k = n+1]$. ИП I 220(19)

2 $$\int_0^\infty xe^{-\lambda x}F\left(\alpha, \beta; \frac{3}{2}; -x^2\right)dx = \lambda^{\alpha+\beta-2}S_{1-\alpha-\beta,\, \alpha-\beta}(\lambda)$$
$[\operatorname{Re}\lambda > 0]$. ИП II 401(14)

7.526

1. $$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}s^{-b}F\left(a, b; a+b-c+1, 1-\frac{1}{s}\right)ds =$$
$$= 2\pi i\frac{\Gamma(a+b-c+1)}{\Gamma(b)\Gamma(b-c+1)}t^{b-1}\Psi(a; c; t)$$
$\left[\operatorname{Re}b > \ ,\ \operatorname{Re}(b-c) > -1,\ \gamma > \frac{1}{2}\right]$ ВТФ I 273(12)

2 $$\int_0^\infty e^{-t}t^{\gamma-1}(x+t)^{-a}(y+t)^{-a}F\left[a, a'; \gamma; \frac{t(x+y+t)}{(x+t)(y+t)}\right]dt =$$
$$= \Gamma(\gamma)\Psi(a, c; x)\Psi(a', c; y),$$
$\gamma = a + a' - c + 1\ [\operatorname{Re}\gamma > 0,\ xy \neq 0]$ ВТФ I 287(21)

3 $$\int_0^\infty x^{\gamma-1}(x+y)^{-\alpha}(x+z)^{-\beta}e^{-x}F\left[\alpha, \beta; \gamma; \frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}\right]dx =$$
$$= \Gamma(\gamma)(zy)^{-\frac{1}{2}-\mu}e^{\frac{y+z}{2}}W_{\nu,\mu}(y)W_{\lambda,\mu}(z),$$
$2\nu = 1-\alpha+\beta-\gamma;\ 2\lambda = 1+\alpha-\beta-\gamma,\ 2\mu = \alpha+\beta-\gamma$
$[\operatorname{Re}\gamma > 0,\ |\arg y| < \pi,\ |\arg z| < \pi]$. ИП II 401(15)

7.527

1 $$\int_0^\infty (1-e^{-x})^{\lambda-1}e^{-\mu x}F(\alpha, \beta; \gamma; \delta e^{-x})\,dx = \mathrm{B}(\mu, \lambda)\,{}_3F_2(\alpha, \beta, \mu; \gamma, \mu+\lambda; \delta)$$
$[\operatorname{Re}\lambda > 0,\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ |\arg(1-\delta)| < \pi]$. ИП I 213(9)

2. $$\int_0^\infty (1-e^{-x})^{\mu}e^{-\alpha x}F(-n, \mu+\beta+n; \beta, e^{-x})\,dx =$$
$$= \frac{\mathrm{B}(\alpha, \mu+n+1)\,\mathrm{B}(\alpha, \beta+n-\alpha)}{\mathrm{B}(\alpha, \beta-\alpha)}$$
$[\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\mu > -1]$. ИП I 213(10)

3. $$\int_0^\infty (1-e^{-x})^{\gamma-1} e^{-\mu x} F(\alpha, \beta; \gamma; 1-e^{-x})\,dx = \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+\mu)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha+\mu)\,\Gamma(\gamma-\beta+\mu)}$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma),\ \operatorname{Re}\gamma > 0].$ ИП I 213 (11)

4 $$\int_0^\infty (1-e^{-x})^{\gamma-1} e^{-\mu x} F[\alpha, \beta; \gamma; \delta(1-e^{-x})]\,dx = \mathrm{B}(\mu, \gamma) F(\alpha, \beta; \mu+\gamma; \delta)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0,\ |\arg(1-\delta)| < \pi].$ ИП I 213 (12)

7.53 Гипергеометрические и тригонометрические функции

7.531

1 $$\int_0^\infty x \sin\mu x\, F\left(\alpha, \beta; \frac{3}{2}; -c^2x^2\right) dx = 2^{-\alpha-\beta+1} \pi c^{-\alpha-\beta} \mu^{\alpha+\beta-2} \frac{K_{\alpha-\beta}\left(\frac{\mu}{c}\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}$$

$\left[\mu > 0,\ \operatorname{Re}\alpha > \frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\beta > \frac{1}{2}\right].$ ИП I 115 (6)

2 $$\int_0^\infty \cos\mu x\, F\left(\alpha, \beta; \frac{1}{2}; -c^2x^2\right) dx = 2^{-\alpha-\beta+1} \pi c^{-\alpha-\beta} \mu^{\alpha+\beta-1} \frac{K_{\alpha-\beta}\left(\frac{\mu}{c}\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}$$

$[\mu > 0,\ \operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ c > 0].$ ИП I 61 (9)

7.54 Гипергеометрические и цилиндрические функции

7.541 $$\int_0^\infty x^{\alpha+\beta-2\nu-1} (x+1)^{-\nu} e^{xz} K_\nu[(x+1)z]\, F(\alpha, \beta; \alpha+\beta-2\nu; -x)\,dx =$$
$$= \pi^{-\frac{1}{2}} \cos(\nu\pi)\, \Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha+\nu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta+\nu\right) \Gamma(\gamma) \times$$
$$\times (2z)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma} W_{\frac{1}{2}\gamma, \frac{1}{2}(\beta-\alpha)}(2z), \qquad \gamma = \alpha+\beta-2\nu$$

$\left[\operatorname{Re}(\alpha+\beta-2\nu) > 0,\ \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-\alpha+\nu\right) > 0,\ \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-\beta+\nu\right) > 0,\ |\arg z| < \frac{3\pi}{2}\right].$ ИП II 401 (16)

7.542

1 $$\int_0^\infty x^{\sigma-1} {}_pF_{p-1}(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_{p-1}; -\lambda x^2) N_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_{p-1})}{2\lambda^{\frac{1}{2}\sigma}\,\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_p)} G^{p+2,\,1}_{p+2,\,p+3}\left(\frac{y^2}{4\lambda}\,\middle|\,\begin{matrix} b_0^*, \ldots, b_{p-1}^*, l \\ h, k, a_1^*, \ldots, a_p^*, l \end{matrix}\right),$$

$a_j^* = a_j - \frac{\sigma}{2},\ j = 1, \ldots, p;\ b_0^* = 1 - \frac{\sigma}{2};\ b_j^* = b_j - \frac{\sigma}{2},\ j = 1, \ldots, p-1;$

$h = \frac{\nu}{2},\ k = -\frac{\nu}{2},\ l = -\frac{1+\nu}{2}$ $\left[|\arg\lambda| < \pi,\ \operatorname{Re}\sigma > |\operatorname{Re}\nu|,\ \operatorname{Re} a_j > \frac{1}{2}\operatorname{Re}\sigma - \frac{3}{4},\ y > 0\right].$ ИП II 118 (53)

2. $$\int_0^\infty x^{\sigma-1}{}_pF_p(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_p, -\lambda x^2) N_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(b_1) \quad \Gamma(b_p)}{2\lambda^{\frac{1}{2}\sigma}\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_p)} G^{p+2,\,1}_{p+2,\,p+3}\left(\frac{y^2}{4\lambda}\middle|\begin{matrix} b_0^*, \ldots, b_p^*, l \\ h, k, a_1^*, \ldots, a_p^*, l\end{matrix}\right),$$
$$b_0^* = 1 - \frac{\sigma}{2},\ a_j^* = a_j - \frac{\sigma}{2},\ b_j^* = b_j - \frac{\sigma}{2};\ j = 1, \ldots, p;\ h = \frac{\nu}{2},$$
$$k = -\frac{\nu}{2},\ l = -\frac{1+\nu}{2}\quad \Big[\operatorname{Re}\lambda > 0,\ \operatorname{Re}\sigma > |\operatorname{Re}\nu|,$$
$$\operatorname{Re} a_j > \frac{1}{2}\operatorname{Re}\sigma - \frac{3}{4},\ y > 0\Big].$$ ИП II 119 (54)

3. $$\int_0^\infty x^{\sigma-1}{}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q, -\lambda x^2) N_\nu(xy)\,dx =$$
$$= -\pi^{-1}2^{\sigma-1}y^{-\sigma}\cos\left[\frac{\pi}{2}(\sigma-\nu)\right]\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu}{2}\right)\times$$
$$\times {}_{p+2}F_q\left(a_1, \ldots, a_p, \frac{\sigma+\nu}{2}, \frac{\sigma-\nu}{2}; b_1, \ldots, b_q; -\frac{4\lambda}{y^2}\right)$$
$$[y > 0,\ p \leqslant q-1,\ \operatorname{Re}\sigma > |\operatorname{Re}\nu|].$$ ИП II 119 (55)

4. $$\int_0^\infty x^{\sigma-1}{}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; -\lambda x^2) K_\nu(xy)\,dx =$$
$$= 2^{\sigma-2}y^{-\sigma}\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu}{2}\right)\times$$
$$\times {}_{p+2}F_q\left(a_1, \ldots, a_p, \frac{\sigma+\nu}{2}, \frac{\sigma-\nu}{2}; b_1, \ldots, b_q; \frac{4\lambda}{y^2}\right)$$
$$[\operatorname{Re} y > 0,\ p \leqslant q-1,\ \operatorname{Re}\sigma > |\operatorname{Re}\nu|].$$ ИП II 153 (88)

5. $$\int_0^\infty x^{2\varrho}{}_pF_p(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_p; -\lambda x^2) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{2^{2\varrho}\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_p)}{y^{2\varrho+1}\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_p)} G^{p+1,\,1}_{p+1,\,p+2}\left(\frac{y^2}{4\lambda}\middle|\begin{matrix} 1, b_1, \ldots, b_p \\ h, a_1, \ldots, a_p, k\end{matrix}\right),$$
$$h = \frac{1}{2} + \varrho + \frac{1}{2}\nu,\ k = \frac{1}{2} + \varrho - \frac{1}{2}\nu,$$
$$\left[y > 0,\ \operatorname{Re}\lambda > 0,\ -1 - \operatorname{Re}\nu < 2\operatorname{Re}\varrho < \frac{1}{2} + 2\operatorname{Re} a_r,\ r = 1, \ldots, p\right].$$
ИП II 91 (18)

6. $$\int_0^\infty x^{2\varrho}{}_{m+1}F_m(a_1, \ldots, a_{m+1}; b_1, \ldots, b_m; -\lambda^2 x^2) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{2^{2\varrho}\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_m)y^{-2\varrho-1}}{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_{m+1})} G^{m+2,\,1}_{m+1,\,m+3}\left(\frac{y^2}{4\lambda^2}\middle|\begin{matrix} 1, b_1, \ldots, b_m \\ h, a_1, \ldots, a_{m+1}, k\end{matrix}\right),$$
$$h = \frac{1}{2} + \varrho + \frac{1}{2}\nu,\ k = \frac{1}{2} + \varrho - \frac{1}{2}\nu,$$
$$\left[y > 0, \operatorname{Re}\lambda > 0, \operatorname{Re}(2\varrho+\nu) > -1, \operatorname{Re}(\varrho - a_r) < \frac{1}{4}; r = 1, \ldots, m+1\right].$$
ИП II 91 (19)

7. $$\int_0^\infty x^\delta F(\alpha, \beta; \gamma; -\lambda^2x^2) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{2^\delta\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{-\delta-1} G_{24}^{22}\left(\frac{y^2}{4\lambda^2}\middle| \begin{matrix} 1-\alpha,\ 1-\beta \\ \frac{1+\delta+\nu}{2},\ 0,\ 1-\gamma,\ \frac{1+\delta-\nu}{2} \end{matrix}\right)$$
$$\left[y > 0,\ \operatorname{Re}\lambda > 0,\ -1-\operatorname{Re}\nu - 2\min(\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta) < \operatorname{Re}\delta < -\tfrac{1}{2}\right].$$
ИП II 82 (9)

8. $$\int_0^\infty x^\delta F(\alpha, \beta; \gamma; -\lambda^2x^2) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{2^\delta y^{-\delta-1}\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} G_{24}^{31}\left(\frac{y^2}{4\lambda^2}\middle| \begin{matrix} 1,\ \gamma \\ \frac{1+\delta+\nu}{2},\ \alpha,\ \beta,\ \frac{1+\delta-\nu}{2} \end{matrix}\right)$$
$$\left[y > 0,\ \operatorname{Re}\lambda > 0,\ -\operatorname{Re}\nu - 1 < \operatorname{Re}\delta < 2\max(\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta) - \tfrac{1}{2}\right].$$
ИП II 81 (6)

9. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} F(\alpha, \beta; \gamma; -\lambda^2x^2) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{2^{\nu+1}\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{-\nu-2} G_{13}^{30}\left(\frac{y^2}{4\lambda^2}\middle| \begin{matrix} \gamma \\ \nu+1,\ \alpha,\ \beta \end{matrix}\right)$$
$$\left[y > 0,\ \operatorname{Re}\lambda > 0,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < 2\max(\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta) - \tfrac{3}{2}\right].$$
ИП II 81 (5)

10. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} F(\alpha, \beta; \nu+1; -\lambda^2x^2) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{2^{\nu-\alpha-\beta+2}\Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha+\beta-\nu-2} K_{\alpha-\beta}\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$
$$\left[y > 0,\ \operatorname{Re}\lambda > 0,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < 2\max(\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta) - \tfrac{3}{2}\right].$$
ИП II 81 (3)

11. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} F(\alpha, \beta; \nu+1; -\lambda^2x^2) K_\nu(xy)\,dx =$$
$$= 2^{\nu+1}\lambda^{-\alpha-\beta} y^{\alpha+\beta-\nu-2}\Gamma(\nu+1) S_{1-\alpha-\beta,\ \alpha-\beta}\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$
$$[\operatorname{Re} y > 0,\ \operatorname{Re}\lambda > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1].$$
ИП II 152 (86)

12. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} F\left(\alpha, \beta; \frac{\beta+\nu}{2}+1; -\lambda^2x^2\right) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+\nu+2}{2}\right) y^{\beta-1}\lambda^{-\nu-\beta-1}}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)2^{\beta-1}} \left[K_{\frac{1}{2}(\nu-\beta+1)}\left(\frac{y}{2\lambda}\right)\right]^2$$
$$\left[y > 0,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < 2\max(\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta) - \tfrac{3}{2}\right].$$
ИП II 81 (4)

13. $\int\limits_0^\infty x^{\sigma+\frac{1}{2}} F(\alpha, \beta; \gamma; -\lambda^2x^2) N_\nu(xy)\, dx =$

$$= \frac{\lambda^{-\sigma-1} y^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\gamma)}{\sqrt{2}\, \Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)} G_{35}^{41}\left(\frac{y^2}{4\lambda^2} \middle| \begin{matrix} 1-p,\ \gamma-p,\ l \\ h,\ k,\ \alpha-p,\ \beta-p,\ l \end{matrix} \right),$$

$$h = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\nu,\ k = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\nu,\ l = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\nu,\ p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma$$

$\left[y > 0,\ \operatorname{Re}\lambda > 0,\ \operatorname{Re}\sigma > |\operatorname{Re}\nu| - \frac{3}{2},\ \operatorname{Re}\sigma < 2\operatorname{Re}\alpha,\ \operatorname{Re}\sigma < 2\operatorname{Re}\beta \right].$

ИП II 118 (52)

14. $\int\limits_0^\infty x^{\nu+2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\nu; \frac{3}{2}; -\lambda^2x^2\right) N_\nu(xy)\, dx =$

$$= \frac{2^\nu y^{-\nu-1}}{\pi^{\frac{1}{2}} \lambda^2 \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} K_\nu\left(\frac{y}{2\lambda}\right) K_{\nu+1}\left(\frac{y}{2\lambda}\right)$$

$\left[y > 0,\ \operatorname{Re}\lambda > 0,\ -\frac{3}{2} < \operatorname{Re}\nu < -\frac{1}{2} \right].$ ИП II 117 (49)

15. $\int\limits_0^\infty x^{\nu+2} F\left(1, 2\nu+\frac{3}{2}; \nu+2; -\lambda^2x^2\right) N_\nu(xy)\, dx =$

$$= \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{-\nu} \lambda^{-2\nu-3} y^\nu \frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma\left(2\nu+\frac{3}{2}\right)} \left[K_\nu\left(\frac{y}{2\lambda}\right) \right]^2$$

$\left[y > 0,\ \operatorname{Re}\lambda > 0,\ -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2} \right].$ ИП II 117 (50)

16 $\int\limits_0^\infty x^{\nu+2} F\left(1, \mu+\nu+\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\lambda^2x^2\right) N_\nu(xy)\, dx =$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} 2^{-\mu-\nu-1} \lambda^{-\mu-2\nu-3} y^{\mu+\nu}}{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{3}{2}\right)} K_\mu\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

$\left[y > 0,\ \operatorname{Re}\lambda > 0,\ -\frac{3}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(2\mu+\nu) > -\frac{3}{2} \right]$

ИП II 118 (51)

17 $\int\limits_0^\infty x^{2\alpha+\nu} F\left(\alpha-\nu-\frac{1}{2}, \alpha; 2\alpha; -\lambda^2x^2\right) J_\nu(xy)\, dx =$

$$= \frac{i\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+\nu\right)}{\pi 2^{1-\nu-2\alpha} \lambda^{2\alpha-1} y^{\nu+2}} W_{\frac{1}{2}-\alpha,\, -\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{y}{\lambda}\right) \times$$

$$\times \left[W_{\frac{1}{2}-\alpha,\, -\frac{1}{2}-\nu}\left(e^{-i\pi} \frac{y}{\lambda}\right) - W_{\frac{1}{2}-\alpha,\, -\frac{1}{2}-\nu}\left(e^{i\pi} \frac{y}{\lambda}\right) \right]$$

$\left[y > 0,\ \operatorname{Re}\lambda > 0,\ \operatorname{Re}\nu < -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(\alpha+\nu) > -\frac{1}{2} \right].$ ИП II 80 (1)

18. $$\int\limits_0^\infty x^{2\alpha-\nu} F\left(\nu+\alpha-\frac{1}{2},\ \alpha;\ 2\alpha;\ -\lambda^2x^2\right) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{2^{2\alpha-\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right) y^{\nu-2}}{\lambda^{2\alpha-1}\Gamma(2\nu)} M_{\alpha-\frac{1}{2},\ \nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{\lambda}\right) W_{\frac{1}{2}-\alpha,\ \nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{\lambda}\right).$$
ИП II 80 (2)

7.543

1 $$\int\limits_0^\infty x^{-2\alpha-1} F\left(\frac{1}{2}+\alpha,\ 1+\alpha;\ 1+2\alpha;\ -\frac{4\lambda^2}{x^2}\right) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \lambda^{-2\alpha} I_{\frac{1}{2}\nu+\alpha}(\lambda y) K_{\frac{1}{2}\nu-\alpha}(\lambda y)$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}\lambda>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}\alpha>-\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 81 (7)

2 $$\int\limits_0^\infty x^{\nu+1-4\alpha} F\left(\alpha,\ \alpha+\frac{1}{2};\ \nu+1;\ -\frac{\lambda^2}{x^2}\right) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\alpha)} 2^\nu \lambda^{1-2\alpha} y^{2\alpha-\nu-1} I_\nu\left(\frac{1}{2}\lambda y\right) K_{2\alpha-\nu-1}\left(\frac{1}{2}\lambda y\right)$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}\lambda>0,\ \operatorname{Re}\alpha-1<\operatorname{Re}\nu<4\operatorname{Re}\alpha-\frac{3}{2}\right].$$ ИП II 81 (8)

7.544 $$\int\limits_0^\infty x^{\nu+1}(1+x)^{-2\alpha} F\left[\alpha,\ \nu+\frac{1}{2};\ 2\nu+1;\ \frac{4x}{(1+x)^2}\right] J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu-\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} 2^{2\nu-2\alpha+1} y^{2(\alpha-\nu-1)} J_\nu(y)$$
$$\left[y>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<2\operatorname{Re}\alpha-\frac{3}{2}\right].$$ ИП II 82 (10)

7.6 ВЫРОЖДЕННЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

7.61 Вырожденные гипергеометрические функции и степенная функция

7.611

1 $$\int\limits_0^\infty x^{-1} W_{k,\mu}(x)\,dx = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} 2^k \sec(\mu\pi)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\mu\right)}$$
$$\left[|\operatorname{Re}\mu|<\frac{1}{2}\right]$$ ИП II 406 (22)

2 $$\int\limits_0^\infty x^{-1} M_{k,\mu}(x) W_{\lambda,\mu}(x)\,dx = \frac{\Gamma(2\mu+1)}{(k-\lambda)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)}$$
$$\left[\operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(k-\lambda)>0\right].$$ Бу 116 (11), ИП II 409 (39)

3. $$\int_0^\infty x^{-1} W_{k,\mu}(x) W_{\lambda,\mu}(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{(k-\lambda)\sin(2\mu\pi)}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda+\mu\right)}\right] \qquad \left[|\operatorname{Re}\mu| < \frac{1}{2}\right].$$

Бу 116 (12), ИП II 409 (40)

4 $$\int_0^\infty \{W_{\varkappa,\mu}(z)\}^2 \frac{dz}{z} = \frac{\pi}{\sin 2\pi\mu} \frac{\psi\left(\frac{1}{2}+\mu-\varkappa\right)-\psi\left(\frac{1}{2}-\mu-\varkappa\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\varkappa\right)}$$
$$\left[|\operatorname{Re}\mu| < \frac{1}{2}\right]$$ Бу 117 (12a)

5. $$\int_0^\infty \frac{1}{z}[W_{\varkappa,0}(z)]^2\,dz = \frac{\psi'\left(\frac{1}{2}-\varkappa\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\varkappa\right)\right]^2}.$$ Бу 117 (12b)

6 $$\int_0^\infty x^{\varrho-1} W_{k,\mu}(x) W_{-k,\mu}(x)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(\varrho+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\varrho+\frac{1}{2}+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\varrho+\frac{1}{2}-\mu\right)}{2\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\varrho+k\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\varrho-k\right)}$$
$$[\operatorname{Re}\varrho > 2|\operatorname{Re}\mu| - 1].$$ ИП II 409 (41)

7 $$\int_0^\infty x^{\varrho-1} W_{k,\mu}(x) W_{\lambda,\nu}(x)\,dx = \frac{\Gamma(1+\mu+\nu+\varrho)\Gamma(1-\mu+\nu+\varrho)\Gamma(-2\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-k+\nu+\varrho\right)}\times$$
$$\times {}_3F_2\left(1+\mu+\nu+\varrho,\ 1-\mu+\nu+\varrho,\ \frac{1}{2}-\lambda+\nu;\ 1+2\nu,\ \frac{3}{2}-k+\nu+\varrho;\ 1\right)+$$
$$+\frac{\Gamma(1+\mu-\nu+\varrho)\Gamma(1-\mu-\nu+\varrho)\Gamma(2\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda+\nu\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-k-\nu+\varrho\right)}\times$$
$$\times {}_3F_2\left(1+\mu-\nu+\varrho,\ 1-\mu-\nu+\varrho,\ \frac{1}{2}-\lambda-\nu;\ 1-2\nu,\ \frac{3}{2}-k-\nu+\varrho;\ 1\right)$$
$$[|\operatorname{Re}\mu|+|\operatorname{Re}\nu| < \operatorname{Re}\varrho+1].$$

ИП II 410 (42)

7.612

1. $$\int_0^\infty t^{b-1}\,{}_1F_1(a;\ c;\ -t)\,dt = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} \qquad [0 < \operatorname{Re} b < \operatorname{Re} a]$$

ВТ Ф I 285 (10)

2. $$\int_0^\infty t^{b-1}\Psi(a, c;\ t)\,dt = \frac{\Gamma(b)\Gamma(a-b)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)}$$
$$[0 < \operatorname{Re} b < \operatorname{Re} a, \quad \operatorname{Re} c < \operatorname{Re} b + 1].$$ ВТФ I 285 (11)

7.613

1 $$\int_0^t x^{\gamma-1}(t-x)^{c-\gamma-1}\,{}_1F_1(a;\ \gamma;\ x)\,dx = t^{c-1}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(c-\gamma)}{\Gamma(c)}\,{}_1F_1(a;\ c;\ t)$$

$[\operatorname{Re} c > \operatorname{Re}\gamma > 0]$. Бу 9 (16) *и*, ВТФ I 271 (16)

2. $$\int_0^t x^{\beta-1}(t-x)^{\gamma-1}\,{}_1F_1(t;\ \beta;\ x)\,dx = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}t^{\beta+\gamma-1}\,{}_1F_1(t;\ \beta+\gamma;\ t)$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\gamma > 0]$. ИП II 401 (1)

3. $$\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{2\mu-\lambda}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}+\mu-\nu;\ \lambda;\ xz\right)dx =$$

$$= \mathrm{B}(\lambda,\ 1+2\mu-\lambda)\,e^{\frac{1}{2}z}z^{-\frac{1}{2}-\mu}M_{\nu,\mu}(z)$$

$[\operatorname{Re}\lambda > 0,\ \operatorname{Re}(2\mu-\lambda) > -1]$. Бу 14 (14)

4 $$\int_0^t x^{\beta-1}(t-x)^{\delta-1}\,{}_1F_1(t;\ \beta;\ x)\,{}_1F_1(\gamma;\ \delta;\ t-x)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\beta+\delta)}t^{\beta+\delta-1}\,{}_1F_1(t+\gamma;\ \beta+\delta;\ t)$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\delta > 0]$. ИП II 402 (2), ВТФ I 271 (15)

5 $$\int_0^t x^{\mu-\frac{1}{2}}(t-x)^{\nu-\frac{1}{2}}M_{k,\mu}(x)\,M_{\lambda,\nu}(t-x)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(2\mu+1)\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(2\mu+2\nu+2)}t^{\mu+\nu}M_{k+\lambda,\ \mu+\nu+\frac{1}{2}}(t)$$

$\left[\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right]$. Бу 128 (14), ИП II 402 (7)

6. $$\int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\sigma-\beta-1}\,{}_1F_1(\alpha;\ \beta;\ \lambda x)\,{}_1F_1[\sigma-\alpha;\ \sigma-\beta;\ \mu(1-x)]\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\sigma-\beta)}{\Gamma(\sigma)}e^{\lambda}\,{}_1F_1(\alpha;\ \sigma;\ \mu-\lambda)$$

$[0 < \operatorname{Re}\beta < \operatorname{Re}\sigma]$. ИП II 402 (3)

7.62—7.63 Вырожденные гипергеометрические функции и показательная функция

7.621

1 $$\int_0^\infty e^{-st}t^{\alpha}M_{\mu,\nu}(t)\,dt = \frac{\Gamma\left(\alpha+\nu+\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+s\right)^{\alpha+\nu+\frac{3}{2}}}\times$$

$$\times F\left(\alpha+\nu+\frac{3}{2},\ -\mu+\nu+\frac{1}{2};\ 2\nu+1;\ \frac{2}{2s+1}\right)$$

$\left[\operatorname{Re}\left(\alpha+\mu+\frac{3}{2}\right) > 0,\ \operatorname{Re}s > \frac{1}{2}\right]$.

Бу 118 (1), МО 176 *и*, ВТФ I 270 (12) *и*

2. $$\int_0^\infty e^{-st} t^{\mu-\frac{1}{2}} M_{\lambda,\mu}(qt)\,dt = q^{\mu+\frac{1}{2}} \Gamma(2\mu+1)\left(s-\frac{1}{2}q\right)^{\lambda-\mu-\frac{1}{2}}\left(s+\frac{1}{2}q\right)^{-\lambda-\mu-\frac{1}{2}}$$
$$\left[\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}s > \frac{|\operatorname{Re}q|}{2}\right].$$
Бу 119 (4с), МО 176 *и*, ВТФ I 271 (13) *и*

3 $$\int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha} W_{\lambda,\mu}(qt)\,dt = \frac{\Gamma\left(\alpha+\mu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\alpha-\mu+\frac{3}{2}\right)q^{\mu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha-\lambda+2)}\left(s+\frac{1}{2}q\right)^{-\alpha-\mu-\frac{3}{2}}\times$$
$$\times F\left(\alpha+\mu+\frac{3}{2},\ \mu-\lambda+\frac{1}{2};\ \alpha-\lambda+2;\ \frac{2s-q}{2s+q}\right)$$
$$\left[\operatorname{Re}\left(\alpha\pm\mu+\frac{3}{2}\right)>0,\ \operatorname{Re}s > -\frac{q}{2},\ q>0\right].$$
ВТФ I 271 (14) *и*, Бу 121 (6), МО 176

4 $$\int_0^\infty e^{-st} t^{b-1}\,{}_1F_1(a;\ c;\ kt)\,dt = \Gamma(b)\,s^{-b} F(a,\ b;\ c;\ ks^{-1}) \qquad [|s|>|k|];$$
$$= \Gamma(b)(s-k)^{-b} F\left(c-a,\ b;\ c;\ \frac{k}{k-s}\right) \qquad [|s-k|>|k|];$$
$$[\operatorname{Re}b>0,\quad \operatorname{Re}s>\max(0,\ \operatorname{Re}k)].$$
ВТФ I 269 (5)

5 $$\int_0^\infty t^{c-1}\,{}_1F_1(a;\ c;\ t)\,e^{-st}\,dt = \Gamma(c)\,s^{-c}(1-s^{-1})^{-a}$$
$$[\operatorname{Re}c>0,\ \operatorname{Re}s>1].$$
ВТФ I 270 (6)

6 $$\int_0^\infty t^{b-1}\Psi(a,\ c;\ t)\,e^{-st}\,dt = \frac{\Gamma(b)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a+b-c+1)} F(b,\ b-c+1;\ a+b-c+1;\ 1-s)$$
$$[\operatorname{Re}b>0,\quad \operatorname{Re}c<\operatorname{Re}b+1,\ |1-s|<1];$$
$$= \frac{\Gamma(b)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a+b-c+1)} s^{-b} F(a,\ b;\ a+b-c+1;\ 1-s^{-1})$$
$$\left[\operatorname{Re}s>\frac{1}{2}\right].$$
ВТФ I 270 (7)

7 $$\int_0^\infty e^{-\frac{b}{2}x} x^{\nu-1} M_{\varkappa,\mu}(bx)\,dx = \frac{\Gamma(1+2\mu)\Gamma(\varkappa-\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\nu\right)} b^{\nu}$$
$$\left[\operatorname{Re}\left(\nu+\frac{1}{2}+\mu\right)>0,\ \operatorname{Re}(\varkappa-\nu)>0\right].$$
Бу 119 (3) *и*, ИП I 215 (11) *и*

8. $$\int_0^\infty e^{-sx} M_{\varkappa,\mu}(x)\frac{dx}{x} = \frac{2\Gamma(1+2\mu)\, e^{-i\pi\varkappa}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\varkappa\right)} \left(\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\varkappa}{2}} Q^{\varkappa}_{\mu-\frac{1}{2}}(2s)$$

$$\left[\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}+\mu\right)>0,\ \operatorname{Re} s>\frac{1}{2}\right].$$ Бу 119 (4~)

9 $$\int_0^\infty e^{-sx} W_{\varkappa,\mu}(x)\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)} \left(\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\varkappa}{2}} P^{\varkappa}_{\mu-\frac{1}{2}}(2s)$$

$$\left[\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\pm\mu\right)>0,\ \operatorname{Re} s>-\frac{1}{2}\right].$$ Бу 121 (7)

10 $$\int_0^\infty x^{k+2\mu-1} e^{-\frac{3}{2}x} W_{k,\mu}(x)\,dx = \frac{\Gamma\left(k+\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left[\frac{1}{4}(2k+6\mu+5)\right]}{\left(k+3\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left[\frac{1}{4}(2\mu-2k+3)\right]}$$

$$\left[\operatorname{Re}(k+\mu)>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(k+3\mu)>-\frac{1}{2}\right].$$

Бу 122 (8a), ИП II 406 (23)

11 $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x} x^{\nu-1} W_{\varkappa,\mu}(x)\,dx = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}-\mu\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+\mu\right)}{\Gamma(\nu-\varkappa+1)}$$

$$\left[\operatorname{Re}\left(\nu+\frac{1}{2}\pm\mu\right)>0\right].$$ Бу 122(8b)

12 $$\int_0^\infty e^{\frac{1}{2}x} x^{\nu-1} W_{\varkappa,\mu}(x)\,dx = \Gamma(-\varkappa-\mu)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\varkappa\right)}$$

$$\left[\operatorname{Re}\left(\nu+\frac{1}{2}\pm\mu\right)>0,\ \operatorname{Re}(\varkappa+\nu)<0\right].$$ Бу 122 (8c) *и*

7.622

1 $$\int_0^\infty e^{-st} t^{c-1} {}_1F_1(a;c;t)\, {}_1F_1(\alpha;c;\lambda t)\,dt =$$

$$= \Gamma(c)(s-1)^{-a}(s-\lambda)^{-\alpha} s^{a+\alpha-c} F\left[a,\alpha;c;\lambda(s-1)^{-1}(s-\lambda)^{-1}\right]$$

$$[\operatorname{Re} c>0,\ \operatorname{Re} s>\operatorname{Re}\lambda+1].$$ ВТФ I 287 (22)

2 $$\int_0^\infty e^{-t} t^{\varrho}\, {}_1F_1(a;c;t)\,\Psi(a';c';\lambda t)\,dt = C\frac{\Gamma(c)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}\lambda^{\sigma} F(c-a,\ \beta;\ \gamma;\ 1-\lambda^{-1}),$$

$$\varrho=c-1,\ \sigma=-c,\ \beta=c-c'+1,\ \gamma=c-a+a'-c'+1,\ C=\frac{\Gamma(a'-a)}{\Gamma(a')},$$

или

$$\varrho=c+c'-2, \sigma=1-c-c', \beta=c+c'-1, \gamma=a'-a+c, C=\frac{\Gamma(a'-a-c'+1)}{\Gamma(a'-c'+1)}.$$

ВТФ I 287 (24)

3. $$\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-bx}M_{\lambda_1,\mu_1-\frac{1}{2}}(a_1x)\ldots M_{\lambda_n,\mu_n-\frac{1}{2}}(a_nx)\,dx=$$
$$=a_1^{\mu_1}\ldots a_n^{\mu_n}(b+A)^{-\nu-M}\,\Gamma(\nu+M)\times$$
$$\times F_A\left(\nu+M;\ \mu_1-\lambda_1,\ \ldots,\ \mu_n-\lambda_n;\ 2\mu_1,\ \ldots,\ 2\mu_n;\frac{a_1}{b+A},\ \ldots,\ \frac{a_n}{b+A}\right),$$
$$M=\mu_1+\ldots+\mu_n,\quad A=\frac{1}{2}(a_1+\ldots+a_n)$$
$\left[\operatorname{Re}(\nu+M)>0,\ \operatorname{Re}\left(b\pm\frac{1}{2}a_1\pm\ \ldots\ \pm\frac{1}{2}a_n\right)>0\right].$ ИП I 216 (14)

7.623

1. $$\int_0^\infty e^{-x}x^{c+n-1}(x+y)^{-1}{}_1F_1(a;c;x)\,dx=$$
$$=(-1)^n\,\Gamma(c)\,\Gamma(1-a)\,y^{c+n-1}\Psi(c-a,\ c;\ y)$$
$[-\operatorname{Re}c<n<1-\operatorname{Re}a,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ |\arg y|<\pi].$ ВТФ I 285 (16)

2. $$\int_0^t x^{-1}(t-x)^{k-1}e^{\frac{1}{2}(t-x)}M_{k,\mu}(x)\,dx=\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(k+\mu+\frac{1}{2}\right)}\pi^{\frac{1}{2}}t^{k-\frac{1}{2}}I_\mu\left(\frac{1}{2}t\right)$$
$\left[\operatorname{Re}k>0,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2}\right].$ ИП II 402 (5)

3. $$\int_0^t x^{k-1}(t-x)^{\lambda-1}e^{\frac{1}{2}(t-x)}M_{k+\lambda,\mu}(x)\,dx=\frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma\left(k+\mu+\frac{1}{2}\right)t^{k+\lambda-1}}{\Gamma\left(k+\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)}M_{k,\mu}(t)$$
$\left[\operatorname{Re}(k+\mu)>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\lambda>0\right].$ ИП II 402 (6)

4. $$\int_0^t x^{-k-\lambda-1}(t-x)^{\lambda-1}e^{\frac{1}{2}x}W_{k,\mu}(x)\,dx=$$
$$=\frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\lambda+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\lambda-\mu\right)}{t^{k+1}\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\mu\right)}W_{k+\lambda,\mu}(t)$$
$\left[\operatorname{Re}\lambda>0,\ \operatorname{Re}(k+\lambda)<\frac{1}{2}-|\operatorname{Re}\mu|\right].$ ИП II 405 (21)

5. $$\int_1^\infty (x-1)^{\mu-1}x^{\lambda-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}ax}W_{k,\lambda}(ax)\,dx=$$
$$=\frac{\Gamma(\mu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\lambda-\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\lambda\right)}a^{-\frac{1}{2}\mu}e^{\frac{1}{2}a}W_{k+\frac{1}{2}\mu,\lambda+\frac{1}{2}\mu}(a)$$
$\left[|\arg(a)|<\frac{3}{2}\pi,\ 0<\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}-\operatorname{Re}(k+\lambda)\right].$ ИП II 211 (72) и

6. $$\int_1^\infty (x-1)^{\mu-1} x^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}ax} W_{k,\lambda}(ax)\,dx = a^{-\frac{1}{2}\mu} \Gamma(\mu) e^{-\frac{1}{2}a} W_{k-\frac{1}{2}\mu,\, \lambda-\frac{1}{2}\mu}(a)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re} a > 0]$. ИП II 211 (74) u

7 $$\int_1^\infty (x-1)^{\mu-1} x^{k-\mu-1} e^{-\frac{1}{2}ax} W_{k,\lambda}(ax)\,dx = \Gamma(\mu) e^{-\frac{1}{2}a} W_{k-\mu,\lambda}(a)$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Re} a > 0]$. ИП II 211 (73) u

8 $$\int_0^1 (1-x)^{\mu-1} x^{k-\mu-1} e^{-\frac{1}{2}ax} W_{k,\lambda}(ax)\,dx = \Gamma(\mu) e^{-\frac{1}{2}a} \sec[(k-\mu-\lambda)\pi] \times$$
$$\times \left\{\sin(\mu\pi) \frac{\Gamma\left(k-\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda+1)} M_{k-\mu,\lambda}(a) + \cos[(k-\lambda)\pi] W_{k-\mu,\lambda}(a)\right\}$$

$\left[0 < \operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re} k - |\operatorname{Re}\lambda| + \frac{1}{2}\right]$. ИП II 200 (93) u

7.624

1. $$\int_0^\infty x^{\varrho-1} [x^{\frac{1}{2}} + (a+x)^{\frac{1}{2}}]^{2\sigma} e^{-\frac{1}{2}x} M_{k,\mu}(x)\,dx =$$
$$= \frac{-\sigma\Gamma(2\mu+1)\, a^\sigma}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+\mu\right)} G_{34}^{23}\left(a \left| \begin{matrix} \frac{1}{2},\ 1,\ 1-k+\varrho \\ \frac{1}{2}+\mu+\varrho,\ -\sigma,\ \sigma,\ \frac{1}{2}-\mu+\varrho \end{matrix} \right.\right)$$

$\left[|\arg a| < \pi,\ \operatorname{Re}(\mu+\varrho) > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(k-\varrho-\sigma) > 0\right]$. ИП II 403 (8)

2 $$\int_0^\infty x^{\varrho-1} [x^{\frac{1}{2}} + (a+x)^{\frac{1}{2}}]^{2\sigma} e^{-\frac{1}{2}x} W_{k,\mu}(x)\,dx =$$
$$= -\pi^{-\frac{1}{2}} \sigma a^\sigma G_{34}^{32}\left(a \left| \begin{matrix} \frac{1}{2},\ 1,\ 1-k+\varrho \\ \frac{1}{2}+\mu+\varrho,\ \frac{1}{2}-\mu+\varrho,\ -\sigma,\ \sigma \end{matrix} \right.\right)$$

$\left[|\arg a| < \pi,\ \operatorname{Re}\varrho > |\operatorname{Re}\mu| - \frac{1}{2}\right]$. ИП II 406 (24)

3 $$\int_0^\infty x^{\varrho-1} [x^{\frac{1}{2}} + (a+x)^{\frac{1}{2}}]^{2\sigma} e^{\frac{1}{2}x} W_{k,\mu}(x)\,dx =$$
$$= -\frac{\sigma\pi^{-\frac{1}{2}} a^\sigma}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\mu\right)} G_{34}^{33}\left(a \left| \begin{matrix} \frac{1}{2},\ 1,\ 1+k+\varrho \\ \frac{1}{2}+\mu+\varrho,\ \frac{1}{2}-\mu+\varrho,\ -\sigma,\ \sigma \end{matrix} \right.\right)$$

$\left[|\arg a| < \pi,\ \operatorname{Re}\varrho > |\operatorname{Re}\mu| - \frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(k+\varrho+\sigma) < 0\right]$. ИП II 406 (25)

4. $$\int_0^\infty x^{\varrho-1}(a+x)^{-\frac{1}{2}}\left[x^{\frac{1}{2}}+(a+x)^{\frac{1}{2}}\right]^{2\sigma}e^{-\frac{1}{2}x}M_{k,\mu}(x)\,dx=$$
$$=\frac{\Gamma(2\mu+1)\,a^\sigma}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+\mu\right)}G_{34}^{23}\left(a\,\middle|\,\begin{matrix}0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-k-\varrho\\ -\sigma,\ \varrho+\mu,\ \varrho-\mu,\ \sigma\end{matrix}\right)$$
$$\left[|\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}(\varrho+\mu)>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(k-\varrho-\sigma)>-\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 403(9)

5. $$\int_0^\infty x^{\varrho-1}(a+x)^{-\frac{1}{2}}\left[x^{\frac{1}{2}}+(a+x)^{\frac{1}{2}}\right]^{2\sigma}e^{\frac{1}{2}x}W_{k,\mu}(x)\,dx=$$
$$=\frac{\pi^{-\frac{1}{2}}a^\sigma}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\mu\right)}G_{34}^{33}\left(a\,\middle|\,\begin{matrix}0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+k+\varrho\\ -\sigma,\ \varrho+\mu,\ \varrho-\mu,\ \sigma\end{matrix}\right)$$
$$\left[|\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}\varrho>|\operatorname{Re}\mu|-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(k+\varrho+\sigma)<\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 406(26)

6. $$\int_0^\infty x^{\varrho-1}(a+x)^{-\frac{1}{2}}\left[x^{\frac{1}{2}}+(a+x)^{\frac{1}{2}}\right]^{2\sigma}e^{-\frac{1}{2}x}W_{k,\mu}(x)\,dx=$$
$$=\pi^{-\frac{1}{2}}a^\sigma G_{34}^{32}\left(a\,\middle|\,\begin{matrix}0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-k+\varrho\\ -\sigma,\ \varrho+\mu,\ \varrho-\mu,\ \sigma\end{matrix}\right)\quad\left[|\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}\varrho>|\operatorname{Re}\mu|-\frac{1}{2}\right].$$
ИП II 406(27)

7.625

1. $$\int_0^\infty x^{\varrho-1}\exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x\right]M_{k,\mu}(\alpha x)W_{\lambda,\nu}(\beta x)\,dx=$$
$$=\frac{\Gamma(1+\mu+\nu+\varrho)\,\Gamma(1+\mu-\nu+\varrho)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\lambda+\mu+\varrho\right)}\alpha^{\mu+\frac{1}{2}}\beta^{-\mu-\varrho-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\,{}_3F_2\left(\frac{1}{2}+k+\mu,\ 1+\mu+\nu+\varrho,\ 1+\mu-\nu+\varrho;\ 2\mu+1,\ \frac{3}{2}-\lambda+\mu+\varrho;\ -\frac{\alpha}{\beta}\right)$$
$$[\operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}(\varrho+\mu)>|\operatorname{Re}\nu|-1].$$ ИП II 410(43)

2. $$\int_0^\infty x^{\varrho-1}\exp\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x\right]W_{k,\mu}(\alpha x)W_{\lambda,\nu}(\beta x)\,dx=$$
$$=\beta^{-\varrho}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)\right]^{-1}\times$$
$$\times\,G_{33}^{33}\left(\frac{\beta}{\alpha}\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}+\mu,\ \frac{1}{2}-\mu,\ 1+\lambda+\varrho\\ \frac{1}{2}+\nu+\varrho,\ \frac{1}{2}-\nu+\varrho,\ -k\end{matrix}\right)$$
$$[|\operatorname{Re}\mu|+|\operatorname{Re}\nu|<\operatorname{Re}\varrho+1,\ \operatorname{Re}(k+\lambda+\varrho)<0].$$ ИП II 410(44)и

3. $\int\limits_0^\infty x^{\varrho-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x\right] W_{k,\mu}(\alpha x) W_{\lambda,\nu}(\beta x)\,dx =$

$$= \beta^{-\varrho} G_{33}^{22}\left(\frac{\beta}{\alpha}\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}+\mu, \frac{1}{2}-\nu, 1-\lambda+\varrho \\ \frac{1}{2}+\nu+\varrho, \frac{1}{2}-\nu+\varrho, k\end{matrix}\right.\right)$$

$[\operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0,\ |\operatorname{Re}\mu|+|\operatorname{Re}\nu|<\operatorname{Re}\varrho+1]$. ИП II 411 (46)

4 $\int\limits_0^\infty x^{\varrho-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)x\right] W_{k,\mu}(\alpha x) W_{\lambda,\nu}(\beta x)\,dx =$

$$= \beta^{-\varrho}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)\right]^{-1} \times$$

$$\times G_{33}^{23}\left(\frac{\beta}{\alpha}\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}+\mu, \frac{1}{2}-\mu, 1+\lambda+\varrho \\ \frac{1}{2}+\nu+\varrho, \frac{1}{2}-\nu+\varrho, k\end{matrix}\right.\right)$$

$[\operatorname{Re}\alpha>0,\ |\operatorname{Re}\mu|+|\operatorname{Re}\nu|<\operatorname{Re}\varrho+1]$. ИП II 411 (45)

7.626

1 $\int\limits_0^1 \left[\frac{k}{x}-\frac{1}{4}(\xi+\eta)\right] \exp\left[-\frac{1}{2}(\xi+\eta)x\right] x^c \times$

$$\times {}_1F_1(a;\ c;\ \xi x)\, {}_1F_1(a;\ c;\ \eta x)\,dx$$

$= 0$ $\quad [\xi \neq \eta,\ \operatorname{Re} c>0]$;

$= \frac{a}{\xi} e^{-\xi} [{}_1F_1(a+1;\ c;\ \xi)]^2$ $\quad [\xi=\eta,\ \operatorname{Re} c>0]$

[ξ и η — два любых корня функции ${}_1F_1(a;\ c;\ x)$]. ВТФ I 285

2 $\int\limits_1^\infty \left[\frac{k}{x}-\frac{1}{4}(\xi+\eta)\right] e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)x} x^c \Psi(a,\ c;\ \xi x)\, \Psi(a,\ c;\ \eta x)\,dx =$

$= 0$ $\quad [\xi \neq \eta]$;

$= -\xi^{-1} e^{-\xi} [\Psi(a-1,\ c;\ \xi)]^2$ $\quad [\xi = \eta]$

[ξ и η — два любых корня функции $\Psi(a,\ c;\ x)$]. ВТФ I 286

7.627

1. $\int\limits_0^\infty x^{2\lambda-1}(a+x)^{-\mu-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}x} W_{k,\mu}(a+x)\,dx =$

$$= \frac{\Gamma(2\lambda)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu-2\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)} a^{\lambda-\mu-\frac{1}{2}} W_{k+\lambda,\mu-\lambda}(a)$$

$\left[|\arg a|<\pi,\ 0<2\operatorname{Re}\lambda<\frac{1}{2}-\operatorname{Re}(k+\mu)\right]$. ИП II 411 (50)

2 $\int\limits_0^\infty x^{2\lambda-1}(a+x)^{-\mu-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}M_{k,\mu}(a+x)\,dx=$

$$=\frac{\Gamma(2\lambda)\Gamma(2\mu+1)\Gamma\left(k+\mu-2\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-2\lambda+2\mu)}a^{\lambda-\mu-\frac{1}{2}}M_{k-\lambda,\mu-\lambda}(a)$$

$\left[\operatorname{Re}\lambda>0,\ \operatorname{Re}(k+\mu-2\lambda)>-\frac{1}{2}\right]$. ИП II 405 (20)

3 $\int\limits_0^\infty x^{2\lambda-1}(a+x)^{-\mu-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}W_{k,\mu}(a+x)\,dx=$

$=\Gamma(2\lambda)a^{\lambda-\mu-\frac{1}{2}}W_{k-\lambda,\mu-\lambda}(a)$ $[|\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}\lambda>0]$ ИП II 411 (47)

4. $\int\limits_0^\infty x^{\lambda-1}(a+x)^{k-\lambda-1}e^{-\frac{1}{2}x}W_{k,\mu}(a+x)\,dx=\Gamma(\lambda)a^{k-1}W_{k-\lambda,\mu}(a)$

$[|\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}\lambda>0]$. ИП II 411 (48)

5. $\int\limits_0^\infty x^{\varrho-1}(a+x)^{-\sigma}e^{-\frac{1}{2}x}W_{k,\mu}(a+x)\,dx=$

$$=\Gamma(\varrho)a^{\varrho}e^{\frac{1}{2}a}G_{23}^{30}\left(a\left|\begin{matrix}0, & 1-k-\sigma & \\ -\varrho, & \frac{1}{2}+\mu-\sigma, & \frac{1}{2}-\mu-\sigma\end{matrix}\right.\right)$$

$[|\arg a|<\pi,\quad \operatorname{Re}\varrho>0]$. ИП II 411 (49)

6. $\int\limits_0^\infty x^{\varrho-1}(a+x)^{-\sigma}e^{\frac{1}{2}x}W_{k,\mu}(a+x)\,dx=$

$$=\frac{\Gamma(\varrho)a^{\varrho}e^{-\frac{1}{2}a}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\mu\right)}G_{23}^{31}\left(a\left|\begin{matrix}k-\sigma+1, & 0 & \\ -\varrho, & \frac{1}{2}+\mu-\sigma & \frac{1}{2}-\mu-\sigma\end{matrix}\right.\right)$$

$[|\arg a|<\pi,\ 0<\operatorname{Re}\varrho<\operatorname{Re}(\sigma-k)]$. ИП II 412 (51)

7 $\int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(a+x)}\frac{(a+x)^{2\varkappa-1}}{(ax)^{\varkappa}}W_{\varkappa,\mu}(x)\frac{dx}{x}=$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\varkappa\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\varkappa\right)}{a\Gamma(1-2\varkappa)}W_{\varkappa,\mu}(a)$$

$\left[\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\pm\mu-\varkappa\right)>0\right]$. Бу 126 (7а)

8 $\int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x}x^{\gamma+\alpha-1}M_{\varkappa,\mu}(x)\frac{dx}{(x+a)^{\alpha}}=$

$$=\frac{\Gamma(1+2\mu)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\gamma\right)\Gamma(\varkappa-\gamma)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\gamma\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\varkappa\right)}{}_2F_2\left(\alpha,\ \varkappa-\gamma;\frac{1}{2}+\mu-\gamma,\frac{1}{2}-\mu-\gamma;\ a\right)+$$

$$+\frac{\Gamma\left(\alpha+\gamma+\frac{1}{2}+\mu\right)\Gamma\left(-\gamma-\frac{1}{2}-\mu\right)}{\Gamma(\alpha)}a^{\gamma+\frac{1}{2}+\mu}\times$$

$$\times {}_2F_2\left(\alpha+\gamma+\mu+\frac{1}{2},\ \varkappa+\mu+\frac{1}{2};\ 1+2\mu,\ \frac{3}{2}+\mu+\gamma;\ a\right)$$

$$\left[\operatorname{Re}\left(\gamma+\alpha+\frac{1}{2}+\mu\right)>0,\ \operatorname{Re}(\gamma-\varkappa)<0\right].$$ Бу 126 (8) и

9. $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x}x^{n+\mu+\frac{1}{2}}M_{\varkappa,\mu}(x)\frac{dx}{x+a}=$$

$$=(-1)^{n+1}a^{n+\mu+\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}a}\Gamma(1+2\mu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+\varkappa\right)W_{-\varkappa,\mu}(a)$$

$$\left[n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \operatorname{Re}\left(\mu+1+\frac{n}{2}\right)>0,\ \operatorname{Re}\left(\varkappa-\mu-\frac{1}{2}\right)<n,\ |\arg a|<\pi\right]$$

Бу 127 (10а) и

7.628

1 $$\int_0^\infty e^{-st}e^{-t^2}t^{2c-2}{}_1F_1(a;\ c;\ t^2)\,dt=$$

$$=2^{1-2c}\Gamma(2c-1)\Psi\left(c-\frac{1}{2},\ a+\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}s^2\right)$$

$$\left[\operatorname{Re}c>\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}s>0\right].$$ ВТФ I 270 (11)

2. $$\int_0^\infty t^{2\nu-1}e^{-\frac{1}{2a}t^2}e^{-st}M_{-3\nu,\nu}\left(\frac{t^2}{a}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma(4\nu+1)a^{-\nu}s^{-4\nu}e^{\frac{1}{8}as^2}K_{2\nu}\left(\frac{as^2}{8}\right)$$

$$\left[\operatorname{Re}a>0,\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{4},\ \ \operatorname{Re}s>0\right].$$ ИП I 215 (12)

3 $$\int_0^\infty t^{2\mu-1}e^{-\frac{1}{2a}t^2}e^{-st}M_{\lambda,\mu}\left(\frac{t^2}{a}\right)dt=$$

$$=2^{-3\mu-\lambda}\Gamma(4\mu+1)a^{\frac{1}{2}(\lambda+\mu-1)}s^{\lambda-\mu-1}e^{\frac{as^2}{8}}W_{-\frac{1}{2}(\lambda+3\mu),\ \frac{1}{2}(\lambda-\mu)}\left(\frac{as^2}{4}\right)$$

$$\left[\operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{4},\ \operatorname{Re}s>0\right].$$ ИП I 215 (13)

7.629

1. $$\int_0^\infty t^k\exp\left(\frac{a}{2t}\right)e^{-st}W_{k,\mu}\left(\frac{a}{t}\right)dt=$$

$$=2^{1-2k}\sqrt{as}^{\,-k-\frac{1}{2}}S_{2k,\,2\mu}(2\sqrt{as})$$

$$\left[|\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}(k\pm\mu)>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}s>0\right].$$ ИП I 217 (21)

2. $$\int_0^\infty t^{-k} \exp\left(-\frac{a}{2t}\right) e^{-st} W_{k,\mu}\left(\frac{a}{t}\right) dt = 2\sqrt{a}\, s^{k-\frac{1}{2}} K_{2\mu}(2\sqrt{as})$$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re} s > 0]$. ИП I 217 (22)

7.631

1 $$\int_0^\infty x^{\varrho-1} \exp\left[\frac{1}{2}(\alpha^{-1}x - \beta x^{-1})\right] W_{k,\mu}(\alpha^{-1}x) W_{\lambda,\nu}(\beta x^{-1})\, dx =$$

$$= \beta^\varrho \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\mu\right)\right]^{-1} \times$$

$$\times G_{24}^{41}\left(\frac{\beta}{\alpha}\left|\begin{matrix} 1+k,\ 1-\lambda-\varrho \\ \frac{1}{2}+\mu,\ \frac{1}{2}-\mu,\ \frac{1}{2}+\nu-\varrho,\ \frac{1}{2}-\nu-\varrho \end{matrix}\right.\right)$$

$\left[|\arg\alpha| < \frac{3}{2}\pi,\ \operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}(k+\varrho) < -|\operatorname{Re}\nu| - \frac{1}{2}\right]$.

ИП II 412 (55)

2. $$\int_0^\infty x^{\varrho-1} \exp\left[\frac{1}{2}(\alpha^{-1}x + \beta x^{-1})\right] W_{k,\mu}(\alpha^{-1}x) W_{\lambda,\nu}(\beta x^{-1})\, dx =$$

$$= \beta^\varrho \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda-\nu\right)\right]^{-1} \times$$

$$\times G_{24}^{42}\left(\frac{\beta}{\alpha}\left|\begin{matrix} 1+k,\ 1+\lambda-\varrho \\ \frac{1}{2}+\mu,\ \frac{1}{2}-\mu,\ \frac{1}{2}+\nu-\varrho,\ \frac{1}{2}-\nu-\varrho \end{matrix}\right.\right)$$

$\left[|\arg\alpha| < \frac{3}{2}\pi,\ |\arg\beta| < \frac{3}{2}\pi,\ \operatorname{Re}(\lambda-\varrho) < \frac{1}{2} - |\operatorname{Re}\mu|,\right.$

$\left.\operatorname{Re}(k+\varrho) < \frac{1}{2} - |\operatorname{Re}\nu|\right]$. ИП II 413 (57)

3 $$\int_0^\infty x^{\varrho-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha^{-1}x + \beta x^{-1})\right] W_{k,\mu}(\alpha^{-1}x) W_{\lambda,\nu}(\beta x^{-1})\, dx =$$

$$= \beta^\varrho G_{24}^{40}\left(\frac{\beta}{\alpha}\left|\begin{matrix} 1-k,\ 1-\lambda-\varrho \\ \frac{1}{2}+\mu,\ \frac{1}{2}-\mu,\ \frac{1}{2}+\nu-\varrho,\ \frac{1}{2}-\nu-\varrho \end{matrix}\right.\right)$$

$[\operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0]$. ИП II 412 (54)

7.632 $$\int_0^\infty e^{-st} (e^t - 1)^{\mu-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda e^t\right) M_{k,\mu}(\lambda e^t - \lambda)\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma(2\mu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+k-\mu+s\right)}{\Gamma(s+1)} W_{-k-\frac{1}{2}s,\ \mu-\frac{1}{2}s}(\lambda)$$

$\left[\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re} s > \operatorname{Re}(\mu-k) - \frac{1}{2}\right]$. ИП I 216 (15)

7.64 Вырожденные гипергеометрические функции и тригонометрические функции

7.641 $$\int\limits_0^\infty \cos(ax)\,{}_1F_1(\nu+1;\ 1;\ ix)\,{}_1F_1(\nu+1;\ 1;\ -ix)\,dx =$$
$$= -a^{-1}\sin(\nu\pi)\,P_\nu(2a^{-2}-1) \qquad [0 < a < 1];$$
$$= 0 \qquad [1 < a < \infty]$$
$$[-1 < \operatorname{Re}\nu < 0].$$ ИП II 402(4)

7.642 $$\int\limits_0^\infty \cos(2xy)\,{}_1F_1(a;\ c;\ -x^2)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\,y^{2a-1}e^{-y^2}\,\Psi\left(c-\frac{1}{2},\ a+\frac{1}{2};\ y^2\right).$$ ВТФ I 285 (12)

7.643

1. $$\int\limits_0^\infty x^{4\nu}e^{-\frac{1}{2}x^2}\sin(bx)\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-2\nu;\ 2\nu+1;\ \frac{1}{2}x^2\right)dx =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,b^{4\nu}e^{-\frac{1}{2}b^2}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-2\nu;\ 1+2\nu;\ \frac{1}{2}b^2\right)$$
$$\left[b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{4}\right].$$ ИП I 115 (5)

2. $$\int\limits_0^\infty x^{2\nu-1}e^{-\frac{1}{4}x^2}\sin(bx)\,M_{3\nu,\nu}\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,b^{2\nu-1}e^{-\frac{1}{4}b^2}M_{3\nu,\nu}\left(\frac{1}{2}b^2\right)$$
$$\left[b > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{4}\right].$$ ИП I 116 (10)

3 $$\int\limits_0^\infty x^{-2\nu-1}e^{\frac{1}{4}x^2}\cos(bx)\,W_{3\nu,\nu}\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,b^{-2\nu-1}e^{\frac{1}{4}b^2}W_{3\nu,\nu}\left(\frac{1}{2}b^2\right)$$
$$\left[\operatorname{Re}\nu < \frac{1}{4},\ b > 0\right].$$ ИП I 61 (7)

4. $$\int\limits_0^\infty x^{-2\nu}e^{\frac{1}{4}x^2}\sin(bx)\,W_{3\nu-1,\nu}\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,b^{-2\nu}e^{\frac{1}{4}b^2}W_{3\nu-1,\nu}\left(\frac{1}{2}b^2\right)$$
$$\left[\operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2},\quad b > 0\right].$$ ИП I 116 (9)

7.644

1 $$\int\limits_0^\infty x^{-\mu-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(2ax^{\frac{1}{2}}\right)M_{k,\mu}(x)\,dx =$$
$$= \pi^{\frac{1}{2}}a^{k+\mu-1}\,\frac{\Gamma(3-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+\mu\right)}\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right)W_{\varrho,\sigma}(a^2),$$
$$2\varrho = k-3\mu+1,\quad 2\sigma = k+\mu-1$$
$$[a > 0,\ \operatorname{Re}(k+\mu) > 0].$$ ИП II 403 (10)

2. $$\int_0^\infty x^{\varrho-1}\sin\left(cx^{\frac{1}{2}}\right)e^{-\frac{1}{2}x}W_{k,\mu}(x)\,dx=\frac{c\Gamma(1+\mu+\varrho)\Gamma(1-\mu+\varrho)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k+\varrho\right)}\times$$
$$\times{}_2F_2\left(1+\mu+\varrho,\ 1-\mu+\varrho;\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}-k+\varrho;\ -\frac{c^2}{4}\right)$$
$[\operatorname{Re}\varrho>|\operatorname{Re}\mu|-1]$. ИП II 407 (28)

3. $$\int_0^\infty x^{\varrho-1}\sin\left(cx^{\frac{1}{2}}\right)e^{\frac{1}{2}x}W_{k,\mu}(x)\,dx=$$
$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\mu\right)}G_{23}^{22}\left(\frac{c^2}{4}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}+\mu-\varrho,\ \frac{1}{2}-\mu-\varrho\\ \frac{1}{2},\ -k-\varrho,\ 0\end{matrix}\right)$$
$\left[c>0,\ \operatorname{Re}\varrho>|\operatorname{Re}\mu|-1,\ \operatorname{Re}(k+\varrho)<\frac{1}{2}\right]$. ИП II 407 (29)

4. $$\int_0^\infty x^{\varrho-1}\cos\left(cx^{\frac{1}{2}}\right)e^{-\frac{1}{2}x}W_{k,\mu}(x)\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\varrho\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+\varrho\right)}{\Gamma(1-k+\varrho)}\times$$
$$\times{}_2F_2\left(\frac{1}{2}+\mu+\varrho,\ \frac{1}{2}-\mu+\varrho;\ \frac{1}{2},\ 1-k+\varrho;\ -\frac{c^2}{4}\right)$$
$\left[\operatorname{Re}\varrho>|\operatorname{Re}\mu|-\frac{1}{2}\right]$ ИП II 407 (30)

5. $$\int_0^\infty x^{\varrho-1}\cos\left(cx^{\frac{1}{2}}\right)e^{\frac{1}{2}x}W_{k,\mu}(x)\,dx=$$
$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\mu\right)}G_{23}^{22}\left(\frac{c^2}{4}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}+\mu-\varrho,\ \frac{1}{2}-\mu-\varrho\\ 0,\ -k-\varrho,\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right)$$
$\left[c>0,\ \operatorname{Re}\varrho>|\operatorname{Re}\mu|-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(k+\varrho)<\frac{1}{2}\right]$. ИП II 407 (31)

7.65 Вырожденные гипергеометрические функции и цилиндрические функции

7.651

1. $$\int_0^\infty J_\nu(xy)M_{-\frac{1}{2}\mu,\ \frac{1}{2}\nu}(ax)W_{\frac{1}{2}\mu,\ \frac{1}{2}\nu}(ax)\,dx=$$
$$=ay^{-\lambda-1}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu\right)}\left[a+(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right]^\mu(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$\left[y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}a>0\right]$. ИП II 85 (19)

2. $$\int_0^\infty M_{k,\frac{1}{2}\nu}(-iax)M_{-k,\frac{1}{2}\nu}(-iax)J_\nu(xy)\,dx=$$
$$=\frac{ae^{-\frac{1}{2}(\nu+1)\pi i}[\Gamma(1+\nu)]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\frac{1}{2}\nu\right)}y^{-1-2k}\times$$

$$\times (a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\{[a+(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}]^{2k}+[a-(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}]^{2k}\} \qquad [0<y<a];$$
$$=0 \qquad [a<y<\infty]$$
$$\left[a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ |\operatorname{Re}k|<\frac{1}{4}\right]. \qquad \text{ИП II 85(18)}$$

7.652 $$\int_0^\infty M_{-\mu,\frac{1}{2}\nu}\{a[(b^2+x^2)^{\frac{1}{2}}-b]\}W_{\mu,\frac{1}{2}\nu}\{a[(b^2+x^2)^{\frac{1}{2}}+b]\}J_\nu(xy)\,dx=$$
$$=\frac{ay^{-2\mu-1}\Gamma(1+\nu)[(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+a]^{2\mu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\mu\right)(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\exp[-b(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}\mu<\frac{1}{4},\ \operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}b>0\right]. \qquad \text{ИП II 87(29)}$$

7.66 Вырожденные гипергеометрические, цилиндрические и степенная функции

7.661

1. $$\int_0^\infty x^{-1}W_{k,\mu}(ax)M_{-k,\mu}(ax)J_0(xy)\,dx=$$
$$=e^{-ik\pi}\frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+k\right)}P^k_{\mu-\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]Q^k_{\mu-\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}k<\frac{3}{4}\right]. \qquad \text{ИП II 18(44)}$$

2. $$\int_0^\infty x^{-1}W_{k,\mu}(ax)W_{-k,\mu}(ax)J_0(xy)\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\pi\cos(\mu\pi)P^k_{\mu-\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]P^{-k}_{\mu-\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}a>0,\ |\operatorname{Re}\mu|<\frac{1}{2}\right]. \qquad \text{ИП II 18(45)}$$

3. $$\int_0^\infty x^{2\mu-\nu}W_{k,\mu}(ax)M_{-k,\mu}(ax)J_\nu(xy)\,dx=$$
$$=2^{2\mu-\nu+2k}a^{2k}y^{\nu-2\mu-2k-1}\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\nu-k-\mu+\frac{1}{2}\right)}\times$$
$$\times{}_3F_2\left(\frac{1}{2}-k,\ 1-k,\ \frac{1}{2}-k+\mu;\ 1-2k,\ \frac{1}{2}-k-\mu+\nu;\ -\frac{y^2}{a^2}\right)$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}(2\mu+2k-\nu)<\frac{1}{2}\right]. \qquad \text{ИП II 85(20)}$$

4. $$\int_0^\infty x^{2\varrho-\nu} W_{k,\mu}(iax) W_{k,\mu}(-iax) J_\nu(xy)\,dx =$$

$$= 2^{2\varrho-\nu} y^{\nu-2\varrho-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\mu\right)\right]^{-1} \times$$

$$\times G_{44}^{24}\left(\frac{y^2}{a^2}\middle| \begin{matrix} \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}-\mu,\ \frac{1}{2}+\mu \\ \varrho+\frac{1}{2},\ -k,\ k,\ \varrho-\nu+\frac{1}{2} \end{matrix}\right)$$

$$\left[y>0,\ \operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re}\varrho>|\operatorname{Re}\mu|-1,\ \operatorname{Re}(2\varrho+2k-\nu)<\frac{1}{2}\right].$$

ИП II 86 (23) u

5. $$\int_0^\infty x^{2\varrho-\nu} W_{k,\mu}(ax) M_{-k,\mu}(ax) J_\nu(xy)\,dx =$$

$$= \frac{2^{2\varrho-\nu}\Gamma(2\mu+1)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)} y^{\nu-2\varrho-1} G_{44}^{23}\left(\frac{y^2}{a^2}\middle| \begin{matrix} \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}-\mu,\ \frac{1}{2}+\mu \\ \varrho+\frac{1}{2},\ -k,\ k,\ \varrho-\nu+\frac{1}{2} \end{matrix}\right)$$

$$\left[y>0,\ \operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re}\varrho>-1,\ \operatorname{Re}(\varrho+\mu)>-1),\right.$$

$$\left.\operatorname{Re}(2\varrho+2k+\nu)<\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 86 (21) u

6. $$\int_0^\infty x^{2\varrho-\nu} W_{k,\mu}(ax) W_{-k,\mu}(ax) J_\nu(xy)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\varrho+1+\mu)\Gamma(\varrho+1-\mu)\Gamma(2\varrho+2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+k+\varrho\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-k+\varrho\right)\Gamma(1+\nu)} y^\nu 2^{-\nu-1} a^{-2\varrho-1} \times$$

$$\times {}_4F_3\left(\varrho+1,\ \varrho+\frac{3}{2},\ \varrho+1+\mu,\ \varrho+1-\mu;\ \frac{3}{2}+k+\varrho,\ \frac{3}{2}-k+\varrho,\ 1+\nu;\ -\frac{y^2}{a^2}\right)$$

$$[y>0,\ \operatorname{Re}\varrho>|\operatorname{Re}\mu|-1,\ \operatorname{Re} a>0].$$

ИП II 86 (22) u

7.662

1. $$\int_0^\infty x^{-1} M_{-\mu,\frac{1}{4}\nu}\left(\frac{1}{2}x^2\right) W_{\mu,\frac{1}{4}\nu}\left(\frac{1}{2}x^2\right) J_\nu(xy)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\nu-\mu\right)} I_{\frac{1}{4}\nu-\mu}\left(\frac{1}{4}y^2\right) K_{\frac{1}{4}\nu+\mu}\left(\frac{1}{4}y^2\right)$$

$$[y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1].$$ ИП II 86 (24)

2. $$\int\limits_0^\infty x^{-1} M_{\alpha-\beta,\frac{1}{4}\nu-\gamma}\left(\frac{1}{2}x^2\right) W_{\alpha+\beta,\frac{1}{4}\nu+\gamma}\left(\frac{1}{2}x^2\right) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\nu-2\gamma\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\nu-2\beta\right)} y^{-2} M_{\alpha-\gamma,\frac{1}{4}\nu-\beta}\left(\frac{1}{2}y^2\right) W_{\alpha+\gamma,\frac{1}{4}\nu+\beta}\left(\frac{1}{2}y^2\right)$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}\beta<\frac{1}{8},\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}(\nu-4\gamma)>-2\right].$$ ИП II 86 (25)

3. $$\int\limits_0^\infty x^{-1} M_{k,0}(iax^2) M_{k,0}(-iax^2) K_0(xy)\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{16}\left\{\left[J_k\left(\frac{y^2}{8a}\right)\right]^2 + \left[N_k\left(\frac{y^2}{8a}\right)\right]^2\right\}$$
$$[a>0].$$ ИП II 152 (83)

4. $$\int\limits_0^\infty x^{-1} M_{k,\mu}(iax^2) M_{k,\mu}(-iax^2) K_0(xy)\,dx =$$
$$= ay^{-2}[\Gamma(2\mu+1)]^2 W_{-\mu,k}\left(\frac{iy^2}{4a}\right) W_{-\mu,k}\left(-\frac{iy^2}{4a}\right)$$
$$\left[a>0,\ \operatorname{Re} y>0,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 152 (84)

7.663

1. $$\int\limits_0^\infty x^{2\varrho}\,{}_1F_1(a;\ b;\ -\lambda x^2) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{2^{2\varrho}\Gamma(b)}{\Gamma(a)\,y^{2\varrho+1}} G_{23}^{21}\left(\frac{y^2}{4\lambda}\left|\begin{matrix} 1, & b \\ \frac{1}{2}+\varrho+\frac{1}{2}\nu, & a, & \frac{1}{2}+\varrho-\frac{1}{2}\nu\end{matrix}\right.\right)$$
$$\left[y>0,\ -1-\operatorname{Re}\nu<2\operatorname{Re}\varrho<\frac{1}{2}+2\operatorname{Re} a,\ \operatorname{Re}\lambda>0\right].$$ ИП II 88 (6)

2. $$\int\limits_0^\infty x^{\nu+1}\,{}_1F_1\left(2a-\nu;\ a+1;\ -\frac{1}{2}x^2\right) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{2^{\nu-a+\frac{1}{2}}\Gamma(a+1)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2a-\nu)} y^{2a-\nu-1} e^{-\frac{1}{4}y^2} K_{a-\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}y^2\right)$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}(4a-3\nu)>\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 87 (1)

3. $$\int\limits_0^\infty x^a\,{}_1F_1\left(a;\ \frac{1+a+\nu}{2};\ -\frac{1}{2}x^2\right) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= y^{a-1}\,{}_1F_1\left(a;\ \frac{1+a+\nu}{2};\ -\frac{y^2}{2}\right)$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re} a>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(a+\nu)>-1\right].$$ ИП II 87 (2)

4. $$\int_0^\infty x^{\nu+1-2a}{}_1F_1\left(a; 1+\nu-a; -\frac{1}{2}x^2\right) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(1+\nu-a)}{\Gamma(a)} 2^{-2a+\nu+\frac{1}{2}} y^{2a-\nu-1} e^{-\frac{1}{4}y^2} I_{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}y^2\right)$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re} a - 1 < \operatorname{Re}\nu < 4\operatorname{Re} a - \frac{1}{2}\right].$$ ИП II 87(3)

5. $$\int_0^\infty x\,{}_1F_1(\lambda;\ 1;\ -x^2) J_0(xy)\,dx = [2^{2\lambda-1}\Gamma(\lambda)]^{-1} y^{2\lambda-2} e^{-\frac{1}{4}y^2}$$
$$[y>0,\ \operatorname{Re}\lambda>0].$$ ИП II 18(46)

6. $$\int_0^\infty x^{\nu+1}{}_1F_1(a;\ b;\ -\lambda x^2) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{2^{1-a}\Gamma(b)}{\Gamma(a)\,\lambda^{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\nu}} y^{a-2} e^{-\frac{y^2}{8\lambda}} W_{k,\mu}\left(\frac{y^2}{4\lambda}\right),$$
$$2k = a - 2b + \nu + 2,\quad 2\mu = a - \nu - 1$$
$$\left[y>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<2\operatorname{Re} a-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\lambda>0\right].$$ ИП II 88(4)

7. $$\int_0^\infty x^{2b-\nu-1}{}_1F_1(a;\ b;\ -\lambda x^2) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{2^{2b-2a-\nu-1}\Gamma(b)}{\Gamma(a-b+\nu+1)} \lambda^{-a} y^{2a-2b+\nu}{}_1F_1\left(a;\ 1+a-b+\nu;\ -\frac{y^2}{4\lambda}\right)$$
$$\left[y>0,\ 0<\operatorname{Re} b<\frac{3}{4}+\operatorname{Re}\left(a+\frac{1}{2}\nu\right),\ \operatorname{Re}\lambda>0\right].$$ ИП II 88(5)

7.664

1 $$\int_0^\infty x W_{\frac{1}{2}\nu,\mu}\left(\frac{a}{x}\right) W_{-\frac{1}{2}\nu,\mu}\left(\frac{a}{x}\right) K_\nu(xy)\,dx =$$
$$= 2ay^{-1} K_{2\mu}\left[(2ay)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}i\pi}\right] K_{2\mu}\left[(2ay)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}i\pi}\right]$$
$$[\operatorname{Re} y>0,\quad \operatorname{Re} a>0].$$ ИП II 152(85)

2 $$\int_0^\infty x W_{\frac{1}{2}\nu,\mu}\left(\frac{2}{x}\right) W_{-\frac{1}{2}\nu,\mu}\left(\frac{2}{x}\right) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= -4y^{-1}\left\{\sin\left[\left(\mu-\frac{1}{2}\nu\right)\pi\right] J_{2\mu}(2y^{\frac{1}{2}}) + \right.$$
$$\left. + \cos\left[\left(\mu-\frac{1}{2}\nu\right)\pi\right] N_{2\mu}(2y^{\frac{1}{2}})\right\} K_{2\mu}(2y^{\frac{1}{2}})$$
$$[y>0,\ \operatorname{Re}(\nu\pm 2\mu)>-1].$$ ИП II 87(27)

3. $$\int_0^\infty xW_{\frac{1}{2}\nu,\,\mu}\left(\frac{2}{x}\right)W_{-\frac{1}{2}\nu,\,\mu}\left(\frac{2}{x}\right)N_\nu(xy)\,dx=$$
$$=4y^{-1}\left\{\cos\left[\left(\mu-\frac{1}{2}\nu\right)\pi\right]J_{2\mu}(2y^{\frac{1}{2}})-\right.$$
$$\left.-\sin\left[\left(\mu-\frac{1}{2}\nu\right)\pi\right]N_{2\mu}(2y^{\frac{1}{2}})\right\}K_{2\mu}(2y^{\frac{1}{2}})\Big\}$$
$$\left[y>0,\ |\operatorname{Re}\mu|<\frac{1}{4}\right].$$ ИП II 117 (48)

4 $$\int_0^\infty xW_{-\frac{1}{2}\nu,\,\mu}\left(\frac{2}{x}\right)M_{\frac{1}{2}\nu,\,\mu}\left(\frac{2}{x}\right)J_\nu(xy)\,dx=$$
$$=\frac{4\Gamma(1+2\mu)\,y^{-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu+\mu\right)}J_{2\mu}(2y^{\frac{1}{2}})K_{2\mu}(2y^{\frac{1}{2}})$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{4}\right].$$ ИП II 86 (26)

5. $$\int_0^\infty xW_{-\frac{1}{2}\nu,\,\mu}\left(\frac{ia}{x}\right)W_{-\frac{1}{2}\nu,\,\mu}\left(-\frac{ia}{x}\right)J_\nu(xy)\,dx=$$
$$=4ay^{-1}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+\frac{1}{2}\nu\right)\right]^{-1}K_\mu[(2iay)^{\frac{1}{2}}]\,K_\mu[(-2iay)^{\frac{1}{2}}]$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}a>0,\ |\operatorname{Re}\mu|<\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\nu>-1\right].$$ ИП II 87 (28)

7.665

1. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}J_\nu(ax^{\frac{1}{2}})\,K_{\frac{1}{2}\nu-\mu}\left(\frac{1}{2}x\right)M_{k,\,\mu}(x)\,dx=$$
$$=\frac{\Gamma(2\mu+1)}{a\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\nu+1\right)}W_{\frac{1}{2}(k-\mu),\,\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}\nu}\left(\frac{a^2}{2}\right)M_{\frac{1}{2}(k+\mu),\,\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}\nu}\left(\frac{a^2}{2}\right)$$
$$\left[a>0,\ \operatorname{Re}k>-\frac{1}{4},\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\nu>-1\right].$$ ИП II 405 (18)

2. $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}c'-1}\,\Psi(a,\ c;\ x)\,{}_1F_1(a';\ c';\ -x)\,J_{c+c'-2}[2(xy)^{\frac{1}{2}}]\,dx=$$
$$=\frac{\Gamma(c')}{\Gamma(a+a')}y^{\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}c'-1}\,\Psi(c'-a',\ c+c'-a-a';\ y)\,{}_1F_1(a';\ a+a';\ -y)$$
$$\left[\operatorname{Re}c'>0,\ 1<\operatorname{Re}(c+c')<2\operatorname{Re}(a+a')+\frac{1}{2}\right].$$ ВТФ I 287 (23)

7.666 $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}}\,{}_1F_1(a;\ c;\ -2x^{\frac{1}{2}})\,\Psi(a,\ c;\ 2x^{\frac{1}{2}})\,J_{c-1}[2(xy)^{\frac{1}{2}}]\,dx=$$
$$=2^{-c}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}y^{a-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}}[1+(1+y)^{\frac{1}{2}}]^{c-2a}(1+y)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\left[\operatorname{Re}c>2,\ \operatorname{Re}(c-2a)<\frac{1}{2}\right].$$ ВТФ I 285 (13)

7.67 Вырожденные гипергеометрические функции, цилиндрические, показательная и степенная функции

7.671

1. $$\int_0^\infty x^{k-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(a+1)x\right] K_\nu\left(\frac{1}{2}ax\right) M_{k,\nu}(x)\,dx =$$
$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(k)\Gamma(k+2\nu)}{a^{k+\nu}\Gamma\left(k+\nu+\frac{1}{2}\right)}\, {}_2F_1(k,\ k+2\nu;\ 2\nu+1;\ -a^{-1})$$
$[\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re} k > 0,\ \operatorname{Re}(k+2\nu) > 0]$. ИП II 405 (17)

2. $$\int_0^\infty x^{-k-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(a-1)x\right] K_\mu\left(\frac{1}{2}ax\right) W_{k,\mu}(x)\,dx =$$
$$= \frac{\pi\Gamma(-k)\Gamma(2\mu-k)\Gamma(-2\mu-k)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)} \times$$
$$\times 2^{2k+1}a^{k-\nu}\, {}_2F_1(-k,\ 2\mu-k;\ -2k;\ 1-a^{-1})$$
$[\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re} k < 2\operatorname{Re}\mu < -\operatorname{Re} k]$. ИП II 408 (36)

7.672

1. $$\int_0^\infty x^{2\varrho} e^{-\frac{1}{2}ax^2} M_{k,\mu}(ax^2) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)} 2^{2\varrho} y^{-2\varrho-1} G_{23}^{21}\left(\frac{y^2}{4a}\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}-\mu & \frac{1}{2}+\mu \\ \frac{1}{2}+\varrho+\frac{1}{2}\nu, & k, \frac{1}{2}+\varrho-\frac{1}{2}\nu\end{matrix}\right)$$
$$\left[y > 0,\ -1-\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\nu+\mu\right) < \operatorname{Re}\varrho < \operatorname{Re} k - \frac{1}{4},\ \operatorname{Re} a > 0\right].$$
ИП II 83 (10)

2. $$\int_0^\infty x^{2\varrho} e^{-\frac{1}{2}ax^2} W_{k,\mu}(ax^2) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma\left(1+\mu+\frac{1}{2}\nu+\varrho\right)\Gamma\left(1-\mu+\frac{1}{2}\nu+\varrho\right)2^{-\nu-1}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-k+\frac{1}{2}\nu+\varrho\right)} a^{-\frac{1}{2}\nu-\varrho-\frac{1}{2}} y^\nu \times$$
$$\times {}_2F_2\left(\lambda+\mu,\ \lambda-\mu;\ \nu+1,\ \frac{1}{2}-k+\lambda;\ -\frac{y^2}{4a}\right),$$
$$\lambda = 1+\frac{1}{2}\nu+\varrho$$
$\left[y > 0,\quad \operatorname{Re} a > 0,\quad \operatorname{Re}\left(\varrho \pm \mu + \frac{1}{2}\nu\right) > -1\right]$. ИП II 85 (16)

3. $$\int_0^\infty x^{2\varrho} e^{\frac{1}{2}ax^2} W_{k,\mu}(ax^2) J_\nu(xy)\,dx = \frac{2^{2\varrho} y^{-2\varrho-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)} \times$$
$$\times G_{23}^{22}\left(\frac{y^2}{4a}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}-\mu, \frac{1}{2}+\mu\\ \frac{1}{2}+\varrho+\frac{1}{2}\nu, -k, \frac{1}{2}+\varrho-\frac{1}{2}\nu\end{matrix}\right)$$
$$\left[y>0, |\arg a|<\pi, \quad -1-\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\nu\pm\mu\right)<\operatorname{Re}\varrho<-\frac{1}{4}-\operatorname{Re}k\right].$$
ИП II 85 (17)

4. $$\int_0^\infty x^{2\lambda+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}x^2} M_{k,\mu}\left(\frac{1}{2}x^2\right) N_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{2^\lambda y^{-\frac{1}{2}}\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+\mu\right)} G_{34}^{31}\left(\frac{y^2}{2}\middle|\begin{matrix}-\mu-\lambda, \mu-\lambda, l\\ h, \varkappa, k-\lambda-\frac{1}{2}, l\end{matrix}\right),$$
$$h=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\nu, \quad \varkappa=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu, \quad l=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu$$
$$\left[y>0, \quad \operatorname{Re}(k-\lambda)>0, \quad \operatorname{Re}(2\lambda+2\mu\pm\nu)>-\frac{5}{2}\right].$$ ИП II 116 (45)

5. $$\int_0^\infty x^{2\lambda+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}x^2} W_{k,\mu}\left(\frac{1}{2}x^2\right) N_\nu(xy)\,dx =$$
$$= 2^\lambda \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\mu\right)\right]^{-1} \times$$
$$\times G_{34}^{32}\left(\frac{y^2}{2}\middle|\begin{matrix}-\mu-\lambda, \mu-\lambda, l\\ h, \varkappa, -\frac{1}{2}-k-\lambda, l\end{matrix}\right) y^{-\frac{1}{2}},$$
$$h=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\nu, \quad \varkappa=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu, \quad l=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu$$
$$\left[y>0, \quad \operatorname{Re}(k+\lambda)<0, \quad \operatorname{Re}(2\lambda\pm2\mu\pm\nu)>-\frac{5}{2}\right].$$ ИП II 117 (47)

6. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} M_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4}}(x^2) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= (2\nu+1)\,2^{-\nu} y^{\nu-1}\left[1-\Phi\left(\frac{1}{2}y\right)\right]$$
$$\left[y>0, \quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 82 (1)

7. $$\int_0^\infty x^{-1} e^{-\frac{1}{2}x^2} M_{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}}(x^2) J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{\Gamma(\nu+2)\,y^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)2^\nu}\left[1-\Phi\left(\frac{1}{2}y\right)\right]$$
$$[y>0, \quad \operatorname{Re}\nu>-1].$$ ИП II 82 (2)

8. $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}x^2} M_{k,\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{1}{2}x^2\right) J_\nu(xy)\,dx = \frac{2^{-k}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)} y^{2k-1} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

$$\left[y>0, \quad \operatorname{Re}\nu > -1, \quad \operatorname{Re}k < \frac{1}{2}\right].$$ ИП II 83(7)

9. $$\int_0^\infty x^{\nu-2\mu} e^{-\frac{1}{4}x^2} M_{k,\mu}\left(\frac{1}{2}x^2\right) J_\nu(xy)\,dx =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-k-3\mu+\nu\right)} \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)} y^{k+\mu-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4}y^2} W_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}y^2\right),$$

$$2\alpha = k-3\mu+\nu+\frac{1}{2}, \qquad 2\beta = k+\mu-\nu-\frac{1}{2}$$

$$\left[y>0, \quad -1 < \operatorname{Re}\nu < 2\operatorname{Re}(k+\mu)-\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 83(9)

10. $$\int_0^\infty x^{\nu-2\mu} e^{-\frac{1}{4}x^2} W_{k,\pm\mu}\left(\frac{1}{2}x^2\right) J_\nu(xy)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\nu-2\mu)}{\Gamma(1+2\beta)} 2^{\beta-\mu} y^{k+\mu-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4}y^2} M_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}y^2\right),$$

$$2\alpha = \frac{1}{2}+k+\nu-3\mu, \qquad 2\beta = \frac{1}{2}-k+\nu-\mu$$

$$[y>0, \quad \operatorname{Re}\nu > -1, \quad \operatorname{Re}(\nu-2\mu) > -1].$$ ИП II 84(14)

11. $$\int_0^\infty x^{\nu-2\mu} e^{\frac{1}{4}x^2} W_{k,\pm\mu}\left(\frac{1}{2}x^2\right) J_\nu(xy)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\nu-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)} 2^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+k-3\mu+\nu\right)} y^{\mu-k-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{4}y^2} W_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}y^2\right),$$

$$2\alpha = k+3\mu-\nu-\frac{1}{2}, \qquad 2\beta = k-\mu+\nu+\frac{1}{2}$$

$$\left[y>0, \operatorname{Re}\nu > -1, \operatorname{Re}(\nu-2\mu) > -1, \operatorname{Re}\left(k-\mu+\frac{1}{2}\nu\right) < -\frac{1}{4}\right].$$ ИП II 84(15)

12. $$\int_0^\infty x^{2\mu-\nu} e^{-\frac{1}{4}x^2} M_{k,\mu}\left(\frac{1}{2}x^2\right) J_\nu(xy)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k-\mu+\nu\right)} 2^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-k+3\mu-\nu\right)} y^{k-\mu-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4}y^2} M_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}y^2\right),$$

$$2\alpha = \frac{1}{2}+k+3\mu-\nu, \quad 2\beta = -\frac{1}{2}+k-\mu+\nu$$

$$\left[y>0, \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}\left(k+\frac{1}{2}\nu\right)-\frac{1}{4}\right].$$ ИП II 83(8)

13. $$\int_0^\infty x^{2\mu-\nu} e^{-\frac{1}{4}x^2} M_{k,\mu}\left(\frac{1}{2}x^2\right) N_\nu(xy)\,dx = \pi^{-1}2^{\mu+\beta} y^{k-\mu-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4}y^2}\Gamma(2\mu+1)\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\mu\right)\left\{\cos[(\nu-2\mu)\pi]\frac{\Gamma(2\mu-\nu-1)}{\Gamma(2\beta+1)} M_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}y^2\right)-\right.$$
$$\left.-\sin[(\nu+k-\mu)\pi]\, W_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}y^2\right)\right\},$$
$$2\alpha = 3\mu-\nu+k+\frac{1}{2},\qquad 2\beta=\mu-\nu-k+\frac{1}{2}$$
$$\left[y>0,\quad -1<2\operatorname{Re}\mu<\operatorname{Re}(2k+\nu)+\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(2\mu-\nu)>-1\right].$$
ИП II 116 (44)

14. $$\int_0^\infty x^{2\mu+\nu} e^{-\frac{1}{4}x^2} M_{k,\mu}\left(\frac{1}{2}x^2\right) N_\nu(xy)\,dx = \pi^{-1}2^{\mu+\beta} y^{k-\mu-\frac{3}{2}}\Gamma(2\mu+1)\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right) e^{-\frac{1}{4}y^2}\left\{\cos(2\mu\pi)\frac{\Gamma(2\mu+\nu+1)}{\Gamma\left(\mu+\nu-k+\frac{3}{2}\right)} M_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}y^2\right)+\right.$$
$$\left.+\sin[(\mu-k)\pi]\, W_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}y^2\right)\right\},$$
$$2\alpha = 3\mu+\nu+k+\frac{1}{2},\qquad 2\beta=\mu+\nu-k+\frac{1}{2}$$
$$\left[y>0,\ -1<2\operatorname{Re}\mu<\operatorname{Re}(2k-\nu)+\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(2\mu+\nu)>-1\right].$$
ИП II 116 (43)

15. $$\int_0^\infty x^{2\mu+\nu} e^{-\frac{1}{2}ax^2} M_{k,\mu}(ax^2) K_\nu(xy)\,dx = 2^{\mu-k-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(\mu+\nu+k)} y^{k-\mu-\frac{3}{2}}\times$$
$$\times\Gamma(2\mu+1)\Gamma(2\mu+\nu+1)\exp\left(\frac{y^2}{8a}\right) W_{\varkappa,m}\left(\frac{y^2}{4a}\right),$$
$$2\varkappa=-3\mu-\nu-k-\frac{1}{2},\ 2m=\mu+\nu-k+\frac{1}{2}$$
$$\left[\operatorname{Re}y>0,\quad \operatorname{Re}a>0,\quad \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(2\mu+\nu)>-1\right].$$
ИП II 152 (82)

7.673

1 $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}ax} x^{\frac{1}{2}(\mu-\nu-1)} M_{\varkappa,\frac{1}{2}\mu}(ax) J_\nu(2\sqrt{bx})\,dx =$$
$$=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2}-\frac{1+\mu}{4}} a^{-\frac{1}{2}(\mu+1-\nu)}\Gamma(1+\mu)\, e^{-\frac{b}{2a}}\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{\varkappa+\nu}{2}-\frac{1+\mu}{4}\right)}\times$$
$$\times M_{\frac{1}{2}(\varkappa-\nu-1)+\frac{3}{4}(1+\mu),\ \frac{\varkappa+\nu}{2}-\frac{1+\mu}{4}}\left(\frac{b}{a}\right)+$$
$$\left[\operatorname{Re}(1+\mu)>0,\ \operatorname{Re}\left(\varkappa+\frac{\nu-\mu}{2}\right)>-\frac{3}{4},\ \operatorname{Im}b=0\right].$$ Бу 128 (12) и

2. $$\int\limits_0^\infty e^{\frac{1}{2}ax} x^{\frac{1}{2}(\nu-1\mp\mu)} W_{\varkappa,\frac{1}{2}\mu}(ax) J_\nu\left(2\sqrt{bx}\right) dx =$$

$$= a^{-\frac{1}{2}(\nu+1\mp\mu)} \frac{\Gamma(\nu+1\mp\mu)\, e^{\frac{b}{2a}}}{\Gamma\left(\frac{1\pm\mu}{2}-\varkappa\right)} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}(\varkappa+1)+\frac{1}{4}(1\mp\mu)} \times$$

$$\times W_{\frac{1}{2}(\varkappa+1-\nu)-\frac{3}{4}(1\mp\mu),\ \frac{1}{2}(\varkappa+\nu)+\frac{1}{4}(1\mp\mu)} \left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\nu\mp\mu}{2}+\varkappa\right) < \frac{3}{4},\ \operatorname{Re}\nu > -1\right].$$ Бу 128 (13)

7.674

1. $$\int\limits_0^\infty x^{\varrho-1} e^{-\frac{1}{2}x} J_{\lambda+\nu}\left(ax^{\frac{1}{2}}\right) J_{\lambda-\nu}\left(ax^{\frac{1}{2}}\right) W_{k,\mu}(x)\, dx =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^{2\lambda} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu+\varrho\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+\lambda-\mu+\varrho\right)}{\Gamma(1+\lambda+\nu)\,\Gamma(1+\lambda-\nu)\,\Gamma(1+\lambda-k+\varrho)} \times$$

$$\times {}_4F_4\left(1+\lambda,\ \frac{1}{2}+\lambda,\ \frac{1}{2}+\lambda+\mu+\varrho,\ \frac{1}{2}+\lambda-\mu+\varrho;\ 1+\lambda+\nu,\right.$$

$$\left. 1+\lambda-\nu,\ 1+2\lambda,\ 1+\lambda-k+\varrho;\ -a^2\right)$$

$$\left[|\operatorname{Re}\mu| < \operatorname{Re}(\lambda+\varrho)+\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 409 (37)

2. $$\int\limits_0^\infty x^{\varrho-1} e^{-\frac{1}{2}x} I_{\lambda+\nu}\left(ax^{\frac{1}{2}}\right) K_{\lambda-\nu}\left(ax^{\frac{1}{2}}\right) W_{k,\mu}(x)\, dx =$$

$$= \frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{2} G^{24}_{45}\left(a^2 \left| \begin{matrix} 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\mu-\varrho,\ \frac{1}{2}-\mu-\varrho \\ \lambda,\ \nu,\ -\lambda,\ -\nu,\ k-\varrho \end{matrix}\right.\right)$$

$$\left[|\operatorname{Re}\mu| < \operatorname{Re}(\lambda+\varrho)+\frac{1}{2},\ |\operatorname{Re}\mu| < \operatorname{Re}(\nu+\varrho)+\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 409 (38)

Функции Струве и вырожденные гипергеометрические функции

7.675

1. $$\int\limits_0^\infty x^{2\lambda+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}x^2} M_{k,\mu}\left(\frac{1}{2}x^2\right) \mathbf{H}_\nu(xy)\, dx =$$

$$= \frac{2^{-\lambda}\Gamma(2\mu+1)}{y^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+\mu\right)} G^{22}_{34}\left(\frac{y^2}{2} \left| \begin{matrix} l,\ -\mu-\lambda,\ \mu-\lambda \\ l,\ k-\lambda-\frac{1}{2},\ h,\ \varkappa \end{matrix}\right.\right),$$

$$h = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\nu, \quad \varkappa = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu, \quad l = \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\nu$$

$$\left[\operatorname{Re}(2\lambda+2\mu+\nu) > -\frac{7}{2},\quad \operatorname{Re}(k-\lambda) > 0,\quad y > 0,\right.$$

$$\left.\operatorname{Re}(2\lambda-2k+\nu) < -\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 171 (42)

2 $$\int_0^\infty x^{2\lambda+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}x^2} W_{k,\mu}\left(\frac{1}{2}x^2\right) \mathbf{H}_\nu(xy)\,dx =$$
$$= 2^{\frac{1}{2}-\lambda-\frac{1}{2}\nu}\pi^{-\frac{1}{2}} y^{\nu+1} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{2}\nu+\lambda+\mu\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{2}\nu+\lambda-\mu\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}+\lambda-k-\frac{1}{2}\nu\right)} \times$$
$$\times {}_3F_3\left(1,\ \frac{7}{4}+\frac{\nu}{2}+\lambda+\mu, \frac{7}{4}+\frac{\nu}{2}+\lambda-\mu; \frac{3}{2},\ \nu+\frac{3}{2},\ \frac{9}{4}+\lambda-k+\frac{\nu}{2};\ -\frac{y^2}{2}\right)$$
$$\left[\operatorname{Re}(2\lambda+\nu) > 2|\operatorname{Re}\mu| - \frac{7}{2},\ y>0\right].$$ ИП II 171 (43)

3 $$\int_0^\infty x^{2\lambda+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}x^2} W_{k,\mu}\left(\frac{1}{2}x^2\right) \mathbf{H}_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \left[2^\lambda \Gamma\left(\frac{1}{2}-k+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-\mu\right)\right]^{-1} y^{-\frac{1}{2}} \times$$
$$\times G_{34}^{23}\left(\frac{y^2}{2}\middle| \begin{matrix} l,\ -\mu-\lambda,\ \mu-\lambda \\ l,\ -k-\lambda-\frac{1}{2},\ h,\ \varkappa \end{matrix}\right),$$
$$h = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\nu, \quad \varkappa = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu, \quad l = \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\nu$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}(2\lambda+\nu) > 2|\operatorname{Re}\mu| - \frac{7}{2},\right.$$
$$\left.\operatorname{Re}(2k+2\lambda+\nu) < -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(k+\lambda) < 0\right].$$ ИП II 172 (46) и

4 $$\int_0^\infty e^{\frac{1}{2}x^2} W_{-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu}(x^2)\, \mathbf{H}_\nu(xy)\,dx =$$
$$= 2^{-\nu-1} y^\nu \pi e^{\frac{1}{4}y^2}\left[1-\Phi\left(\frac{y}{2}\right)\right] \quad [y>0,\ \operatorname{Re}\nu > -1]$$ ИП II 171 (44)

7.68 Вырожденные гипергеометрические функции и другие специальные функции

Вырожденные гипергеометрические и шаровые функции

7.681

1 $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} (a+x)^\mu e^{-\frac{1}{2}x} P_\nu^{-2\mu}\left(1+2\frac{x}{a}\right) M_{k,\mu}(x)\,dx =$$
$$= -\frac{\sin(\nu\pi)}{\pi\Gamma(k)} \Gamma(2\mu+1)\Gamma\left(k-\mu+\nu+\frac{1}{2}\right) \times$$
$$\times \Gamma\left(k-\mu-\nu-\frac{1}{2}\right) e^{\frac{1}{2}a} W_{\varrho,\sigma}(a),$$
$$\varrho = \frac{1}{2}-k+\mu, \quad \sigma = \frac{1}{2}+\nu$$
$$\left[|\arg a| < \pi,\ \operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(k-\mu) > \left|\operatorname{Re}\nu+\frac{1}{2}\right|\right].$$ ИП II 403 (11)

2. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}(a+x)^{-\mu}e^{-\frac{1}{2}x}P_\nu^{-2\mu}\left(1+2\frac{x}{a}\right)M_{k,\mu}(x)\,dx=$$
$$=\frac{\Gamma(2\mu+1)\Gamma\left(k+\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\mu-\nu-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{2}a}}{\Gamma\left(k+\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\mu+\nu+1)\Gamma(2\mu-\nu)}W_{\frac{1}{2}-k-\mu,\ \frac{1}{2}+\nu}(a)$$
$\left[|\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(k+\mu)>\left|\operatorname{Re}\nu+\frac{1}{2}\right|\right]$. ИП II 403(12)

3. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\nu}(a+x)^{\frac{1}{2}\mu}e^{-\frac{1}{2}x}P^\mu_{k+\nu-\frac{3}{2}}\left(1+2\frac{x}{a}\right)W_{k,\nu}(x)\,dx=$$
$$=\frac{\Gamma(1-\mu-2\nu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k-\mu-\nu\right)}a^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\nu}e^{\frac{1}{2}a}W_{\varrho,\sigma}(a),$$
$$2\varrho=\frac{1}{2}+2\mu+\nu-k,\quad 2\sigma=k+3\nu-\frac{3}{2}$$
$[|\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}\mu<1,\ \operatorname{Re}(\mu+2\nu)<1]$ ИП II 407(32)

4. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\nu}(a+x)^{-\frac{1}{2}\mu}e^{-\frac{1}{2}x}P^\mu_{k+\mu+\nu-\frac{3}{2}}\left(1+2\frac{x}{a}\right)W_{k,\nu}(x)\,dx=$$
$$=\frac{\Gamma(1-\mu-2\nu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k-\mu-\nu\right)}a^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\nu}e^{\frac{1}{2}a}W_{\varrho,\sigma}(a),$$
$$2\varrho=\frac{1}{2}-k+\nu,\quad 2\sigma=k+2\mu+3\nu-\frac{3}{2}$$
$[|\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}\mu<1,\ \operatorname{Re}(\mu+2\nu)<1]$. ИП II 408(33)

5. $$\int_0^\infty x^{\mu-\frac{1}{4}k-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}(a+x)^{\frac{1}{2}\nu}e^{-\frac{1}{2}x}Q^\nu_{\mu-k+\frac{3}{2}}\left(1+2\frac{x}{a}\right)M_{k,\mu}(x)\,dx=$$
$$=\frac{e^{\nu\pi i}\Gamma(1+2\mu-\nu)\Gamma(1+2\mu)\Gamma\left(\frac{5}{2}-k+\mu+\nu\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+\mu\right)}a^{\frac{1}{4}(k+2\mu-2\nu+5)}e^{\frac{1}{2}a}W_{\varrho,\sigma}(a),$$
$$2\varrho=\frac{1}{2}-k-\mu+2\nu,\quad 2\sigma=k-3\mu-\frac{3}{2}$$
$\left[|\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(2\mu-\nu)>-1\right]$. ИП II 404(14)

7.682

1 $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}P_\nu^{-2\mu}\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]M_{k,\mu}(x)\,dx=$$
$$=\frac{\Gamma(2\mu+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{2}a}}{2^{2\mu}a^{\frac{1}{4}}\Gamma\left(k+\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu-\frac{1}{2}\nu\right)}W_{\frac{3}{4}-k,\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\nu}(a)$$
$\left[|\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}k>\frac{1}{2}\operatorname{Re}\nu-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}k>-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\nu\right]$. ИП II 404(13)

2. $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}(k+\mu+\nu)-1}(a+x)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}Q^{1-k+\mu-\nu}_{k-\mu-\nu-1}\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]M_{k,\mu}(x)\,dx=$$
$$=e^{(1-k+\mu-\nu)\pi i}2^{\mu-k-\nu}a^{\frac{1}{2}(k+\mu-1)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma(1+2\mu)\Gamma(k+\mu+\nu)}{\Gamma\left(k+\mu+\frac{1}{2}\right)}e^{\frac{1}{2}a}W_{\varrho,\sigma}(a).$$
$$\varrho=\frac{1}{2}-k-\frac{1}{2}\nu,\quad \sigma=\mu+\frac{1}{2}\nu\qquad \left[|\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(k+\mu+\nu)>0\right].$$
ИП II 404(15)

3 $$\int_0^\infty x^{\nu-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}Q^{2\mu-2\nu}_{2k-2\nu-3}\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]M_{k,\mu}(x)\,dx=$$
$$=e^{2(\mu-\nu)\pi i}2^{2\mu-2\nu-1}a^{\frac{1}{2}(k+\mu-1)}e^{\frac{1}{2}a}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(2\mu+1)\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(k+\mu-2\nu-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\mu+\frac{1}{2}\right)}W_{\varrho,\sigma}(a),$$
$$2\varrho=1-k+\mu-2\nu,\quad 2\sigma=k-\mu-2\nu-2$$
$$\left[|\arg a|<\pi,\quad \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}(k+\mu-2\nu)>\frac{1}{2}\right].$$
ИП II 404(16)

4 $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\nu}e^{-\frac{1}{2}x}P^{\mu}_{2k+\mu+2\nu-3}\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]W_{k,\nu}(x)\,dx=$$
$$=\frac{2^{\mu}\Gamma(1-\mu-2\nu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k-\mu-\nu\right)}a^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\nu}e^{\frac{1}{2}a}W_{\varrho,\sigma}(a),$$
$$2\varrho=1-k+\mu+\nu,\quad 2\sigma=k+\mu+3\nu-2$$
$$[|\arg a|<\pi,\quad \operatorname{Re}\mu<1,\quad \operatorname{Re}(\mu+2\nu)<1].$$
ИП II 408(34)

5. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-}(a+x)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}P^{\mu}_{2k+\mu+2\nu-2}\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot W_{k,\nu}(x)\,dx=$$
$$=\frac{2^{\mu}\Gamma(1-\mu-2\nu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k-\mu-\nu\right)}a^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\nu}e^{\frac{1}{2}a}W_{\varrho,\sigma}(a),$$
$$2\varrho=\mu+\nu-k,\quad 2\sigma=k+\mu+3\nu-1$$
$$[|\arg a|<\pi,\ \operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0].$$
ИП II 408(35)

Вырожденные гипергеометрические функции и ортогональные полиномы

7.683
$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}ax}x^{\alpha}(1-x)^{\frac{\mu-\alpha}{2}-1}L_n^{\alpha}(ax)M_{\varkappa-\frac{1+\alpha}{2},\ \frac{\mu-\alpha-1}{2}}[a(1-x)]\,dx=$$
$$=\frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{\Gamma(1+\mu)}\frac{\Gamma(1+n+\alpha)}{n!}a^{-\frac{1+\alpha}{2}}M_{\varkappa+n,\ \frac{\mu}{2}}(a)$$
$$[\operatorname{Re}\alpha>-1,\ \operatorname{Re}(\mu-\alpha)>0,\ n=0,1,2,\ldots].$$
Бу 129(14в)

Вырожденные гипергеометрические и гипергеометрические функции

7.684 $$\int_0^\infty x^{\varrho-1}e^{-\frac{1}{2}x}M_{\gamma+\varrho,\,\beta+\varrho+\frac{1}{2}}(x)\,{}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;-\frac{\lambda}{x}\right)dx=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2\varrho)\,\Gamma(2\beta+2\varrho)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\beta+\gamma+2\varrho)}\lambda^{\frac{1}{2}\beta+\varrho-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\lambda}W_{k,\mu}(\lambda);$$
$$k=\frac{1}{2}-\alpha-\frac{1}{2}\beta-\varrho,\quad \mu=\frac{1}{2}\beta+\varrho$$
$$[\,|\arg\lambda|<\pi,\ \operatorname{Re}(\beta+\varrho)>0,\ \operatorname{Re}(\alpha+\beta+2\varrho)>0,\ \operatorname{Re}\gamma>0]$$
ИП II 405 (19)

7.69 Интегрирование вырожденных гипергеометрических функций по индексам

7.691 $$\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}(\pi x)\,W_{ix,0}(\alpha)\,W_{-ix,0}(\beta)\,dx=$$
$$=2\frac{(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}}{\alpha+\beta}\exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]$$
ИП II 414 (61)

7.692 $$\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma(-a)\,\Gamma(c-a)\,\Psi(a,c;x)\,\Psi(c-a,c;y)\,da=$$
$$=2\pi i\,\Gamma(c)\,\Psi(c,2c;x+y).$$
ВТФ I 285 (15)

7.693

1. $$\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(ix)\,\Gamma(2k+ix)\,W_{k+ix,\,k-\frac{1}{2}}(\alpha)\,W_{-k-ix,\,k-\frac{1}{2}}(\beta)\,dx=$$
$$=2\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(2k)\,(\alpha\beta)^k\,(\alpha+\beta)^{\frac{1}{2}-2k}\,K_{2k-\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$
ИП II 414 (62)

2. $$\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+\mu+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+\mu-x\right)\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-\mu+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-\mu-x\right)M_{\mu+ix,\,\nu}(\alpha)\,M_{\mu-ix,\,\nu}(\beta)\,dx=$$
$$=\frac{2\pi(\alpha\beta)^{\nu+\frac{1}{2}}\,[\Gamma(2\nu+1)]^2\,\Gamma(2\nu+2\mu+1)\,\Gamma(2\nu-2\mu+1)}{(\alpha+\beta)^{2\nu+1}\,\Gamma(4\nu+2)}M_{2\mu,\,2\nu+\frac{1}{2}}(\alpha+\beta)$$
$$\left[\operatorname{Re}\nu>|\operatorname{Re}\mu|-\frac{1}{2}\right].$$
ИП II 413 (59)

7.694 $$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\varrho xi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+ix\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-ix\right)M_{ix,\nu}(\alpha)\,M_{ix,\nu}(\beta)\,dx=$$
$$=\frac{2\pi(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{ch}\varrho}\exp[-(\alpha+\beta)\operatorname{th}\varrho]\,J_{2\nu}\left(\frac{2\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{ch}\varrho}\right)$$
$$\left[|\operatorname{Im}\varrho|<\frac{1}{2}\pi,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$$
ИП II 414 (60)

7.7 ФУНКЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

7.71 Функции параболического цилиндра

7.711 96

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} D_n(x) D_m(x)\, dx = 0 \qquad [m \neq n];$$ УВ II 158

$$= n!\,(2\pi)^{\frac{1}{2}} \qquad [m = n].$$ УВ II 158

2. $$\int_0^{\infty} D_\mu(\pm t) D_\nu(t)\, dt =$$

$$= \frac{\pi 2^{\frac{1}{2}(\mu+\nu+1)}}{\mu-\nu} \left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\nu\right)} \mp \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\mu\right)} \right]$$

[при выборе нижнего знака $\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\nu$].

Бу 117 (13a), ВТФ II 122 (21)

3 $$\int_0^{\infty} [D_\nu(t)]^2\, dt = \pi^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{3}{2}} \frac{\psi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right) - \psi\left(-\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma(-\nu)}.$$

Бу 117 (13b) *и*, ВТФ II 122 (22) *и*

7.72 Функции параболического цилиндра, степенная и показательная функции

7.721

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}x^2} (x-z)^{-1} D_n(x)\, dx = \pm i e^{\mp n\pi i} (2\pi)^{\frac{1}{2}} n!\, e^{-\frac{1}{4}z^2} D_{-n-1}(\mp iz)$$

[верхний или нижний знак берется соответственно тому, будет ли мнимая часть z положительна или отрицательна]. УВ II 162

2. $$\int_1^{\infty} x^\nu (x-1)^{\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu-1} \exp\left[-\frac{(x-1)^2 a^2}{4}\right] D_\mu(ax)\, dx =$$

$$= 2^{\mu-\nu-2} a^{\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-1}\, \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right) D_\nu(a)$$

$[\operatorname{Re}(\mu-\nu) > 0]$. ИП II 395 (4) *и*

7.722

1. $$\int_0^{\infty} e^{-\frac{3}{4}x^2} x^\nu D_{\nu+1}(x)\, dx = 2^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}\, \Gamma(\nu+1) \sin\frac{1}{4}(1-\nu)\pi$$

$[\operatorname{Re}\nu > -1]$. УВ II 161

2 $$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4}x^2} x^{\mu-1} D_{-\nu}(x)\, dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu}\, \Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

$[\operatorname{Re}\mu > 0]$. ВТФ II 122 (20)

3. $$\int_0^\infty e^{-\frac{3}{4}x^2} x^\nu D_{\nu-1}(x)\,dx = 2^{-\frac{1}{2}\nu-1}\Gamma(\nu)\sin\frac{1}{4}\pi\nu$$

$[\operatorname{Re}\nu > -1]$. ИП II 395 (2)

7.723

1. $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}x^2} x^\nu (x^2+y^2)^{-1} D_\nu(x)\,dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+1)\,y^{\nu-1}e^{\frac{1}{4}y^2}D_{-\nu-1}(y)$$

$[\operatorname{Re} y > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1]$. ВТФ II 121 (18) *и*, ИП II 396 (6) *и*

2. $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}x^2} x^{\nu-1}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} D_\nu(x)\,dx = y^{\nu-1}\Gamma(\nu)\,e^{\frac{1}{4}y^2}D_{-\nu}(y)$$

$[\operatorname{Re} y > 0,\quad \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП II 396 (7)

3. $$\int_0^1 x^{2\nu-1}(1-x^2)^{\lambda-1}e^{\frac{a^2x^2}{4}}D_{-2\lambda-2\nu}(ax)\,dx = \frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma(2\lambda+2\nu)}2^{\lambda-1}e^{\frac{a^2}{4}}D_{-2\nu}(a)$$

$[\operatorname{Re}\lambda > 0,\ \operatorname{Re}\nu > 0]$. ИП II 395 (3) *и*

7.724 $$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-y)^2}{2\mu}}e^{\frac{1}{4}x^2}D_\nu(x)\,dx =$$
$$= (2\pi\mu)^{\frac{1}{2}}(1-\mu)^{\frac{1}{2}\nu}e^{\frac{y^2}{4-4\mu}}D_\nu\left[y(1-\mu)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$[0 < \operatorname{Re}\mu < 1]$. ВТФ II 121 (15)

7.725

1. $$\int_0^\infty e^{-pt}(2t)^{\frac{\nu-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}D_{-\nu-2}\left(\sqrt{2t}\right)dt =$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\left(\sqrt{p+1}-1\right)^{\nu+1}}{(\nu+1)\,p^{\nu+1}}$$

$[\operatorname{Re}\nu > -1]$. МО 175

2. $$\int_0^\infty e^{-pt}(2t)^{\frac{\nu-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}D_{-\nu}\left(\sqrt{2t}\right)dt =$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\left(\sqrt{p+1}-1\right)^{\nu}}{p^\nu\sqrt{p+1}}$$

$[\operatorname{Re}\nu > -1]$. МО 175

3. $$\int_0^\infty e^{-bx}D_{2n+1}\left(\sqrt{2x}\right)dx = (-2)^n\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right)^n\left(b+\frac{1}{2}\right)^{-n-\frac{3}{2}}$$

$\left[\operatorname{Re} b > -\frac{1}{2}\right]$. ИП I 210 (3)

4. $$\int_0^\infty \left(\sqrt{x}\right)^{-1}e^{-bx}D_{2n}\left(\sqrt{2x}\right)dx =$$ 62
$$= (-2)^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right)^n\left(b+\frac{1}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}}$$

$\left[\operatorname{Re} b > -\frac{1}{2}\right]$. ИП I 210 (5)

5. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} e^{-sx} D_\nu(\sqrt{x})\,dx = \sqrt{\pi}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}+2s}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+s}}$$

$\left[\operatorname{Re} s > -\frac{1}{4},\ \operatorname{Re}\nu < 1\right]$. ИП I 210(7)

6. $$\int_0^\infty e^{-zt} t^{-1+\frac{\beta}{2}} D_{-\nu}\left[2(kt)^{\frac{1}{2}}\right] dt =$$

$$= \frac{2^{1-\beta-\frac{\nu}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\right)} (z+k)^{-\frac{\beta}{2}} F\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\beta}{2}; \frac{\nu+\beta+1}{2}; \frac{z-k}{z+k}\right)$$

$\left[\operatorname{Re}\beta > 0,\ \operatorname{Re}\frac{z}{k} > 0\right]$. ВТФ II 121 (11)

7.726 $$\int_{-\infty}^\infty e^{ixy - \frac{(1+\lambda)x^2}{4}} D_\nu\left[x(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}\right] dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}\nu} e^{-\frac{(1+\lambda)y^2}{4\lambda}} D_\nu\left[i(\lambda^{-1}-1)^{\frac{1}{2}} y\right]$$

$[\operatorname{Re}\lambda > 0]$. ВТФ II 121 (16)

7.727 $$\int_0^\infty \frac{e^{\frac{1}{2}x} e^{-bx}}{(e^x-1)^{\mu+\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{a}{1-e^{-x}}\right) D_{2\mu}\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{1-e^{-x}}}\right) dx =$$

$$= e^{-a} 2^{b+\mu} \Gamma(b+\mu) D_{-2b}(2\sqrt{a})$$

$[\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re} b > -\operatorname{Re}\mu]$ ИП I 211 (13)

7.728 $$\int_0^\infty (2t)^{-\frac{\nu}{2}} e^{-pt} e^{-\frac{q^2}{8t}} D_{\nu-1}\left(\frac{q}{\sqrt{2t}}\right) dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}\nu-1} e^{-q\sqrt{p}}.$$ МО 175

7.73 Функции параболического цилиндра и гиперболические функции

7.731

1. $$\int_0^\infty \operatorname{ch}(2\mu x) \exp\left[-(a \operatorname{sh} x)^2\right] D_{2k}(2a \operatorname{ch} x)\,dx = 2^{k-\frac{3}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} a^{-1} W_{k,\mu}(2a^2)$$

$[\operatorname{Re} a^2 > 0]$. ИП II 398 (20)

2 $$\int_0^\infty \operatorname{ch}(2\mu x) \exp\left[(a \operatorname{sh} x)^2\right] D_{2k}(2a \operatorname{ch} x)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu-k)\Gamma(-\mu-k)}{2^{k+\frac{5}{2}} a \Gamma(-2k)} W_{k+\frac{1}{2},\mu}(2a^2)$$

$\left[|\arg a| < \frac{3\pi}{4},\ \operatorname{Re} k + |\operatorname{Re}\mu| < 0\right]$. ИП II 398 (21)

7.74 Функции параболического цилиндра и тригонометрические функции

7.741

1. $$\int_0^\infty \sin(bx)\{[D_{-n-1}(ix)]^2-[D_{-n-1}(-ix)]^2\}\,dx =$$
$$= (-1)^{n+1}\frac{i}{n!}\pi\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}b^2}L_n(b^2) \qquad [b>0] \qquad \text{ИП I 115(3)}$$

2. $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}x^2}\sin(bx)\,D_{2n+1}(x)\,dx = (-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,b^{2n+1}e^{-\frac{1}{2}b^2}$$
$$[b>0] \qquad \text{ИП I 115(1)}$$

3. $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}x^2}\cos(bx)\,D_{2n}(x)\,dx = (-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,b^{2n}e^{-\frac{1}{2}b^2}$$
$$[b>0] \qquad \text{ИП I 60(2)}$$

4. $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}x^2}\sin(bx)\left[D_{2\nu-\frac{1}{2}}(x)-D_{2\nu-\frac{1}{2}}(-x)\right]dx =$$
$$=\sqrt{2\pi}\sin\left[\left(\nu-\frac{1}{4}\right)\pi\right]b^{2\nu-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}b^2}$$
$$\left[\operatorname{Re}\nu>\frac{1}{4},\ b>0\right] \qquad \text{ИП I 115(2)}$$

5. $$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos(bx)\left[D_{2\nu-\frac{1}{2}}(x)+D_{2\nu-\frac{1}{2}}(-x)\right]dx =$$
$$=\frac{2^{\frac{1}{4}-2\nu}\sqrt{\pi}\,b^{2\nu-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}b^2}}{\operatorname{cosec}\left[\left(\nu+\frac{1}{4}\right)\pi\right]} \qquad \left[\operatorname{Re}\nu>\frac{1}{4},\ b>0\right] \qquad \text{ИП I 61(4)}$$

7.742

1. $$\int_0^\infty x^{2\varrho-1}\sin(ax)\,e^{-\frac{x^2}{4}}D_{2\nu}(x)\,dx =$$
$$=2^{\nu-\varrho-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}a\frac{\Gamma(2\varrho+1)}{\Gamma(\varrho-\nu+1)}\,{}_2F_2\left(\varrho+\frac{1}{2},\ \varrho+1;\ \frac{3}{2},\ \varrho-\nu+1;\ -\frac{a^2}{2}\right)$$
$$\left[\operatorname{Re}\varrho>-\frac{1}{2}\right] \qquad \text{ИП II 396(8)}$$

2. $$\int_0^\infty x^{2\varrho-1}\sin(ax)\,e^{\frac{x^2}{4}}D_{2\nu}(x)\,dx = \frac{2^{\varrho-\nu-2}}{\Gamma(-2\nu)}G_{23}^{22}\left(\frac{a^2}{2}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}-\varrho,\ 1-\varrho\\ -\varrho-\nu,\ \frac{1}{2},\ 0\end{matrix}\right)$$
$$\left[a>0,\ \operatorname{Re}\varrho>-\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(\varrho+\nu)<\frac{1}{2}\right] \qquad \text{ИП II 396(9)}$$

3 $$\int_0^\infty x^{2\varrho-1}\cos(ax)e^{-\frac{x^2}{4}}D_{2\nu}(x)\,dx=$$

$$=\frac{2^{\nu-\varrho}\Gamma(2\varrho)\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\varrho-\nu+\frac{1}{2}\right)}\,{}_2F_2\left(\varrho,\ \varrho+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2},\ \varrho-\nu+\frac{1}{2};\ -\frac{a^2}{2}\right)$$

$[\operatorname{Re}\varrho>0]$. ИП II 396(10)и

4 $$\int_0^\infty x^{2\varrho-1}\cos(ax)e^{\frac{x^2}{4}}D_{2\nu}(x)\,dx=\frac{2^{\varrho-\nu-2}}{\Gamma(-2\nu)}G_{23}^{22}\left(\frac{a^2}{2}\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}-\varrho,\ 1-\varrho\\ -\varrho-\nu,\ 0,\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right)$$

$\left[a>0,\ \operatorname{Re}\varrho>0,\ \operatorname{Re}(\varrho+\nu)<\frac{1}{2}\right]$. ИП II 396(11)

7.743 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{-\mu-2}(\sin x)^{-\nu}D_\nu(a\sin x)D_\mu(a\cos x)\,dx=$$

$$=-\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}}(1+\mu)^{-1}D_{\mu+\nu+1}(a)$$

$[\operatorname{Re}\nu<1,\ \operatorname{Re}\mu<-1]$. ИП II 397(19)

7.744

1 $$\int_0^\infty \sin(bx)\left[D_{-\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{2x})-D_{-\nu-\frac{1}{2}}(-\sqrt{2x})\right]D_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{2x})\,dx=$$

$$=-\sqrt{2\pi}\sin\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\nu\right)\pi\right]b^{-\nu-\frac{1}{2}}\frac{(1+\sqrt{1+b^2})^\nu}{\sqrt{1+b^2}}$$

$[b>0]$ ИП I 115(4)

2 $$\int_0^\infty \cos(bx)\left[D_{-2\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{2x})+D_{-2\nu-\frac{1}{2}}(-\sqrt{2x})\right]D_{2\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{2x})\,dx=$$

$$=-\frac{\sqrt{\pi}\sin\left[\left(\nu-\frac{1}{4}\right)\pi\right](1+\sqrt{1+b^2})^{2\nu}}{\sqrt{1+b^2}\,b^{2\nu+\frac{1}{2}}}$$

$[b>0]$ ИП I 60(3)

7.75 Функции параболического цилиндра и цилиндрические функции

7.751

1 $$\int_0^\infty [D_n(ax)]^2J_1(xy)\,dx=(-1)^{n-1}y^{-1}\left[D_n\left(\frac{y}{a}\right)\right]^2$$

$[y>0]$. ИП II 20(24)

2. $$\int_0^\infty J_0(xy) D_n(ax) D_{n+1}(ax)\,dx = (-1)^n y^{-1} D_n\left(\frac{y}{a}\right) D_{n+1}\left(\frac{y}{a}\right)$$

$$\left[y > 0,\ |\arg a| < \frac{1}{4}\pi\right].$$ ИП II 17 (42)

3. $$\int_0^\infty J_0(xy) D_\nu(x) D_{\nu+1}(x)\,dx =$$

$$= 2^{-1} y^{-1} [D_\nu(-y) D_{\nu+1}(y) - D_{\nu+1}(-y) D_\nu(y)].$$ ИП II 397 (17) и

7.752

1. $$\int_0^\infty x^\nu e^{-\frac{1}{4}x^2} D_{2\nu-1}(x) J_\nu(xy)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\sec(\nu\pi)\, y^{\nu-1} e^{-\frac{1}{4}y^2} [D_{2\nu-1}(y) - D_{2\nu-1}(-y)]$$

$$\left[y > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 76 (1), МО 183

2. $$\int_0^\infty x^\nu e^{\frac{1}{4}x^2} D_{2\nu-1}(x) J_\nu(xy)\,dx = 2^{\frac{1}{2}-\nu}\pi \sin(\nu\pi)\, y^{-\nu}\Gamma(2\nu)\, e^{\frac{1}{4}y^2} K_\nu\left(\frac{1}{4}y^2\right)$$

$$\left[y > 0,\ -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}\right].$$ ИП II 77 (4)

3. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} e^{-\frac{1}{4}x^2} D_{2\nu}(x) J_\nu(xy)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sec(\nu\pi)\, y^{\nu-1} e^{-\frac{1}{4}y^2} [D_{2\nu+1}(y) - D_{2\nu+1}(-y)]$$

$$[y > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1].$$ ИП II 78 (13)

4. $$\int_0^\infty x^\nu e^{-\frac{1}{4}x^2} D_{2\nu+1}(x) J_\nu(xy)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sec(\nu\pi)\, e^{-\frac{1}{4}y^2} y^\nu [D_{2\nu}(y) + D_{2\nu}(-y)]$$

$$\left[y > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 77 (5)

5 $$\int_0^\infty x^{\nu+1} e^{-\frac{1}{4}x^2} D_{2\nu+2}(x) J_\nu(xy)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\sec(\nu\pi)\, y^\nu e^{-\frac{1}{4}y^2} [D_{2\nu+2}(y) + D_{2\nu+2}(-y)]$$

$$[\operatorname{Re}\nu > -1,\ y > 0].$$ ИП II 78 (16)

6. $$\int_0^\infty x^{\nu+1} e^{\frac{1}{4}x^2} D_{2\nu+2}(x) J_\nu(xy)\,dx =$$

$$= \pi^{-1}\sin(\nu\pi)\,\Gamma(2\nu+3)\, y^{-\nu-2} e^{\frac{1}{4}y^2} K_{\nu+1}\left(\frac{1}{4}y^2\right)$$

$$\left[y > 0,\ -1 < \operatorname{Re}\nu < -\frac{5}{6}\right].$$ ИП II 78 (19)

7. $\int\limits_0^\infty x^\nu e^{-\frac{1}{4}x^2} D_{-2\nu}(x) J_\nu(xy)\,dx = 2^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}} y^{-\nu} e^{-\frac{1}{4}y^2} I_\nu\left(\frac{1}{4}y^2\right)$

$\left[y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$. ИП II 77 (8)

8. $\int\limits_0^\infty x^\nu e^{\frac{1}{4}x^2} D_{-2\nu}(x) J_\nu(xy)\,dx = y^{\nu-1} e^{\frac{1}{4}y^2} D_{-2\nu}(y)$

$\left[\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\ y>0\right]$ ИП II 77 (9), ВТФ II 121 (17)

9. $\int\limits_0^\infty x^\nu e^{\frac{1}{4}x^2} D_{-2\nu-2}(x) J_\nu(xy)\,dx = (2\nu+1)^{-1} y^\nu e^{\frac{1}{4}y^2} D_{-2\nu-1}(y)$

$\left[y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$. ИП II 77 (10)

10. $\int\limits_0^\infty x^\nu e^{-\frac{1}{4}a^2x^2} D_{2\mu}(ax) J_\nu(xy)\,dx =$

$$= \frac{2^{\mu-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) y^\nu}{\Gamma(\nu-\mu+1)\, a^{1+2\nu}}\, {}_1F_1\left(\nu+\frac{1}{2};\ \nu-\mu+1;\ -\frac{y^2}{2a^2}\right)$$

$\left[y>0,\ |\arg a|<\frac{1}{4}\pi,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$. ИП II 77 (11)

11. $\int\limits_0^\infty x^\nu e^{\frac{1}{4}a^2x^2} D_{2\mu}(ax) J_\nu(xy)\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right) a^{2k} 2^{m+\mu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right) y^{\mu+\frac{3}{2}}}\, e^{\frac{y^2}{4a^2}} W_{k,m}\left(\frac{y^2}{4a^2}\right),$

$2k=\frac{1}{2}+\mu-\nu,\quad 2m=\frac{1}{2}+\mu+\nu$

$\left[y>0,\ |\arg a|<\frac{1}{4}\pi,\ -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}-2\mu\right)\right]$ ИП II 78 (12)

12. $\int\limits_0^\infty x^{\nu+1} e^{-\frac{1}{4}a^2x^2} D_{2\mu}(ax) J_\nu(xy)\,dx =$

$$= \frac{2^\mu\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right) y^\nu}{\Gamma\left(\nu-\mu+\frac{3}{2}\right) a^{2\nu+2}}\, {}_1F_1\left(\nu+\frac{3}{2};\ \nu-\mu+\frac{3}{2};\ -\frac{y^2}{2a^2}\right)$$

$\left[y>0,\ |\arg a|<\frac{1}{4}\pi,\ \operatorname{Re}\nu>-1\right]$. ИП II 79 (23)

13. $\int\limits_0^\infty x^{\nu+1} e^{\frac{1}{4}a^2x^2} D_{2\mu}(ax) J_\nu(xy)\,dx =$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu\right) 2^{\frac{1}{2}+m+\mu} a^{2k+1}}{\Gamma(-\mu)\, y^{\mu+2}}\, e^{\frac{y^2}{4a^2}} W_{k,m}\left(\frac{y^2}{2a^2}\right),$$

$2k=\mu-\nu-1,\quad 2m=\mu+\nu+1$

$\left[y>0,\ |\arg a|<\frac{3}{4}\pi,\ -1<\operatorname{Re}\nu<-\frac{1}{2}-2\operatorname{Re}\mu\right]$. ИП II 79 (24)

14 $\int\limits_0^\infty x^{\lambda+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}a^2x^2} D_\mu(ax) J_\nu(xy)\,dx =$

$$= \frac{2^{\lambda-\frac{1}{2}\mu}\pi^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\mu)\,y^{\lambda+\frac{3}{2}}} G_{23}^{22}\left(\frac{y^2}{2a^2}\middle|\begin{matrix} & \frac{1}{2},\ 1 & \\ \frac{3}{4}+\frac{\lambda+\nu}{2}, & -\frac{\mu}{2} & \frac{3}{4}+\frac{\lambda-\nu}{2}\end{matrix}\right)$$

$\left[y>0,\ |\arg a|<\frac{3}{4}\pi,\ \operatorname{Re}\mu<-\operatorname{Re}\lambda<\operatorname{Re}\nu+\frac{3}{2}\right]$. ИП II 80(26)

15 $\int\limits_0^\infty x^{\nu+1} e^{\frac{1}{4}x^2} D_{-2\nu-1}(x) J_\nu(xy)\,dx = (2\nu+1)\,y^{\nu-1} e^{\frac{1}{4}y^2} D_{-2\nu-2}(y)$

$\left[y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$. ИП II 79(20)

16 $\int\limits_0^\infty x^{\nu+1} e^{-\frac{1}{4}x^2} D_{-2\nu-1}(x) J_\nu(xy)\,dx = 2^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}} y^{-\nu-2} e^{-\frac{1}{4}y^2} I_{\nu+1}\left(\frac{1}{4}y^2\right)$

$[y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$ ИП II 79(21)

17 $\int\limits_0^\infty x^{\nu+1} e^{\frac{1}{4}x^2} D_{-2\nu-3}(x) J_\nu(xy)\,dx = y^\nu e^{\frac{1}{4}y^2} D_{-2\nu-3}(y)$

$[y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$. ИП II 79(22)

18 $\int\limits_0^\infty x^\nu e^{\frac{1}{4}a^2x^2} D_{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}(ax) N_\nu(xy)\,dx =$

$$= -\pi^{-1} 2^{\frac{1}{4}\nu+\frac{3}{4}} a^{-\nu} y^{-1} \Gamma(\nu+1)\, e^{\frac{y^2}{4a^2}} W_{-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu}\left(\frac{y^2}{2a^2}\right)$$

$\left[y>0,\ |\arg a|<\frac{3}{4}\pi,\ -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{2}{3}\right]$. ИП II 115(39)

7.753

1 $\int\limits_0^\infty x^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-(x+a)^2} I_{\nu-\frac{1}{2}}(2ax)\, D_\nu(2x)\,dx = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu)\, a^{\nu-\frac{1}{2}} D_{-\nu}(2a)$

$[\operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$ ИП II 397(12)

2 $\int\limits_0^\infty x^{\nu-\frac{3}{2}} e^{-(x+a)^2} I_{\nu-\frac{3}{2}}(2ax)\, D_\nu(2x)\,dx = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu)\, a^{\nu-\frac{3}{2}} D_{-\nu}(2a)$

$[\operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}\nu>1]$. ИП II 397(13)

7.754

1. $$\int_0^\infty x^\nu e^{-\frac{1}{4}x^2}\{[1\mp 2\cos(\nu\pi)]D_{2\nu-1}(x)-D_{2\nu-1}(-x)\}J_\nu(xy)\,dx=$$
$$=\pm y^{\nu-1}e^{-\frac{1}{4}y^2}\{[1\mp 2\cos(\nu\pi)]D_{2\nu-1}(y)-D_{2\nu-1}(-y)\}$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 76 (2), ИП II 76 (3)

2. $$\int_0^\infty x^\nu e^{-\frac{1}{4}x^2}\{[1\mp 2\cos(\nu\pi)]D_{2\nu+1}(x)-D_{2\nu+1}(-x)\}J_\nu(xy)\,dx=$$
$$=\mp y^\nu e^{-\frac{1}{4}y^2}\{[1\mp 2\cos(\nu\pi)]D_{2\nu}(y)+D_{2\nu}(-y)\}$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 77 (6), ИП II 77 (7)

3. $$\int_0^\infty x^{\nu+1}e^{-\frac{1}{4}x^2}\{[1\pm 2\cos(\nu\pi)]D_{2\nu}(x)+D_{2\nu}(-x)\}J_\nu(xy)\,dx=$$
$$=\pm y^{\nu-1}e^{-\frac{1}{4}y^2}\{[1\pm 2\cos(\nu\pi)]D_{2\nu+1}(y)-D_{2\nu+1}(-y)\}$$
$$[y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$$ ИП II 78 (14), ИП II 78 (15)

4. $$\int_0^\infty x^{\nu+1}e^{-\frac{1}{4}x^2}\{[1\mp 2\cos(\nu\pi)]D_{2\nu+2}(x)+D_{2\nu+2}(-x)\}J_\nu(xy)\,dx=$$
$$=\pm y^\nu e^{-\frac{1}{4}y^2}\{[1\mp 2\cos(\nu\pi)]D_{2\nu+2}(y)+D_{2\nu+2}(-y)\}$$
$$[y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1]$$ ИП II 78 (17), ИП II 78 (18)

7.755

1. $$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}D_\nu\left(a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right)D_{-\nu-1}\left(a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right)J_0(xy)\,dx=$$
$$=2^{-\frac{3}{2}}\pi a^{-\frac{1}{2}}P_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4}}\left[\left(1+\frac{4y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]P_{-\frac{1}{4}}^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}}\left[\left(1+\frac{4y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$[y>0,\ \operatorname{Re}a>0].$$ ИП II 17 (43)

2. $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}D_{-\frac{1}{2}-\nu}\left(ae^{\frac{1}{4}\pi i}x^{\frac{1}{2}}\right)D_{-\frac{1}{2}-\nu}\left(ae^{-\frac{1}{4}\pi i}x^{\frac{1}{2}}\right)J_\nu(xy)\,dx=$$
$$=2^{-\nu}\pi^{\frac{1}{2}}y^{-\nu-1}(a^2+2y)^{-\frac{1}{2}}\left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}[(a^2+2y)^{\frac{1}{2}}-a]^{2\nu}$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right].$$ ИП II 80 (27)

3. $$\int_0^\infty D_{-\frac{1}{2}-\nu}\left(ae^{\frac{1}{4}\pi i}x^{-\frac{1}{2}}\right)D_{-\frac{1}{2}-\nu}\left(ae^{-\frac{1}{4}\pi i}x^{-\frac{1}{2}}\right)J_\nu(xy)\,dx =$$
$$= 2^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}y^{-1}\left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}\exp\left[-a(2y)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}a>0,\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right]$$ ИП II 80(28)и

4. $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}D_{\nu-\frac{1}{2}}\left(ax^{-\frac{1}{2}}\right)D_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(ax^{-\frac{1}{2}}\right)N_\nu(xy)\,dx =$$
$$= y^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-ay^{\frac{1}{2}}\right)\sin\left[ay^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi\right].$$
$$\left[y>0,\ |\arg a|<\frac{1}{4}\pi\right].$$ ИП II 115(40)

5. $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}D_{\nu-\frac{1}{2}}\left(ax^{-\frac{1}{2}}\right)D_{-\nu-\frac{1}{2}}\left(ax^{-\frac{1}{2}}\right)K_\nu(xy)\,dx = 2^{-1}y^{-\frac{3}{2}}\pi\exp\left[-a(2y)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\left[\operatorname{Re}y>0,\ |\arg a|<\frac{1}{4}\pi\right].$$ ИП II 151(81)

Функции параболического цилиндра и функции Струве

7.756 $$\int_0^\infty x^{-\nu}e^{-\frac{1}{4}x^2}\left[D_\mu(x)-D_\mu(-x)\right]\mathbf{H}_\nu(xy)\,dx =$$
$$= \frac{2^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\nu+1\right)}y^{\mu+\nu}\sin\left(\frac{1}{2}\mu\pi\right){}_1F_1\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2};\frac{1}{2}\mu+\nu+1;\ -\frac{1}{2}y^2\right)$$
$$\left[y>0,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu)>-\frac{3}{2},\ \operatorname{Re}\mu>-1\right].$$ ИП II 171(41)

7.76 Функции параболического цилиндра и вырожденные гипергеометрические функции

7.761

1. $$\int_0^\infty e^{\frac{1}{4}t^2}t^{2c-1}D_{-\nu}(t)\,{}_1F_1\left(a;\ c;\ -\frac{1}{2}pt^2\right)dt =$$
$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{c+\frac{1}{2}\nu}}\frac{\Gamma(2c)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu-c+a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu\right)}F\left(a,\ c+\frac{1}{2},\ a+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu;\ 1-p\right)$$
$$\left[|1-p|<1,\ \operatorname{Re}c>0,\ \operatorname{Re}\nu>2\operatorname{Re}(c-a)\right].$$ ВТФ II 121(12)

2. $\int\limits_0^\infty e^{\frac{1}{4}t^2} t^{2c-2} D_{-\nu}(t)\, {}_1F_1\left(a;\ c;\ -\frac{1}{2}pt^2\right) dt =$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(2c-1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}-c+a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\nu\right)} F\left(a,\ c-\frac{1}{2};\ a+\frac{1}{2}\nu;\ 1-p\right)$$

$\left[|1-p|<1,\ \operatorname{Re} c > \frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\nu > 2\operatorname{Re}(c-a)-1\right]$. ВТФ II 121 (13)

7.77 Интегрирование функции параболического цилиндра по индексу

7.771 $\int\limits_0^\infty \cos(ax)\, D_{x-\frac{1}{2}}(\beta)\, D_{-x-\frac{1}{2}}(\beta)\, dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\cos a}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\beta^2\cos a}{2}\right) \qquad \left[|a|<\frac{1}{2}\pi\right];$$

$$= 0 \qquad \left[|a|>\frac{1}{2}\pi\right].$$ ИП II 398 (22)

7.772

1. $\int\limits_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \left[\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\right)^\nu}{\cos\frac{1}{2}\varphi} D_\nu\left(-e^{\frac{1}{4}i\pi}\xi\right) D_{-\nu-1}\left(e^{\frac{1}{4}i\pi}\eta\right) + \right.$

$$\left. + \frac{\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\varphi\right)^\nu}{\sin\frac{1}{2}\varphi} D_{-\nu-1}\left(e^{\frac{1}{4}i\pi}\xi\right) D_\nu\left(-e^{\frac{1}{4}i\pi}\eta\right)\right] \frac{d\nu}{\sin\nu\pi} =$$

$$= -2i\,(2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4}i\left(\xi^2-\eta^2\right)\cos\varphi - \frac{1}{2}i\xi\eta\sin\varphi\right].$$

ВТФ II 125 (7)

2. $\int\limits_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\right)^\nu}{\cos\frac{1}{2}\varphi} D_\nu\left(-e^{\frac{1}{4}i\pi}\zeta\right) D_{-\nu-1}\left(e^{\frac{1}{4}i\pi}\eta\right) \frac{d\nu}{\sin\nu\pi} =$

$$= -2i\, D_0\left[e^{\frac{1}{4}i\pi}\left(\zeta\cos\frac{1}{2}\varphi + \eta\sin\frac{1}{2}\varphi\right)\right] \times$$

$$\times D_{-1}\left[e^{\frac{1}{4}i\pi}\left(\eta\cos\frac{1}{2}\varphi - \zeta\sin\frac{1}{2}\varphi\right)\right].$$ ВТФ II 125 (8)

7.773

1. $\int\limits_{c-i\infty}^{+i\infty} D_\nu(z)\, t^\nu\, \Gamma(-\nu)\, d\nu = 2\pi i e^{-\frac{1}{4}z^2 - zt - \frac{1}{2}t^2}$

$\left[c<0,\ |\arg t|<\frac{\pi}{4}\right]$. ВТФ II 126 (10)

$$2\quad \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} [D_\nu(x) D_{-\nu-1}(iy) + D_\nu(-x) D_{-\nu-1}(-iy)] \frac{t^{-\nu-1}\,d\nu}{\sin(-\nu\pi)} =$$

$$= \frac{2\pi i}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{1}{4}\frac{1-t^2}{1+t^2}(x^2+y^2) + i\frac{txy}{1+t^2}\right]$$

$$\left[-1 < c < 0,\ |\arg t| < \frac{1}{2}\pi\right]. \qquad \text{ВТФ II 126(11)}$$

7.774 $$\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} D_\nu[k^{\frac{1}{2}}(1+i)\xi] D_{-\nu-1}[k^{\frac{1}{2}}(1+i)\eta] \Gamma\left(-\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu\right) d\nu =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \pi^2 H_0^{(2)}\left[\frac{1}{2}k(\xi^2+\eta^2)\right]$$

$$[-1 < c < 0,\quad \operatorname{Re} ik \geqslant 0]. \qquad \text{ВТФ II 125(9)}$$

7.8 ФУНКЦИИ МЕЙЕРА И МАК-РОБЕРТА (G И E)

7.81 Функции G, E и элементарные функции

7.811

1. $$\int\limits_0^\infty G_{p,q}^{m,n}\left(\eta x \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) G_{\sigma,\tau}^{\mu,\nu}\left(\omega x \middle| \begin{matrix} c_1, \ldots, c_\sigma \\ d, \ldots, d_\tau \end{matrix}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\eta} G_{q+\sigma,\,p+\tau}^{n+\mu,\,m+\nu}\left(\frac{\omega}{\eta} \middle| \begin{matrix} -b_1, \ldots, -b_m, c_1, \ldots, c_\sigma, -b_{m+1}, \ldots -b_q \\ -a_1, \ldots, -a_n, d_1, \ldots, d_\tau, -a_{n+1}, \ldots, -a_p \end{matrix}\right)$$

$[m, n, p, q, \mu, \nu, \sigma, \tau$ — целые; $1 \leqslant n \leqslant p < q < p+\tau-\sigma$,

$\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q - n < m \leqslant q,\ 0 \leqslant \nu \leqslant \sigma,\ \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\tau - \nu < \mu \leqslant \tau$;

$\operatorname{Re}(b_j + d_k) > -1 \quad (j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, \mu)$,

$\operatorname{Re}(a_j + c_k) < 1 \quad (j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, \tau)$;

не должны быть целыми:

$b_j - b_k \quad (j = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, m;\ j \neq k)$,

$a_j - a_k \quad (j = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, n,\ j \neq k)$,

$d_j - d_k \quad (j = 1, \ldots, \mu, k = 1, \ldots, \mu,\ j \neq k)$,

$a_j + d_k \quad (j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, n)$,

не должны быть целыми положительными:

$a_j - b_k \quad (j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m)$,

$c_j - d_k \quad (j = 1, \ldots, \nu;\ k = 1, \ldots, \mu)$;

$\omega \neq 0,\ \eta \neq 0,\ |\arg \eta| < \left(m + n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q\right)\pi$,

$|\arg \omega| < \left(\mu + \nu - \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\tau\right)\pi\Big]$

Формула 7.811 1 имеет место еще для четырех совокупностей ограничений. См. C. S. Meijer, Neue Integraldarstellungen fur Whittakersche Funktionen Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 44 (1941), 82—92 ИП II 422(14)

2. $$\int_0^1 x^{\varrho-1}(1-x)^{\sigma-1} G_{pq}^{mn}\left(\alpha x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) dx =$$
$$= \Gamma(\sigma)\, G_{p+1,\,q+1}^{m,\,n+1}\left(\alpha \,\middle|\, \begin{matrix} 1-\varrho,\ a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q,\ 1-\varrho-\sigma \end{matrix}\right)$$
$$\left[(p+q) < 2(m+n),\ |\arg\alpha| < \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi, \right.$$
$$\operatorname{Re}(\varrho+b_j) > 0;\ j=1, \ldots, m;\ \operatorname{Re}\sigma > 0,$$

либо

$$p+q \leqslant 2(m+n),\quad |\arg\alpha| \leqslant \left(m+n-\frac{1}{2}\varrho-\frac{1}{2}q\right)\pi,$$
$$\operatorname{Re}(\varrho+b_j) > 0;\ j=1, \ldots, m;\ \operatorname{Re}\sigma > 0,$$
$$\operatorname{Re}\left[\sum_{j=1}^{p} a_j - \sum_{j=1}^{q} b_j + (p-q)\left(\varrho-\frac{1}{2}\right)\right] > -\frac{1}{2},$$

либо

$$p < q \ \ (\text{или } p \leqslant q \text{ при } |\alpha| < 1),$$
$$\left.\operatorname{Re}(p+b_j) > 0;\ j=1, \ldots, m;\ \operatorname{Re}\sigma > 0\right]. \qquad \text{ИП II 417 (1)}$$

3. $$\int_1^\infty x^{-\varrho}(x-1)^{\sigma-1} G_{pq}^{mn}\left(\alpha x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) dx =$$
$$= \Gamma(\sigma)\, G_{p+1,\,q+1}^{m+1,\,n}\left(\alpha \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p,\ \varrho \\ \varrho-\sigma,\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right)$$
$$\left[p+q < 2(m+n),\ |\arg\alpha| < \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi, \right.$$
$$\operatorname{Re}(\varrho-\sigma-a_j) > -1;\ j=1, \ldots, n,\ \operatorname{Re}\sigma > 0,$$

либо

$$p+q \leqslant 2(m+n),\quad |\arg\alpha| \leqslant \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,$$
$$\operatorname{Re}(\varrho-\sigma-a_j) > -1;\ j=1, \ldots, n;\ \operatorname{Re}\sigma > 0,$$
$$\operatorname{Re}\left[\sum_{j=1}^{p} a_j - \sum_{j=1}^{q} b_j + (q-p)\left(\varrho-\sigma+\frac{1}{2}\right)\right] > -\frac{1}{2},$$

либо

$$q < p \ (\text{или } q \leqslant p \text{ при } |\alpha| > 1),\ \operatorname{Re}(\varrho-\sigma-a_j) > -1;$$
$$\left. j=1, \ldots, n;\ \operatorname{Re}\sigma > 0\right]. \qquad \text{ИП II 417 (2)}$$

4. $$\int_0^\infty x^{\varrho-1} G_{pq}^{mn}\left(\alpha x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) dx = \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} \Gamma(b_j+\varrho) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j-\varrho)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j-\varrho) \prod\limits_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j+\varrho)}\, \alpha^{-\varrho}$$
$$\left[p+q < 2(m+n),\ |\arg\alpha| < \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi, \right.$$
$$\left. -\min_{1\leqslant j\leqslant m} \operatorname{Re} b_j < \operatorname{Re}\varrho < 1 - \max_{1\leqslant j\leqslant n} \operatorname{Re} a_j \right]. \quad \text{ИП II 418 (3) и, ИП I 337 (14)}$$

5 $$\int_0^\infty x^{\varrho-1}(x+\beta)^{-\sigma}G_{pq}^{mn}\left(\alpha x\left|\begin{matrix}a_1, \ldots, a_p\\ b_1, \ldots, b_q\end{matrix}\right.\right)dx =$$

$$= \frac{\beta^{\varrho-\sigma}}{\Gamma(\sigma)}G_{p+1,\, q+1}^{m+1,\, n+1}\left(\alpha\beta\left|\begin{matrix}1-\varrho, a_1, \ldots, a_p\\ \sigma-\varrho, b_1, \ldots, b_q\end{matrix}\right.\right)$$

$\left[p+q < 2(m+n),\quad |\arg\alpha| < \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,\quad |\arg\beta| < \pi\right.$

$\operatorname{Re}(\varrho+b_j) > 0,\ j=1, \ldots, m,\ \operatorname{Re}(\varrho-\sigma+a_j) < 1\ \ j=1, \ldots, n,$

либо

$p \leqslant q,\ p+q \leqslant 2(m+n),\ |\arg\alpha| \leqslant \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,\ |\arg\beta| < \pi$

$\operatorname{Re}(\varrho+b_j) > 0,\ j=1, \ldots, m,\ \operatorname{Re}(\varrho-\sigma+a_j) < 1,\ j=1, \ldots, n,$

$$\operatorname{Re}\left[\sum_{j=1}^{p}a_j-\sum_{j=1}^{q}b_j-(q-p)\left(\varrho-\sigma-\frac{1}{2}\right)\right] > 1$$

либо

$p \geqslant q,\ p+q \leqslant 2(m+n),\ |\arg\alpha| \leqslant \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,\ |\arg\beta| < \pi,$

$\operatorname{Re}(\varrho+b_j) > 0,\ j=1, \ldots, m,\ \operatorname{Re}(\varrho-\sigma+a_j) < 1,\ j=1, \ldots, n,$

$\left.\operatorname{Re}\left[\sum_{j=1}^{p}a_j-\sum_{j=1}^{q}b_j+(p-q)\left(\varrho-\frac{1}{2}\right)\right] > 1\right].$ ИП II 418 (4)

7.812

1. $$\int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}E\left(a_1, \ldots, a_p : \varrho_1, \ldots, \varrho_q \cdot \frac{z}{x^m}\right)dx =$$

$$= \Gamma(\gamma-\beta)\, m^{\beta-\gamma}E(a_1, \ldots, a_{p+m}\cdot \varrho_1, \ldots, \varrho_{q+m}\cdot z),$$

$$a_{p+k} = \frac{\beta+k-1}{m},\quad \varrho_{q+k} = \frac{\gamma+k-1}{m},\quad k = 1, \ldots, m$$

$[\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\beta > 0,\ m = 1, 2, \ldots].$ ИП II 414 (2)

2 $$\int_0^\infty x^{\varrho-1}(1+x)^{-\sigma}E[a_1, \ldots, a_p : \varrho_1, \ldots, \varrho_q : (1+x)z]\,dx =$$

$$= \Gamma(\varrho)E(a_1, \ldots, a_p, \sigma-\varrho : \varrho_1, \ldots, \varrho_q, \sigma : z)$$

$[\operatorname{Re}\sigma > \operatorname{Re}\varrho > 0].$ ИП II 415 (3)

3 $$\int_0^\infty (1+x)^{-\beta}x^{s-1}G_{p,\, q}^{m,\, n}\left(\frac{ax}{1+x}\left|\begin{matrix}a_1, \ldots, a_p\\ b_1, \ldots, b_q\end{matrix}\right.\right)dx =$$

$$= \Gamma(\beta-s)\,G_{p+1,\, q+1}^{m,\, n+1}\left(a\left|\begin{matrix}1-s, a_1, \ldots, a_p\\ b_1, \ldots, b_q, 1-\beta\end{matrix}\right.\right)$$

$[-\min\operatorname{Re}b_h < \operatorname{Re}s < \operatorname{Re}\beta,\ 1 \leqslant k \leqslant m;\ (p+q) < 2(m+n),$

$\left.|\arg a| < \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi\right].$ ИП I 338 (19)

7.813

1. $$\int_0^\infty x^{-\varrho} e^{-\beta x} G_{pq}^{mn}\left(\alpha x \left| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right.\right) dx = \beta^{\varrho-1} G_{p+1, q}^{m, n+1}\left(\frac{\alpha}{\beta} \left| \begin{matrix} \varrho, a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right.\right)$$

$$\left[p+q<2(m+n),\ |\arg\alpha| < \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,\right.$$
$$\left.|\arg\beta| < \frac{1}{2}\pi,\ \operatorname{Re}(b_j-\varrho) > -1,\ j=1, \ldots, m\right].$$ ИП II 419 (5)

2. $$\int_0^\infty e^{-\beta x} G_{pq}^{mn}\left(\alpha x^2 \left| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right.\right) dx = \pi^{-\frac{1}{2}} \beta^{-1} G_{p+2, q}^{m, n+2}\left(\frac{4\alpha}{\beta^2} \left| \begin{matrix} 0, \frac{1}{2}, a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right.\right)$$

$$\left[p+q<2(m+n),\ |\arg\alpha| < \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,\right.$$
$$\left.|\arg\beta| < \frac{1}{2}\pi,\ \operatorname{Re} b_j > -\frac{1}{2},\ j=1, \ldots, m\right].$$ ИП II 419 (6)

7.814

1. $$\int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x} E(a_1, \ldots, a_p : \varrho_1, \ldots, \varrho_q : xz)\, dx =$$
$$= \pi \operatorname{cosec}(\beta\pi)\left[E(a_1, \ldots, a_p : 1-\beta, \varrho_1, \ldots, \varrho_q : e^{\pm i\pi} z) -\right.$$
$$\left. - z^{-\beta} E(a_1+\beta, \ldots, a_p+\beta : 1+\beta, \varrho_1+\beta, \ldots, \varrho_q+\beta : e^{\pm i\pi} z)\right]$$

[$p \geqslant q+1$, $\operatorname{Re}(a_r+\beta) > 0$, $r=1, \ldots, p$, $|\arg z| < \pi$. Формула верна и при $p < q+1$, если только интеграл сходится]. ИП II 415 (4)

2. $$\int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x} E(a_1, \ldots, a_p : \varrho_1, \ldots, \varrho_q : x^{-m} z)\, dx =$$
$$= (2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m} m^{\beta-\frac{1}{2}} E(a_1, \ldots, a_{p+m} : \varrho_1, \ldots, \varrho_q : m^{-m} z)$$
$$\left[\operatorname{Re}\beta > 0,\ a_{p+k} = \frac{\beta+k-1}{m},\ k=1, \ldots, m;\ m=1, 2, \ldots\right].$$

ИП II 415 (5)

7.815

1. $$\int_0^\infty \sin(cx) G_{pq}^{mn}\left(\alpha x^2 \left| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right.\right) dx =$$
$$= \pi^{\frac{1}{2}} c^{-1} G_{p+2, q}^{m, n+1}\left(\frac{4\alpha}{c^2} \left| \begin{matrix} 0, a_1, \ldots, a_p, \frac{1}{2} \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right.\right)$$
$$\left[p+q<2(m+n),\ |\arg\alpha| < \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,\right.$$
$$\left.c>0,\ \operatorname{Re} b_j > -1,\ j=1, 2, \ldots, m,\ \operatorname{Re} a_j < \frac{1}{2},\ j=1, \ldots, n\right].$$

ИП II 420 (7)

2. $$\int_0^\infty \cos(cx)\, G_{pq}^{mn}\left(\alpha x^2 \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) dx =$$
$$= \pi^{\frac{1}{2}} c^{-1} G_{p+2,q}^{m,n+1}\left(\frac{4\alpha}{c^2} \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}, a_1, \ldots, a_p, 0 \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right)$$
$$\left[p+q < 2(m+n),\ |\arg\alpha| < \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,\right.$$
$$\left. c>0,\ \operatorname{Re} b_j > -\frac{1}{2},\ j=1, \ldots, m,\ \operatorname{Re} a_j < \frac{1}{2},\ j=1, \ldots, n\right].$$
ИП II 420 (8)

7.82 Функции G, E и цилиндрические функции

7.821

1. $$\int_0^\infty x^{-\varrho} J_\nu(2\sqrt{x})\, G_{pq}^{mn}\left(\alpha x \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) dx =$$
$$= G_{p+2,q}^{m,n+1}\left(\alpha \middle| \begin{matrix} \varrho-\frac{1}{2}\nu, a_1, \ldots, a_p, \varrho+\frac{1}{2}\nu \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right)$$
$$\left[p+q < 2(m+n),\ |\arg\alpha| < \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,\right.$$
$$\left. -\frac{3}{4} + \max_{1\leqslant j\leqslant n} \operatorname{Re} a_j < \operatorname{Re}\varrho < 1 + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\nu + \min_{1\leqslant j\leqslant m} \operatorname{Re} b_j\right].$$ ИП II 420 (9)

2 $$\int_0^\infty x^{-\varrho} N_\nu(2\sqrt{x})\, G_{pq}^{mn}\left(\alpha x \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) dx =$$
$$= G_{p+3,q+1}^{m,n+2}\left(\alpha \middle| \begin{matrix} \varrho-\frac{1}{2}\nu, \varrho+\frac{1}{2}\nu, a_1, \ldots, a_p, \varrho+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu \\ b_1, \ldots, b_q, \varrho+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right)$$
$$\left[p+q < 2(m+n),\ |\arg\alpha| < \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,\right.$$
$$\left. -\frac{3}{4} + \max_{1\leqslant j\leqslant n} \operatorname{Re} a_j < \operatorname{Re}\varrho < \min_{1\leqslant j\leqslant m} \operatorname{Re} b_j + \frac{1}{2}|\operatorname{Re}\nu| + 1\right]$$
ИП II 420 (10)

3 $$\int_0^\infty x^{-\varrho} K_\nu(2\sqrt{x})\, G_{pq}^{mn}\left(\alpha x \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{2} G_{p+2,q}^{m,n+2}\left(\alpha \middle| \begin{matrix} \varrho-\frac{1}{2}\nu, \varrho+\frac{1}{2}\nu, a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right)$$
$$\left[p+q < 2(m+n),\ |\arg\alpha| < \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,\right.$$
$$\left. \operatorname{Re}\varrho < 1 - \frac{1}{2}|\operatorname{Re}\nu| + \min_{1\leqslant j\leqslant m} \operatorname{Re} b_j\right].$$ ИП II 421 (11)

7.822

1. $$\int_0^\infty x^{2\varrho} J_\nu(xy)\, G_{pq}^{mn}\left(\lambda x^2 \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) dx =$$

$$= \frac{2^{2\varrho}}{y^{2\varrho+1}}\, G_{p+2,\,q}^{m,\,n+1}\left(\frac{4\lambda}{y^2} \middle| \begin{matrix} h, a_1, \ldots, a_p, k \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right),$$

$$h = \frac{1}{2} - \varrho - \frac{1}{2}\nu, \quad k = \frac{1}{2} - \varrho + \frac{1}{2}\nu$$

$$\left[p+q < 2(m+n),\ |\arg\lambda| < \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,\right.$$

$$\operatorname{Re}\left(b_j + \varrho + \frac{1}{2}\nu\right) > -\frac{1}{2},\ j = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\left.\operatorname{Re}(a_j + \varrho) < \frac{3}{4},\ j = 1, \ldots, n,\ y > 0\right].$$ ИП II 91 (20)

2. $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} N_\nu(xy)\, G_{pq}^{mn}\left(\lambda x^2 \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) dx =$$

$$= (2\lambda)^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} G_{q+1,\,p+3}^{n+2,\,m}\left(\frac{y^2}{4\lambda} \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}-b_1, \ldots, \frac{1}{2}-b_q, l \\ h, k, \frac{1}{2}-a_1, \ldots, \frac{1}{2}-a_p, l \end{matrix}\right)$$

$$h = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\nu, \quad k = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\nu, \quad l = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\nu$$

$$\left[p+q < 2(m+n),\ |\arg\lambda| < \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,\ y > 0,\right.$$

$$\left.\operatorname{Re} a_j < 1,\ j = 1, \ldots, n,\ \operatorname{Re}\left(b_j \pm \frac{1}{2}\nu\right) > -\frac{3}{4},\ j = 1, \ldots, m\right].$$

ИП II 119 (56)

3. $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} K_\nu(xy)\, G_{pq}^{mn}\left(\lambda x^2 \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) dx =$$

$$= 2^{-\frac{3}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} G_{q,\,p+2}^{n+2,\,m}\left(\frac{y^2}{4\lambda} \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}-b_1, \ldots, \frac{1}{2}-b_q \\ h, k, \frac{1}{2}-a_1, \ldots, \frac{1}{2}-a_p \end{matrix}\right),$$

$$h = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\nu, \quad k = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\nu$$

$$\left[\operatorname{Re} y > 0,\ p+q < 2(m+n),\ |\arg\lambda| < \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,\right.$$

$$\left.\operatorname{Re} b_j > \frac{1}{2}|\operatorname{Re}\nu| - \frac{3}{4},\ j = 1, \ldots, m\right].$$ ИП II 153 (90)

7.823

1. $$\int_0^\infty x^{\beta-1} J_\nu(x)\, E(a_1, \ldots, a_p : \varrho_1, \ldots, \varrho_q \cdot x^{-2m} z)\, dx =$$
$$= (2\pi)^{-m} (2m)^{\beta-1} \left\{ \exp\left[\frac{1}{2}\pi(\beta-\nu-1)i\right] \times \right.$$
$$\times E[a_1, \ldots, a_{p+2m} \cdot \varrho_1, \ldots, \varrho_q : (2m)^{-2m} z e^{-m\pi i}] +$$
$$+ \exp\left[-\frac{1}{2}\pi(\beta-\nu-1)i\right] \times$$
$$\left. \times E[a_1, \ldots, a_{p+2m} : \varrho_1, \ldots, \varrho_q \cdot (2m)^{-2m} z e^{m\pi i}] \right\},$$
$$a_{p+k} = \frac{\beta+\nu+2k-2}{2m}, \quad a_{p+m+k} = \frac{\beta-\nu+2k-2}{2m},$$
$$m = 1, 2, \ldots; \quad k = 1, \ldots, m$$
$$\left[\operatorname{Re}(\beta+\nu) > 0, \ \operatorname{Re}(2a_r m - \beta) > -\frac{3}{2}, \ r = 1, \ldots, p\right]$$

ИП II 415 (7)

2. $$\int_0^\infty x^{\beta-1} K_\nu(x)\, E(a_1, \ldots, a_p : \varrho_1, \ldots, \varrho_q : x^{-2m} z)\, dx =$$
$$= (2\pi)^{1-m} 2^{\beta-2} m^{\beta-1} E[a_1, \ldots, a_{p+2m} \cdot \varrho_1, \ldots, \varrho_q : (2m)^{-2m} z],$$
$$a_{p+k} = \frac{\beta+\nu+2k-2}{2m}, \quad a_{p+m+k} = \frac{\beta-\nu+2k-2}{2m}, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$
$$[\operatorname{Re}\beta > |\operatorname{Re}\nu|, \quad m = 1, 2, \ldots]$$

ИП II 416 (8)

7.824

1. $$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \mathbf{H}_\nu(xy)\, G_{pq}^{mn}\left(\lambda x^2 \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) dx =$$
$$= (2\lambda y)^{-\frac{1}{2}} G_{q+1,\, p+3}^{n+1,\, m+1}\left(\frac{y^2}{4\lambda} \middle| \begin{matrix} l, \frac{1}{2}-b_1, \ldots, \frac{1}{2}-b_q \\ l, \frac{1}{2}-a_1, \ldots, \frac{1}{2}-a_p, h, k \end{matrix}\right)$$
$$h = \frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}, \quad k = \frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}, \quad l = \frac{3}{4}+\frac{\nu}{2}$$
$$\left[p+q < 2(m+n), \ |\arg\lambda| < \left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi, \ y > 0,\right.$$
$$\operatorname{Re} a_j < \min\left(1, \frac{3}{4}-\frac{1}{2}\nu\right), \ j = 1, \ldots, n,$$
$$\left.\operatorname{Re}(2b_j+\nu) > -\frac{5}{2}, \ j = 1, \ldots, m\right].$$

ИП II 172 (47)

2. $$\int_0^\infty x^{-\varrho}\mathbf{H}_\nu(2\sqrt{x})\,G_{pq}^{mn}\left(\alpha x\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\ \ldots,\ a_p\\ b_1,\ \ldots,\ b_q\end{matrix}\right)dx=$$

$$=G_{p+3,\,q+1}^{m+1,\,n+1}\left(\alpha\,\middle|\,\begin{matrix}\varrho-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu,\ a_1,\ \ldots,\ a_p,\ \varrho+\frac{1}{2}\nu,\ \varrho-\frac{1}{2}\nu\\ \varrho-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu,\ b_1,\ \ldots,\ b_q\end{matrix}\right)$$

$$\left[p+q<2(m+n),\ |\arg\alpha|<\left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,\right.$$

$$\left.\max\left(-\frac{3}{4},\ \operatorname{Re}\frac{\nu-1}{2}\right)+\max_{1\leqslant j\leqslant n}\operatorname{Re}a_j<\operatorname{Re}\varrho<\min_{1\leqslant j\leqslant m}\operatorname{Re}b_j+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\nu+\frac{3}{2}\right].$$

ИП II 421 (12)

7.83 Функции G, E и другие специальные функции

7.831 $$\int_1^\infty x^{-\varrho}(x-1)^{\sigma-1}F(k+\sigma-\varrho,\ \lambda+\sigma-\varrho;\ \sigma;\ 1-x)\times$$

$$\times G_{pq}^{mn}\left(\alpha x\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\ \ldots,\ a_p\\ b_1,\ \ldots,\ b_q\end{matrix}\right)dx=\Gamma(\sigma)\,G_{p+2,\,q+2}^{m+2,\,n}\left(\alpha\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\ \ldots,\ a_p,\ k+\lambda+\sigma-\varrho,\ \varrho\\ k,\ \lambda,\ b_1,\ \ldots,\ b_q\end{matrix}\right)$$

$$\left[p+q<2(m+n),\ |\arg\alpha|<\left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,\right.$$

$$\operatorname{Re}\sigma>0,\ \operatorname{Re}k\geqslant\operatorname{Re}\lambda>\operatorname{Re}a_j-1,\ j=1,\ \ldots,\ n,$$

либо

$$p+q\leqslant 2(m+n),\quad |\arg\alpha|\leqslant\left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi,$$

$$\operatorname{Re}\sigma>0,\quad \operatorname{Re}k\geqslant\operatorname{Re}\lambda>\operatorname{Re}a_j-1,\quad j=1,\ \ldots,\ n,$$

$$\operatorname{Re}\left[\sum_{j=1}^{p}a_j-\sum_{j=1}^{q}b_j+(q-p)\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]>-\frac{1}{2},$$

$$\left.\operatorname{Re}\left[\sum_{j=1}^{p}a_j-\sum_{j=1}^{q}b_j+(q-p)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\right]>-\frac{1}{2}\right].$$

ИП II 421 (13)

7.832 $$\int_0^\infty x^{\beta-1}e^{-\frac{1}{2}x}W_{\varkappa,\,\mu}(x)\,E(a_1,\ \ldots,\ a_p:\varrho_1,\ \ldots,\ \varrho_q:x^{-m}z)\,dx=$$

$$=(2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m}m^{\beta+\varkappa-\frac{1}{2}}E(a_1,\ \ldots,\ a_{p+2m}:\varrho_1,\ \ldots,\ \varrho_{q+m}:m^{-m}z),$$

$$a_{p+k}=\frac{\beta+k+\mu-\frac{1}{2}}{m},\quad a_{p+m+k}=\frac{\beta-\mu+k-\frac{1}{2}}{m},$$

$$\varrho_{q+k}=\frac{\beta-\varkappa+k}{m},\quad k=1,\ \ldots,\ m$$

$$\left[\operatorname{Re}\beta>|\operatorname{Re}\mu|-\frac{1}{2},\quad m=1,\ 2,\ \ldots\right].$$ ИП II 416 (10)

8.–9. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

8.1 ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И ФУНКЦИИ

8.11 Эллиптические интегралы

8.110

1. Всякий интеграл $\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx$, где $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени, может быть приведен к линейной комбинации интегралов, приводящих к элементарным функциям, и следующих трех интегралов:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

которые называются соответственно *эллиптическими интегралами первого, второго и третьего рода в лежандровой нормальной форме*. Результаты такого приведения для часто встречающихся интегралов даны в формулах **3.13 — 3.17**. Число k называется *модулем* этих интегралов, число $k' = \sqrt{1-k^2}$ — их *дополнительным модулем*, а число n — *параметром* интеграла третьего рода. Ф II 97 — 106

2. Эллиптические интегралы подстановкой $x = \sin\varphi$ приводятся к *нормальной тригонометрической форме*

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \quad \int \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Ф II 106

Результаты приведения интегралов от тригонометрических функций к нормальной форме см **2.58 — 2.62**

3. Эллиптические интегралы, взятые в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, называются *полными эллиптическими интегралами*.

8.111 Обозначения:

1. $\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}; \quad k' = \sqrt{1-k^2}, \quad k^2 < 1.$

2. Эллиптический интеграл первого рода.

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

3. Эллиптический интеграл второго рода:

$$E(\varphi, k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,d\alpha=\int_0^{\sin\varphi}\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \qquad \text{Ф II 135}$$

4. Эллиптический интеграл третьего рода:

$$\Pi(\varphi, n, k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\alpha}{(1\pm n\sin^2\alpha)\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}=\int_0^{\sin\varphi}\frac{dx}{(1\pm nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \qquad \text{Си 13}$$

5. $$D(\varphi, k)=\frac{F(\varphi, k)-E(\varphi, k)}{k^2}=\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\alpha\,d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}=\int_0^{\sin\varphi}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

8.112 Полные эллиптические интегралы:

1. $\boldsymbol{K}(k)=F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)=\boldsymbol{K}'(k')$.
2. $\boldsymbol{E}(k)=E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)=\boldsymbol{E}'(k')$.
3. $\boldsymbol{K}'(k)=F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right)=\boldsymbol{K}(k')$.
4. $\boldsymbol{E}'(k)=E\left(\frac{\pi}{2}, k'\right)=\boldsymbol{E}(k')$.
5. $\boldsymbol{D}=D\left(\frac{\pi}{2}, k\right)=\frac{\boldsymbol{K}-\boldsymbol{E}}{k^2}$.

При записи полных эллиптических интегралов модуль k, служащий независимой переменной, часто опускают и пишут так.

$$\boldsymbol{K}(\equiv\boldsymbol{K}(k)),\quad \boldsymbol{K}'(\equiv\boldsymbol{K}'(k)),\quad \boldsymbol{E}(\equiv\boldsymbol{E}(k)),\quad \boldsymbol{E}'(\equiv\boldsymbol{E}'(k)).$$

Представление в виде ряда

8.113

1. $$\boldsymbol{K}=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\ldots+\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2k^{2n}+\ldots\right\}=$$
$$=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right). \qquad \text{Ф II 487, УВ II 342}$$

2. $$\boldsymbol{K}=\frac{\pi}{1+k'}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^4+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^{2n}+\ldots\right\}. \qquad \text{Д (773.2)}$$

3. $$\boldsymbol{K}=\ln\frac{4}{k'}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\ln\frac{4}{k'}-\frac{2}{1\cdot 2}\right)k'^2+$$
$$+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(\ln\frac{4}{k'}-\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{2}{3\cdot 4}\right)k'^4+$$
$$+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\left(\ln\frac{4}{k'}-\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{2}{3\cdot 4}-\frac{2}{5\cdot 6}\right)k'^6+\ldots \qquad \text{Д (773.3)}$$

См. также 8.197 1., 8.197 2.

8.114

1. $$\boldsymbol{E}=\frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{1}{2^2}k^2-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}k^4-\ldots-\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2\frac{k^{2n}}{2n-1}-\ldots\right\}=$$
$$=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, k^2\right). \qquad \text{Ф II 487}$$

2. $$\boldsymbol{E} = \frac{(1+k')\pi}{4}\left\{1 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2 + \frac{1^2}{2^2\cdot 4^2}\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^4 + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \left[\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}\right]^2 \left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^{2n} + \dots\right\}$$ Д (774.2)

3. $$\boldsymbol{E} = 1 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{4}{k'} - \frac{1}{1\cdot 2}\right)k'^2 + \frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4}\left(\ln\frac{4}{k'} - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4}\right)k'^4 +$$
$$+ \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}\left(\ln\frac{4}{k'} - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{2}{3\cdot 4} - \frac{1}{5\cdot 6}\right)k'^6 + \dots$$ Д (774.3)

8.115 $$\boldsymbol{D} = \pi\left\{\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^2 + \dots + \right.$$
$$\left. + \frac{n}{2n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 k^{2(n-1)} + \dots\right\}.$$ Ж 43 (158)

8.116 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-n^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \sqrt{n'^2-k'^2}\left(\frac{\arccos\frac{1}{n'}}{n'\sqrt{n'^2-1}} + R\right),$$

где $$R = \frac{k'^2}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n'^3} + \frac{k'^4}{16}\left[-1 + \left(p+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{n'^3}\left(1+\frac{6}{n'^2}\right)\right] +$$
$$+ \frac{k'^6}{16}\left[-\frac{7}{16} - \frac{1}{n'^2} + \left(p+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{n'^3}\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{n'^2} + \frac{5}{n'^4}\right)\right] +$$
$$+ \frac{15k'^8}{256}\left[-\frac{37}{144} - \frac{21}{40n'^2} - \frac{1}{n'^4} + \right.$$
$$\left. + \left(p+\frac{1}{8}\right)\frac{1}{n'^3}\left(\frac{5}{24} + \frac{9}{20n'^2} + \frac{1}{n'^4} + \frac{14}{3n'^6}\right)\right] + \dots,$$
$$p = \ln\frac{4}{k'}, \quad k' = 4e^{-p}, \quad k'^2 = 1-k^2, \quad n'^2 = 1-n^2.$$ Ж 44 (163′)

Тригонометрические ряды

8.117 При малых значениях k и φ можно пользоваться рядами

1. $$F(\varphi, k) = \frac{2}{\pi}\boldsymbol{K}\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\left(a_0 + \frac{2}{3}a_1\sin^2\varphi + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}a_2\sin^4\varphi + \dots\right),$$

где
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\boldsymbol{K} - 1; \quad a_n = a_{n-1} - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 k^{2n}.$$ Ж 10 (19)

2. $$E(\varphi, k) = \frac{2}{\pi}\boldsymbol{E}\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\left(b_0 + \frac{2}{3}b_1\sin^2\varphi + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}b_2\sin^4\varphi + \dots\right),$$

где
$$b_0 = 1 - \frac{2}{\pi}\boldsymbol{E}, \quad b_n = b_{n-1} - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}.$$ Ж 27 (86)

8.118 При k, близком к 1, можно пользоваться рядами:

1. $$F(\varphi, k) = \frac{2}{\pi}\boldsymbol{K}'\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) -$$
$$- \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}\left(a_0' - \frac{2}{3}a_1'\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}a_2'\operatorname{tg}^4\varphi - \dots\right),$$

где
$$a_0' = \frac{2}{\pi}\boldsymbol{K}' - 1; \quad a_n' = a_{n-1}' - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 k'^{2n}.$$ Ж 10 (23)

2. $$E(\varphi, k) = \frac{2}{\pi} \boldsymbol{E}' \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}\left(b_0' - \frac{2}{3} b' \operatorname{tg}^2\varphi + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} b_2' \operatorname{tg}^4\varphi - \ldots\right),$$

где

$$b_0' = \frac{2}{\pi}\boldsymbol{E}' - 1, \quad b_n' = b_{n-1}' - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 \frac{k'^{2n}}{2n-1}.$$ Ж 27 (90)

Разложение полных эллиптических интегралов по полиномам Лежандра см. 8.928.

8.119 Представление в виде бесконечного произведения.

1. $$\boldsymbol{K}(k) = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}(1 + k_n),$$

где

$$k_n = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}, \quad k_0 = k.$$ Ф II 166

См. также 8.197.

8.12 Функциональные соотношения между эллиптическими интегралами

8.121

1. $F(-\varphi, k) = -F(\varphi, k).$ ЯЭ 151
2. $E(-\varphi, k) = -E(\varphi, k).$ ЯЭ 151
3. $F(n\pi \pm \varphi, k) = 2n\boldsymbol{K}(k) \pm F(\varphi, k).$ ЯЭ 151
4. $E(n\pi \pm \varphi, k) = 2n\boldsymbol{E}(k) \pm E(\varphi, k).$ ЯЭ 151

8.122 $\boldsymbol{E}(k)\boldsymbol{K}'(k) + \boldsymbol{E}'(k)\boldsymbol{K}(k) - \boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{K}'(k) = \frac{\pi}{2}.$ Ф II 691, Ф II 791

8.123

1. $\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{1}{k'^2}\left(\frac{E - k'^2 F}{k} - \frac{k \sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\right).$ МО 138, БФ(710.07)
2. $\frac{d\boldsymbol{K}(k)}{dk} = \frac{\boldsymbol{E}(k)}{kk'^2} - \frac{\boldsymbol{K}(k)}{k}.$ Ф II 691
3. $\frac{\partial E}{\partial k} = \frac{E - F}{k}.$ МО 138
4. $\frac{d\boldsymbol{E}(k)}{dk} = \frac{\boldsymbol{E}(k) - \boldsymbol{K}(k)}{k}.$ Ф II 690

8.124

1. Функции $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K}'$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{dk}\left\{kk'^2 \frac{du}{dk}\right\} - ku = 0.$$ УВ II 371

2. Функции $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}' - \boldsymbol{K}'$ удовлетворяют уравнению

$$k'^2 \frac{d}{dk}\left(k\frac{du}{dk}\right) + ku = 0.$$ УВ II 371

Формулы преобразования

8.125

1. $F\left(\psi, \frac{1-k'}{1+k'}\right)=(1+k')F(\varphi, k)$ MO 130

2. $E\left(\psi, \frac{1-k'}{1+k'}\right)=\frac{2}{1+k'}[E(\varphi, k)+k'F(\varphi, k)]-\frac{1-k'}{1+k'}\sin\psi$ $[\operatorname{tg}(\psi-\varphi)=k'\operatorname{tg}\varphi]$. MO 131

3. $F\left(\psi, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)=(1+k)F(\varphi, k)$.

4. $E\left(\psi, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)=\frac{1}{1+k}\left[2E(\varphi, k)-k'^2F(\varphi, k)+2k\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1+k\sin^2\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\right]$ $\left[\sin\psi=\frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\sin^2\varphi}\right]$. MO 131

8.126 В частности,

1. $\boldsymbol{K}\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)=\frac{1+k'}{2}\boldsymbol{K}(k)$. MO 130

2. $\boldsymbol{E}\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)=\frac{1}{1+k'}[\boldsymbol{E}(k)+k'\boldsymbol{K}(k)]$. MO 130

3. $\boldsymbol{K}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)=(1+k)\boldsymbol{K}(k)$. MO 130

4. $\boldsymbol{E}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)=\frac{1}{1+k}[2\boldsymbol{E}(k)-k'^2\boldsymbol{K}(k)]$. MO 130

8.127

k_1	$\sin\varphi_1$	$\cos\varphi_1$	$F(\varphi_1, k_1)$	$E(\varphi_1, k_1)$
$i\frac{k}{k'}$	$k'\frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi}$	$\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$	$k'F(\varphi, k)$	$\frac{1}{k'}\left[E(\varphi, k)-\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}\right]$
k'	$-i\operatorname{tg}\varphi$	$\sec\varphi$	$-iF(\varphi, k)$	$i[E(\varphi, k)-F(\varphi, k)-\Delta\varphi\operatorname{tg}\varphi]$
$\frac{1}{k}$	$k\sin\varphi$	$\Delta\varphi$	$kF(\varphi, k)$	$\frac{1}{k}[E(\varphi, k)-k'^2F(\varphi, k)]$
$\frac{1}{k'}$	$-ik'\operatorname{tg}\varphi$	$\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}$	$-ik'F(\varphi, k)$	$\frac{i}{k'}[E(\varphi, k)-k'^2F(\varphi, k)-\Delta\varphi\operatorname{tg}\varphi]$
$\frac{k'}{ik}$	$\frac{-ik\sin\varphi}{\Delta\varphi}$	$\frac{1}{\Delta\varphi}$	$-ikF(\varphi, k)$	$\frac{i}{k}\left[E(\varphi, k)-F(\varphi, k)-\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}\right]$

(см. 8.111 1.). MO 131

8.128 В частности,

1. $\boldsymbol{K}\left(i\frac{k}{k'}\right)=k'\boldsymbol{K}(k)$. MO 130

2. $\boldsymbol{K}'\left(i\frac{k}{k'}\right)=k'[\boldsymbol{K}(k')-i\boldsymbol{K}(k)]$. MO 130

3. $\boldsymbol{K}\left(\frac{1}{k}\right)=k\boldsymbol{K}(k)+i\boldsymbol{K}'(k)$. MO 130

Интегралы от эллиптических интегралов см. **6.11**—**6.15**; неопределенные интегралы от полных эллиптических интегралов см. **5.11**.

8.129 Частные значения:

1. $$\boldsymbol{K}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)=\boldsymbol{K}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boldsymbol{K}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt[4]{2}\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}=$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.$$ МО 130

2. $\boldsymbol{K}'(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}\,\boldsymbol{K}(\sqrt{2}-1)$. МО 130

3. $\boldsymbol{K}'\left(\sin\frac{\pi}{18}\right)=\sqrt{3}\,\boldsymbol{K}\left(\sin\frac{\pi}{18}\right)$. МО 130

4. $\boldsymbol{K}'\left(\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8}\right)=\boldsymbol{K}'\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)=2\boldsymbol{K}\left(\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8}\right)$. МО 130

8.13 Эллиптические функции

8.130 Определение и общие свойства.

1. Дробная функция $f(z)$ комплексного переменного называется эллиптической, если она допускает два периода (является *двоякопериодической*) $2\omega_1$ и $2\omega_2$, т. е. если

$$f(z+2m\omega_1+2n\omega_2)=f(z) \qquad [m,\ n \text{ — целые числа}].$$

Отношение периодов эллиптической функции не может быть действительным числом. Для эллиптической функции $f(z)$ плоскость z можно представить себе разбитой на параллелограммы — *параллелограммы периодов*, вершинами которых служат точки $z_0+2m\omega_1+2n\omega_2$. В соответствующих точках этих параллелограммов функция $f(z)$ имеет одинаковые значения. Ж 117, Си 299

2. Пусть α — угол между сторонами a и b параллелограмма периодов. Тогда

$$\tau=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{a}{b}e^{i\alpha}, \qquad q=e^{i\pi\tau}=e^{-\frac{a}{b}\pi\sin\alpha}\left[\cos\left(\frac{a}{b}\pi\cos\alpha\right)+i\sin\left(\frac{a}{b}\pi\cos\alpha\right)\right].$$

3. Производная эллиптической функции есть также функция эллиптическая (с теми же периодами). См III 598

4. Эллиптическая функция, отличная от постоянного, имеет в параллелограмме периодов конечное число полюсов: не менее двух простых или одного полюса второго порядка. Пусть эти полюсы находятся в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и имеют соответственно порядки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Пусть нули эллиптической функции, лежащие в одном параллелограмме периодов, суть $b_1, b_2, \ldots, b_m$, и пусть порядок этих нулей соответственно равен $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. Тогда

$$\gamma=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m.$$

Число γ, равное этой сумме, называется *порядком эллиптической функции*. См III 599, Ж 118, Си 300—301

5. Сумма вычетов эллиптической функции относительно всех полюсов, принадлежащих параллелограмму периодов, равна нулю. Ж 118

6. Разность между суммой всех нулей и суммой всех полюсов эллиптической функции, расположенных в параллелограмме периодов, равна некоторому ее периоду.

7. Между каждыми двумя эллиптическими функциями с одинаковыми периодами существует алгебраическое соотношение. Гу II$_1$ 151

8. Однозначная функция не может иметь более двух периодов. Гу II$_1$ 147

9. Эллиптическая функция порядка γ принимает любое значение в параллелограмме периодов γ раз. См III 601, Си 301

8.14 Эллиптические функции Якоби

8.141 Рассматривая верхний предел φ интеграла

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$$

как функцию от u, пользуются обозначением

$$\varphi = \operatorname{am} u$$

и называют этот верхний предел *амплитудой*. Величину u называют *аргументом* и зависимость ее от φ записывают так:

$$u = \arg\varphi.$$

8.142 Амплитуда является бесконечнозначной функцией u, обладающей периодом, равным $4Ki$. Точки разветвления амплитуды соответствуют значениям аргумента

$$u = 2mK + (2n+1)K'i, \qquad \text{Ж 67—69}$$

где m и n — произвольные целые числа (см. также 8.151).

8.143 Функции

$$\operatorname{sn} u = \sin\varphi = \sin\operatorname{am} u, \quad \operatorname{cn} u = \cos\varphi = \cos\operatorname{am} u,$$

$$\operatorname{dn} u = \Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \frac{d\varphi}{du}$$

называются соответственно *синусом амплитуды* или *эллиптическим синусом*, *косинусом амплитуды* или *эллиптическим косинусом* и *дельтой амплитуды*. Все эти эллиптические функции были введены Якоби и носят его имя. Си 16

Эллиптические функции Якоби являются двоякопериодическими функциями, имеющими в параллелограмме периодов два простых полюса. Ж 69

8.144

$$\left.\begin{aligned}
&1.\quad u = \int_0^{\operatorname{sn} u} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\\
&2.\quad u = \int_1^{\operatorname{cn} u} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2+k^2t^2)}}\,.\\
&3.\quad u = \int_1^{\operatorname{dn} u} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{Си 21 (23)}$$

8.145 Представление в виде степенного ряда:

1. $$\operatorname{sn} u = u - \frac{1+k^2}{3!}u^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{5!}u^5 - \frac{1+135k^2+135k^4+k^6}{7!}u^7 + \\ + \frac{1+1228k^2+5478k^4+1228k^6+k^8}{9!}u^9 - \dots \quad [|u| < |K'|]. \qquad \text{Ж 81 (97)}$$

2. $\operatorname{cn} u = 1 - \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1+4k^2}{4!}u^4 - \frac{1+44k^2+16k^4}{6!}u^6 +$
$+ \frac{1+408k^2+912k^4+64k^6}{8!}u^8 - \ldots \quad [|u| < |\boldsymbol{K}'|].$ Ж 81 (98)

3. $\operatorname{dn} u = 1 - \frac{k^2}{2!}u^2 + \frac{k^2(4+k^2)}{4!}u^4 - \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{6!}u^6 +$
$+ \frac{k^2(64+912k^2+408k^4+k^6)}{8!}u^8 - \ldots \quad [|u| < |\boldsymbol{K}'|].$ Ж 81 (99)

4. $\operatorname{am} u = u - \frac{k^2}{3!}u^3 + \frac{k^2(4+k^2)}{5!}u^5 - \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{7!}u^7 +$
$+ \frac{k^2(64+912k^2+408k^4+k^6)}{9!}u^9 - \ldots \quad [|u| < |\boldsymbol{K}'|].$ Ла 380 (4)

8.146 Представление в виде тригонометрического ряда или произведения $\left(q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}\right)$ *):

1. $\operatorname{sn} u = \frac{2\pi}{k\boldsymbol{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}} \sin(2n-1)\frac{\pi u}{2\boldsymbol{K}}.$ УВ II 358, Ж 84 (108)

2. $\operatorname{cn} u = \frac{2\pi}{k\boldsymbol{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}} \cos(2n-1)\frac{\pi u}{2\boldsymbol{K}}.$ УВ II 358и, Ж 84 (109)

3. $\operatorname{dn} u = \frac{\pi}{2\boldsymbol{K}} + \frac{2\pi}{\boldsymbol{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos\frac{n\pi u}{\boldsymbol{K}}.$ УВ II 358, Ж 84 (110)

4. $\operatorname{am} u = \frac{\pi u}{2\boldsymbol{K}} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{q^n}{1+q^{2n}} \sin\frac{n\pi u}{\boldsymbol{K}}.$ УВ II 358

5. $\frac{1}{\operatorname{sn} u} = \frac{\pi}{2\boldsymbol{K}}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi u}{2\boldsymbol{K}}} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} \sin(2n-1)\frac{\pi u}{2\boldsymbol{K}}\right].$ Ла 369 (3)

6. $\frac{1}{\operatorname{cn} u} = \frac{\pi}{2k'\boldsymbol{K}}\left[\frac{1}{\cos\frac{\pi u}{2\boldsymbol{K}}} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} \cos(2n-1)\frac{\pi u}{2\boldsymbol{K}}\right].$
Ла 369 (3)

7. $\frac{1}{\operatorname{dn} u} = \frac{\pi}{2k'\boldsymbol{K}}\left[1 + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos\frac{n\pi u}{\boldsymbol{K}}\right].$ Ла 369 (3)

8. $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} = \frac{\pi}{2k'\boldsymbol{K}}\left[\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2\boldsymbol{K}} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} \sin\frac{n\pi u}{\boldsymbol{K}}\right].$ Ла 369 (4)

9. $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} = -\frac{2\pi}{kk'\boldsymbol{K}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}} \sin(2n-1)\frac{\pi u}{2\boldsymbol{K}}.$ Ла 369 (4)

*) Разложения 1—22 годны во всей полосе $\left|\operatorname{Im}\frac{\pi u}{2\boldsymbol{K}}\right| < \frac{1}{2}\pi \operatorname{Im}\tau$; разложения 23—25 годны в любой конечной части u.

10. $\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}=\frac{\pi}{2K}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2K}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\sin\frac{\pi n u}{K}\right].$ Ла 369 (5)

11. $\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}=-\frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}}\cos(2n-1)\frac{\pi u}{2K}.$ Ла 369 (5)

12. $\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}=\frac{\pi}{2K}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi u}{2K}}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\sin(2n-1)\frac{\pi u}{2K}\right].$ Ла 369 (6)

13. $\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}=\frac{\pi}{2K}\left[\frac{1}{\cos\frac{\pi u}{2K}}-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\cos(2n-1)\frac{\pi u}{2K}\right].$ Ла 369 (6)

14. $\frac{\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}=\frac{\pi}{2K}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2K}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^n}\sin\frac{n\pi u}{K}\right].$ Ла 369 (7)

15. $\frac{\operatorname{sn} u\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}=\frac{\pi}{2K}\left\{\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+(-1)^n q^n}\sin\frac{n\pi u}{K}\right\}.$ Ла 369 (7)

16. $\frac{\operatorname{sn} u\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}=\frac{4\pi^2}{k^2K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}}\sin(2n-1)\frac{\pi u}{K}.$ Ла 369 (7)

17. $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u}=\frac{\pi}{2(1-k^2)K}\left[\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2K}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{q^n}{1-q^n}\sin\frac{n\pi u}{K}\right].$ Ла 369 (8)

18. $\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u\operatorname{dn} u}=\frac{\pi}{2K}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2K}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^n}{1+(-1)^n q^n}\sin\frac{n\pi u}{K}\right].$ Ла 369 (8)

19. $\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u\operatorname{cn} u}=\frac{\pi}{K}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi u}{K}}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2(2n-1)}}{1-q^{2(2n-1)}}\sin(2n-1)\frac{\pi u}{K}\right].$ Ла 369 (8)

20. $\ln\operatorname{sn} u=\ln\frac{2K}{\pi}+\ln\sin\frac{\pi u}{2K}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{q^n}{1+q^n}\sin^2\frac{n\pi u}{2K}.$ Ла 369 (2)

21. $\ln\operatorname{cn} u=\ln\cos\frac{\pi u}{2K}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{q^n}{1+(-1)^n q^n}\sin^2\frac{n\pi u}{2K}.$ Ла 369 (2)

22. $\ln\operatorname{dn} u=-8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}}\sin^2(2n-1)\frac{\pi u}{2K}.$ Ла 369 (2)

23. $\operatorname{sn} u=\frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{k}}\sin\frac{\pi u}{2K}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}}.$ Ж 86 (145)

24. $\operatorname{cn} u=\frac{2\sqrt{k'}\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\cos\frac{\pi u}{2K}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}}.$ Ж 86 (146)

25. $\operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}}{1-2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}}$. Ж 86 (147)

26. $\operatorname{sn}^2 u = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1+k^2}{2k^3} - \frac{(2n+1)^3}{2k^3}\frac{\pi^2}{4K^2}\right] \frac{2\pi q^{n+\frac{1}{2}} \sin(2n+1)\frac{\pi u}{2K}}{K(1-q^{2n+1})}$

$\left[\left|\operatorname{Im}\frac{u}{2K}\right| < \operatorname{Im}\tau\right]$. МО 147

27. $\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} = \frac{\pi^2}{4K^2}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi u}{2K} + \frac{K-E}{K} - \frac{2\pi^2}{K^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}\cos\frac{n\pi u}{K}}{1-q^{2n}}$

$\left[\left|\operatorname{Im}\frac{u}{2K}\right| < \frac{1}{2}\operatorname{Im}\tau\right]$. МО 148

8.147

1. $\operatorname{sn} u = \frac{\pi}{2kK}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}[u-(2n-1)iK']}$. МО 149

2. $\operatorname{cn} u = \frac{\pi i}{2kK}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sin\frac{\pi}{2K}[u-(2n-1)iK']}$. МО 150

3. $\operatorname{dn} u = \frac{\pi i}{2K}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2K}[u-(2n-1)iK']}$. МО 150

8.148 Разложения Вейерштрасса для функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$:

$$\operatorname{sn} u = \frac{B}{A}, \quad \operatorname{cn} u = \frac{C}{A}, \quad \operatorname{dn} u = \frac{D}{A},$$

где

$$A = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_{n+1}\frac{u^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$[a_2 = 2k^2,\quad a_3 = 8(k^2+k^4),\quad a_4 = 32(k^2+k^6)+68k^4,\ a_5 = 128(k^2+k^8)+ + 480(k^4+k^6),\quad a_6 = 512(k^2+k^{10})+3008(k^4+k^8)+5400k^6,\ \ldots]$

$$B = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$[b_0 = 1,\ b_1 = 1+k^2,\ b_2 = 1+k^4+4k^2,\ b_3 = 1+k^6+9(k^2+k^4),$
$b_4 = 1+k^8+16(k^2+k^6)-6k^4,\quad b_5 = 1+k^{10}+25(k^2+k^8)-494(k^4+k^6),$
$b_6 = 1+k^{12}+36(k^2+k^{10})-5781(k^4+k^8)-12184k^6,\ \ldots]$.

$$C = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n\frac{u^{2n}}{(2n)!}$$

$[c_0 = 1,\quad c_1 = 1,\quad c_2 = 1+2k^2,\quad c_3 = 1+6k^2+8k^4,\quad c_4 = 1+12k^2+60k^4+32k^6,$
$c_5 = 1+20k^2+348k^4+448k^6+128k^8,$
$c_6 = 1+30k^2+2372k^4+4600k^6+2880k^8+512k^{10},\ \ldots]$.

$$D=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n d_n \frac{u^{2n}}{(2n)!}$$

$[d_0=1,\ d_1=k^2,\ d_2=2k^2+k^4,\ d_3=8k^2+6k^4+k^6,\ d_4=32k^2+60k^4+12k^6+k^8,$
$d_5=128k^2+448k^4+348k^6+20k^8+k^{10},$
$d_6=512k^2+2880k^4+4600k^6+2372k^8+30k^{10}+k^{12},\ \ldots].$

Ж 82 — 83 (105, 106, 107)

8.15 Свойства эллиптических функций Якоби и функциональные соотношения между ними

8.151 Периоды, нули, полюсы и вычеты эллиптических функций Якоби.

1.

	Периоды	Нули	Полюсы	Вычеты
$\operatorname{sn} u$	$4mK+2nK'i$	$2mK+2nK'i$	$2mK+(2n+1)K'i$	$(-1)^m\frac{1}{k}$
$\operatorname{cn} u$	$4mK+2n(K+K'i)$	$(2m+1)K+2nK'i$	$2mK+(2n+1)K'i$	$(-1)^{m-1}\frac{i}{k}$
$\operatorname{dn} u$	$2mK+4nK'i$	$(2m+1)K+(2n+1)K'i$	$2mK+(2n+1)K'i$	$(-1)^{n-1}i$

См III 630, Ж 69 — 72

2.

$u^*=u+K$	$u+iK'$	$u+K+iK'$	$u+2K$	$u+2iK'$	$u+2K+2iK'$
$\operatorname{sn} u^*=\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$	$\frac{1}{k\operatorname{sn} u}$	$\frac{1}{k}\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}$	$-\operatorname{sn} u$	$\operatorname{sn} u$	$-\operatorname{sn} u$
$\operatorname{cn} u^*=-k'\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$	$-\frac{i}{k}\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}$	$-\frac{ik'}{k\operatorname{cn} u}$	$-\operatorname{cn} u$	$-\operatorname{cn} u$	$\operatorname{cn} u$
$\operatorname{dn} u^*=k'\frac{1}{\operatorname{dn} u}$	$-i\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$	$ik'\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$	$\operatorname{dn} u$	$-\operatorname{dn} u$	$-\operatorname{dn} u$

См III 630

3.

$u^*=0$	$-u$	$\frac{1}{2}K$	$\frac{1}{2}(K+iK')$	$\frac{1}{2}iK'$	$u+2mK+2nK'i$
$\operatorname{sn} u^*=0$	$-\operatorname{sn} u$	$\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$	$\frac{\sqrt{1+k}+i\sqrt{1-k}}{\sqrt{2k}}$	$\frac{i}{\sqrt{k}}$	$(-1)^m\operatorname{sn} u$
$\operatorname{cn} u^*=1$	$\operatorname{cn} u$	$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$	$\frac{(1-i)\sqrt{k'}}{\sqrt{2k}}$	$\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$	$(-1)^{m+n}\operatorname{cn} u$
$\operatorname{dn} u^*=1$	$\operatorname{dn} u$	$\sqrt{k'}$	$\frac{\sqrt{k'}(\sqrt{1+k'}-i\sqrt{1-k'})}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{1+k}$	$(-1)^n\operatorname{dn} u$

Си 19, Си 18 (13), УВ II 344, УВ II 352, УВ II 352, УВ II 348

8.152 Формулы преобразования.

u_1	k_1	$\mathrm{sn}(u_1, k_1)$	$\mathrm{cn}(u_1, k_1)$	$\mathrm{dn}(u_1, k_1)$
ku	$\frac{1}{k}$	$k\,\mathrm{sn}(u, k)$	$\mathrm{dn}(u, k)$	$\mathrm{cn}(u, k)$
iu	k'	$i\frac{\mathrm{sn}(u, k)}{\mathrm{cn}(u, k)}$	$\frac{1}{\mathrm{cn}(u, k)}$	$\frac{\mathrm{dn}(u, k)}{\mathrm{cn}(u, k)}$
$k'u$	$i\frac{k}{k'}$	$k'\frac{\mathrm{sn}(u, k)}{\mathrm{dn}(u, k)}$	$\frac{\mathrm{cn}(u, k)}{\mathrm{dn}(u, k)}$	$\frac{1}{\mathrm{dn}(u, k)}$
iku	$i\frac{k'}{k}$	$ik\frac{\mathrm{sn}(u, k)}{\mathrm{dn}(u, k)}$	$\frac{1}{\mathrm{dn}(u, k)}$	$\frac{\mathrm{cn}(u, k)}{\mathrm{dn}(u, k)}$
$ik'u$	$\frac{1}{k'}$	$ik'\frac{\mathrm{sn}(u, k)}{\mathrm{cn}(u, k)}$	$\frac{\mathrm{dn}(u, k)}{\mathrm{cn}(u, k)}$	$\frac{1}{\mathrm{cn}(u, k)}$
$(1+k)u$	$\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$	$\frac{(1+k)\,\mathrm{sn}(u, k)}{1+k\,\mathrm{sn}^2(u, k)}$	$\frac{\mathrm{cn}(u, k)\,\mathrm{dn}(u, k)}{1+k\,\mathrm{sn}^2(u, k)}$	$\frac{1-k\,\mathrm{sn}^2(u, k)}{1+k\,\mathrm{sn}^2(u, k)}$
$(1+k')u$	$\frac{1-k'}{1+k'}$	$(1+k')\frac{\mathrm{sn}(u, k)\,\mathrm{cn}(u, k)}{\mathrm{dn}(u, k)}$	$\frac{1-(1+k')\,\mathrm{sn}^2(u, k)}{\mathrm{dn}(u, k)}$	$\frac{1-(1-k')\,\mathrm{sn}^2(u, k)}{\mathrm{dn}(u, k)}$
$\frac{(1+\sqrt{k'})^2}{2}u$	$\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2$	$\frac{k^2\,\mathrm{sn}(u, k)\,\mathrm{cn}(u, k)}{\sqrt{k_1}\,[1+\mathrm{dn}(u, k)]\,[k'+\mathrm{dn}(u, k)]}$	$\frac{\mathrm{dn}(u, k)-\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\times \sqrt{\frac{2(1+k')}{[1+\mathrm{dn}(u, k)]\,[k'+\mathrm{dn}(u, k)]}}$	$\frac{\sqrt{1+k_1}\,(\mathrm{dn}(u, k)+\sqrt{k'})}{\sqrt{[1+\mathrm{dn}(u, k)]\,[k'+\mathrm{dn}(u, k)]}}$

8.153

1. $\operatorname{sn}(iu,\ k)=i\,\dfrac{\operatorname{sn}(u,k')}{\operatorname{cn}(u,k')}$. Си 50 (64)

2. $\operatorname{cn}(iu,\ k)=\dfrac{1}{\operatorname{cn}(u,k')}$. Си 50 (65)

3. $\operatorname{dn}(iu,\ k)=\dfrac{\operatorname{dn}(u,k')}{\operatorname{cn}(u,k')}$. Си 50 (65)

4. $\operatorname{sn}(u,\ k)=k^{-1}\operatorname{sn}(ku,\ k^{-1})$.

5. $\operatorname{cn}(u,\ k)=\operatorname{dn}(ku,\ k^{-1})$.

6. $\operatorname{dn}(u,\ k)=\operatorname{cn}(ku,\ k^{-1})$.

7. $\operatorname{sn}(u,\ ik)=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\,\dfrac{\operatorname{sn}\left(u\sqrt{1+k^2},\ k(1+k^2)^{-\frac{1}{2}}\right)}{\operatorname{dn}\left(u\sqrt{1+k^2},\ k(1+k^2)^{-1/2}\right)}$.

8. $\operatorname{cn}(u,\ ik)=\dfrac{\operatorname{cn}\left(u(1+k^2)^{\frac{1}{2}},\ k(1+k^2)^{-\frac{1}{2}}\right)}{\operatorname{dn}\left(u(1+k^2)^{1/2},\ k(1+k^2)^{-1/2}\right)}$.

9. $\operatorname{dn}(u,\ ik)=\dfrac{1}{\operatorname{dn}\left(u(1+k^2)^{1/2},\ k(1+k^2)^{-1/2}\right)}$.

Функциональные соотношения

8.154

1. $\operatorname{sn}^2 u=\dfrac{1-\operatorname{cn}2u}{1+\operatorname{dn}2u}$. Мо 146

2. $\operatorname{cn}^2 u=\dfrac{\operatorname{cn}2u+\operatorname{dn}2u}{1+\operatorname{dn}2u}$. Мо 146

3. $\operatorname{dn}^2 u=\dfrac{\operatorname{dn}2u+k^2\operatorname{cn}2u+k'^2}{1+\operatorname{dn}2u}$. Мо 146

4. $\operatorname{sn}^2 u+\operatorname{cn}^2 u=1$. Си 16 (9)

5. $\operatorname{dn}^2 u+k^2\operatorname{sn}^2 u=1$. Си 16 (9)

8.155

1. $\dfrac{1-\operatorname{dn}2u}{1+\operatorname{dn}2u}=k^2\,\dfrac{\operatorname{sn}^2 u\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}$. Мо 146

2. $\dfrac{1-\operatorname{cn}2u}{1+\operatorname{cn}2u}=\dfrac{\operatorname{sn}^2 u\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u}$. Мо 146

8.156

1. $\operatorname{sn}(u\pm v)=\dfrac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v\pm\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v}$. Си 46 (56)

2. $\operatorname{cn}(u\pm v)=\dfrac{\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v\mp\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{dn}u\operatorname{dn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v}$. Си 46 (57)

3. $\operatorname{dn}(u\pm v)=\dfrac{\operatorname{dn}u\operatorname{dn}v\mp k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v}$. Си 46 (58)

8.157

1. $\operatorname{sn}\frac{u}{2}=\pm\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{cn}u}}=\pm\sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{dn}u}}$. Си 47 (61), Си 67 (15)

2. $\operatorname{cn}\frac{u}{2}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{cn}u+\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{dn}u}}=\pm\frac{k'}{k}\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}u}{\operatorname{dn}u-\operatorname{cn}u}}$. Си 48 (62), Си 67 (16)

3. $\operatorname{dn}\frac{u}{2}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{cn}u+\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{cn}u}}=\pm k'\sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u-\operatorname{cn}u}}$. Си 48 (63), Си 67 (17)

8.158

1. $\frac{d}{du}\operatorname{sn}u=\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u$.
2. $\frac{d}{du}\operatorname{cn}u=-\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u$
3. $\frac{d}{du}\operatorname{dn}u=-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u$.

Си 21 (21)

8.159 Эллиптические функции Якоби являются решениями следующих дифференциальных уравнений:

1. $\frac{d}{du}\operatorname{sn}u=\sqrt{(1-\operatorname{sn}^2u)(1-k^2\operatorname{sn}^2u)}$.
2. $\frac{d}{du}\operatorname{cn}u=-\sqrt{(1-\operatorname{cn}^2u)(k'^2+k^2\operatorname{cn}^2u)}$.
3. $\frac{d}{du}\operatorname{dn}u=-\sqrt{(1-\operatorname{dn}^2u)(\operatorname{dn}^2u-k'^2)}$.

Си 21 (22)

Интегралы (неопределенные) от эллиптических функций Якоби см. 5.13.

8.16 Функция Вейерштрасса $\wp(u)$.

8.160 *Эллиптическая функция Вейерштрасса* $\wp(u)$ определяется равенством:

1. $\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_{m,n}{}'\left\{\frac{1}{(u-2m\omega_1-2n\omega_2)^2}-\frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2}\right\}$, Си 307 (6)

где знак $\sum'$ указывает на то, что суммирование распространяется на все комбинации целых значений m и n, за исключением комбинации $m=n=0$, а $2\omega_1$ и $2\omega_2$ суть периоды функции $\wp(u)$. Очевидно,

2. $\wp(u+2m\omega_1+2n\omega_2)=\wp(u)$ и $\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\neq 0$,

3. $\frac{d}{du}\wp(u)=-2\sum_{m,n}\frac{1}{(u-2m\omega_1-2n\omega_2)^3}$,

где суммирование распространяется на все целые значения m и n.

Ряды 8.160 1. и 8.160 3. сходятся повсюду, за исключением полюсов, т. е. точек $2m\omega_1+2n\omega_2$ (m и n — целые числа).

4. Функция $\wp(u)$ является **периодической функцией** 2-го порядка, имеющей в параллелограмме периодов один полюс второй кратности Си 306

8.161 Функция $\wp(u)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

1. $$\left[\frac{d}{du}\wp(u)\right]^2 = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3,$$ Си 142, Си 310, УВ II 267

где

2. $$g_2 = 60 \sum_{m\ n}{}' (m\omega_1 + n\omega_2)^{-4}; \quad g_3 = 140 \sum_{m,n}{}' (m\omega_1 + n\omega_2)^{-6}$$ УВ II 268, Си 310

Числа g_2 и g_3 называются *инвариантами* функции $\wp(u)$.

8.162 $$u = \int\limits_{\wp(u)}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}} = \int\limits_{\wp(u)}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}},$$

где e_1, e_2, e_3 суть корни уравнения $4z^3 - g_2z - g_3 = 0$, т е.

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{g_2}{4}, \quad e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}$$ Си 142, Си 143, Си 144

8.163 $\wp(\omega_1) = e_1$, $\wp(\omega_1 + \omega_2) = e_2$, $\wp(\omega_2) = e_3$, при этом предполагается, что если точки e_1, e_2, e_3 лежат в комплексной плоскости на одной прямой, то e_2 лежит между e_1 и e_3

8.164 Число $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ называется *дискриминантом функции* $\wp(u)$. Если $\Delta > 0$, то все корни e_1, e_2, e_3 уравнения $4z^3 - g_2z - g_3 = 0$ (g_2 и g_3 — действительные числа) **действительны** В этом случае нумерацию чисел e_1, e_2, e_3 производят так, чтобы $e_1 > e_2 > e_3$

1 Если $\Delta > 0$, то

$$\omega_1 = \int\limits_{e_1}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}, \qquad \omega_2 = i\int\limits_{-\infty}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{g_3 + g_2z - 4z^3}},$$

где ω_1 — действительное, а ω_2 — чисто мнимое число; при этом значения корня под знаком интеграла выбираются так, чтобы ω_1 и $\frac{\omega_2}{i}$ были положительны Си 150 (15), Си 150 (16), УВ II 276 *и*

2. Если $\Delta < 0$, то корень e_2 уравнения $4z^3 - g_2z - g_3 = 0$ **действителен**, а остальные два (e_1 и e_3) **комплексные сопряженные** Пусть $e_1 = \alpha + i\beta$, $e_3 = \alpha - i\beta$. В таком случае в качестве основных полупериодов удобно выбрать

$$\omega' = \int\limits_{e_1}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}} \quad \text{и} \quad \omega'' = \int\limits_{e_3}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}.$$

Интегрирование в первом интеграле производится по пути, целиком лежащему в верхней полуплоскости, а во втором — по пути, целиком лежащему в нижней полуплоскости. Си 154 (22), Си 151 (21)

8.165 Представление в виде ряда:

1. $$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2u^2}{4\ 5} + \frac{g_3u^4}{4\ 7} + \frac{g_2^2u^6}{2^4\ 3\ 5^2} + \frac{3g_2g_3u^8}{2^4\ 5\ 7\ 11} + \ldots$$ УВ II 268

8.166 Функциональные соотношения:

1. $\wp(u)=\wp(-u), \quad \wp'(u)=-\wp'(-u)$.

2. $\wp(u+v)=-\wp(u)-\wp(v)+\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right]^2$. Си 163 (32)

8.167 $\wp(u;\ g_2,\ g_3)=\mu^2\wp\left(\mu u;\ \frac{g_2}{\mu^4},\ \frac{g_3}{\mu^6}\right)$ (формула однородности). Си 149 (13)

Частный случай: $\mu=i$.

1. $\wp(u;\ g_2,\ g_3)=-\wp(iu;\ g_2,\ -g_3)$.

8.168 Любая эллиптическая функция может быть выражена через эллиптическую функцию $\wp(u)$, имеющую те же периоды, что и данная функция, и ее производную $\wp'(u)$; выражение это рационально относительно $\wp(u)$ и линейно относительно $\wp'(u)$.

8.169 Связь с эллиптическими функциями Якоби. При $\Delta>0$ (см. 8.164 1.)

1. $$\wp\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)=e_1+(e_1-e_3)\frac{\mathrm{cn}^2(u;k)}{\mathrm{sn}^2(u;k)};$$
$$=e_2+(e_1-e_3)\frac{\mathrm{dn}^2(u;k)}{\mathrm{sn}^2(u,k)};$$
$$=e_3+(e_1-e_3)\frac{1}{\mathrm{sn}^2(u,k)};$$
Си 145 (5), Ж 120 (197 — 199) и

2. $\omega_1=\frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}}, \quad \omega_2=\frac{iK'}{\sqrt{e_1-e_3}}$, Си 154 (29)

где

3. $k=\sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}, \quad k'=\sqrt{\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}}$. Си 145 (7)

При $\Delta<0$ (см. 8.164 2.)

4. $\wp\left(\frac{u}{\sqrt[4]{9\alpha^2+\beta^2}}\right)=e_2+\sqrt{9\alpha^2+\beta^2}\,\frac{1+\mathrm{cn}(2u,k)}{1-\mathrm{cn}(2u;k)}$; Си 147 (42)

5. $\omega'=\frac{K-iK'}{2\sqrt{9\alpha^2+\beta^2}}, \quad \omega''=\frac{K+iK'}{\sqrt[4]{9\alpha^2+\beta^2}}$, Си 153 (28)

где

6. $k=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3e_2}{\sqrt{9\alpha^2+\beta^2}}}; \quad k'=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3e_2}{\sqrt{9\alpha^2+\beta^2}}}$. Си 147

При $\Delta=0$ все корни e_1, e_2, e_3 действительны и два из них (если $g_2g_3\neq 0$) равны между собой.

Если $e_1=e_2\neq e_3$, то

7. $\wp(u)=\frac{3g_3}{g_2}-\frac{9g_3}{2g_2}\,\mathrm{cth}^2\left(u\sqrt{-\frac{9g_3}{2g_2}}\right)$. Си 148

Если $e_1\neq e_2=e_3$, то

8. $\wp(u)=-\frac{3g_3}{2g_2}+\frac{9g_3}{2g_2}\,\frac{1}{\sin^2\left(u\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}}\right)}$. Си 149

Если $g_2=g_3=0$, то $e_1=e_2=e_3=0$ и

9. $\wp(u)=\frac{1}{u^2}$. Си 149

8.17 Функции $\zeta(u)$ и $\sigma(u)$

8.171 Определения:

1. $\zeta(u)=\frac{1}{u}-\int\limits_0^u\left(\wp(z)-\frac{1}{z^2}\right)dz.$ Си 181 (45)

2. $\sigma(u)=u\exp\left\{\int\limits_0^u\left(\zeta(z)-\frac{1}{z}\right)dz\right\}.$ Си 181 (46)

8.172 Представление в виде рядов и бесконечных произведений:

1. $\zeta(u)=\frac{1}{u}+\sum{}'\left(\frac{1}{u-2m\omega_1-2n\omega_2}+\frac{1}{2m\omega_1+2n\omega_2}+\frac{u}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2}\right).$ Си 307 (8)

2. $\sigma(u)=u\prod{}'\left(1-\frac{u}{2m\omega_1+2n\omega_2}\right)\exp\left\{\frac{u}{2m\omega_1+2n\omega_2}+\frac{u^2}{2(2m\omega_1+2n\omega_2)^2}\right\}.$ Си 308 (9)

8.173

1. $\zeta(u)=u-\frac{g_2u^3}{2^2\cdot3\cdot5}-\frac{g_3u^5}{2^2\cdot5\cdot7}-\frac{g_2^2u}{2^4\cdot3\cdot5^2\cdot7}-\frac{3g_2g_3u^9}{2^4\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}-\ldots$ Си 181 (49)

2. $\sigma(u)=u-\frac{g_2u^5}{2^4\cdot3\cdot5}-\frac{g_3u^7}{2^3\cdot3\cdot5\cdot7}-\frac{g_2^2u^9}{2^9\cdot3^2\cdot5\cdot7}-\frac{g_2g_3u^{11}}{2^7\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\cdot11}-\ldots$ Си 181 (50)

8.174 $\zeta(u)=\frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1}u+\frac{\pi}{2\omega_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2\omega_1}+\frac{\pi}{2\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi u}{2\omega_1}+m\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)+\right.$

$\left.+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi u}{2\omega_1}-m\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right\};$ МО 154

$=\frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1}u+\frac{\pi}{2\omega_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2\omega_1}+\frac{2\pi}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin\frac{\pi nu}{\omega_1}.$ МО 155

Функциональные соотношения и свойства

8.175 $\zeta(u)=-\zeta(-u),\quad \sigma(u)=-\sigma(-u).$ Си 181

8.176

1. $\zeta(u+2\omega_1)=\zeta(u)+2\zeta(\omega_1).$ Си 184 (57)
2. $\zeta(u+2\omega_2)=\zeta(u)+2\zeta(\omega_2).$ Си 184 (57)
3. $\sigma(u+2\omega_1)=-\sigma(u)\exp\{2(u+\omega_1)\zeta(\omega_1)\}.$ Си 185 (60)
4. $\sigma(u+2\omega_2)=-\sigma(u)\exp\{2(u+\omega_2)\zeta(\omega_2)\}.$ Си 185 (60)
5. $\omega_2\zeta(\omega_1)-\omega_1\zeta(\omega_2)=\frac{\pi}{2}i.$ Си 186 (62)

8.177

1. $\zeta(u+v)-\zeta(u)-\zeta(v)=\frac{1}{2}\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}.$ Си 182 (53)

2. $\wp(u)-\wp(v)=-\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}.$ Си 183 (54)

3. $\zeta(u-v)+\zeta(u+v)-2\zeta(u)=\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)}.$ Си 182 (51)

8.178

1. $\zeta(u;\ \omega_1,\ \omega_2) = t\zeta(tu;\ t\omega_1,\ t\omega_2)$. МО 154

2. $\sigma(u;\ \omega_1,\ \omega_2) = t^{-1}\sigma(tu;\ t\omega_1,\ t\omega_2)$. МО 156

Интегралы (неопределенные) от эллиптических функций Вейерштрасса см. 5.14.

8.18—8.19 Тэта-функции

8.180 *Тэта-функции* определяются как суммы (при $|q| < 1$) следующих рядов:

1. $\vartheta_4(u) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nui} = 1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nu.$ УВ II 300

2. $\vartheta_1(u) = \frac{1}{i} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)ui} =$

$= 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n-1)u.$ УВ II 300

3. $\vartheta_2(u) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)ui} = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2n-1)u.$ УВ II 300

4. $\vartheta_3(u) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2nui} = 1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nu.$ УВ II 300

Употребительны также обозначения $\vartheta(u,\ q)$, $\vartheta(u\,|\,\tau)$, где τ связано с q соотношением $q = e^{i\pi\tau}$.

8.181 Бесконечные произведения для тэта-функций:

1. $\vartheta_4(u) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1}\cos 2u + q^{2(2n-1)})(1 - q^{2n}).$ Си 200 (9), Ж 90 (9)

2. $\vartheta_3(u) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1}\cos 2u + q^{2(2n-1)})(1 - q^{2n}).$ Си 200 (9), Ж 90(9)

3. $\vartheta_1(u) = 2\sqrt[4]{q}\sin u \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n}\cos 2u + q^{4n})(1 - q^{2n}).$

Си 200 (9), Ж 90 (9)

4. $\vartheta_2(u) = 2\sqrt[4]{q}\cos u \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n}\cos 2u + q^{4n})(1 - q^{2n}).$

Си 200 (9), Ж 90 (9)

Функциональные соотношения и свойства

8.182 Квазипериодичность. Пусть $q = e^{\pi\tau i}$ $(\operatorname{Im}\tau > 0)$; тогда тэта-функции, являющиеся периодическими функциями от u, оказываются *квазипериодическими функциями* τ и u. Это их свойство вытекает из следующих равенств.

1. $\vartheta_4(u + \pi) = \vartheta_4(u).$ Си 200 (10)

2. $\vartheta_4(u + \tau\pi) = -\frac{1}{q} e^{-2iu}\vartheta_4(4).$ Си 200 (10)

3. $\vartheta_1(u+\pi) = -\vartheta_1(u)$. Си 200 (10)

4. $\vartheta_1(u+\tau\pi) = -\frac{1}{q}e^{-2iu}\vartheta_1(u)$. Си 200 (10)

5. $\vartheta_2(u+\pi) = -\vartheta_2(u)$. Си 200 (10)

6. $\vartheta_2(u+\tau\pi) = \frac{1}{q}e^{-2iu}\vartheta_2(u)$. Си 200 (10)

7. $\vartheta_3(u+\pi) = \vartheta_3(u)$. Си 200 (10)

8. $\vartheta_3(u+\tau\pi) = \frac{1}{q}e^{-2iu}\vartheta_3(u)$. Си 200 (10)

8.183

1. $\vartheta_4\left(u+\frac{1}{2}\pi\right) = \vartheta_3(u)$. УВ II 301

2. $\vartheta_1\left(u+\frac{1}{2}\pi\right) = \vartheta_2(u)$. УВ II 301

3. $\vartheta_2\left(u+\frac{1}{2}\pi\right) = -\vartheta_1(u)$. УВ II 301

4. $\vartheta_3\left(u+\frac{1}{2}\pi\right) = \vartheta_4(u)$. УВ II 301

5. $\vartheta_4\left(u+\frac{1}{2}\pi\tau\right) = iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iu}\vartheta_1(u)$. УВ II 301

6. $\vartheta_1\left(u+\frac{1}{2}\pi\tau\right) = iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iu}\vartheta_4(u)$. УВ II 301

7. $\vartheta_2\left(u+\frac{1}{2}\pi\tau\right) = q^{-\frac{1}{4}}e^{-iu}\vartheta_3(u)$. УВ II 301

8. $\vartheta_3\left(u+\frac{1}{2}\pi\tau\right) = q^{-\frac{1}{4}}e^{-iu}\vartheta_2(u)$. УВ II 301

8.184 Четность и нечетность:

1. $\vartheta_1(-u) = -\vartheta_1(u)$ УВ II 301

2. $\vartheta_2(-u) = \vartheta_2(u)$ УВ II 301

3. $\vartheta_3(-u) = \vartheta_3(u)$ УВ II 301

4. $\vartheta_4(-u) = \vartheta_4(u)$. УВ II 301

8.185 $\vartheta_4^4(u) + \vartheta_2^4(u) = \vartheta_1^4(u) + \vartheta_3^4(u)$. УВ II 306

8.186 Рассматривая тэта-функции как функции двух независимых переменных u и τ, будем иметь:

$$\pi i \frac{\partial^2\vartheta_k(u \mid \tau)}{\partial u^2} + 4\frac{\partial\vartheta_k(u \mid \tau)}{\partial\tau} = 0 \qquad [k = 1, 2, 3, 4].$$ УВ II 308

8.187 Частные производные от тэта-функций по u будем отмечать штрихом и будем рассматривать их как функции одного только аргумента u; тогда

1. $\vartheta_1'(0) = \vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)$. УВ II 308

2 $\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} = \frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)} + \frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)} + \frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)}$. УВ II 332

8.188 $\vartheta_1(u)\vartheta_2(u)\vartheta_3(u)\vartheta_4(u) = \frac{1}{2}\vartheta_1(2u)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)$. УВ II 332

8.189 Нули тэта-функций:

1. $\vartheta_4(u)=0$ при $u=2m\frac{\pi}{2}+(2n-1)\frac{\pi\tau}{2}$. Си 201

2. $\vartheta_1(u)=0$ при $u=2m\frac{\pi}{2}+2n\frac{\pi\tau}{2}$. Си 201

3. $\vartheta_2(u)=0$ при $u=(2m-1)\frac{\pi}{2}+2n\frac{\pi\tau}{2}$. Си 201

4. $\vartheta_3(u)=0$ при $u=(2m-1)\frac{\pi}{2}+(2n-1)\frac{\pi\tau}{2}$ Си 201

[m и n — целые числа].

Интегралы от тэта-функций см. 6.16.

8.191 Связь с эллиптическими функциями Якоби:

При $\tau=i\frac{K'}{K}$, т. е. при $q=\exp\left(-\pi\frac{K'}{K}\right)$,

1. $\operatorname{sn} u=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(u)}{\Theta(u)}$. Си 206 (22). Си 209 (35)

2. $\operatorname{cn} u=\sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{H_1(u)}{\Theta(u)}$. Си 207 (23), Си 209 (35)

3. $\operatorname{dn} u=\sqrt{k'}\frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}=\sqrt{k'}\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}$. Си 207 (24), Си 209 (35)

8.192 Представление функций H, H_1, Θ, Θ_1 в виде рядов:

1. $\Theta(u)=\vartheta_4\left(\frac{\pi u}{2K}\right)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos\frac{n\pi u}{K}$. Си 207 (25), Си 212 (42)

2. $H(u)=\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2K}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt[4]{q^{(2n+1)^2}}\sin(2n-1)\frac{\pi u}{2K}$.

Си 207 (25), Си 212 (43)

3. $\Theta_1(u)=\vartheta_3\left(\frac{\pi u}{2K}\right)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos\frac{n\pi u}{K}$. Си 207 (25), Си 212 (45)

4. $H_1(u)=\vartheta_2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{q^{(2n-1)^2}}\cos(2n-1)\frac{\pi u}{2K}$.

Си 207 (25), Си 212 (44)

В формулах 8.192 $q=\exp\left(-\pi\frac{K'}{K}\right)$.

8.193 Связь с эллиптическими функциями Вейерштрасса:

1. $\wp(u)=e_1+\left[\frac{H_1(u\sqrt{\lambda})H'(0)}{H_1(0)H(u\sqrt{\lambda})}\right]^2\lambda=e_2+\left[\frac{\Theta_1(u\sqrt{\lambda})H'(0)}{\Theta_1(0)H(u\sqrt{\lambda})}\right]^2\lambda=$

$=e_3+\left[\frac{\Theta(u\sqrt{\lambda})H'(0)}{\Theta(0)H(u\sqrt{\lambda})}\right]^2\lambda$. Си 235 (77), Си 235 (78)

2. $\zeta(u) = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \sqrt{\lambda}\,\frac{H'(u\sqrt{\lambda})}{H(u\sqrt{\lambda})}$. Си 234 (73)

3. $\sigma(u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \exp\left(\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right) \frac{H(u\sqrt{\lambda})}{H'(0)}$, Си 234 (72)

где

$$\lambda = e_1 - e_3;\quad \eta_1 = \zeta(\omega_1) = -\frac{\omega_1\lambda}{3}\frac{H'''(0)}{H'(0)}.$$ Си 236

8.194 Связь с эллиптическими интегралами:

1. $E(u, k) = u - u\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$. Си 228 (65)

2. $\Pi(u, -k^2\sin^2 a, k) = \int\limits_0^u \frac{d\varphi}{1 - k^2\sin^2 a\,\mathrm{sn}^2\varphi} =$

$$= u + \frac{\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{cn}\, a\,\mathrm{dn}\, a}\left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}u + \frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}\right].$$ Си 232 (69)

q-ряды и произведения $\left[q = \exp\left(-\pi\frac{K'}{K}\right)\right]$

8.195 $\frac{\pi}{2}\left[1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\right]^2 = K = \frac{\pi}{2}\Theta^2(K)$ (сравни 8.197 1.). Си 219

8.196 $E = K - K\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} = K - \frac{2\pi^2}{K}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2q^{n^2}}{1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}}$. Си 230 (67)

8.197

1. $1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n^2} = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \vartheta_3(0)$ (сравни 8.195). УВ II 319

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{kK}{2\pi}} = \frac{1}{2}\vartheta_2(0)$. УВ II 319

3. $4\sqrt{q}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^4 = k$. Си 206 (17), Си 206 (18)

4. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right)^4 = k'$ Си 206 (19), Си 206 (20)

5. $2\sqrt[4]{q}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right)^2 = 2\sqrt{k}\,\frac{K}{\pi}$. УВ II 330

6. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n}}{1+q^{2n}}\right)^2 = 2\sqrt{k'}\,\frac{K}{\pi}$. УВ II 330 и

8.198

1. $$\lambda = \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2}}{1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{4n^2}} \quad \left[\text{при } 0 < k < 1 \text{ имеем } 0 < \lambda < \frac{1}{2}\right].$$ УВ II 327

Для определения q по данному модулю k служит ряд

2. $q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + 1707\lambda^{17} + \ldots$ УВ II 327

8.2 ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ЕЙ ФУНКЦИИ

8.21 Интегральная показательная функция Ei (x)

8.211

1. $$\mathrm{Ei}(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{t}}{t}\,dt = \mathrm{li}(e^x) \qquad [x < 0].$$

2. $$\mathrm{Ei}(x) = -\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{-x}^{-\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right] \qquad [x > 0].$$

8.212

1. $$\mathrm{Ei}(-x) = C + \ln x + \int_0^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt \qquad [x > 0];$$ НИ 11 (1)

$$= C + e^{-x}\ln x + \int_0^x e^{-t}\ln t\,dt \qquad [x > 0].$$ НИ 11 (10)

2. $$\mathrm{Ei}(x) = e^x\left[\frac{1}{x} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}\,dt}{(x-t)^2}\right] \qquad [x > 0]$$ (сравни 8.211 1.).

3. $$\mathrm{Ei}(-x) = e^{-x}\left[-\frac{1}{x} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}\,dt}{(x+t)^2}\right] \qquad [x > 0]$$ (сравни 8.211 1.).

Ла 281 (28)

4. $$\mathrm{Ei}(\pm x) = \pm e^{\pm x}\int_0^1 \frac{dt}{x \pm \ln t} \qquad [x > 0]$$ (сравни 8.211 1.).

5. $$\mathrm{Ei}(\pm xy) = \pm e^{\pm xy}\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{y \mp t}\,dt \qquad [\mathrm{Re}\, y > 0,\ x > 0].$$ НИ 19 (11)

6. $$\mathrm{Ei}(\pm x) = -e^{\pm x}\int_0^{\infty} \frac{e^{-it}}{t \pm ix}\,dt \qquad [x > 0].$$ НИ 23 (2), НИ 23 (3)

7. $\mathrm{Ei}(xy) = e^{xy} \int_0^1 \frac{t^{y-1}}{x+\ln t}\, dt;$ Ла 282 (44) и

$= x^{-1} e^{xy} \left[\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{(y+\ln t)^2}\, dt + y^{-1} \right]$ $[x > 0,\ y > 0]$. Ла 283 (46) и

8. $\mathrm{Ei}(-xy) = -e^{-xy} \int_0^1 \frac{t^{y-1}}{x-\ln t}\, dt;$ Ла 282 (45) и

$= x^{-1} e^{-xy} \left[\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{(y-\ln t)^2}\, dt - y^{-1} \right]$ $[x > 0,\ y > 0]$. Ла 283 (47) и

9. $\mathrm{Ei}(x) = e^{x} \int_1^\infty \frac{1}{x-\ln t} \frac{dt}{t^2}$ $[x > 0]$. Ла 283 (48)

10. $\mathrm{Ei}(-x) = -e^{-x} \int_1^\infty \frac{1}{x+\ln t} \frac{dt}{t^2}$ $[x > 0]$. Ла 283 (48)

11. $\mathrm{Ei}(-x) = -e^{-x} \int_0^\infty \frac{t\cos t + x\sin t}{t^2+x^2}\, dt$ $[x > 0]$. НИ 23 (6)

12. $\mathrm{Ei}(-x) = -e^{-x} \int_0^\infty \frac{t\cos t - x\sin t}{t^2+x^2}\, dt$ $[x < 0]$. НИ 23 (6)

13. $\mathrm{Ei}(-x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos t}{t} \operatorname{arctg} \frac{t}{x}\, dt$ $[\mathrm{Re}\, x > 0]$. НИ 25 (13)

14. $\mathrm{Ei}(-x) = \frac{2e^{-x}}{\pi} \int_0^\infty \frac{x\cos t - t\sin t}{t^2+x^2} \ln t\, dt$ $[x > 0]$. НИ 26 (7)

15. $\mathrm{Ei}(x) = 2\ln x - \frac{2e^{x}}{\pi} \int_0^\infty \frac{x\cos t + t\sin t}{t^2+x^2} \ln t\, dt$ $[x > 0]$. НИ 27 (8)

16. $\mathrm{Ei}(-x) = -x \int_1^\infty e^{-tx} \ln t\, dt$ $[x > 0]$. НИ 32 (12)

См. также **3.327**, **3.881** 8., **3.916** 2. и 3., **4.326** 1., **4.326** 2., **4.331** 2., **4.351** 3., **4.425** 3., **4.581**.

Интегралы от интегральной показательной функции см. **6.22**—**6.23**, **6.78**.

Ряды и асимптотическое представление

8.213

1. $\mathrm{li}(x) = C + \ln(-\ln x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^k}{k \cdot k!}$ $[0 < x < 1]$. НИ 3 (9)

2. $\mathrm{li}(x) = C + \ln\ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^k}{k \cdot k!}$ $[x > 1]$. НИ 3 (10)

8.214

1. $$\mathrm{Ei}(x) = C + \ln(-x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!} \qquad [x < 0].$$

2. $$\mathrm{Ei}(x) = C + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!} \qquad [x > 0].$$

3. $$\mathrm{Ei}(x) - \mathrm{Ei}(-x) = 2x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)(2k+1)!} \qquad [x > 0].$$ НИ 39 (13)

8.215 $$\mathrm{Ei}(-x) = e^{-x} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(k-1)!}{x^k} + R_n,$$

где

$$|R_n| < \frac{n!}{|x|^{n+1} \cos\frac{\varphi}{2}}, \qquad x = |x| e^{i\varphi}, \quad \varphi^2 < \pi^2.$$ НИ 37 (9)

8.216 $$\mathrm{Ei}(nx) - \mathrm{Ei}(-nx) = e^{nx'} \left(\frac{1}{nx} + \frac{1}{n^2x^2} + \frac{k_n}{n^3x^3} \right),$$

где

$x' = x \operatorname{sign} \mathrm{Re}(x)$, $k_n = O(n^0)$, а n велико. НИ 39 (15)

8.217 Функциональные соотношения:

1. $$e^{x'} \mathrm{Ei}(-x') - e^{-x'} \mathrm{Ei}(x') = -2 \int_0^{\infty} \frac{x' \sin t}{t^2 + x^2} dt =$$
$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x' \cos t}{t^2 + x^2} \ln t \, dt - 2e^{-x'} \ln x' \qquad [x' = x \operatorname{sign} \mathrm{Re}\, x].$$ НИ 24 (11), НИ 27 (9)

2. $$e^{x'} \mathrm{Ei}(-x') + e^{-x'} \mathrm{Ei}(x') = -2 \int_0^{\infty} \frac{t \cos t}{t^2 + x^2} dt =$$
$$= 2e^{-x'} \ln x' - \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t \sin t}{t^2 + x^2} \ln t \, dt \qquad [x' = x \operatorname{sign} \mathrm{Re}\, x].$$

НИ 24 (10), НИ 27 (10)

3. $$\mathrm{Ei}(-x) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t} \operatorname{arctg} \frac{t\left(x - \frac{1}{x}\right)}{1 + t^2} dt$$

$[\mathrm{Re}\, x > 0]$. НИ 25 (14)

4. $\mathrm{Ei}(-\alpha x)\,\mathrm{Ei}(-\beta x)-\ln(\alpha\beta)\,\mathrm{Ei}[-(\alpha+\beta)x]=$

$$=e^{-(\alpha+\beta)x}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-tx}\ln[(\alpha+t)(\beta+t)]}{t+\alpha+\beta}\,dt.$$ НИ 32(9)

См. также 3.723 1. и 5., 3.742 2. и 4., 3.824 4., 4.573 2..
Связь с вырожденной гипергеометрической функцией см. 9.237.
Интегралы от интегральной показательной функции см. 5.21, 5.22, 5.23, 6.22, 6.23.

8.218 Некоторые числовые значения:

1. $\mathrm{Ei}(-1)=-0{,}219\ 383\ 934\ 395\ 520\ 273\ 665\ \ldots$ НИ 89

2. $\mathrm{Ei}(1)=1{,}895\ 117\ 816\ 355\ 936\ 755\ 478\ \ldots$ НИ 89

8.22 Интегральный гиперболический синус $\mathrm{shi}\,x$ и интегральный гиперболический косинус $\mathrm{chi}\,x$

8.221

1. $\mathrm{shi}\,x=\int\limits_0^x \frac{\mathrm{sh}\,t}{t}\,dt=-i\left[\frac{\pi}{2}+\mathrm{si}(ix)\right]$ (см. 8.230 1.).

ВТФ II 146(17)

2. $\mathrm{chi}\,x=C+\ln x+\int\limits_0^x \frac{\mathrm{ch}\,t-1}{t}\,dt.$ ВТФ II 146(18)

8.23 Интегральный синус и интегральный косинус: $\mathrm{si}(x)$ и $\mathrm{ci}(x)$

8.230

1. $\mathrm{si}(x)=-\int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt=-\frac{\pi}{2}+\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$ НИ 11(3)

2 $\mathrm{ci}(x)=-\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt=C+\ln x+\int\limits_0^x \frac{\cos t-1}{t}\,dt.$ НИ 11(2)

8.231

1. $\mathrm{si}(xy)=-\int\limits_x^\infty \frac{\sin ty}{t}\,dt.$ НИ 18(7)

2. $\mathrm{ci}(xy)=-\int\limits_x^\infty \frac{\cos ty}{t}\,dt.$ НИ 18(6)

3. $\mathrm{si}(x)=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\cos t}\cos(x\sin t)\,dt.$ НИ 13(26)

8.232

1. $\mathrm{si}(x)=-\frac{\pi}{2}+\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}x^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)!}\,.$ НИ 7(4)

2. $\operatorname{ci}(x) = C - \ln(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k(2k)!}$. НИ 7 (3)

8.233

1. $\operatorname{ci}(x) \pm i \operatorname{si}(x) = \operatorname{Ei}(\pm ix)$. НИ 6 и
2. $\operatorname{ci}(x) - \operatorname{ci}(xe^{\pm \pi i}) = \mp \pi i$. НИ 7 (5)
3. $\operatorname{si}(x) + \operatorname{si}(-x) = -\pi$. НИ 7 (7)

8.234

1. $\operatorname{Ei}(-x) - \operatorname{ci}(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\cos\varphi} \sin(x \sin\varphi)\, d\varphi$. НИ 13 (27)

2. $[\operatorname{ci}(x)]^2 + [\operatorname{si}(x)]^2 = -2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-x \operatorname{tg}\varphi) \ln\cos\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}\, d\varphi$

$[\operatorname{Re} x > 0]$ (см. также 4.366). НИ 32 (11)

См. также **3.341**, **3.351** 1. и 2., **3.354** 1 и 2., **3.721** 2. и 3., **3.722** 1., 3., 5. и 7., **3.723** 8. и 11., **4.338** 1., **4.366** 1..

8.235

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^\varrho \operatorname{si}(x)) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} (x^\varrho \operatorname{ci}(x)) = 0 \quad [\varrho < 1]$. НИ 38 (5)
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{si}(x) = -\pi, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{ci}(x) = \pm \pi i$. НИ 38 (6)

Интегралы от интегрального синуса и интегрального косинуса см. **6.24**—**6.26**, **6.781**, **6.782**, **6.783**

Неопределенные интегралы от интегрального синуса и интегрального косинуса см. 5.3.

8.24 Интегральный логарифм $\operatorname{li}(x)$

8.240

1. $\operatorname{li}(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t} = \operatorname{Ei}(\ln x) \quad [x < 1]$. ЯЭ 97

2. $\operatorname{li}(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \left[\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int\limits_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\ln t} \right] = \operatorname{Ei}(\ln x) \quad [x > 1]$. ЯЭ 97

3. $\operatorname{li}\{\exp(-xe^{\pm \pi i})\} = \operatorname{Ei}(-xe^{\pm i\pi}) = \operatorname{Ei}(x \mp i0) = \operatorname{Ei}(x) \pm i\pi =$
$= \operatorname{li}(e^x) \pm i\pi \quad [x > 0]$. ЯЭ 97, НИ 2 (6)

Интегральные представления

8.241

1. $\operatorname{li}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\ln x} \frac{e^t}{t}\, dt = x \ln\ln\frac{1}{x} - \int\limits_{-\ln x}^{\infty} e^{-t} \ln t\, dt \quad [x > 1]$. Ла 281 (33)

2. $\mathrm{li}(x) = x \int\limits_0^1 \frac{dt}{\ln x + \ln t}$; Ла 280 (22)

$= \frac{x}{\ln x} + x \int\limits_0^1 \frac{dt}{(\ln x + \ln t)^2}$; Ла 280 (29)

$= x \int\limits_1^\infty \frac{1}{\ln x - \ln t} \frac{dt}{t^2}$ $[x < 1]$. Ла 280 (30)

3. $\mathrm{li}(a^x) = \frac{1}{\ln a} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{a^t}{t} dt$ $[x > 0]$.

Интегралы от интегрального логарифма см. 6.21

8.25 Интеграл вероятности и интегралы Френеля: $\Phi(x)$, $S(x)$ и $C(x)$

8.250 Определения:

1. $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$.

2. $S(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \sin t^2 \, dt$.

3. $C(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \cos t^2 \, dt$.

Интегральные представления

8.251

1. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x^2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ (см. также 3.361 1.).

2. $S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$.

3. $C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{x^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$.

8.252

1. $\Phi(xy) = \frac{2y}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2 y^2} dt$.

2. $S(xy) = \frac{2y}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \sin(t^2 y^2) \, dt$.

3. $C(xy) = \frac{2y}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \cos(t^2 y^2) \, dt$.

4. $$\left.\begin{aligned}\Phi(xy) &= 1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2y^2}\int_0^\infty \frac{e^{-t^2y^2}ty\,dt}{\sqrt{t^2+x^2}}, \\ &= 1-\frac{2x}{\pi}e^{-x^2y^2}\int_0^\infty \frac{e^{-t^2y^2}\,dt}{t^2+x^2}\end{aligned}\right\}[\operatorname{Re} y^2>0].$$ НИ 19 (11) и, НИ 19 (13) и

5. $$\Phi\left(\frac{-y}{2xi}\right)-\Phi\left(\frac{y}{2xi}\right)=\frac{4xie^{\frac{y^2}{4x^2}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2x^2}\sin(ty)\,dt \qquad [\operatorname{Re} x^2>0].$$ НИ 28 (3) и

6. $$\Phi\left(\frac{y}{2x}\right)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}xe^{-\frac{y^2}{4x^2}}\int_0^\infty e^{-t^2x^2-ty}\,dt \qquad [\operatorname{Re} x^2>0].$$ НИ 27 (1) и

См. также 3.322, 3.362 2., 3.363, 3.468, 3.897, 6.511 4. и 5.

8.253 Представление в виде ряда:

1. $$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)(k-1)!};$$ НИ 7 (9) и

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^kx^{2k+1}}{(2k+1)!!}.$$ НИ 10 (11) и

2. $$S(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{4k+3}}{(2k+1)!\,(4k+3)};$$ НИ 8 (14) и

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\sin x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^{2k}x^{4k+1}}{(4k+1)!!}-\cos x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^{2k+1}x^{4k+3}}{(4k+3)!!}\right\}.$$ НИ 10 (13) и

3. $$C(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{4k+1}}{(2k)!\,(4k+1)};$$ НИ 8 (13) и

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\sin x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^{2k+1}x^{4k+3}}{(4k+3)!!}+\cos x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^{2k}x^{4k+1}}{(4k+1)!!}\right\}.$$ НИ 10 (12) и

Разложение по функциям Бесселя см. 8.515 2., 8.515 3.

Асимптотические представления

8.254 $$\Phi(\sqrt{x})=1-\frac{1}{\pi}e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{x^{k+\frac{1}{2}}}+\frac{e^{-x}}{\pi}R_n,$$

где $$|R_n|<\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{|x|^{n+\frac{1}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}}, \quad x=|x|e^{i\varphi} \quad \text{и} \quad \varphi^2<\pi^2.$$ НИ 37 (10) и

8.255

1. $S(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\cos x^2+O\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad [x\to\infty].$ МО 127 и

2. $C(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\sin x^2+O\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad [x\to\infty].$ МО 127 и

8.256 **Функциональные соотношения:**

1. $C(z)+iS(z)=\sqrt{\frac{i}{2}}\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{it^2}dt.$

2. $C(z)-iS(z)=\frac{1}{\sqrt{2i}}\Phi(z\sqrt{i})=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-it^2}dt.$

3. $[\cos u^2C(u)+\sin u^2S(u)]=$

$$=\frac{1}{2}[\cos u^2+\sin u^2]-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-2ut}\sin t^2\,dt \qquad [\operatorname{Re} u\geqslant 0].$$

НИ 28 (6) и

4. $[\cos u^2S(u)-\sin u^2C(u)]=$

$$=\frac{1}{2}[\cos u^2-\sin u^2]-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-2ut}\cos t^2\,dt \qquad [\operatorname{Re} u\geqslant 0].$$

НИ 28 (5) и

5. $\left[C(x)-\frac{1}{2}\right]^2+\left[S(x)-\frac{1}{2}\right]^2=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\exp(-x^2\operatorname{tg}\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\cos\varphi}}{\sin 2\varphi}\,d\varphi.$

См. также **6.322**. НИ 33 (18) и

Связь с вырожденной гипергеометрической функцией см. **9.236**.

Связь с функцией параболического цилиндра см. **9.254**.

8.257

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^\varrho\left[S(x)-\frac{1}{2}\right]\right)=0 \qquad [\varrho<1].$ НИ 38 (11)

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^\varrho\left[C(x)-\frac{1}{2}\right]\right)=0 \qquad [\varrho<1].$ НИ 38 (11)

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}S(x)=\frac{1}{2}.$ НИ 38 (12) и

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}C(x)=\frac{1}{2}.$ НИ 38 (12) и

Интегралы от интеграла вероятностей см **6.28**—**6.31**.

Интегралы от синус-интеграла и косинус-интеграла Френеля см. **6.32**.

8.26 Функция Лобачевского $L(x)$

8.260 Определение:

$$L(x) = -\int_0^x \ln\cos t\, dt. \qquad \text{Ло III 184 (10)}$$

Интегральное представление функции $L(x)$ см. также 3.531 8., 3.532 2., 3.533, 4.224

8.261 Представление в виде ряда:

$$L(x) = x\ln 2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{\sin 2kx}{k^2}. \qquad \text{Ло III 185 (11)}$$

8.262 Функциональные соотношения:

1. $L(-x) = -L(x) \quad \left[-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right].$ Ло III 185 (13)
2. $L(\pi - x) = \pi\ln 2 - L(x).$ Ло III 286
3. $L(\pi + x) = \pi\ln 2 + L(x).$ Ло III 286
4. $L(x) - L\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\ln 2 - \frac{1}{2}L\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$
$\left[0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}\right].$ Ло III 186 (14)

8.3 ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ 1-го И 2-го РОДА И РОДСТВЕННЫЕ ИМ ФУНКЦИИ

8.31 Гамма-функция (эйлеров интеграл 2-го рода): $\Gamma(z)$

8.310 Определение:

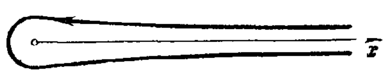
1. $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\, dt \quad [\operatorname{Re} z > 0].$ (Эйлер). Ф II 777 (6)

Обобщение:

2. $\Gamma(z) = -\frac{1}{2i\sin\pi z}\int_C (-t)^{z-1}e^{-t}\, dt$

при z, не равном целому числу.

Контур C указан на чертеже. УВ II 18



$\Gamma(z)$ является дробной аналитической функцией z с простыми полюсами в точках $z = -l$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$, которым соответствуют вычеты $\frac{(-1)^l}{l!}$; $\Gamma(z)$ удовлетворяет соотношению $\Gamma(1) = 1$. УВ II 18, МО 1

Интегральные представления

8.311 $\Gamma(z)=\dfrac{1}{e^{2\pi iz}-1}\int\limits_{\infty}^{(0+)} e^{-t}t^{z-1}\,dt.$ МО 2

8.312

1. $\Gamma(z)=\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{z-1} dt \quad [\operatorname{Re} z>0].$ Ф II 778

2. $\Gamma(z)=x^z\int\limits_0^\infty e^{-xt}t^{z-1}\,dt \quad [\operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Re} x>0].$ Ф II 779 (8)

3. $\Gamma(z)=\dfrac{2a^ze^a}{\sin\pi z}\int\limits_0^\infty e^{-at^2}(1+t^2)^{z-\frac{1}{2}}\cos[2at+(2z-1)\operatorname{arctg} t]\,dt$

$[a>0].$ УВ II 19

4. $\Gamma(z)=\dfrac{1}{2\sin\pi z}\int\limits_0^\infty e^{-t^2}t^{z-1}(1+t^2)^{\frac{z}{2}}\{3\sin[t+z\operatorname{arcctg}(-t)]+$

$+\sin[t+(z-2)\operatorname{arcctg}(-t)]\}\,dt$

[arcctg означает тупой угол]. УВ II 37

5. $\Gamma(y)=x^ye^{-i\beta y}\int\limits_0^\infty t^{y-1}\exp(-xte^{-i\beta})\,dt$

$\left[x,\ y,\ \beta\right.$ действительны, $\left.x>0,\ y>0,\ |\beta|<\frac{\pi}{2}\right].$ МО 8

6. $\Gamma(z)=\dfrac{b^z}{2\sin\pi z}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{bti}(it)^{z-1}\,dt \quad [b>0,\ 0<\operatorname{Re} z<1].$ НГ 154 (3)

7. $\Gamma(z)=\dfrac{(\sqrt{a^2+b^2})^z}{\cos\left(z\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)}\int\limits_0^\infty e^{-at}\cos(bt)\,t^{z-1}\,dt;$ НГ 152 (1) и

$=\dfrac{(\sqrt{a^2+b^2})^z}{\sin\left(z\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)}\int\limits_0^\infty e^{-at}\sin(bt)\,t^{z-1}\,dt$ НГ 152 (2)

$[a>0,\ b\geqslant 0,\ \operatorname{Re} z>0].$

8. $\Gamma(z)=\dfrac{b^z}{\cos\frac{\pi z}{2}}\int\limits_0^\infty \cos(bt)\,t^{z-1}\,dt;$ НГ 152 (4)

$=\dfrac{b^z}{\sin\frac{\pi z}{2}}\int\limits_0^\infty \sin(bt)\,t^{z-1}\,dt$ НГ 152 (5)

$[b>0,\ 0<\operatorname{Re} z<1].$

9. $\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty e^{-t}(t-z)\,t^{z-1}\ln t\,dt;$ НГ 173 (7)

10. $\Gamma(z)=\int\limits_{-\infty}^\infty \exp(zt-e^t)\,dt$ НГ 145 (14)

$[\operatorname{Re} z>0].$

11. $\Gamma(x)\cos\alpha x = \lambda^x \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-\lambda t\cos\alpha} \cos(\lambda t \sin\alpha)\,dt;$

12. $\Gamma(x)\sin\alpha x = \lambda^x \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-\lambda t\cos\alpha} \sin(\lambda t \sin\alpha)\,dt$

$$\left[\lambda > 0,\ x > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right].$$ УВ II 36

13 $\Gamma(-z) = \int\limits_0^\infty \left[\frac{e^{-t} - \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^k}{k!}}{t^{z+1}}\right] dt \quad [n = E(\operatorname{Re} z)].$ МО 2

8.313 $\Gamma\left(\frac{z+1}{v}\right) = vu^{\frac{z+1}{v}} \int\limits_0^\infty \exp(-ut^v)\, t^z\, dt$

$[\operatorname{Re} u > 0,\ \operatorname{Re} v > 0,\ \operatorname{Re} z > -1].$ ЯЭ 110 u, МО 7 u

8.314 $\Gamma(z) = \int\limits_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt + \sum\limits_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\,(z+k)}.$ МО 2

8.315

1. $\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{i}{2\pi} \int\limits_C (-t)^{-z} e^{-t}\, dt$

при z, не равном целому числу.
Контур указан на чертеже к формуле 8.310 2.

УВ II 18

2. $\frac{e^{ab} b^{1-z}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{bti}}{(a+it)^z}\, dt = \frac{1}{\Gamma(z)}$ при $b > 0;$

$= 0$ при $b < 0$

$$\left[a > 0,\ \operatorname{Re} z > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \arg(a+it) < \frac{\pi}{2}\right].$$ НГ 155 (8) МО 7

3 $\frac{1}{\Gamma(z)} = a^{1-z} \frac{e^a}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a \operatorname{tg}\theta - z\theta) \cos^{z-2}\theta\, d\theta \quad [\operatorname{Re} z > 1].$ НГ 157 (14)

См. также 3.324 2., 3.326, 3.328, 3.381 4., 3.382 2., 3.389 2., 3.433, 3.434, 3.478 1., 3.551 1., 2., 3.827 1., 4.267 7., 4.272, 4.353 1., 4.369 1., 6.214, 6.223, 6.246, 6.281.

8.32 Представление гамма-функций в виде рядов и произведений

8.321 Представление в виде ряда.

1. $\Gamma(z+1) = \sum\limits_{k=0}^\infty c_k z^k$

$$\left[c_0 = 1,\ c_{n+1} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} s_{k+1} c_{n-k}}{n+1};\ s_1 = C,\ s_n = \zeta(n) \text{ при } n \geqslant 2,\ \operatorname{Re} z > 0\right].$$

НГ 40 (1), НГ 40 (3)

2. $$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$$

$$\left[d_0 = 1,\ d_{n+1} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k s_{k+1} d_{n-k}}{n+1};\ s_1 = C,\ s_n = \zeta(n) \text{ при } n \geqslant 2 \right].$$

НГ 41 (4), НГ 41 (6)

Представление в виде бесконечного произведения

8.322 $$\Gamma(z) = e^{-Cz} \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{z}{k}}}{1+\frac{z}{k}} \quad [\operatorname{Re} z > 0];$$ См III 269

$$= \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^z}{1+\frac{z}{k}} \quad [\operatorname{Re} z > 0];$$ УВ II 8

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^z}{z} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{z+k} \quad [\operatorname{Re} z > 0].$$ См III 267 (130)

8.323 $$\Gamma(z) = 2z^z e^{-z} \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt[2^k]{\mathrm{B}\left(2^{k-1}z, \frac{1}{2}\right)}.$$ НГ 98 (12)

8.324 $$\Gamma(1+z) = 4^z \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2^k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$ МО 3

8.325

1. $$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta-\gamma)} = \prod_{k=0}^{\infty} \left[\left(1+\frac{\gamma}{\alpha+k}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\beta+k}\right)\right].$$ НГ 62 (2)

2. $$\frac{e^{Cx}\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-x+1)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1-\frac{x}{z+k}\right) e^{\frac{x}{k}}\right] \quad [\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re}(z-x) > 0].$$

3. $$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{2}\right)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{2k-1}\right)\left(1+\frac{z}{2k}\right).$$ МО 2

8.326

1. $$\frac{\Gamma(x)}{\mathrm{B}(x+iy,\ x-iy)} = \left|\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+iy)}\right|^2 = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1+\frac{y^2}{(x+k)^2}\right)$$

[x, y действительны, $x > 0$]. Ло V, НГ 63 (4)

2. $$\frac{\Gamma(x+iy)}{\Gamma(y)} = \frac{xe^{-iCy}}{x+iy} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{iy}{n}\right)}{1+\frac{iy}{x+n}} \quad [x,\ y \text{ действительны},\ x > 0].$$ МО 2

8.327 Асимптотическое представление для больших значений $|z|$:

$$\Gamma(z) = z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \sqrt{2\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + O(z^{-5}) \right\}$$

$[|\arg z| < \pi]$. УВ II 28

Для z действительных и положительных остаток ряда меньше последнего удержанного слагаемого.

8.328

1. $\lim\limits_{|y|\to\infty} |\Gamma(x+iy)| \, e^{\frac{\pi}{2}|y|} \, |y|^{\frac{1}{2}-x} = \sqrt{2\pi}$ [x и y действительны]. МО 6

2. $\lim\limits_{|z|\to\infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)} e^{-a \ln z} = 1.$ МО 6

8.33 Функциональные соотношения для гамма-функций

8.331 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

8.332

1. $|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \operatorname{sh} \pi y}$ [y действителен]. МО 3

2. $\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi y}$ [y действителен]. МО 3

3. $\Gamma(1+ix)\Gamma(1-ix) = \frac{\pi x}{\operatorname{sh} x\pi}$ [x действителен]. Ло V

4. $\Gamma(1+x+iy)\Gamma(1-x+iy)\Gamma(1+x-iy)\Gamma(1-x-iy) = \frac{2\pi^2(x^2+y^2)}{\operatorname{sh} 2y\pi - \cos 2x\pi}$ [x и y действительны]. Ло V

8.333 $[\Gamma(n+1)]^n = G(n+1) \prod\limits_{k=1}^{n} k^k,$

где n — натуральное число и

$$G(z+1) = (2\pi)^{\frac{z}{2}} \exp\left[-\frac{z(z+1)}{2} - \frac{C}{2} z^2 \right] \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \exp\left(-z + \frac{z^2}{2n} \right) \right\}.$$

УВ II 43

8.334

1. $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\Gamma\left(-z \exp \frac{2\pi k i}{n}\right)} = -z^n \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{z}{k}\right)^n\right]$ $[n = 2, 3, \ldots]$. МО 2

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x}.$

3. $\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$ Ф II 430

8.335 $\Gamma(nx) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{nx-\frac{1}{2}} \prod\limits_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(x + \frac{k}{n}\right)$ [теорема умножения].

Ф II 782 u, УВ II 12

Частные случаи

1. $\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$ [формула удвоения].

2. $\Gamma(3x) = \frac{3^{3x-\frac{1}{2}}}{2\pi} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(x + \frac{2}{3}\right)$.

3. $\prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{k}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}$. УВ II 12

8.336 $\Gamma\left(-\frac{yz + xi}{2y}\right) \Gamma(1+z) = (2i)^{z+1} y \Gamma\left(1 + \frac{yz - xi}{2y}\right) \int_0^\infty e^{-tx} \sin^z(ty)\, dt$

$[\mathrm{Re}(yi) > 0,\ \mathrm{Re}(x - yzi) > 0]$. НГ 133 (10)

Связь с пси-функцией см. 8.361 1.
Связь с бэта-функцией см 8.384 1.
Интегралы от гамма-функции см. 8.412 4., 8.414, 9.223, 9.242 3., 9.242 4

8.337

1. $[\Gamma'(x)]^2 < \Gamma(x) \Gamma''(x)$ $[x > 0]$. МО 1

2. При $x > 0$ $\min \Gamma(1+x) = 0{,}88560\ \ldots$ достигается, когда $x = 0{,}46163\ \ldots$ ЯЭ 107

Частные значения

8.338

1. $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

3. $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$.

4. $\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^4 = 16\pi^2 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(4k-1)^2 [(4k+1)^2 - 1]}{[(4k-1)^2 - 1](4k+1)^2}$. МО 1 и

5. $\prod_{k=1}^{\infty} \Gamma\left(\frac{k}{3}\right) = \frac{640}{3^6} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^3$. УВ II 36

8.339 При n натуральном

1. $\Gamma(n) = (n-1)!$

2. $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n-1)!!$

3. $\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = (-1)^n \frac{2^n \sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}$.

4. $\frac{\Gamma\left(p + n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(p - n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{(4p^2 - 1^2)(4p^2 - 3^2) \ldots [4p^2 - (2n-1)^2]}{2^{2n}}$. В 221

8.34 Логарифм гамма-функции

8.341 Интегральное представление:

1. $$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{e^{-tz}}{t}\,dt$$
$[\operatorname{Re} z>0]$. УВ II 23

2. $$\ln\Gamma(z)=z\ln z-z-\frac{1}{2}\ln z+\ln\sqrt{2\pi}+2\int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}\frac{t}{z}}{e^{2\pi t}-1}\,dt$$
$\left[\operatorname{Re} z>0 \text{ и } \operatorname{arctg} w=\int_0^w\frac{du}{1+u^2}\right.$ взят по прямолинейному пути в плоскости $\left.w\right]$. УВ II 25

3. $$\ln\Gamma(z)=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-zt}-e^{-t}}{1-e^{-t}}+(z-1)e^{-t}\right\}\frac{dt}{t}\qquad[\operatorname{Re} z>0].$$ УВ II 24

4. $$\ln\Gamma(z)=\int_0^\infty\left\{(z-1)e^{-t}+\frac{(1+t)^{-z}-(1+t)^{-1}}{\ln(1+t)}\right\}\frac{dt}{t}\qquad[\operatorname{Re} z>0].$$ УВ II 24

5. $$\ln\Gamma(x)=\frac{\ln\pi-\ln\sin\pi x}{2}+\frac{1}{2}\int_0^\infty\left\{\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}-x\right)t}{\operatorname{sh}\frac{t}{2}}-(1-2x)e^{-t}\right\}\frac{dt}{t}$$
$[0<x<1]$. УВ II 24

6. $$\ln\Gamma(z)=\int_0^1\left\{\frac{t^z-t}{t-1}-t(z-1)\right\}\frac{dt}{t\ln t}\qquad[\operatorname{Re} z>0].$$ УВ II 38

7. $$\ln\Gamma(z)=\int_0^\infty\left[(z-1)e^{-t}+\frac{e^{-tz}-e^{-t}}{1-e^{-t}}\right]\frac{dt}{t}\qquad[\operatorname{Re} z>0].$$ НГ 187 (7)

См. также **3.427** 9., **3.554** 5.

8.342 Представление в виде ряда:

1. $$\ln\Gamma(z+1)=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\pi z}{\sin\pi z}\right)-\ln\frac{1+z}{1-z}\right]+(1-C)z+$$
$$+\sum_{k=1}^\infty\frac{1-\zeta(2k+1)}{2k+1}z^{2k+1}=-Cz+\sum_{k=2}^\infty(-1)^k\frac{z^k}{k}\zeta(k)\qquad[|z|<1].$$
НГ 38 (16), НГ 38 (12)

2. $$\ln\Gamma(1+x)=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi x}{\sin\pi x}-Cx-\sum_{n=1}^\infty\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\{1-\zeta(2n+1)\}\qquad[|x|<1].$$
НГ 38 (14)

8.343

1. $$\ln\Gamma(x)=\ln\sqrt{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2n}\cos 2n\pi x+\frac{1}{n\pi}(C+\ln 2n\pi)\sin 2n\pi x\right\}$$

$[0<x<1]$. Ф III 558

2. $$\ln\Gamma(z)=z\ln z-z-\frac{1}{2}\ln z+\ln\sqrt{2\pi}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{(m+1)(m+2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^{m+1}}$$
$[|\arg z|<\pi]$. МО 9

8.344 Асимптотическое разложение для больших значений $|z|$:

$$\ln\Gamma(z)=z\ln z-z-\frac{1}{2}\ln z+\ln\sqrt{2\pi}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}}+R_n(z),$$

где

$$|R_n(z)|<\frac{|B_{2n}|}{2n(2n-1)|z|^{2n-1}\cos^{2n-1}\left(\frac{1}{2}\arg z\right)}.$$ МО 5

Интегралы от $\ln\Gamma(x)$ см. 6.44.

8.35 Неполная гамма-функция

8.350 Определение:

1. $$\gamma(\alpha, x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,dt \quad [\operatorname{Re}\alpha>0].$$ ВТФ II 133 (1), НИ 1 (1)

2. $$\Gamma(\alpha, x)=\int_x^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}\,dt.$$ ВТФ II 133 (2), НИ 2 (2), Ле 339

8.351

1. $\gamma^*(\alpha, x)=\dfrac{x^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\gamma(\alpha, x)$ — аналитическая функция по α и по x.

ВТФ II 133 (5)

2. Другое определение $\gamma(\alpha, x)$, пригодное и для случая $\operatorname{Re}\alpha\leqslant 0$:

$$\gamma(\alpha, x)=\frac{x^{\alpha}}{\alpha}e^{-x}\Phi(1, 1+\alpha; x)=\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\Phi(\alpha, 1+\alpha; -x).$$ ВТФ II 133 (3)

3. $\Gamma(\alpha, x)$ — целая функция от α. При нецелом α $\Gamma(\alpha, x)$ является многозначной функцией от x с точкой ветвления при $x=0$.
4. Другое определение $\Gamma(\alpha, x)$:

$$\Gamma(\alpha, x)=x^{\alpha}e^{-x}\Psi(1, 1+\alpha; x)=e^{-x}\Psi(1-\alpha, 1-\alpha; x).$$ ВТФ II 133 (4)

8.352 Частные случаи:

1. $$\gamma(1+n, x)=n!\left[1-e^{-x}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{x^m}{m!}\right)\right]$$

$[n=0, 1, \ldots]$. ВТФ II 136 (17), (16), НИ 6 (11)

2. $\Gamma(1+n, x) = n!\, e^{-x} \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!}$ $\quad [n = 0, 1, \ldots]$. ВТФ II 136 (18), (16)

3. $\Gamma(-n, x) = \frac{(-1)^n}{n!}\left[\Gamma(0, x) - e^{-x} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{m!}{x^{m+1}}\right]$

$[n = 1, 2, \ldots]$. ВТФ II 137 (20), НИ 4 (4)

8.353 Интегральные представления:

1. $\gamma(\alpha, x) = x^\alpha \operatorname{cosec} \pi\alpha \int_0^\pi e^{x\cos\theta} \cos(\alpha\theta + x\sin\theta)\, d\theta$

$[x \neq 0, \operatorname{Re}\alpha > 0, \alpha \neq 1, 2, \ldots]$. ВТФ II 137 (2)

2. $\gamma(\alpha, x) = x^{\frac{1}{2}\alpha} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{2}\alpha - 1} J_\alpha\left(2\sqrt{xt}\right) dt$ $\quad [\operatorname{Re}\alpha > 0]$. ВТФ II 138 (4)

3. $\Gamma(\alpha, x) = \frac{e^{-x} x^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-t}\, t^{-\alpha}}{x+t}\, dt$

$[\operatorname{Re}\alpha < 1, x > 0]$. ВТФ II 137 (3), НИ 19 (12)

4. $\Gamma(\alpha, x) = \frac{2x^{\frac{1}{2}\alpha} e^{-x}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}\alpha} K_\alpha\left[2\sqrt{xt}\right] dt$

$[\operatorname{Re}\alpha < 1]$. ВТФ II 138 (5)

5. $\Gamma(\alpha, xy) = y^\alpha e^{-xy} \int_0^\infty e^{-ty} (t+x)^{\alpha-1}\, dt$

$[\operatorname{Re} y > 0, \quad x > 0, \quad \operatorname{Re}\alpha > 1]$. (См. также 3.936 5., 3.944 1.—4.)
НИ 19 (10)

Интегралы от неполной гамма-функции см. 6.45.

8.354 Представления с помощью рядов.

1. $\gamma(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{\alpha+n}}{n!\,(\alpha+n)}$. ВТФ II 135 (4)

2. $\Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{\alpha+n}}{n!\,(\alpha+n)}$

$[\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots]$. ВТФ II 135 (5), Ле 340 (2)

3. $\Gamma(\alpha, x) - \Gamma(\alpha, x+y) = \gamma(\alpha, x+y) - \gamma(\alpha, x) =$

$= e^{-x} x^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\left[1 - e^{-y} e_k(y)\right]\Gamma(1-\alpha+k)}{x^k\, \Gamma(1-\alpha)}, \quad e_k(x) = \sum_{m=0}^{k} \frac{x^m}{m!}$

$[|y| < |x|]$. ВТФ II 139 (2)

4. $\gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha)\, e^{-x} x^{\frac{1}{2}\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} x^{\frac{1}{2}n} I_{n+\alpha}\left(2\sqrt{x}\right) \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}$

$[x \neq 0, \alpha \neq 0, -1, -2, \ldots]$. ВТФ II 139 (3)

5. $\Gamma(\alpha, x) = e^{-x} x^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{\alpha}(x)}{n+1} \quad [x > 0].$ ВТФ II 140 (5)

8.355 $\Gamma(\alpha, x)\gamma(\alpha, y) = e^{-x-y}(xy)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,\Gamma(\alpha)}{(n+1)\Gamma(\alpha+n+1)} L_n^{\alpha}(x) L_n^{\alpha}(y)$

$[y > 0,\ x \geqslant y,\ \alpha \neq 0,\ -1, \ldots].$ ВТФ II 139 (4)

8.356 Функциональные соотношения:

1. $\gamma(\alpha+1, x) = \alpha\gamma(\alpha, x) - x^{\alpha} e^{-x}.$ ВТФ II 134 (2)
2. $\Gamma(\alpha+1, x) = \alpha\Gamma(\alpha, x) + x^{\alpha} e^{-x}.$ ВТФ II 134 (3)
3. $\Gamma(\alpha, x) + \gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha).$ ВТФ II 134 (1)
4. $\frac{d\gamma(\alpha, x)}{dx} = -\frac{d\Gamma(\alpha, x)}{dx} = x^{\alpha-1} e^{-x}.$ ВТФ II 135 (8)
5. $\frac{\Gamma(\alpha+n, x)}{\Gamma(\alpha+n)} = \frac{\Gamma(\alpha, x)}{\Gamma(\alpha)} + e^{-x} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^{\alpha+s}}{\Gamma(\alpha+s+1)}.$ НИ 4 (3)
6. $\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+n, x) - \Gamma(\alpha+n)\Gamma(\alpha, x) =$

$= \Gamma(\alpha+n)\gamma(\alpha, x) - \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+n, x).$ НИ 5

8.357 Асимптотическое представление при больших значениях $|x|$:

$$\Gamma(\alpha, x) = x^{\alpha-1} e^{-x} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m \Gamma(1-\alpha+m)}{x^m \Gamma(1-\alpha)} + O(|x|^{-M}) \right]$$

$$\left[|x| \to \infty,\ -\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2},\ M = 1, 2, \ldots \right].$$

ВТФ II 135 (6), НИ 37 (7), Ле 340 (3).

8.358 Представление в виде непрерывной дроби:

$$\Gamma(\alpha, x) = \cfrac{e^{-x} x^{\alpha}}{x + \cfrac{1-\alpha}{1 + \cfrac{1}{x + \cfrac{2-\alpha}{1 + \cfrac{2}{x + \cfrac{3-\alpha}{1 + \ldots}}}}}}$$

ВТФ II 136 (13), НИ 42 (9)

8.359 Связь с другими функциями:

1. $\Gamma(0, x) = -\mathrm{Ei}(-x).$ ВТФ II 143 (1)
2. $\Gamma\left(0, \ln\frac{1}{x}\right) = -\mathrm{li}(x).$ ВТФ II 143 (2)
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right) = \sqrt{\pi} - \sqrt{\pi}\,\Phi(x).$ ВТФ II 147 (2)
4. $\gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right) = \sqrt{\pi}\,\Phi(x).$ ВТФ II 147 (1)

8.36 Пси-функция: $\psi(x)$

8.360 Определение:

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x).$$

8.361 Интегральные представления:

1. $$\psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right) dt$$

$[\operatorname{Re} z > 0]$. НГ 183 (1), УВ II 20

2. $$\psi(z) = \int_0^\infty \left\{ e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^z} \right\} \frac{dt}{t} \quad [\operatorname{Re} z > 0].$$ НГ 184 (7), УВ II 21

3. $$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - 2 \int_0^\infty \frac{t\,dt}{(t^2+z^2)(e^{2\pi t}-1)} \quad [\operatorname{Re} z > 0].$$ УВ II 26

4. $$\psi(z) = \int_0^1 \left(\frac{1}{-\ln t} - \frac{t^{z-1}}{1-t} \right) dt \quad [\operatorname{Re} z > 0].$$ УВ II 21

5. $$\psi(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{1-e^{-t}}\, dt - C,$$ УВ II 37

6. $$\psi(z) = \int_0^\infty \{(1+t)^{-1} - (1+t)^{-z}\} \frac{dt}{t} - C,$$ $[\operatorname{Re} z > 0]$. УВ II 37

7. $$\psi(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}-1}{t-1}\, dt - C$$ Ф II 796, УВ II 37

8. $$\psi(z) = \ln z + \int_0^\infty e^{-tz} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}} \right] dt \quad \left[|\arg z| < \frac{\pi}{2} \right].$$ МО 4

См также **3.244** 3., **3.311** 6., **3.317** 1., **3.457**, **3.458** 2., **3.471** 14., **4.253** 1. и 6., **4.275** 2., **4.281** 4., **4.482** 5.
Интегралы от пси-функции см. **6.46**, **6.47**.

Представление в виде ряда

8.362

1. $$\psi(x) = -C - \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{k+1} \right);$$ Ф II 799 (26), Ку 26 (1)

$$= -C - \frac{1}{x} + x \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(x+k)}.$$ Ф II 495

2. $$\psi(x) = \ln x - \sum_{k=0}^\infty \left[\frac{1}{x+k} - \ln\left(1 + \frac{1}{x+k}\right) \right].$$ МО 4

3. $\psi(x) = -C + \frac{\pi^2}{6}(x-1) - (x-1)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{x+k}\right)\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{x+n}$. НГ 54 (12)

8.363

1. $\psi(x+1) = -C + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\zeta(k)\,x^{k-1}$. НГ 37 (5)

2. $\psi(x+1) = \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi x - \frac{x^2}{1-x^2} - C + \sum_{k=1}^{\infty}[1-\zeta(2k+1)]\,x^{2k}$. НГ 38 (10)

3. $\psi(x) - \psi(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{y+k} - \frac{1}{x+k}\right)$ (см. также **3.219**, **3.231** 5., **3.311** 7., **3.688** 20., **4.253** 1., **4.295** 37.). НГ 99 (3)

4. $\psi(x+iy) - \psi(x-iy) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2yi}{y^2+(x+k)^2}$.

5. $\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -C + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{q}{p+kq}\right)$ (см. также 3.244 3.). НГ 29 (1)

6. $\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -C - \ln q - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{p\pi}{q} + 2\sum_{k=1}^{E\left(\frac{q+1}{2}\right)-1}\left[\cos\frac{2kp\pi}{q}\ln\sin\frac{k\pi}{q}\right]$
$[q = 2, 3, \ldots, p = 1, 2, \ldots, q-1]$. МО 4, ВТФ I 19 (29)

7. $\psi\left(\frac{p}{q}\right) - \psi\left(\frac{p-1}{q}\right) = q\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p+kq)^n-1}$. НГ 59 (3)

8. $\psi^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^{n+1}}$. НГ 37 (1)

Представление в виде бесконечного произведения

8.364

1. $e^{\psi(x)} = x\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x+k}\right)e^{-\frac{1}{x+k}}$. НГ 65 (12)

2. $e^{y\psi(x)} = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{y}{x+k}\right)e^{-\frac{y}{x+k}}$. НГ 65 (11)

См. также 8.37

Связь с дзета-функцией Римана см. **9.533** 2.

Связь с гамма-функцией см. 4.325 12., **4.352** 1.

Связь с бэта-функцией см. **4.253** 1.

Ряды пси-функций см. 8.403 2., 8.446, 8.447 3. (цилиндрические функции), 8.761 (производные от шаровых функций по индексу), 9.153, 9.154 (гипергеометрическая функция), 9.238 (вырожденная гипергеометрическая функция).

Интегралы от пси-функций см. 6.46—6.47.

8.365 Функциональные соотношения:

1. $\psi(x+1)=\psi(x)+\frac{1}{x}$. ЯЭ 109 *и*

2. $\psi\left(\frac{x+1}{2}\right)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)=2\beta(x)$ (сравни 8.37 0).

3. $\psi(x+n)=\psi(x)+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x+k}$. Га 154 (64) *и*

4. $\psi(n+1)=-C+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. МО 4

5. $\lim\limits_{n\to\infty}[\psi(z+n)-\ln n]=0$. МО 3

6. $\psi(nz)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\psi\left(z+\frac{k}{n}\right)+\ln n \quad [n=2, 3, 4, \ldots]$. МО 3

7. $\psi(x-n)=\psi(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x-k}$.

8. $\psi(1-z)=\psi(z)+\pi\operatorname{ctg}\pi z$. Га 155 (68) *и*

9. $\psi\left(\frac{1}{2}+z\right)=\psi\left(\frac{1}{2}-z\right)+\pi\operatorname{tg}\pi z$. ЯЭ 109 *и*

10. $\psi\left(\frac{3}{4}-n\right)=\psi\left(\frac{1}{4}+n\right)+\pi$ [n — натуральное число].

8.366 Частные значения:

1. $\psi(1)=-C$ (сравни 8.367 1.).

2. $\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-C-2\ln 2=-1{,}963\,510\,026\ldots$ Га 155 *и*

3. $\psi\left(\frac{1}{2}\pm n\right)=-C+2\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\ln 2\right]$. ЯЭ 109 *и*

4. $\psi\left(\frac{1}{4}\right)=-C-\frac{\pi}{2}-3\ln 2$. Га 157 *и*

5. $\psi\left(\frac{3}{4}\right)=-C+\frac{\pi}{2}-3\ln 2$. Га 157 *и*

6. $\psi\left(\frac{1}{3}\right)=-C-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{3}{2}\ln 3$. Га 157 *и*

7. $\psi\left(\frac{2}{3}\right)=-C+\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{3}{2}\ln 3$. Га 157 *и*

8. $\psi'(1)=\frac{\pi^2}{6}=1{,}644\,934\,067\ldots$ ЯЭ 109 *и*

9. $\psi'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}=4{,}934\,802\,201\ldots$ ЯЭ 109 *и*

$$\left.\begin{array}{l} 10.\ \psi'(-n)=\infty \\ 11.\ \psi'(n)=\frac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} \\ 12.\ \psi'\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{\pi^2}{2}-4\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2} \\ 13.\ \psi'\left(\frac{1}{2}-n\right)=\frac{\pi^2}{2}+4\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2} \end{array}\right\}$$ [n — число натуральное]. ЯЭ 109 *и*

8.367 Эйлерова постоянная:

1. $C=-\psi(1)=0{,}577\,215\,664\,90\ldots$ Ф II 795, Ф II 319

2. $C=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln n\right].$ Ф II 801 *и*

3. $C=\lim\limits_{x\to 1+0}\left[\zeta(x)-\frac{1}{x-1}\right].$ Ф II 804

Интегральные представления:

4. $C=-\int\limits_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt.$ Ф II 807

5. $C=-\int\limits_0^1 \ln\left(\ln\frac{1}{t}\right)dt.$ Ф II 807

6. $C=\int\limits_0^1\left[\frac{1}{\ln t}+\frac{1}{1-t}\right]dt.$ Д (852.3)

7. $C=-\int\limits_0^\infty\left[\cos t-\frac{1}{1+t}\right]\frac{dt}{t}.$ МО 10

8. $C=1-\int\limits_0^\infty\left[\frac{\sin t}{t}-\frac{1}{1+t}\right]\frac{dt}{t}.$ МО 10

9. $C=-\int\limits_0^\infty\left[e^{-t}-\frac{1}{1+t}\right]\frac{dt}{t}.$ Ф II 795, Ф II 802

10. $C=-\int\limits_0^\infty\left[e^{-t}-\frac{1}{1+t^2}\right]\frac{dt}{t}.$ Д (852.4), МО 10

11. $C=\int\limits_0^\infty\left[\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{te^t}\right]dt.$ Д (852.5)

12. $C=\int\limits_0^1(1-e^{-t})\frac{dt}{t}-\int\limits_1^\infty\frac{e^{-t}}{t}dt.$ Ф II 802

См. также **8.361** 5. — **8.361** 7., **3.311** 6., **3.435** 3. и 4., **3.476** 2., **3.481** 1. и 2., **3.951** 10., **4.283** 9., **4.331** 1., **4.421** 1., **4.424** 1., **4.553**, **4.572**, **6.234**, **6.264** 1., **6.468**.

13. Асимптотические разложения:

$$C=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln k+\frac{1}{2k}+\frac{1}{12k^2}-\frac{1}{120k^4}+\frac{1}{252k^6}-\frac{1}{240k^8}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{B_{2n}}{2n}\frac{1}{k^{2n}}+\frac{B_{2n+2}}{2(n+1)}\frac{\theta}{k^{2n+2}} \qquad [0<\theta<1]. \qquad \text{Ф II 827}$$

8.37 Функция $\beta(x)$

Определение·

8.370 $$\beta(x)=\frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{x+1}{2}\right)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)\right]. \qquad \text{НГ 16 (13)}$$

8.371 Интегральные представления:

1. $$\beta(x)=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt \qquad [\operatorname{Re}x>0]. \qquad \text{УВ II 39}$$

2. $$\beta(x)=\int_0^\infty\frac{e^{-xt}}{1+e^{-t}}\,dt \qquad [\operatorname{Re}x>0]. \qquad \text{МО 4}$$

3. $$\beta\left(\frac{x+1}{2}\right)=\int_0^\infty\frac{e^{-xt}}{\operatorname{ch}t}\,dt \qquad [\operatorname{Re}x>0] \qquad \text{(сравни 8.371 1.).}$$

См. также 3.241 1., 3.251 7., 3.522 2. и 4., 3.623 2. и 3., 4.282 2., 4.389 3., 4.532 1. и 3.

Представление в виде ряда

8.372

1. $$\beta(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}. \qquad \text{НГ 37, НГ 101 (1)}$$

2. $$\beta(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+2k)(x+2k+1)}. \qquad \text{НГ 101 (2)}$$

3. $$\beta(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{x(x+1)\ldots(x+k)}\frac{1}{2^k}. \qquad \text{НГ 246 (7)}$$

8.373

1. $$\beta(x+1)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(1-2^{1-k})\zeta(k)x^{k-1}. \qquad \text{НГ 37 (5)}$$

2. $$\beta(x+1)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2\sin\pi x}+\frac{1}{1-x^2}-\sum_{k=0}^{\infty}[1-(1-2^{-2k})\zeta(2k+1)]x^{2k}.$$

НГ 38 (11)

8.374 $$\beta^{(n)}(x)=(-1)^n n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^{n+1}}. \qquad \text{НГ 37 (2)}$$

8.375 Представление в виде конечной суммы:

1. $$\beta\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\pi}{2\sin\frac{p\pi}{q}}-\sum_{k=0}^{E\left(\frac{q-1}{2}\right)}\cos\frac{p(2k+1)\pi}{q}\ln\left(2-2\cos\frac{(2k+1)\pi}{q}\right)$$

$[q=2, 3, \ldots, p=1, 2, 3, \ldots]$ (см. также 8.362 5.—7.). НГ 23(9)

2. $$\beta(n)=(-1)^{n+1}\ln 2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+n+1}}{k}.$$

Функциональные соотношения

8.376 $$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\beta\left(\frac{x+k}{2n+1}\right)=(2n+1)\beta(x).$$ НГ 19

8.377 $$\sum_{k=1}^{n}\beta(2^kx)=\psi(2^nx)-\psi(x)-n\ln 2.$$ НГ 20(10)

8.38 Бэта-функция (эйлеров интеграл 1-го рода): $B(x, y)$

Представление в виде интеграла

8.380

1. $$B(x, y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\,^{*});$$ ФП 774(1)

$$=2\int_0^1 t^{2x-1}(1-t^2)^{y-1}\,dt \qquad [\operatorname{Re}x>0,\ \operatorname{Re}y>0].$$

2. $$B(x, y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\varphi\cos^{2y-1}\varphi\,d\varphi \qquad [\operatorname{Re}x>0,\ \operatorname{Re}y>0].$$ Ку 10

3. $$B(x, y)=\int_0^\infty\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt=2\int_0^\infty\frac{t^{2x-1}}{(1+t^2)^{x+y}}\,dt \qquad [\operatorname{Re}x>0,\ \operatorname{Re}y>0].$$ ФП 775

4. $$B(x, y)=2^{2-y-x}\int_{-1}^1\frac{(1+t)^{2x-1}(1-t)^{2y-1}}{(1+t^2)^{x+y}}\,dt \qquad [\operatorname{Re}x>0,\ \operatorname{Re}y>0].$$ МО 7

5. $$B(x, y)=\int_0^1\frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt=\int_1^\infty\frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt$$

6. $$B(x, y)=\frac{1}{2^{x+y-1}}\int_0^1\left[(1+t)^{x-1}(1-t)^{y-1}+(1+t)^{y-1}(1-t)^{x-1}\right]dt$$

$[\operatorname{Re}x>0,\ \operatorname{Re}y>0]$ (for 5 and 6). БХ[1](15)

*) Это равенство служит определением функции $B(x, y)$.

7. $$\mathrm{B}(x, y) = z^y (1+z)^x \int_0^1 \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{(t+z)^{x+y}}$$

8. $$\mathrm{B}(x, y) = z^y (1+z)^x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2x-1}\varphi \sin^{2y-1}\varphi}{(z+\cos^2\varphi)^{x+y}}\, d\varphi$$

$[\operatorname{Re} x > 0,\ \operatorname{Re} y > 0,\ 0 > z > -1,\ \operatorname{Re}(x+y) < 1]$. УВ II 39 (7), НГ 163 (8)

См. также 3.196 3., 3.198, 3.199, 3.215, 3.238 3., 3.251 1.—3., 11., 3.253, 3.312 1., 3.512 1. и 2., 3.541 1., 3.542 1., 3.621 5., 3.623 1., 3.631 1., 8., 9., 3.632 2., 3.633 1., 4., 3.634 1., 2., 3.637, 3.642 1., 3.667 8., 3.681 2.

9. $$\mathrm{B}(x, x) = \frac{1}{2^{2x-2}} \int_0^1 (1-t^2)^{x-1}\, dt = \frac{1}{2^{2x-1}} \int_0^1 \frac{(1-t)^{x-1}}{\sqrt{t}}\, dt.$$

См. 8.384 4., 8.382 3., а также 3.621 1., 3.642 2., 3.665 1., 3.821 6., 3.839 6.

10. $$\mathrm{B}(x+y, x-y) = 4^{1-x} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} 2yt}{\operatorname{ch}^{2x} t}\, dt \quad [\operatorname{Re} x > |\operatorname{Re} y|,\ \operatorname{Re} x > 0].$$ МО 9

11. $$\mathrm{B}\left(x, \frac{y}{z}\right) = z \int_0^1 (1-t^z)^{x-1} t^{y-1}\, dt \quad \left[\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re} \frac{y}{z} > 0,\ \operatorname{Re} x > 0\right].$$

ФИ II 787 и

8.381

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(a+it)^x (b-it)^y} = \frac{2\pi (a+b)^{1-x-y}}{(x+y-1)\,\mathrm{B}(x, y)}$$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(a-it)^x (b-it)^y} = 0$$

$[a > 0,\ b > 0;\ x$ и y действительны, $x+y > 1]$. МО 7

3. $$\mathrm{B}(x+iy, x-iy) = 2^{1-2x} \alpha e^{-2i\gamma y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\alpha y t}\, dt}{\operatorname{ch}^{2x}(\alpha t - \gamma)}$$

$[y, \alpha, \gamma$ действительны, $\alpha > 0;\ \operatorname{Re} x > 0]$. МО 8 и

Интегральное представление $\ln \mathrm{B}(x, y)$ см. 3.428 7..

4. $$\frac{1}{\mathrm{B}(x, y)} = \frac{2^{x+y-1}(x+y-1)}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[(x-y)t] \cos^{x+y-2} t\, dt;$$ НГ 158 (5) и

$$= \frac{2^{x+y-2}(x+y-1)}{\pi \cos\left[(x-y)\frac{\pi}{2}\right]} \int_0^{\pi} \cos[(x-y)t] \sin^{x+y-2} t\, dt;$$ НГ 159 (8) и

$$= \frac{2^{x+y-2}(x+y-1)}{\pi \sin\left[(x-y)\frac{\pi}{2}\right]} \int_0^{\pi} \sin[(x-y)t] \sin^{x+y-2} t\, dt.$$ НГ 159 (9) и

Представление в виде ряда

8.382

1. $$\mathrm{B}(x,y)=\frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y(y-1)\dots(y-n)}{n!\,(x+n)}\qquad [y>0].$$ УВ II 36

2. $$\ln \mathrm{B}\left(\frac{1+x}{2},\frac{1}{2}\right)=\ln\sqrt{2\pi}+\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{x}\right)-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-(1-2^{-2k})\zeta(2k+1)}{2k+1}x^{2k+1}\qquad [|x|<2].$$ НГ 39 (17)

3. $$\mathrm{B}\left(z,\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)!!}{2^k k!}\frac{1}{z+k}$$ (см. также 8.384 и 8.380 9.).

УВ II 36

8.383 Представление в виде бесконечного произведения:

$$\mathrm{B}(x,y)=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{k(x+y+k)}{(x+k)(y+k)}\qquad [x,\ y\neq 0,\ -1,\ -2,\ \dots].$$ МО 2

8.384 Функциональные соотношения для бэта-функции:

1. $$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\mathrm{B}(y,x).$$ Ф II 779

2. $$\mathrm{B}(x,y)\,\mathrm{B}(x+y,z)=\mathrm{B}(y,z)\,\mathrm{B}(y+z,x).$$ МО 6

3. $$\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{B}(x,y+k)=\mathrm{B}(x-1,y).$$ УВ II 39

4. $$\mathrm{B}(x,x)=2^{1-2x}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},x\right)$$ (см. также 8.380 9. и 8.382 3.). Ф II 784

5. $$\mathrm{B}(x,x)\,\mathrm{B}\left(x+\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2^{4x-1}x}.$$ УВ II 38

6. $$\frac{1}{\mathrm{B}(n,m)}=m\binom{n+m-1}{n-1}=n\binom{n+m-1}{m-1}$$
[m и n — натуральные числа]

Связь с пси-функцией см. 4.253 1.

8.39 Неполная бэта-функция $\mathrm{B}_x(p,q)$

8.391 $$\mathrm{B}_x(p,q)=\int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt=\frac{x^p}{p}\,{}_2F_1(p,1-q;p+1;x).$$ ИП I 373

8.392 $$I_x(p,q)=\frac{\mathrm{B}_x(p,q)}{\mathrm{B}(p,q)}.$$ ИП II 429

8.4—8.5 ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ФУНКЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С НИМИ

8.40 Определения

8.401. *Цилиндрическими* функциями $Z_\nu(z)$ называются решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2Z_\nu}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dZ_\nu}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)Z_\nu=0. \qquad \text{Ку 37 (1)}$$

Частными видами цилиндрических функций являются *функции Бесселя* (или *цилиндрические функции первого рода*) $J_\nu(z)$, *функции Неймана* (или *цилиндрические функции второго рода*) $N_\nu(z)$ и *функции Ганкеля* (или *цилиндрические функции третьего рода*) $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$.

8.402 $$J_\nu(z)=\frac{z^\nu}{2^\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{2^{2k}k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \qquad [|\arg z|<\pi]. \qquad \text{Ку 55 (1)}$$

8.403

1. $$N_\nu(z)=\frac{1}{\sin\nu\pi}[\cos\nu\pi J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)] \qquad [\text{при нецелом } \nu,\ |\arg z|<\pi].$$ Ку 41 (3)

2. $$\pi N_n(z)=2J_n(z)\ln\frac{z}{2}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}-$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,(k+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}[\psi(k+1)+\psi(k+n+1)]; \qquad \text{Ку 43 (10)}$$
$$=2J_n(z)\left(\ln\frac{z}{2}+C\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}-$$
$$-\left(\frac{z}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(k+n)!}\left[\sum_{m=1}^{n+k}\frac{1}{m}+\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right]$$

$[n+1$ — натуральное число, $|\arg z|<\pi]$. Ку 44, В 75 (3) и

8.404

1. $N_{-n}(z)=(-1)^nN_n(z)$
2. $J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z)$

$[n$ — натуральное число$]$. Ку 41 (2)

8.405

1. $H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iN_\nu(z)$.
2. $H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iN_\nu(z)$.

Ку 44 (1)

Во всех соотношениях, которые справедливы для любой цилиндрической функции $Z_\nu(z)$, т. е. для функций $J_\nu(z)$, $N_\nu(z)$ и их линейных комбинаций, например $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$, мы будем вместо букв J, N, $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ писать букву Z.

Цилиндрические функции мнимого аргумента $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$

8.406

1. $I_\nu(z) = e^{-\frac{\pi}{2}\nu i} J_\nu\left(e^{\frac{\pi}{2}i} z\right) \qquad \left[-\pi < \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}\right].$ В 92

2. $I_\nu(z) = e^{\frac{3}{2}\pi\nu i} J_\nu\left(e^{-\frac{3}{2}\pi i} z\right) \qquad \left[\frac{\pi}{2} < \arg z \leqslant \pi\right].$ В 92

При ν целом

3. $I_n(z) = i^{-n} J_n(iz).$ Ку 46 (1)

8.407

1. $K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi}{2}\nu i} H_\nu^{(1)}(iz).$

2. $K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{-\frac{\pi}{2}\nu i} H_{-\nu}^{(1)}(iz).$

В 92 (8)

Дифференциальное уравнение, определяющее эти функции, см. 8.494.

8.41 Интегральные представления функций $J_\nu(z)$ и $N_\nu(z)$

8.411

1. $$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ni\theta + iz\sin\theta}\,d\theta;$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta)\,d\theta \qquad [n \text{ — натуральное число}].$$

УВ II 172

2. $$J_{2n}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2n\theta \cos(z\sin\theta)\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2n\theta \cos(z\sin\theta)\,d\theta$$

$[n$ — целое число$]$. В 30 (7)

3. $$J_{2n+1}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2n+1)\theta \sin(z\sin\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)\theta \sin(z\sin\theta)\,d\theta \quad [n \text{ — целое число}].$$ В 30 (6)

4. $$J_\nu(z) = 2\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\nu}\theta \cos(z\cos\theta)\,d\theta \qquad \left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$

УВ II 178

5. $$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi} \sin^{2\nu}\theta \cos(z\cos\theta)\,d\theta \qquad \left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$

6. $$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\theta)\cos^{2\nu}\theta\, d\theta \qquad \left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$

74 Ку 65 (5), В 35 (4) и

7. $$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi e^{\pm iz\cos\varphi}\sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi \quad \left[\operatorname{Re}\left(\nu+\frac{1}{2}\right) > 0\right].$$

УВ II 178

8. $$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos zt\, dt \qquad \left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$

Ку 65 (6), УВ II 178

9. $$J_\nu(x) = 2\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_1^\infty \frac{\sin xt}{(t^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}\, dt$$

$$\left[-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2},\ x > 0\right].$$ МО 37

10. $$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{-1}^{1} e^{izt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, dt \qquad \left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$

В 34 (3)

11. $$J_\nu(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \sin\left(x\operatorname{ch}t - \frac{\nu\pi}{2}\right)\operatorname{ch}\nu t\, dt.$$ В 199 (12)

12. $$J_\nu(z) = \frac{2^{\nu+1}z^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu-\frac{1}{2}}\theta\sin\left(z-\nu\theta+\frac{1}{2}\theta\right)}{\sin^{2\nu+1}\theta} e^{-2z\operatorname{ctg}\theta}\, d\theta$$

$$\left[|\arg z| < \frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}\left(\nu+\frac{1}{2}\right) > 0\right].$$ УВ II 183

13. $$J_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(\nu\theta - z\sin\theta)\, d\theta - \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\nu\theta - z\operatorname{sh}\theta}\, d\theta$$

[ν — любое число, $\operatorname{Re} z > 0$]. В 195 (4)

14. $$J_\nu(z) = \frac{e^{\pm\nu\pi i}}{\pi}\left[\int\limits_0^\pi \cos(\nu\theta + z\sin\theta)\, d\theta - \sin\nu\pi\int\limits_0^\infty e^{-\nu\theta + z\operatorname{sh}\theta}\, d\theta\right]$$

[при $\frac{\pi}{2} < |\arg z| < \pi$, причем верхний знак берется при $\arg z > \frac{\pi}{2}$, а нижний при $\arg z < -\frac{\pi}{2}$]. УВ II 174

8.412

1. $J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{0+} t^{-\nu-1}\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]dt \qquad \left[|\arg z| < \frac{\pi}{2}\right].$

УВ II 164, В 195 (2)

2. $J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2^{\nu+1}\pi i}\int\limits_{-\infty}^{(0+)} t^{-\nu-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)dt.$ В 195 (1)

3. $J_\nu(z) = \frac{z}{2^{\nu+1}\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k}k!}\int\limits_{-\infty}^{0+} e^t t^{-\nu-k-1}\,dt.$ В 195 (1)

4. $J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(-t)}{\Gamma(\nu+t+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2t}dt \qquad [\operatorname{Re}\nu \geqslant 0,\ x > 0].$

В 214 (7)

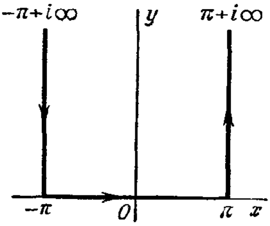
5. $J_\nu(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{2\pi i\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{A}^{(1+,\,-1-)}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(zt)\,dt$

$\left[\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\right\}^{-1} \neq 0\right.$; точка A находится справа от точки $t=1$, и $\left.\arg(t-1) = \arg(t+1) = 0 \text{ в точке } A\right]$. УВ II 177—178

6. $J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi+\infty i}^{\pi+\infty i} e^{-iz\sin\theta+i\nu\theta}\,d\theta \qquad [\operatorname{Re} z > 0].$

КГ 401

Путь интегрирования показан на чертеже.



8.413 $\frac{J_\nu\left(\sqrt{z^2-\zeta^2}\right)}{(z^2-\zeta^2)^{\frac{\nu}{2}}} = \frac{1}{\pi(z+\zeta)^\nu}\left\{\int\limits_0^\infty e^{\zeta\cos t}\cos(z\sin t-\nu t)\,dt -\right.$

$\left.-\sin\nu\pi\int\limits_0^\infty\exp(-z\operatorname{sh}t-\zeta\operatorname{ch}t-\nu t)\,dt\right\} \qquad [\operatorname{Re}(z+\zeta) > 0].$ МО 40

8.414 $\int\limits_{2x}^{\infty}\frac{J_0(t)}{t}dt = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\Gamma(-t)}{t\Gamma(1+t)}x^{2t}\,dt \qquad [x > 0].$ МО 41

См. также **3.715** 2., 9., 10., 13., 14., 19.—21., **3.865** 1., 2., 4., **3.996** 4. Интегральное представление для $J_0(z)$ см 3.714 2., 3.753 2., 3., 4.124. Интегральное представление для $J_1(z)$ см. 3.697, 3.711, 3.752 2., 3.753 5..

8.415

1. $N_0(x) = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^1\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(xt)\,dt - \frac{4}{\pi^2}\int\limits_1^\infty\frac{\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)}{\sqrt{t^2-1}}\sin(xt)\,dt$

$[x > 0].$ МО 37

2. $$N_\nu(x) = -2\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_1^\infty \frac{\cos xt}{(t^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}\,dt$$
$$\left[-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2},\quad x > 0\right].$$ Ку 89 (28) *и*, МО 38

3. $$N_\nu(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(x\operatorname{ch}t - \frac{\nu\pi}{2}\right)\operatorname{ch}\nu t\,dt \qquad [-1 < \operatorname{Re}\nu < 1,\ x > 0].$$ В 199 (13)

4. $$N_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(z\sin\theta - \nu\theta)\,d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (e^{\nu t} + e^{-\nu t}\cos\nu\pi)\,e^{-z\operatorname{sh}t}\,dt \qquad [\operatorname{Re}z > 0].$$ В 197 (1)

5. $$N_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z\sin\theta)\cos^{2\nu}\theta\,d\theta - \int_0^\infty e^{-z\operatorname{sh}\theta}\operatorname{ch}^{2\nu}\theta\,d\theta\right] \qquad \left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}z > 0\right].$$ В 181 (5) *и*

6. $$N_\nu(z) = -\frac{2^{\nu+1}z^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu-\frac{1}{2}}\theta\cos\left(z-\nu\theta+\frac{1}{2}\theta\right)}{\sin^{2\nu+1}\theta}\,e^{-2z\operatorname{ctg}\theta}\,d\theta$$
$$\left[|\arg z| < \frac{\pi}{2},\quad \operatorname{Re}\left(\nu+\frac{1}{2}\right) > 0\right].$$ В 186 (8)

Интегральные представления для $N_0(z)$ см. 3.714 3., 3.753 4., 3.864. См. также 3.865 3.

8.42 Интегральные представления функций $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$

8.421

1. $$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i}\int_{-\infty}^\infty e^{ix\operatorname{ch}t-\nu t}\,dt = \frac{2e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i}\int_0^\infty e^{ix\operatorname{ch}t}\operatorname{ch}\nu t\,dt$$ В 199 (10)

2. $$H_\nu^{(2)}(x) = -\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i}\int_{-\infty}^\infty e^{-ix\operatorname{ch}t-\nu t}\,dt = -\frac{2e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i}\int_0^\infty e^{-ix\operatorname{ch}t}\operatorname{ch}\nu t\,dt$$ В 199 (11)

$$[-1 < \operatorname{Re}\nu < 1,\ x > 0].$$

3. $$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{2^{\nu+1} i z^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu-\frac{1}{2}} t\, e^{i\left(z-\nu t+\frac{t}{2}\right)}}{\sin^{2\nu+1} t} \exp(-2z \operatorname{ctg} t)\, dt$$

$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re} z > 0\right].$ В 186 (5)

4. $$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{2^{\nu+1} i z^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu-\frac{1}{2}} t\, e^{-i\left(z-\nu t+\frac{t}{2}\right)}}{\sin^{2\nu+1} t} \exp(-2z \operatorname{ctg} t)\, dt$$

$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re} z > 0\right].$ В 186 (6)

5. $$H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{2i\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} \int_1^\infty \frac{e^{ixt}}{(t^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}\, dt$$

$\left[-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}, \quad x > 0\right].$ В 187 (1)

6. $$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{2i\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} \int_1^\infty \frac{e^{-ixt}}{(t^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}\, dt$$

$\left[-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}, \quad x > 0\right].$ В 187 (2)

7. $$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{i}{\pi} e^{-\frac{1}{2} i\nu\pi} \int_0^\infty \exp\left[\frac{1}{2} iz\left(t+\frac{1}{t}\right)\right] t^{-\nu-1}\, dt$$

$[0 < \arg z < \pi;$ или $\arg z = 0$ и $-1 < \operatorname{Re}\nu < 1].$ МО 38

8. $$H_\nu^{(1)}(xz) = -\frac{i}{\pi} e^{-\frac{1}{2} i\nu\pi} z^\nu \int_0^\infty \exp\left[\frac{1}{2} ix\left(t+\frac{z^2}{t}\right)\right] t^{-\nu-1}\, dt$$

$\left[0 < \arg z < \frac{\pi}{2}, \quad x > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > -1;\right.$

или $\left.\arg z = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0 \quad \text{и} \quad -1 < \operatorname{Re}\nu < 1\right].$ МО 38

9. $$H_\nu^{(1)}(xz) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{x^\nu \exp\left[i\left(xz - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)\right]}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty \left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} t^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-xt}\, dt$$

$\left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3}{2}\pi, \quad x > 0\right].$ МО 39

10. $$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{-2ie^{-i\nu\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{iz \operatorname{ch} t} \operatorname{sh}^{2\nu} t\, dt$$

$\left[0 < \arg z < \pi, \ \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \arg z = 0 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}\right].$

МО 38

11. $H_0^{(1)}(x) = -\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(i\sqrt{x^2+t^2}\right)}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt \quad [x > 0].$ МО 38

8.422

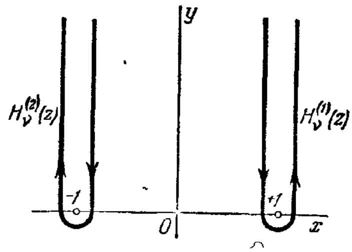
1. $H_\nu^{(1)}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{1+\infty i}^{(1+)} e^{izt}\left(t^2-1\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt \quad [-\pi < \arg z < 2\pi].$

В 183 (4)

2. $H_\nu^{(2)}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\pi i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times$

$\times \int\limits_{-1+\infty i}^{(-1-)} e^{izt}\left(t^2-1\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt$

$[-2\pi < \arg z < \pi].$ В 183 (5)



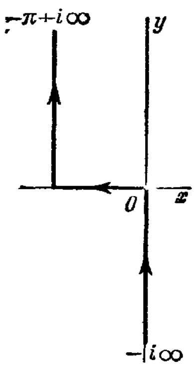
Пути интегрирования показаны на чертеже.

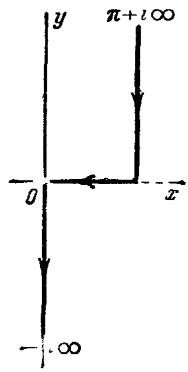
8.423

1. $H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty i}^{-\pi+\infty i} e^{-iz\sin\theta + i\nu\theta}\,d\theta \quad [\operatorname{Re} z > 0].$ В 197 (2) и

2. $H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi+\infty i}^{-\infty i} e^{-iz\sin\theta + i\nu\theta}\,d\theta \quad [\operatorname{Re} z > 0].$ В 197 (3) и

Пути интегрирования показаны на левом чертеже для формулы 1 и на правом чертеже для формулы 2.





8.424

1. $H_\nu^{(1)}(z) J_\nu(\zeta) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{\gamma+i\infty} \exp\left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{z^2+\zeta^2}{t}\right)\right] I_\nu\left(\frac{z\zeta}{t}\right)\frac{dt}{t}$

2. $H_\nu^{(2)}(z) J_\nu(\zeta) = \frac{i}{\pi}\int\limits_0^{\gamma-i\infty} \exp\left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{z^2+\zeta^2}{t}\right)\right] I_\nu\left(\frac{z\zeta}{t}\right)\frac{dt}{t}$

$[\gamma > 0, \quad \operatorname{Re}\nu > -1, \quad |\zeta| < |z|].$ МО 45

8.43 Интегральные представления функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$

Функция $I_\nu(z)$

8.431

1. $$I_\nu(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{\pm zt}\,dt$$

2. $$I_\nu(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\operatorname{ch} zt\,dt$$

3. $$I_\nu(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\pi}e^{\pm z\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta\,d\theta$$

4. $$I_\nu(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\pi}\operatorname{ch}(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta$$

$$\left[\operatorname{Re}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)>0\right].$$ В 94 (9)

5. $$I_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{z\cos\theta}\cos\nu\theta\,d\theta-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{ch}t-\nu t}\,dt$$

$$\left[|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2},\quad \operatorname{Re}\nu>0\right].$$ В 201 (4)

См. также 3.383 2., 3.387 1., 3.471 6., 3.714 5.

Интегральное представление для $I_0(z)$ и $I_1(z)$ см. 3.366 1., 3.534, 3.856 6.

Функция $K_\nu(z)$

8.432

1. $$K_\nu(z)=\int_0^\infty e^{-z\operatorname{ch}t}\operatorname{ch}\nu t\,dt$$

$$\left[|\arg z|<\frac{\pi}{2}\quad\text{или}\quad \operatorname{Re}z=0\quad\text{и}\quad \nu=0\right].$$ МО 39

2. $$K_\nu(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{ch}t}\operatorname{sh}^{2\nu}t\,dt$$

$$\left[\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\quad \operatorname{Re}z>0;\quad\text{или}\ \operatorname{Re}z=0\quad\text{и}\quad -\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right].$$

В 190 (5), УВ II 203 *и*

3. $$K_\nu(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_1^\infty e^{-zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$\left[\operatorname{Re}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)>0,\quad |\arg z|<\frac{\pi}{2};\quad\text{или}\ \operatorname{Re}z=0\quad\text{и}\quad \nu=0\right].$$

В 190 (4)

4. $K_\nu(x) = \frac{1}{\cos\frac{\nu\pi}{2}} \int\limits_0^\infty \cos(x \operatorname{sh} t) \operatorname{ch} \nu t \, dt$

$[x > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1]$. В 202 (13)

5 $K_\nu(xz) = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(2z)^\nu}{x^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\infty \frac{\cos xt \, dt}{(t^2+z^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}$

$\left[\operatorname{Re}\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \geqslant 0, \; x > 0, \; |\arg z| < \frac{\pi}{2}\right]$. В 191 (1)

6. $K_\nu(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{-t-\frac{z^2}{4t}} \, dt}{t^{\nu+1}} \qquad \left[|\arg z| < \frac{\pi}{2}, \; \operatorname{Re} z^2 > 0\right]$.

В 203 (15)

7. $K_\nu(xz) = \frac{z^\nu}{2} \int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{x}{2}\left(t+\frac{z^2}{t}\right)\right] t^{-\nu-1} \, dt$

$\left[|\arg z| < \frac{\pi}{4} \text{ или } |\arg z| = \frac{\pi}{4} \text{ и } \operatorname{Re} \nu < 1\right]$. МО 39

8. $K_\nu(xz) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{x^\nu e^{-xz}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\infty e^{-xt} t^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{t}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dt$

$\left[|\arg z| < \pi, \; \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}, \; x > 0\right]$. МО 39

9. $K_\nu(xz) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2z}\right)^\nu \int\limits_0^\infty \frac{\exp\left(-x\sqrt{t^2+z^2}\right)}{\sqrt{t^2+z^2}} t^{2\nu} \, dt$

$\left[\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}, \; \operatorname{Re} z > 0, \; \operatorname{Re} \sqrt{t^2+z^2} > 0, \; x > 0\right]$. МО 39

См. также **3.337** 4., **3.383** 3., **3.387** 3., 6., **3.388** 2., **3.389** 4., **3.391**, **3.395** 1., **3.471** 9., **3.483**, **3.547** 2., **3.856**, **3.871** 3.,4., **7.141** 5.

8.433 $K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\sqrt{x}} \int\limits_0^\infty \cos(t^3 + xt) \, dt$. Ку 98 (31), В 211 (2)

Интегральное представление для $K_0(z)$ см. **3.754** 2., **3.864**, **4.343**, **4.356**, **4.367**.

8.44 Представление в виде ряда

Функция $J_\nu(z)$

8.440 $J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \qquad [|\arg z| < \pi]$.

8.441 Частные случаи:

1. $J_0(z) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$.

2. $J_1(z) = -J_0'(z) = \frac{z}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}k!\,(k+1)!}$.

3. $J_{\frac{1}{3}}(z) = \frac{\sqrt[3]{\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z\sqrt{3})^{2k}}{2^{2k}k!\cdot 1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3k+1)}$.

4. $J_{-\frac{1}{3}}(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \sqrt[3]{\frac{2}{z}} \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(z\sqrt{3})^{2k}}{2^{2k}k!\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3k-1)}\right.$.

Разложение $J_\nu(z)$ по полиномам Лагерра см. 8.975 3.

8.442

1. $J_\nu(z) J_\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+\mu+2k} \Gamma(\nu+\mu+2k+1)}{\Gamma(\nu+\mu+k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)\,\Gamma(\mu+k+1)}$.

Если $\nu^2 \neq \mu^2$, то 2ν, 2μ, $2(\nu+\mu)$ в этой формуле не могут быть целыми отрицательными числами; если $\nu = \mu$, то 2ν не может быть целым отрицательным числом; если $\nu = -\mu$, то ν не может быть целым отрицательным числом. В 161 (5)

2. $$J_\nu(az) J_\mu(bz) = \frac{\left(\frac{az}{2}\right)^\nu \left(\frac{bz}{2}\right)^\mu}{\Gamma(\mu+1)} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{az}{2}\right)^{2k} F\left(-k,\ -\nu-k;\ \mu+1;\ \frac{b^2}{a^2}\right)}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$ МО 28

Функция $N_\nu(z)$

8.443 $$N_\nu(z) = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left\{\cos \nu\pi \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k}k!\,\Gamma(\nu+k+1)} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k}k!\,\Gamma(k-\nu+1)}\right\}$$ [$\nu \neq$ целому числу]

(сравни 8.403 1.).

При $\nu+1$ натуральном см. 8.403 2.; при ν целом отрицательном см 8.404 1.

8.444 Частные случаи.

1. $\pi N_0(z) = 2J_0(z)\left(\ln\frac{z}{2} + C\right) - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m}$. Ку 44

2. $$\pi N_1(z) = 2J_1(z)\left(\ln\frac{z}{2} + C\right) -$$
$$-\frac{2}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-1}}{k!\,(k-1)!}\left\{2\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{m} + \frac{1}{k}\right\}.$$ Д (811.2)

Функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$

8.445 $$I_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}.$$ УВ II 187

8.446 $$K_n(z)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2k}}+$$
$$+(-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\left[\ln\frac{z}{2}-\frac{1}{2}\psi(k+1)-\frac{1}{2}\psi(n+k+1)\right].$$ В 95 (15)

$$=(-1)^{n+1}I_n(z)\ln\frac{Cz}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2l}}{l!\,(n+l)!}\left(\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n+l}\frac{1}{k}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(-1)^l(n-l-1)!}{l!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l-n}$$ [$n+1$ — натуральное число].

МО 29

8.447 Частные случаи:

1. $$I_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}.$$

2. $$I_1(z)=I_0'(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}}{k!\,(k+1)!}.$$

3. $$K_0(z)=-\ln\frac{z}{2}I_0(z)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\psi(k+1).$$ В 95 (14)

8.45 Асимптотические разложения цилиндрических функций

8.451 При больших значениях $|z|$ *)

1. $$J_{\pm\nu}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z\mp\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)\times\right.$$
$$\times\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2z)^{2k}}\frac{\Gamma\left(\nu+2k+\frac{1}{2}\right)}{(2k)!\,\Gamma\left(\nu-2k+\frac{1}{2}\right)}+R_1\right]-$$
$$\left.-\sin\left(z\mp\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2z)^{2k+1}}\frac{\Gamma\left(\nu+2k+\frac{3}{2}\right)}{(2k+1)!\,\Gamma\left(\nu-2k-\frac{1}{2}\right)}+R_2\right]\right\}$$
[$|\arg z|<\pi$] (см. 8.339 4.). В 222 (1), В 222 (3)

*) Оценка остатков в формулах 8.451 дана в 8.451 7. и 8.451 8.

2. $$N_{\pm\nu}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin\left(z\mp\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)\times\right.$$
$$\times\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2z)^{2k}}\frac{\Gamma\left(\nu+2k+\frac{1}{2}\right)}{(2k)!\,\Gamma\left(\nu-2k+\frac{1}{2}\right)}+R_1\right]+$$
$$\left.+\cos\left(z\mp\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2z)^{2k+1}}\frac{\Gamma\left(\nu+2k+\frac{3}{2}\right)}{(2k+1)!\,\Gamma\left(\nu-2k-\frac{1}{2}\right)}+R_2\right]\right\}$$

$[|\arg z|<\pi]$ (см. 8.339 4.). В 222 (2), В 222 (4), В 222 (5)

3. $$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\times$$
$$\times\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2iz)^k}\frac{\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{k!\,\Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)}+\theta_1\frac{(-1)^n}{(2iz)^n}\frac{\Gamma\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)}{k!\,\Gamma\left(\nu-n+\frac{1}{2}\right)}\right].$$

$\left[\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\ |\arg z|<\pi\right]$ (см. 8.339 4.). В 221 (5)

4. $$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\times$$
$$\times\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2iz)^k}\frac{\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{k!\,\Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)}+\theta_2\frac{1}{(2iz)^n}\frac{\Gamma\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\nu-n+\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$\left[\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\ |\arg z|<\pi\right]$ (см. 8.339 4.). В 221 (6)

Для индексов $\nu=\frac{2n-1}{2}$ (n — натуральное число) ряды 8.451 обрываются. В этом случае для всех значений имеют место замкнутые формулы 8.46.

5. $$I_\nu(z)\sim\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2z)^k}\frac{\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{k!\,\Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)}+$$
$$+\frac{\exp\left[-z\pm\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi i\right]}{\sqrt{2\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2z)^k}\frac{\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{k!\,\Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)}.$$

$\left[\text{Знак } + \text{ берется при } -\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3}{2}\pi, \text{ знак } - \text{ при } -\frac{3}{2}\pi<\arg z<\frac{\pi}{2}\text{*)}\right]$ (см. 8.339 4.). В 226 (2), В 226 (3)

---

*) Противоречие, которое содержит на первый взгляд это условие, объясняется так называемым явлением Стокса (см. В 224 — 225)

6. $$K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2z)^k}\frac{\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{k!\,\Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)}+\theta_3\frac{\Gamma\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)}{(2z)^n\,n!\,\Gamma\left(\nu-n+\frac{1}{2}\right)}\right]$$

(см. 8.339 4.). В 231, В 245 (9)

Оценка остатков асимптотических рядов в формулах 8.451:

7. $$|R_1|<\left|\frac{\Gamma\left(\nu+2n+\frac{1}{2}\right)}{(2z)^{2n}(2n)!\,\Gamma\left(\nu-2n+\frac{1}{2}\right)}\right|\qquad\left[n>\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}\right].$$ В 231

8. $$|R_2|<\left|\frac{\Gamma\left(\nu+2n+\frac{3}{2}\right)}{(2z)^{2n+1}(2n+1)!\,\Gamma\left(\nu-2n-\frac{1}{2}\right)}\right|\qquad\left[n\geqslant\frac{\nu}{2}-\frac{3}{4}\right].$$ В 231

При $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3}{2}\pi$, ν действительном и $n+\frac{1}{2}>|\nu|$

$|\theta_1|<1$, если $\operatorname{Im} z\geqslant 0$; $|\theta_1|<|\sec(\arg z)|$, если $\operatorname{Im} z\leqslant 0$. В 245

При $-\frac{3}{2}\pi<\arg z<\frac{\pi}{2}$, ν действительном и $n+\frac{1}{2}>|\nu|$

$|\theta_2|<1$, если $\operatorname{Im} z\leqslant 0$; $|\theta_2|<|\sec(\arg z)|$, если $\operatorname{Im} z\geqslant 0$. В 246

При ν действительном

$|\theta_3|<1$ и $\operatorname{Re}\theta_3\geqslant 0$, если $\operatorname{Re} z\geqslant 0$;

$|\theta_3|<|\operatorname{cosec}(\arg z)|$, если $\operatorname{Re} z<0$. В 245

При ν и z действительных и $n\geqslant\nu-\frac{1}{2}$

$$0\leqslant|\theta_3|\leqslant 1.$$ В 231

Из 8.451 7. и 8.451 8. следует, в частности, что при действительных положительных значениях z и ν погрешности $|R_1|$ и $|R_2|$ меньше модуля первого отброшенного члена. При значениях $|\arg z|$, близких к π, ряды 8.451 1. и 8.451 2 могут оказаться непригодными для вычислений; в частности, погрешность при $|\arg z|>\pi$ может оказаться больше первого отброшенного члена по модулю).

«Приближение тангенсами»

8.452 Для больших значений индекса (аргумент меньше индекса).

Пусть $x>0$ и $\nu>0$. Положим $\frac{\nu}{x}=\operatorname{ch}\alpha$. Тогда для больших значений ν справедливы разложения:

1. $$J_\nu\left(\frac{\nu}{\operatorname{ch}\alpha}\right)\sim\frac{\exp(\nu\operatorname{th}\alpha-\nu\alpha)}{\sqrt{2\nu\pi\operatorname{th}\alpha}}\left\{1+\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{8}\operatorname{cth}\alpha-\frac{5}{24}\operatorname{cth}^3\alpha\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{9}{128}\operatorname{cth}^2\alpha-\frac{231}{576}\operatorname{cth}^4\alpha+\frac{1155}{3456}\operatorname{cth}^6\alpha\right)+\ldots\right\}.$$ В 269 (3)

2. $$N_\nu\left(\frac{\nu}{\operatorname{ch}\alpha}\right)\sim\frac{\exp(\nu\alpha-\nu\operatorname{th}\alpha)}{\sqrt{\frac{\pi}{2}\nu\operatorname{th}\alpha}}\left\{1-\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{8}\operatorname{cth}\alpha-\frac{5}{24}\operatorname{cth}^3\alpha\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{9}{128}\operatorname{cth}^2\alpha-\frac{231}{576}\operatorname{cth}^4\alpha+\frac{1155}{3456}\operatorname{cth}^6\alpha\right)+\ldots\right\}.$$ В 270 (5)

8.453 Для больших значений индекса (аргумент больше индекса).

Пусть $x>0$ и $\nu>0$. Положим $\frac{\nu}{x}=\cos\beta$. Тогда для больших значений ν справедливы разложения:

1. $$J_\nu(\nu\sec\beta)\sim\sqrt{\frac{2}{\nu\pi\operatorname{tg}\beta}}\left\{\left[1-\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{9}{128}\operatorname{ctg}^2\beta+\frac{231}{576}\operatorname{ctg}^4\beta+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1155}{3456}\operatorname{ctg}^6\beta\right)+\ldots\right]\cos\left(\nu\operatorname{tg}\beta-\nu\beta-\frac{\pi}{4}\right)+$$
$$\left.+\left[\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{8}\operatorname{ctg}\beta+\frac{5}{24}\operatorname{ctg}^3\beta\right)-\ldots\right]\sin\left(\nu\operatorname{tg}\beta-\nu\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$
B 271 (4)

2. $$N_\nu(\nu\sec\beta)\sim\sqrt{\frac{2}{\nu\pi\operatorname{tg}\beta}}\left\{\left[1-\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{9}{128}\operatorname{ctg}^2\beta+\frac{231}{576}\operatorname{ctg}^4\beta+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1155}{3456}\operatorname{ctg}^6\beta\right)+\ldots\right]\sin\left(\nu\operatorname{tg}\beta-\nu\beta-\frac{\pi}{4}\right)-$$
$$\left.-\left[\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{8}\operatorname{ctg}\beta+\frac{5}{24}\operatorname{ctg}^3\beta\right)-\ldots\right]\cos\left(\nu\operatorname{tg}\beta-\nu\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$
B 271 (5)

3. $$H_\nu^{(1)}(\nu\sec\beta)\sim\frac{\exp\left[\nu i(\operatorname{tg}\beta-\beta)-\frac{\pi}{4}i\right]}{\sqrt{\frac{\pi}{2}\nu\operatorname{tg}\beta}}\left\{1-\frac{i}{\nu}\left(\frac{1}{8}\operatorname{ctg}\beta+\frac{5}{24}\operatorname{ctg}^3\beta\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{9}{128}\operatorname{ctg}^2\beta+\frac{231}{576}\operatorname{ctg}^4\beta+\frac{1155}{3456}\operatorname{ctg}^6\beta\right)+\ldots\right\}.$$
B 271 (1)

4. $$H_\nu^{(2)}(\nu\sec\beta)\sim\frac{\exp\left[-\nu i(\operatorname{tg}\beta-\beta)+\frac{\pi}{4}i\right]}{\sqrt{\frac{\pi}{2}\nu\operatorname{tg}\beta}}\left\{1+\frac{i}{\nu}\left(\frac{1}{8}\operatorname{ctg}\beta+\frac{5}{24}\operatorname{ctg}^3\beta\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{9}{128}\operatorname{ctg}^2\beta+\frac{231}{576}\operatorname{ctg}^4\beta+\frac{1155}{3456}\operatorname{ctg}^6\beta\right)+\ldots\right\}.$$
B 271 (2)

Формулы 8.453 неприменимы, когда $|x-\nu|$ сравнимо с $x^{\frac{1}{3}}$. При любых малых (а также и не малых) значениях $|x-\nu|$ можно пользоваться следующими формулами:

8.454 Пусть $x>0$ и $\nu>0$. Положим
$$w=\sqrt{\frac{x^2}{\nu^2}-1};$$
тогда

1. $$H_\nu^{(1)}(x)=$$
$$=\frac{w}{\sqrt{3}}\exp\left\{\left[\frac{\pi}{6}+\nu\left(w-\frac{w^3}{3}-\operatorname{arctg}w\right)\right]i\right\}H_{\frac{1}{3}}^{(1)}\left(\frac{\nu}{3}w^3\right)+O\left(\frac{1}{|\nu|}\right).$$

2. $$H_\nu^{(2)}(x)=$$
$$=\frac{w}{\sqrt{3}}\exp\left\{\left[-\frac{\pi}{6}-\nu\left(w-\frac{w^3}{3}-\operatorname{arctg}w\right)\right]i\right\}H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(\frac{\nu}{3}w^3\right)+O\left(\frac{1}{|\nu|}\right).$$
MO 34

Абсолютная величина погрешности $O\left(\frac{1}{|\nu|}\right)$ при этом меньше $24\sqrt{2}\left|\frac{1}{\nu}\right|$.

8.455 Для x действительных и ν натуральных $(\nu = n)$ при $n \gg 1$ **имеют** место следующие приближения:

1. $$J_n(x) \approx \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2(n-x)}{3x}}\, K_{\frac{1}{3}}\left\{\frac{[2(n-x)]^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{x}}\right\} \quad [n > x] \quad \text{(см. также 8.433)};$$ B 276 (1)

$$\approx \frac{1}{2} e^{\frac{2}{3}\pi i}\sqrt{\frac{2(n-x)}{3x}}\, H^{(1)}_{\frac{1}{3}}\left\{\frac{i}{3}\frac{[2(n-x)]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}\right\} \quad [n > x];$$ MO 34

$$\approx \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2(x-n)}{3x}}\left\{J_{\frac{1}{3}}\left[\frac{\{2(x-n)\}^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{x}}\right] + J_{-\frac{1}{3}}\left[\frac{\{2(x-n)\}^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{x}}\right]\right\}$$

(см. также **8.441 3.**, **8.441 4.**). B 276 (2)

2. $$N_n(x) \approx -\sqrt{\frac{2(x-n)}{3x}}\left\{J_{-\frac{1}{3}}\left[\frac{\{2(x-n)\}^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{x}}\right] - J_{\frac{1}{3}}\left[\frac{\{2(x-n)\}^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{x}}\right]\right\}$$

$[x > n]$. B 276 (3)

Оценка погрешности в формулах 8.455 до сих пор не получена.

8.456 $$J_\nu^2(z) + N_\nu^2(z) \approx \frac{2}{\pi z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k z^{2k}}\,\frac{\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{k!\,\Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)}$$

$[|\arg z| < \pi]$ (см. также 8.479 1.). B 250 (5)

8.457 $$J_\nu^2(x) + J_{\nu+1}^2(x) \approx \frac{2}{\pi x} \quad [x \gg |\nu|].$$ B 223

8.46 Цилиндрические функции, индекс которых равен целому числу плюс одна вторая

Функция $J_\nu(z)$

8.461

1. $$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin\left(z-\frac{\pi}{2}n\right)\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{(-1)^k(n+2k)!}{(2k)!\,(n-2k)!\,(2z)^{2k}} + \cos\left(z-\frac{\pi}{2}n\right)\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{(-1)^k(n+2k+1)!}{(2k+1)!\,(n-2k-1)!\,(2z)^{2k+1}}\right\}$$

[$n+1$ — натуральное число] (сравни **8.451 1.**). Ку 59 (6), B 66 (2)

2. $$J_{-n-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z+\frac{\pi}{2}n\right)\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{(-1)^k(n+2k)!}{(2k)!\,(n-2k)!\,(2z)^{2k}}-\right.$$
$$\left.-\sin\left(z+\frac{\pi}{2}n\right)\sum_{k=0}^{L\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{(-1)^k(n+2k+1)!}{(2k+1)!\,(n-2k-1)!\,(2z)^{2k+1}}\right\}$$

[$n+1$ — натуральное число] (сравни 8.451 1.). Ку 59 (7), В 67 (5)

8.462

1. $$J_{n+\frac{1}{2}}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left\{e^{iz}\sum_{k=0}^{n}\frac{i^{-n+k-1}(n+k)!}{k!\,(n-k)!\,(2z)^k}+e^{-iz}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-i)^{-n+k-1}(n+k)!}{k!\,(n-k)!\,(2z)^k}\right\}$$

[$n+1$ — натуральное число]. Ку 59 (6), В 66 (1)

2. $$J_{-n-\frac{1}{2}}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left\{e^{iz}\sum_{k=0}^{n}\frac{i^{n+k}(n+k)!}{k!\,(n-k)!\,(2z)^k}+e^{-iz}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-i)^{n+k}(n+k)!}{k!\,(n-k)!\,(2z)^k}\right\}$$

[$n+1$ — натуральное число]. Ку 59 (7), В 67 (4)

8.463

1. $$J_{n+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^n z^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d^n}{(z\,dz)^n}\left(\frac{\sin z}{z}\right).$$ Ку 58 (4)

2. $$J_{-n-\frac{1}{2}}(z)=z^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d^n}{(z\,dz)^n}\left(\frac{\cos z}{z}\right).$$ Ку 58 (5)

8.464 Частные случаи:

1. $$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z.$$ Д (809.01)

2. $$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z.$$ Д (809.21)

3. $$J_{\frac{3}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z}-\cos z\right).$$ Д (809.03)

4. $$J_{-\frac{3}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(-\sin z-\frac{\cos z}{z}\right).$$ Д (809.23)

5. $$J_{\frac{5}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\left(\frac{3}{z^2}-1\right)\sin z-\frac{3}{z}\cos z\right\}.$$ Д (809.05)

6. $$J_{-\frac{5}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\frac{3}{z}\sin z+\left(\frac{3}{z^2}-1\right)\cos z\right\}.$$ Д (809.25)

Функция $N_{n+\frac{1}{2}}(z)$

8.465

1. $$N_{n+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^{n-1}J_{-n-\frac{1}{2}}(z).$$ ЯЭ 227

2. $$N_{-n-\frac{1}{2}}(z)=(-1)^n J_{n+\frac{1}{2}}(z).$$ ЯЭ 227

Функции $H^{(1,2)}_{n+\frac{1}{2}}(z)$, $I_{n+\frac{1}{2}}(z)$, $K_{n+\frac{1}{2}}(z)$

8.466

1. $H^{(1)}_{n-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, i^{-n}e^{iz}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-k-1)!}\frac{1}{(2iz)^k}$ (сравни 8.451 3.).

2. $H^{(2)}_{n-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, i^{n}e^{-iz}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-k-1)!}\frac{1}{(2iz)^k}$ (сравни 8.451 4.).

8.467 $I_{\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left[e^z\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(n+k)!}{k!\,(n-k)!\,(2z)^k}+(-1)^{n+1}e^{-z}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{k!\,(n-k)!\,(2z)^k}\right]$

(сравни 8.451 5.). Ку 60 и

8.468 $K_{n+\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{k!\,(n-k)!\,(2z)^k}$ (сравни 8.451 6.). Ку 60

8.469 Частные случаи:

1. $N_{\frac{1}{2}}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z.$

2. $N_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z.$

3. $K_{\pm\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}.$ В 95 (13)

4. $H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{iz}}{i}.$ МО 27

5. $H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{-iz}}{-i}.$ МО 27

6. $H^{(1)}_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{iz}.$ МО 27

7. $H^{(2)}_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-iz}.$ МО 27

8.47 — 8.48 Функциональные соотношения

8.471 Рекуррентные формулы:

1. $zZ_{\nu-1}(z)+zZ_{\nu+1}(z)=2\nu Z_\nu(z).$ Ку 56 (13), В 56 (1), В 79 (1), В 88 (3)

2. $Z_{\nu-1}(z)-Z_{\nu+1}(z)=2\frac{d}{dz}Z_\nu(z).$ Ку 56 (12), В 56 (2), В 79 (2), В 88 (4)

Сонин и Нильсен при построении теории цилиндрических функций определяли эти последние как аналитические функции z, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям 8.471.

8.472 Следствия из рекуррентных формул:

1. $z\frac{d}{dz}Z_\nu(z)+\nu Z_\nu(z)=zZ_{\nu-1}(z).$ Ку 56 (11), В 56 (3), В 79 (3), В 88 (5)

2. $z\frac{d}{dz}Z_\nu(z)-\nu Z_\nu(z)=-zZ_{\nu+1}(z)$. Ку 56 (10), В 56 (4), В 79 (4), В 88 (6)

3. $\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m (z^\nu Z_\nu(z))=z^{\nu-m}Z_{\nu-m}(z)$. Ку 56 (8), В 57 (5), В 89 (9)

4. $\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m (z^{-\nu} Z_\nu(z))=(-1)^m z^{-\nu-m}Z_{\nu+m}(z)$.

В 89 (10), Ку 55 (5), В 57 (6)

5. $Z_{-n}(z)=(-1)^n Z_n(z)$ [n — натуральное число] (сравни 8.404).

8.473 Частные случаи:

1. $J_2(z)=\frac{2}{z}J_1(z)-J_0(z)$.

2. $N_2(z)=\frac{2}{z}N_1(z)-N_0(z)$.

3. $H_2^{(1,2)}(z)=\frac{2}{z}H_1^{(1,2)}(z)-H_0^{(1,2)}(z)$.

4. $\frac{d}{dz}J_0(z)=-J_1(z)$.

5. $\frac{d}{dz}N_0(z)=-N_1(z)$.

6. $\frac{d}{dz}H_0^{(1,2)}(z)=-H_1^{(1,2)}(z)$.

8.474 Каждая из пар функций $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ ($\nu\neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); $J_\nu(z)$ и $N_\nu(z)$; $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$, служащих решениями уравнения 8.401, а также пара функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ представляют собой пары линейно независимых функций. Вронскианы этих пар соответственно равны

$$\frac{2}{\pi z}\sin\nu\pi,\quad \frac{2}{\pi z},\quad -\frac{4i}{\pi z},\quad -\frac{1}{z}.$$

Ку 52 (10), Ку 52 (11), Ку 52 (12), В 90 (1), В 90 (4)

8.475 Функция $J_\nu(z)$, $N_\nu(z)$, $H_\nu^{(1,2)}(z)$, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$, за исключением $J_n(z)$ при n целом, неоднозначны: $z=0$ служит для них точкой ветвления. Ветви этих функций, лежащие по разные стороны от разреза $(-\infty, 0)$, связаны соотношениями (обхода):

8.476

1. $J_\nu(e^{m\pi i}z)=e^{m\nu\pi i}J_\nu(z)$. В 90 (1)

2. $N_\nu(e^{m\pi i}z)=e^{-m\nu\pi i}N_\nu(z)+2i\sin m\nu\pi\operatorname{ctg}\nu\pi J_\nu(z)$. В 90 (3)

3. $N_{-\nu}(e^{m\pi i}z)=e^{-m\nu\pi i}N_{-\nu}(z)+2i\sin m\nu\pi\operatorname{cosec}\nu\pi J_\nu(z)$. В 90 (4)

4. $I_\nu(e^{m\pi i}z)=e^{m\nu\pi i}I_\nu(z)$. В 95 (17)

5. $K_\nu(e^{m\pi i}z)=e^{-m\nu\pi i}K_\nu(z)-i\pi\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}I_\nu(z)$ [ν не равно целому числу].

В 95 (18)

6. $H_\nu^{(1)}(e^{m\pi i}z)=e^{-m\nu\pi i}H_\nu^{(1)}(z)-2e^{-\nu\pi i}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}J_\nu(z)=$

$$=\frac{\sin(1-m)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(1)}(z)-e^{-\nu\pi i}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(2)}(z).$$ В 95 (5)

7. $H_\nu^{(2)}(e^{m\pi i}z) = e^{-m\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(z) + 2e^{\nu\pi i} \frac{\sin m\nu\pi}{\sin \nu\pi} J_\nu(z) =$

$$= \frac{\sin(1+m)\nu\pi}{\sin\nu\pi} H_\nu^{(2)}(z) + e^{\nu\pi i} \frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi} H_\nu^{(1)}(z)$$ В 90 (6)

[m — целое число].

8. $H_\nu^{(1)}(e^{i\pi}z) = -H_{-\nu}^{(2)}(z) = -e^{-i\pi\nu} H_\nu^{(2)}(z)$. МО 26

9. $H_\nu^{(2)}(e^{-i\pi}z) = -H_{-\nu}^{(1)}(z) = -e^{i\pi\nu} H_\nu^{(1)}(z)$. МО 26

10. $\overline{H_\nu^{(2)}(z)} = H_\nu^{(1)}(\bar{z})$. МО 26

8.477

1. $J_\nu(z) N_{\nu+1}(z) - J_{\nu+1}(z) N_\nu(z) = -\frac{2}{\pi z}$. В 91 (12)

2. $I_\nu(z) K_{\nu+1}(z) + I_{\nu+1}(z) K_\nu(z) = \frac{1}{z}$. В 95 (20)

См. также 3.864.
Связь с шаровыми функциями см. **8.722**
Связь с полиномами $C_n^\lambda(t)$ см 8.936 4.
Связь с вырожденной гипергеометрической функцией см **9.235**.

8.478 При $\nu > 0$ и $x > 0$ произведение

$$x[J_\nu^2(x) + N_\nu^2(x)],$$

рассматриваемое как функция x, монотонно убывает, если $\nu > \frac{1}{2}$, и монотонно возрастает, если $0 < \nu < \frac{1}{2}$. МО 35

8.479

1. $\frac{1}{\sqrt{x^2-\nu^2}} > \frac{\pi}{2}[J_\nu^2(x) + N_\nu^2(x)] \geqslant \frac{1}{x}$ $\quad \left[x \geqslant \nu \geqslant \frac{1}{2}\right]$

(см. также **6.518**, **6.664** 4., **8.456**). МО 35

2. $|J_n(nz)| \leqslant 1$ $\quad \left[\left|\frac{z\exp\sqrt{1-z^2}}{1+\sqrt{1-z^2}}\right| < 1,\ n — \text{натуральное число}\right]$. МО 35

Соотношения между цилиндрическими функциями 1-го, 2-го и 3-го рода

8.481 $J_\nu(z) = \frac{N_{-\nu}(z) - N_\nu(z)\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi} = H_\nu^{(1)}(z) - iN_\nu(z) =$

$$= H_\nu^{(2)}(z) + iN_\nu(z) = \frac{1}{2}(H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z))$$

(сравни 8.403 1., 8.405). В 89 (1), ЯЭ 228

8.482 $N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} = iJ_\nu(z) - iH_\nu^{(1)}(z) =$

$$= iH_\nu^{(2)}(z) - iJ_\nu(z) = \frac{i}{2}(H_\nu^{(2)}(z) - H_\nu^{(1)}(z))$$

(сравни 8.403 1., 8.405). В 89 (3), ЯЭ 228

8.483

1. $H_\nu^{(1)}(z) = \dfrac{J_{-\nu}(z) - e^{-\nu\pi i} J_\nu(z)}{i \sin \nu\pi} = \dfrac{N_{-\nu}(z) - e^{-\nu\pi i} N_\nu(z)}{\sin \nu\pi} = J_\nu(z) + iN_\nu(z)$ B 89 (5

2. $H_\nu^{(2)}(z) = \dfrac{e^{\nu\pi i} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{i \sin \nu\pi} = \dfrac{N_{-\nu}(z) - e^{\nu\pi i} N_\nu(z)}{\sin \nu\pi} = J_\nu(z) - iN_\nu(z)$ (сравни 8.405). B 89 (6

8.484

1. $H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(z)$. B 89 (7)

2 $H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(z)$. B 89 (7)

8.485 $K_\nu(z) = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi}$ [ν не равно целому числу] (см. также 8.407) B 92 (6)

8.486 Рекуррентные формулы и их следствия для функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$:

1. $zI_{\nu-1}(z) - zI_{\nu+1}(z) = 2\nu I_\nu(z)$. B 93 (1)

2 $I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2\dfrac{d}{dz} I_\nu(z)$. B 93 (2)

3. $z\dfrac{d}{dz} I_\nu(z) + \nu I_\nu(z) = zI_{\nu-1}(z)$. B 93 (3)

4. $z\dfrac{d}{dz} I_\nu(z) - \nu I_\nu(z) = zI_{\nu+1}(z)$. B 93 (4)

5. $\left(\dfrac{d}{z\,dz}\right)^m \{z^\nu I_\nu(z)\} = z^{\nu-m} I_{\nu-m}(z)$. B 93 (5)

6. $\left(\dfrac{d}{z\,dz}\right)^m \{z^{-\nu} I_\nu(z)\} = z^{-\nu-m} I_{\nu+m}(z)$. B 93 (6)

7. $I_{-n}(z) = I_n(z)$ [n — натуральное число]. B 93 (8)

8. $I_2(z) = -\dfrac{2}{z} I_1(z) + I_0(z)$.

9 $\dfrac{d}{dz} I_0(z) = I_1(z)$. B 93 (7)

10. $zK_{\nu-1}(z) - zK_{\nu+1}(z) = -2\nu K_\nu(z)$. B 93 (1)

11. $K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2\dfrac{d}{dz} K_\nu(z)$. B 93 (2)

12 $z\dfrac{d}{dz} K_\nu(z) + \nu K_\nu(z) = -zK_{\nu-1}(z)$. B 93 (3

13. $z\dfrac{d}{dz} K_\nu(z) - \nu K_\nu(z) = -zK_{\nu+1}(z)$. B 93 (4)

14. $\left(\dfrac{d}{z\,dz}\right)^m \{z^\nu K_\nu(z)\} = (-1)^m z^{\nu-m} K_{\nu-m}(z)$. B 93 (5)

15. $\left(\dfrac{d}{z\,dz}\right)^m \{z^{-\nu} K_\nu(z)\} = (-1)^m z^{-\nu-m} K_{\nu+m}(z)$. B 93 (6)

16 $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$. B 93 (8)

17. $K_2(z) = \dfrac{2}{z} K_1(z) + K_0(z)$.

18. $\dfrac{d}{dz} K_0(z) = -K_1(z)$. B 93 (7)

8.487 Непрерывность по индексу *):

$$\left.\begin{array}{ll}1 & \lim\limits_{\nu\to n} N_\nu(z)=N_n(z)\\ 2 & \lim\limits_{\nu\to n} H_\nu^{(1,2)}(z)=H_n^{(1,2)}(z)\\ 3. & \lim\limits_{\nu\to n} K_\nu(z)=K_n(z)\end{array}\right\}\ [n\text{ — целое число}].$$

1 — В 76
2 — В 183
3 — В 92

8.49 Дифференциальные уравнения, приводящие к цилиндрическим функциям

См. также 8.401

8.491

1 $\frac{1}{z}\frac{d}{dz}(zu')+\left(\beta^2-\frac{\nu^2}{z^2}\right)u=0, \qquad u=Z_\nu(\beta z).$ ЯЭ 237

2. $\frac{1}{z}\frac{d}{dz}(zu')+\left[(\beta\gamma z^{\gamma-1})^2-\left(\frac{\nu\gamma}{z}\right)^2\right]u=0, \qquad u=Z_\nu(\beta z^\gamma)$ ЯЭ 237

3. $u''+\frac{1-2\alpha}{z}u'+\left[(\beta\gamma z^{\gamma-1})^2-\frac{\alpha^2-\nu\gamma^2}{z^2}\right]u=0, \qquad u=z^\alpha Z_\nu(\beta z^\gamma).$ ЯЭ 237

4 $u''+\left[(\beta\gamma z^{\gamma-1})^2-\frac{4\nu^2\gamma^2-1}{4z^2}\right]u=0, \qquad u=\sqrt{z}\,Z_\nu(\beta z^\gamma).$ ЯЭ 237

5. $u''+\left(\beta^2-\frac{4\nu^2-1}{4z^2}\right)u=0, \qquad u=\sqrt{z}Z_\nu(\beta z).$ ЯЭ 237

6. $u''+\frac{1-2\alpha}{z}u'+\left(\beta^2+\frac{\alpha^2-\nu^2}{z^2}\right)u=0, \qquad u=z^\alpha Z_\nu(\beta z).$ ЯЭ 237

7 $u''+bz^m u=0, \quad u=\sqrt{z}\,Z_{\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}z^{\frac{m+2}{2}}\right).$ ЯЭ 238

8 $u''+\frac{1}{z}u'+4\left(z^2-\frac{\nu^2}{z^2}\right)u=0, \qquad u=Z_\nu(z^2).$ В 111 (5)

9. $u''+\frac{1}{z}u'+\frac{1}{4z}\left(1-\frac{\nu^2}{z}\right)u=0, \qquad u=Z_\nu\left(\sqrt{z}\right).$ В 111 (6)

10. $u''+\frac{1-\nu}{z}u'+\frac{1}{4}\frac{u}{z}=0, \quad u=z^{\frac{\nu}{2}}Z_\nu\left(\sqrt{z}\right).$ В 111 (7)

11. $u''+\beta^2\gamma^2 z^{2\beta-2}u=0, \quad u=z^{\frac{1}{2}}Z_{\frac{1}{2\beta}}(\gamma z^\beta).$ В 111 (9) u

12. $z^2u''+(2\alpha-2\beta\nu+1)zu'+[\beta^2\gamma^2z^{2\beta}+\alpha(\alpha-2\beta\nu)]u=0,$

$u=z^{\beta\nu-\alpha}Z_\nu(\gamma z^\beta).$ В 110 (3)

8.492

1. $u''+(e^{2z}-\nu^2)u=0, \quad u=Z_\nu(e^z).$ В 112 (21)

2. $u''+\frac{e^{\frac{2}{z}}-\nu^2}{z^4}u=0, \qquad u=zZ_\nu\left(e^{\frac{1}{z}}\right).$ В 112 (22)

*) Непрерывность по индексу для функций $J_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ следует непосредственно из представления этих функций с помощью рядов.

8.493

1. $u'' + \left(\frac{1}{z} - 2\operatorname{tg} z\right) u' - \left(\frac{\nu^2}{z^2} + \frac{\operatorname{tg} z}{z}\right) u = 0, \quad u = \sec z\, Z_\nu(z).$ ЯЭ 238

2. $u'' + \left(\frac{1}{z} + 2\operatorname{ctg} z\right) u' - \left(\frac{\nu^2}{z^2} - \frac{\operatorname{ctg} z}{z}\right) u = 0, \quad u = \operatorname{cosec} z\, Z_\nu(z).$ ЯЭ 238

8.494

1. $u'' + \frac{1}{z} u' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0, \quad u = Z_\nu(iz) = C_1 I_\nu(z) + C_2 K_\nu(z).$ ЯЭ 237

2. $u'' + \frac{1}{z} u' - \left[\frac{1}{z} + \left(\frac{\nu}{2z}\right)^2\right] u = 0, \quad u = Z_\nu(2i\sqrt{z}).$ ЯЭ 238

3. $u'' + u' + \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{4} - \nu^2\right) u = 0, \quad u = \sqrt{z}\, e^{-\frac{z}{2}} Z_\nu\left(\frac{iz}{2}\right).$ ЯЭ 238

4. $u'' + \left(\frac{2\nu+1}{z} - k\right) u' - \frac{2\nu+1}{2z} k u = 0, \quad u = z^{-\nu} e^{\frac{1}{2}kz} Z_\nu\left(\frac{ikz}{2}\right).$ ЯЭ 238

5. $u'' + \frac{1-\nu}{z} u' - \frac{1}{4}\frac{u}{z} = 0, \quad u = z^{\frac{\nu}{2}} Z_\nu(i\sqrt{z}).$ В 111 (8)

6. $u'' \pm \frac{u}{\sqrt{z}} = 0, \quad u = \sqrt{z}\, Z_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{3} z^{\frac{3}{4}}\right), \quad \sqrt{z}\, Z_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{3} i z^{\frac{3}{4}}\right).$ В 111 (10)

7. $u'' \pm zu = 0, \quad u = \sqrt{z}\, Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right), \quad \sqrt{z}\, Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} i z^{\frac{3}{2}}\right).$ В 111 (10)

8. $u'' - \left(c^2 + \frac{\nu(\nu+1)}{z^2}\right) u = 0, \quad u = \sqrt{z}\, Z_{\nu+\frac{1}{2}}(icz).$ В 108 (1)

9. $u'' - \frac{2\nu}{z} u' - c^2 u = 0, \quad u = z^{\nu+\frac{1}{2}} Z_{\nu+\frac{1}{2}}(icz).$ В 109 (3), В 109 (4)

10. $u'' - c^2 z^{2\nu-2} u = 0, \quad u = \sqrt{z}\, Z_{\frac{1}{2\nu}}\left(i\frac{c}{\nu} z^\nu\right).$ В 109 (5), В 109 (6)

8.495

1. $u'' + \frac{1}{z} u' + \left(i - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0, \quad u = Z_\nu(z\sqrt{i}).$ ЯЭ 238

2. $u'' + \left(\frac{1}{z} \mp 2i\right) u' - \left(\frac{\nu^2}{z^2} \pm \frac{i}{z}\right) u = 0, \quad u = e^{\pm iz} Z_\nu(z).$ ЯЭ 238

3. $u'' + \frac{1}{z} u' + s e^{i\alpha} u = 0, \quad u = Z_0\left(\sqrt{s}\, z e^{\frac{i}{2}\alpha}\right).$ ЯЭ 238

4. $u'' + \left(s e^{i\alpha} + \frac{1}{4z^2}\right) u = 0, \quad u = \sqrt{z}\, Z_0\left(\sqrt{s}\, z e^{\frac{i}{2}\alpha}\right).$ ЯЭ 238

8.496

1. $\frac{d^2}{dz^2}\left(z^4 \frac{d^2 u}{dz^2}\right) - z^2 u = 0, \quad u = \frac{1}{z}\{Z_2(2\sqrt{z}) + \overline{Z}_2(2i\sqrt{z})\}.$ В 122 (7)

2. $\frac{d^2}{dz^2}\left(z^{\frac{16}{5}} \frac{d^2 u}{dz^2}\right) - z^{\frac{8}{5}} u = 0, \quad u = z^{-\frac{7}{10}}\left\{Z_{\frac{5}{6}}\left(\frac{5}{3} z^{\frac{3}{5}}\right) + \overline{Z}_{\frac{5}{6}}\left(\frac{5}{3} i z^{\frac{3}{5}}\right)\right\}.$

В 122 (8)

3. $\frac{d^2}{dz^2}\left(z^{12}\frac{d^2u}{dz^2}\right)-z^6u=0,\quad u=z^{-4}\{Z_{10}(2z^{-\frac{1}{2}})+\overline{Z}_{10}(2iz^{-\frac{1}{2}})\}.$ В 122 (9)

4. $\frac{d^4u}{dz^4}+\frac{2}{z}\frac{d^3u}{dz^3}-\frac{2\nu^2+1}{z^2}\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{2\nu^2+1}{z^3}\frac{du}{dz}+\left(\frac{\nu^4-4\nu^2}{z^4}-1\right)u=0,$

$u=A_1J_\nu(z)+A_2N_\nu(z)+A_3I_\nu(z)+A_4K_\nu(z),$ где $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ — постоянные. МО 29

8.51—8.52 Ряды бесселевых функций

8.511 Производящая функция для бесселевых функций:

1. $\exp\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)z=J_0(z)+\sum_{k=1}^{\infty}[t^k+(-t)^{-k}]J_k(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(z)t^k$

$[|z|<|t|]$. Ку 119 (12)

2. $\exp\left(t-\frac{1}{t}\right)z=\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}t^kJ_k(z)\right\}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}t^mJ_m(z)\right\}.$ В 40

3. $\exp(\pm iz\sin\varphi)=J_0(z)+2\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k}(z)\cos 2k\varphi\ \pm$

$\pm\ 2i\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}(z)\sin(2k+1)\varphi.$ Ку 120 (13)

4. $\exp(iz\cos\varphi)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)i^kJ_{k+\frac{1}{2}}(z)P_k(\cos\varphi);$ В 401 (1)

$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}i^kJ_k(z)e^{ik\varphi};$ МО 27

$=1+2\sum_{k=1}^{\infty}i^kJ_k(z)\cos k\varphi.$ МО 27

5. $\sqrt{\frac{i}{\pi}}e^{iz\cos 2\varphi}\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{2z}\cos\varphi}e^{-it^2}\,dt=\frac{1}{2}J_0(z)+\sum_{k=1}^{\infty}e^{\frac{1}{4}k\pi i}J_{\frac{k}{2}}(z)\cos k\varphi.$ МО 28

Ряды $\Sigma J_k(z)$

8.512

1. $J_0(z)+2\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k}(z)=1.$ В 44

2. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+2k)(n+k-1)!}{k!}J_{n+2k}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^n.$ В 45

3. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+1)(2k-1)!!}{2^kk!}J_{2k+\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{2z}.$

8.513

1. $\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{2p}J_{2k}(z)=\sum_{k=0}^{p}Q_{2k}^{(2p)}z^{2k}\quad [p=1, 2, 3, \ldots].$ В 46 (1)

2. $\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^{2p+1}J_{2k+1}(z)=\sum_{k=0}^{p}Q_{2k+1}^{(2p+1)}z^{2k+1}\ [p=0, 1, 2, 3, \ldots].$ В 46 (2)

$$\left[\text{В формулах 8.513}\quad Q_k^{(p)}=\sum_{m=0}^{E\left(\frac{k-1}{2}\right)}\frac{(-1)^m\binom{m}{k}(k-2m)^p}{2^k k!}\right].$$

В частности:

3. $\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^3J_{2k+1}(z)=\frac{1}{2}(z+z^3).$ В 47 (4)

4. $\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^2J_{2k}(z)=\frac{1}{2}z^2.$ В 47 (4)

5. $\sum_{k=1}^{\infty}2k\,(2k+1)\,(2k+2)\,J_{2k+1}(z)=\frac{1}{2}z^3.$ В 47 (4)

8.514

1. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kJ_{2k+1}(z)=\frac{\sin z}{2}.$ УВ II 192

2. $J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kJ_{2k}(z)=\cos z.$ УВ II 192

3. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(2k)^2J_{2k}(z)=\frac{z\sin z}{2}.$ В 32 (9)

4. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)^2J_{2k+1}(z)=\frac{z\cos z}{2}.$ В 32 (10)

5. $J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(z)\cos 2k\theta=\cos(z\sin\theta).$ Ку 120 (14), В 32

6. $\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}(z)\sin(2k+1)\theta=\frac{\sin(z\sin\theta)}{2}.$ Ку 120 (15), В 32

7. $\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}(x)=\frac{1}{2}\int_0^x J_0(t)\,dt\quad$ [x действительно]. В 638

8.515

1. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kt^k}{k!}\left(\frac{2z+t}{2z}\right)^kJ_{\nu+k}(z)=\left(\frac{z}{z+t}\right)^{\nu}J_{\nu}(z+t).$ А (9140)

2. $\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k-\frac{1}{2}}(x^2)=S(x).$ МО 127 u

3. $\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+\frac{1}{2}}(x^2) = C(x).$ МО 127 *u*

8.516 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n+2k)(2n+k-1)!}{k!} J_{2n+2k}(2z\sin\theta) = (z\sin\theta)^{2n}$ В 47

Ряды $\Sigma a_k J_k(kx)$ и $\Sigma a_k J'_k(kx)$

8.517

1. $\sum_{k=1}^{\infty} J_k(kz) = \frac{z}{2(1-z)}$ В 615 (1)
2. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k(kz) = -\frac{z}{2(1+z)}$ В 622 (1)
3. $\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(2kz) = \frac{z^2}{2(1-z^2)}$ МО 58

$$\left[\left|\frac{z\exp\sqrt{1-z^2}}{1+\sqrt{1-z^2}}\right| < 1\right].$$

8.518

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J'_k(kx)}{k} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$ $[0 \leqslant x < 1].$ МО 58
2. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{J'_k(kx)}{k} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$ $[0 \leqslant x < 1].$ МО 58
3. $\sum_{k=1}^{\infty} kJ'_k(kx) = \frac{1}{2(1-x)^2}$ $[0 \leqslant x < 1].$ МО 58
4. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} J'_k(kx) = \frac{1}{2(1+x)^2}$ $[0 \leqslant x < 1].$ МО 58

Ряды $\Sigma a_k J_0(kx)$

8.519 Если функция $f(x)$ обладает на отрезке $[0 \leqslant x \leqslant \pi]$ непрерывными производными по x с ограниченной вариацией, то

1. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(kx)$ $[0 < x < \pi],$

где

2. $a_0 = 2f(0) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} uf'(u\sin\varphi)\,d\varphi.$
3. $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} uf'(u\sin\varphi)\cos nu\,d\varphi.$ УВII 193

8.521 Примеры·

1 $$\sum_{k=1}^{\infty} J_0(kx) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x} + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x^2-4m^2\pi^2}} \qquad [2n\pi < x < 2(n+1)\pi].$$ МО 59

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} J_0(kx) = \frac{1}{2} \qquad [0 < x < \pi].$$ Ку 124 (12)

3. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} J_0\{(2k-1)x\} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{|x|}{2} \qquad [-\pi < x < \pi];$$ Ку 124

$$= \frac{\pi^2}{8} + \sqrt{x^2-\pi^2} - \frac{x}{2} - \pi \arccos\frac{\pi}{x} \qquad [\pi < x < 2\pi]$$ МО 59

4. $$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kz} J_0\left(k\sqrt{x^2+y^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2ki\pi+z)^2+x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2ki\pi-z)^2+x^2+y^2}}\right\};$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} B_{2k} r^{2k-1} P_{2k-1}\left(\frac{z}{r}\right) \qquad [0 < r < 2\pi],$$ МО 59

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, а под квадратным корнем понимается то его значение, у которого действительная часть положительна В формуле 8.521 4. первое равенство имеет место, когда x и y действительны, а $\operatorname{Re} z > 0$, последнее же равенство имеет место, когда x, y и z действительны.

Ряды $\sum a_k Z_0(kx) \sin kx$ и $\sum a_k Z_0(kx) \cos kx$

8.522

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} J_0(kx)\cos kxt = -\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{x^2-(2\pi l+tx)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{x\sqrt{1-t^2}} + \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x^2-(2\pi l-tx)^2}}.$$ МО 59

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} J_0(kx)\sin kxt = \frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l} - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right\} +$$

$$+ \sum_{l=m+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\pi l+tx)^2-x^2}} - \frac{1}{2\pi l}\right\} - \sum_{l=n+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\pi l-tx)^2-x^2}} - \frac{1}{2\pi l}\right\}.$$

МО 59

3. $$\sum_{k=1}^{\infty} N_0(kx)\cos kxt = -\frac{1}{\pi}\left(C+\ln\frac{x}{4\pi}\right)+\frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}+\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}\right\}-$$
$$-\sum_{l=m+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\pi l+tx)^2-x^2}}-\frac{1}{2\pi l}\right\}-\sum_{l=n+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\pi l-tx)^2-x^2}}-\frac{1}{2\pi l}\right\}.$$ МО 60

В формулах 8.522 $x>0$, $0\leqslant t<1$, $2\pi m<x(1-t)<2(m+1)\pi$, $2n\pi<x(1+t)<2(n+1)\pi$, $m+1$ и $n+1$ — натуральные числа.

8.523

1. $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_0(kx)\cos kxt = -\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{x^2-[(2l-1)\pi+tx]^2}}+$$
$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x^2-[(2l-1)\pi-tx]^2}}.$$ МО 60

2. $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_0(kx)\sin kxt = \frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}-\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right\}+$$
$$+\sum_{l=m+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{[(2l-1)\pi+tx]^2-x^2}}-\frac{1}{2l\pi}\right\}-$$
$$-\sum_{l=n+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{[(2l-1)\pi-tx]^2-x^2}}-\frac{1}{2l\pi}\right\}.$$ МО 60

3. $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k N_0(kx)\cos kxt = -\frac{1}{\pi}\left(C+\ln\frac{x}{4\pi}\right)+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}+\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}\right\}-\sum_{l=m+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{[(2l-1)\pi+tx]^2-x^2}}-\frac{1}{2l\pi}\right\}-$$
$$-\sum_{l=n+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{[(2l-1)\pi-tx]^2-x^2}}-\frac{1}{2l\pi}\right\}.$$ МО 60

В формулах 8.523 $x>0$, $0\leqslant t<1$, $(2m-1)\pi<x(1-t)<(2m+1)\pi$, $(2n-1)\pi<x(1+t)<(2n+1)\pi$, m и n — натуральные числа.

8.524

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} J_0(kx)\cos kxt = -\frac{1}{2}+\sum_{l=m+1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x^2-(2l\pi-tx)^2}}.$$ МО 60

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} J_0(kx)\sin kxt = \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{\sqrt{(2l\pi-tx)^2-x^2}}+$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2l\pi+tx)^2-x^2}}-\frac{1}{2l\pi}\right\}-$$
$$-\sum_{l=n+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2l\pi-tx)^2-x^2}}-\frac{1}{2l\pi}\right\}+\frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}.$$ МО 60

3. $$\sum_{k=1}^{\infty} N_0(kx)\cos kxt = -\frac{1}{\pi}\left(C+\ln\frac{x}{4\pi}\right)-\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{\sqrt{(2\pi l-tx)^2-x^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}-\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2l\pi+tx)^2-x^2}}-\frac{1}{2l\pi}\right\}-$$
$$-\sum_{l=n+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2l\pi-tx)^2-x^2}}-\frac{1}{2l\pi}\right\}.$$ МО 61

В формулах 8.524 $x>0$, $t>1$, $2m\pi<x(t-1)<2(m+1)\pi$, $2n\pi<x(t+1)<<2(n+1)\pi$, $m+1$ и $n+1$ — натуральные числа.

8.525

1. $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_0(kx)\cos kxt = -\frac{1}{2}+\sum_{l=m+1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x^2-[(2l-1)\pi-tx]^2}}.$$ МО 61

2. $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_0(kx)\sin kxt = \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{[(2l-1)\pi-tx]^2-x^2}}+\frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}+$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{[(2l-1)\pi+tx]^2-x^2}}-\frac{1}{2l\pi}\right\}-$$
$$-\sum_{l=n+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{[(2l-1)\pi-tx]^2-x^2}}-\frac{1}{2l\pi}\right\}.$$ МО 61

3. $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k N_0(kx)\cos kxt = -\frac{1}{\pi}\left(C+\ln\frac{x}{4\pi}\right)+\frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}-$$
$$-\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{[(2l-1)\pi-tx]^2-x^2}}-\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{[(2l-1)\pi+tx]^2-x^2}}-\frac{1}{2l\pi}\right\}-$$
$$-\sum_{l=n+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{[(2l-1)\pi-tx]^2-x^2}}-\frac{1}{2l\pi}\right\}.$$ МО 61

В формулах 8.525 $x>0$, $t>1$, $(2m-1)\pi<x(t-1)<(2m+1)\pi$, $(2n-1)\pi<<x(t+1)<(2n+1)\pi$, m и n — натуральные числа.

8.526

1. $$\sum_{k=1}^{\infty}K_0(kx)\cos kxt = \frac{1}{2}\left(C+\ln\frac{x}{4\pi}\right)+\frac{\pi}{2x\sqrt{1+t^2}}+$$
$$+\frac{\pi}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+(2l\pi-tx)^2}}-\frac{1}{2l\pi}\right\}+\frac{\pi}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+(2l\pi+tx)^2}}-\frac{1}{2l\pi}\right\}.$$
МО 61

$$2 \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k K_0(kx) \cos kxt = \frac{1}{2}\left(C + \ln\frac{x}{4\pi}\right) +$$
$$+ \frac{\pi}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + [(2l-1)\pi - xt]^2}} - \frac{1}{2l\pi} \right\} +$$
$$+ \frac{\pi}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + [(2l-1)\pi + xt]^2}} - \frac{1}{2l\pi} \right\}$$

$[x > 0,\ t$ действительно], (см. также **8.66**). МО 62

8.53 Разложение по произведениям цилиндрических функций

«Теоремы сложения»

8.530 Пусть $r > 0$, $\varrho > 0$, $\varphi > 0$ и $R = \sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\cos\varphi}$, т. е. пусть r, ϱ и R представляют собой стороны треугольника, у которого угол между сторонами r и ϱ равен φ. Пусть далее $\varrho < r$ и ψ — угол, противолежащий стороне ϱ, так что

$$1. \quad 0 < \psi < \frac{\pi}{2}, \quad e^{2i\psi} = \frac{r - \varrho e^{-i\varphi}}{r - \varrho e^{i\varphi}}.$$

При выполнении этих условий имеет место *«теорема сложения»* для цилиндрических функций:

$$2. \quad e^{i\nu\psi} Z_\nu(mR) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m\varrho) Z_{\nu+k}(mr) e^{ik\varphi}$$

[m — произвольное комплексное число]. В 394 (6)

При $Z_\nu = J_\nu$ и целочисленном ν ограничение $\varrho < r$ оказывается излишним.

МО 31

8.531 Частные случаи:

$$1 \quad J_0(mR) = J_0(m\varrho) J_0(mr) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(m\varrho) J_k(mr) \cos k\varphi \qquad \text{В 391 (1)}$$

$$2. \quad H_0^{(1,2)}(mR) = J_0(m\varrho) H_0^{(1,2)}(mr) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(m\varrho) H_k^{(1,2)}(mr) \cos k\varphi. \qquad \text{МО 31}$$

$$3. \quad J_0(z\sin\alpha) = J_0^2\left(\frac{z}{2}\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k^2\left(\frac{z}{2}\right) \cos 2k\alpha;$$
$$= \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(2k + \frac{1}{2}\right) \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} J_{2k+\frac{1}{2}}(z) P_{2k}(\cos\alpha). \qquad \text{МО 31}$$

8.532 «Теоремой сложения» называют также формулу

$$1. \quad \frac{Z_\nu(mR)}{R^\nu} = 2^\nu m^{-\nu} \Gamma(\nu) \sum_{k=0}^{\infty} (\nu + k) \frac{J_{\nu+k}(m\varrho)}{\varrho^\nu} \frac{Z_{\nu+k}(mr)}{r^\nu} C_k^\nu(\cos\varphi).$$

[$\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$; условия для r, ϱ, R, φ, m те же, что и в формуле 8.530; при $Z_\nu = J_\nu$ и ν целом формула 8.532 1 справедлива при любых r, ϱ и φ. В 398 (4)

8.533 Частные случаи:

1. $$\frac{e^{imR}}{R}=\frac{\pi i}{2\sqrt{r\varrho}}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)J_{k+\frac{1}{2}}(m\varrho)H^{(1)}_{k+\frac{1}{2}}(mr)P_k(\cos\varphi).$$ МО 31

2. $$\frac{e^{-imR}}{R}=-\frac{\pi i}{2\sqrt{r\varrho}}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)J_{k+\frac{1}{2}}(m\varrho)H^{(2)}_{k+\frac{1}{2}}(mr)P_k(\cos\varphi).$$ МО 31

8.534 Вырожденная теорема сложения $(r\to\infty)$:

$$e^{im\varrho\cos\varphi}=\sqrt{\frac{\pi}{2m\varrho}}\sum_{k=0}^{\infty}i^k(2k+1)J_{k+\frac{1}{2}}(m\varrho)P_k(\cos\varphi);$$ В 401 (1)

$$=2^{\nu}\Gamma(\nu)\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\,i^k(m\varrho)^{-\nu}J_{\nu+k}(m\varrho)\,C_k^{\nu}(\cos\varphi)$$ В 401 (2)

$$[\nu\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots].$$

8.535 «Теоремой умножения» называют формулу

$$Z_\nu(\lambda z)=\lambda^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}Z_{\nu+k}(z)\left[\frac{1-\lambda^2}{2}z\right]^k\qquad[|1-\lambda|^2<1].$$

При $Z_\nu=J_\nu$ она справедлива для любых значений λ и z. МО 32

8.536

1. $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2n+2k)(2n+k-1)!}{k!}J^2_{n+k}(z)=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\qquad[n>0].$$ В 47 (1)

2. $$2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k\Gamma(n+k)}{\Gamma(k-n+1)}J_k^2(z)=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\qquad[n>0].$$ В 47 (2)

3. $$J_0^2(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_k^2(z)=1.$$ В 41 (3)

8.537 $$\sum_{k=-\infty}^{\infty}Z_{\nu-k}(t)J_k(z)=Z_\nu(z+t)\qquad[|z|<|t|].$$ В 158 (2)

В частности:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(z)J_{n-k}(z)=J_n(2z).$$ В 41

8.538

1. $$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^kJ_{-\nu+k}(t)J_k(z)=J_{-\nu}(z+t)\qquad[|z|<|t|].$$ В 159

2. $$\sum_{k=-\infty}^{\infty}Z_{\nu+k}(t)J_k(z)=Z_\nu(t-z)\qquad[|z|<|t|].$$ В 159 (5)

8.54 Корни цилиндрических функций

8.541 При любом действительном ν функция $J_\nu(z)$ имеет бесчисленное множество действительных корней; при $\nu>-1$ все ее корни действительны. В 526, В 530

Цилиндрическая функция $Z_\nu(z)$ не имеет кратных корней, за исключением, быть может, начала координат. В 528

8.542 Все корни функции $N_0(z)$, действительная часть которых положительна, действительны. В 531

8.543 Если $-(2s+2)<\nu<-(2s+1)$, где s — натуральное число или нуль, то $J_\nu(z)$ имеет ровно $4s+2$ комплексных корней, из которых два чисто мнимых; если $-(2s+1)<\nu<-2s$, где s — натуральное число, то функция $J_\nu(z)$ имеет ровно $4s$ комплексных корней, среди которых нет ни одного чисто мнимого. В 532

8.544 Если при $\nu>0$ x_ν и x'_ν суть соответственно наименьшие положительные корни функций $J_\nu(z)$ и $J'_\nu(z)$, то $x_\nu>\nu$, $x'_\nu>\nu$. Пусть, кроме того, y_ν — наименьший положительный корень функции $N_\nu(z)$; тогда $x_\nu<y_\nu<x_\nu$. В 534, В 536

Пусть $z_{\nu,m}$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$ — корни функции $z^{-\nu}J_\nu(z)$, упорядоченные в соответствии с абсолютной величиной их действительных частей; при этом предполагается, что $\nu\neq-1, -2, -3, \ldots$ В таком случае для любого z

$$J_\nu(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{z_{\nu,m}^2}\right). \qquad \text{В 550}$$

8.545 Число корней функции $z^{-\nu}J_\nu(z)$, лежащих между мнимой осью и линией, на которой

$$\operatorname{Re} z=m\pi+\left[\frac{1}{2}\operatorname{Re}\nu+\frac{1}{4}\right]\pi, \qquad \text{В 548}$$

равно в точности m.

8.546 При $\nu\geqslant 0$ число корней функции $K_\nu(z)$, лежащих в области $\operatorname{Re} z<0$, $|\arg z|<\pi$, равно ближайшему к $\nu-\frac{1}{2}$ четному числу. В 562

8.547 Большие корни функций $J_\nu(z)\cos\alpha-N_\nu(z)\sin\alpha$, где ν и α — действительные числа, даются асимптотическим разложением

$$x_{\nu,m}\sim\left(m+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}\right)\pi-\alpha-\frac{4\nu^2-1}{8\left[\left(m+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}\right)\pi-\alpha\right]}-$$
$$-\frac{(4\nu^2-1)(28\nu^2-31)}{384\left[\left(m+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{4}\right)\pi-\alpha\right]^3}-\ldots \qquad \text{Ку 109 (24), В 558}$$

8.548 В частности, большие корни функции $J_0(z)$ даются разложением

$$x_{0,m}\sim\frac{\pi}{4}(4m-1)+\frac{1}{2\pi(4m-1)}-\frac{31}{6\pi^3(4m-1)^3}+\frac{3779}{15\pi^5(4m-1)^5}-\ldots$$

Ку 109 (25), В 556

Этот ряд пригоден для вычисления всех (за исключением наименьшего x_{01}) корней функции $J_0(z)$ с точностью по крайней мере в пять знаков.

8.549 Для вычисления наименьших по абсолютной величине корней $x_{\nu,m}$ функции $J_\nu(z)$ можно пользоваться равенством

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{x_{\nu,m}^{16}}=\frac{429\nu^5+7640\nu^4+53752\nu^3+185430\nu^2+311387\nu+202738}{2^{16}(\nu+1)^8(\nu+2)^4(\nu+3)^2(\nu+4)^2(\nu+5)(\nu+6)(\nu+7)(\nu+8)}.$$

Ку 112 (27) *u*, В 554

8.55 Функции Струве

8.550 Определения:

1. $$\mathbf{H}_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu+1}}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+m+\frac{3}{2}\right)}.$$ В 358(2)

2. $$\mathbf{L}_\nu(z) = -ie^{-i\nu\frac{\pi}{2}}\mathbf{H}_\nu\left(ze^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu+1}}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+m+\frac{3}{2}\right)}.$$ В 360(11)

8.551 Интегральные представления.

1. $$\mathbf{H}_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \sin zt\, dt = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{2\nu}\,d\varphi \quad \left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ В 358(1)

2. $$\mathbf{L}_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sh}(z\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{2\nu}\,d\varphi \quad \left[\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}\right].$$ В 360(11)

8.552 Частные случаи:

1. $$\mathbf{H}_n(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2m-1}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-m\right)} - \mathbf{E}_n(z) \quad [n=1, 2, \ldots].$$ ВТФ II 40(66), В 367(1)

2. $$\mathbf{H}_{-n}(z) = (-1)^{n+1}\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(n-m-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m+1}}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)} - \mathbf{E}_{-n}(z) \quad [n=1, 2, \ldots].$$ ВТФ II 40(67), В 367(2)

3. $$\mathbf{H}_{n+\frac{1}{2}}(z) = N_{n+\frac{1}{2}}(z) + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2m+n-\frac{1}{2}}}{\Gamma(n+1-m)} \quad [n=0, 1, \ldots].$$ ВТФ II 39(64)

4. $$\mathbf{H}_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(z) = (-1)^n J_{n+\frac{1}{2}}(z) \quad [n=0, 1, \ldots].$$ ВТФ II 39(65)

5. $$\mathbf{L}_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(z) = I_{n+\frac{1}{2}}(z) \quad [n=0, 1, \ldots].$$ ВТФ II 39(65)

6. $\mathbf{H}_{\frac{1}{2}}(z)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi z}}(1-\cos z).$ ВТФ II 39, В 364(3)

7. $\mathbf{H}_{\frac{3}{2}}(z)=\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{z^2}\right)-\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sin z+\frac{\cos z}{z}\right).$ В 364(6)

8.553 Функциональные соотношения:

1. $\mathbf{H}_\nu(ze^{im\pi})=e^{i\pi(\nu+1)m}\mathbf{H}_\nu(z)\qquad [m=1, 2, 3, \ldots].$ В 362(5)

2. $\frac{d}{dz}[z^\nu\mathbf{H}_\nu(z)]=z^\nu\mathbf{H}_{\nu-1}(z).$ В 358

3. $\frac{d}{dz}[z^{-\nu}\mathbf{H}_\nu(z)]=2^{-\nu}\pi^{-\frac{1}{2}}\left[\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\right]^{-1}-z^{-\nu}\mathbf{H}_{\nu+1}(z).$ В 359

4. $\mathbf{H}_{\nu-1}(z)+\mathbf{H}_{\nu+1}(z)=2\nu z^{-1}\mathbf{H}_\nu(z)+\pi^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\left[\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\right]^{-1}.$ В 359(5)

5. $\mathbf{H}_{\nu-1}(z)-\mathbf{H}_{\nu+1}(z)=2\mathbf{H}_\nu'(z)-\pi^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\left[\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\right]^{-1}.$ В 359(6)

8.554 Асимптотические представления:

$$\mathbf{H}_\nu(\xi)=N_\nu(\xi)+\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\xi}{2}\right)^{-2m+\nu-1}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}-m\right)}+O\left(|\xi|^{\nu-2p-1}\right)$$

$[|\arg\xi|<\pi].$ ВТФ II 39 (63), В 363(2)

Асимптотическое представление для $N_\nu(\xi)$ см. 8.451 2.

8.555 Дифференциальное уравнение для функций Струве:

$$z^2y''+zy'+(z^2-\nu^2)y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{4\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}.$$ В 359(10)

8.56 Функции Томсона и их обобщения: $\mathrm{ber}_\nu(z)$, $\mathrm{bei}_\nu(z)$, $\mathrm{her}_\nu(z)$, $\mathrm{hei}_\nu(z)$, $\mathrm{ker}(z)$, $\mathrm{kei}(z)$

8.561

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \mathrm{ber}_\nu(z)+i\,\mathrm{bei}_\nu(z)=J_\nu\left(ze^{\frac{3}{4}\pi i}\right).\\ 2. & \mathrm{ber}_\nu(z)-i\,\mathrm{bei}_\nu(z)=J_\nu\left(ze^{-\frac{3}{4}\pi i}\right).\end{array}\right\}$$ В 96(6)

8.562

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \mathrm{her}_\nu(z)+i\,\mathrm{hei}_\nu(z)=H_\nu^{(1)}\left(ze^{\frac{3}{4}\pi i}\right)\\ 2. & \mathrm{her}_\nu(z)-i\,\mathrm{hei}_\nu(z)=H_\nu^{(1)}\left(ze^{-\frac{3}{4}\pi i}\right)\end{array}\right\}$$ (см. также 8.567). В 96(7)

8.563

1. $\operatorname{ber}_0(z) \equiv \operatorname{ber}(z); \quad \operatorname{bei}_0(z) \equiv \operatorname{bei}(z).$
2. $\operatorname{ker}(z) \equiv -\frac{\pi}{2}\operatorname{hei}_0(z); \quad \operatorname{kei}(z) \equiv \frac{\pi}{2}\operatorname{her}_0(z).$ В 96 (8)

Интегральные представления см. 6.251, 6.536, 6.537, 6.772 4., 6.777.

Представление в виде ряда

8.564

1. $$\operatorname{ber}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{4k}}{2^{4k}[(2k)!]^2}.$$ В 96 (3)

2. $$\operatorname{bei}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{4k+2}}{2^{4k+2}[(2k+1)!]^2}.$$ В 96 (4)

3. $$\operatorname{ker}(z) = \left(\ln\frac{2}{z} - C\right)\operatorname{ber}(z) + \frac{\pi}{4}\operatorname{bei}(z) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{4k}}{2^{4k}[(2k)!]^2}\sum_{m=1}^{2k}\frac{1}{m}.$$ В 96 (9) u, Д (824.3)

4. $$\operatorname{kei}(z) = \left(\ln\frac{2}{z} - C\right)\operatorname{bei}(z) - \frac{\pi}{4}\operatorname{ber}(z) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{4k+2}}{2^{4k+2}[(2k+1)!]^2}\sum_{m=1}^{2k+1}\frac{1}{m}.$$ В 96 (10) u, Д (824.4)

8.565 $$\operatorname{ber}_\nu^2(z) + \operatorname{bei}_\nu^2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu+4k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)\,\Gamma(\nu+2k+1)}.$$ В 163 (6)

Асимптотическое представление

8.566

1. $$\operatorname{ber}(z) = \frac{e^{\alpha(z)}}{\sqrt{2\pi z}}\cos\beta(z) \quad \left[|\arg z| < \frac{\pi}{4}\right].$$ В 227 (1)

2. $$\operatorname{bei}(z) = \frac{e^{\alpha(z)}}{\sqrt{2\pi z}}\sin\beta(z) \quad \left[|\arg z| < \frac{\pi}{4}\right].$$ В 227 (1)

3. $$\operatorname{ker}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{\alpha(-z)}\cos\beta(-z) \quad \left[|\arg z| < \frac{5}{4}\pi\right].$$ В 227 (2)

4. $$\operatorname{kei}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{\alpha(-z)}\sin\beta(-z) \quad \left[|\arg z| < \frac{5}{4}\pi\right],$$ В 227 (2)

где

$$\alpha(z) \sim \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8z\sqrt{2}} - \frac{25}{384z^3\sqrt{2}} - \frac{13}{128z^4} - \ldots,$$

$$\beta(z) \sim \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8z\sqrt{2}} - \frac{1}{16z^2} - \frac{25}{384z^3\sqrt{2}} + \ldots$$

8.567 Функциональные соотношения:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \operatorname{ker}(z)+i\operatorname{kei}(z)=K_0(z\sqrt{i}) \\ 2. & \operatorname{ker}(z)-i\operatorname{kei}(z)=K_0(z\sqrt{-i}) \end{array}\right\}\text{(см. 8.562).}$$ В 96 (5), Д 824.1)

Интегралы от функций Томсона см. **6.87**.

8.57 Функции Ломмеля

8.570 Определение функций Ломмеля $s_{\mu,\nu}(z)$, $S_{\mu,\nu}(z)$:

1. $$s_{\mu,\nu}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{\mu+1+2m}}{[(\mu+1)^2-\nu^2][(\mu+3)^2-\nu^2]\dots[(\mu+2m+1)^2-\nu^2]};$$

$$=z^{\mu-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+m+\frac{3}{2}\right)}$$

[$\mu\pm\nu$ не равно отрицательному нечетному числу]. ВТФ II 40 (69), В 377 (2)

2. $$S_{\mu,\nu}(z)=s_{\mu,\nu}(z)+\left[2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)\right]\times$$

$$\times\frac{\cos\left[\frac{1}{2}(\mu-\nu)\pi\right]J_{-\nu}(z)-\cos\left[\frac{1}{2}(\mu+\nu)\pi\right]J_{\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

[$\mu\pm\nu$ — положительное нечетное число, ν — нецелое число];

ВТФ II 40 (71), В 379 (2)

$$=s_{\mu,\nu}(z)+2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)\times$$

$$\times\left\{\sin\left[\frac{1}{2}(\mu-\nu)\pi\right]J_\nu(z)-\cos\left[\frac{1}{2}(\mu-\nu)\pi\right]N_\nu(z)\right\}$$

[$\mu\pm\nu$ — положительное нечетное число, ν — целое число].

ВТФ II 41 (71), В 379 (3)

Интегральные представления

8.571 $$s_{\mu,\nu}(z)=\frac{\pi}{2}\left[N_\nu(z)\int_0^z z^\mu J_\nu(z)\,dz-J_\nu(z)\int_0^z z^\mu N_\nu(z)\,dz\right].$$ В 378 (9)

8.572 $$s_{\mu,\nu}(z)=2^\mu\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}(1+\nu+\mu)}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu\right)\times$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}J_{\frac{1}{2}(1+\mu-\nu)}(z\sin\theta)(\sin\theta)^{\frac{1}{2}(1+\nu-\mu)}(\cos\theta)^{\nu+\mu}\,d\theta$$

[$\operatorname{Re}(\nu+\mu+1)>0$]. ВТФ II 42 (86)

8.573 Частные случаи:

1. $S_{1,2n}(z)=zO_{2n}(z)$. В 382 (1)
2. $S_{0,2n+1}(z)=\frac{z}{2n+1}O_{2n+1}(z)$. В 382 (1)

3. $S_{-1,\,2n}(z)=\frac{1}{4n}\mathcal{S}_{2n}(z)$. В 382 (2)

4. $S_{0,\,2n+1}(z)=\frac{1}{2}S_{2n+1}(z)$. В 382 (2)

5. $s_{\nu,\,\nu}(z)=\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,2^{\nu-1}\mathbf{H}_\nu(z)$. ВТФ II 42 (84)

6. $S_{\nu,\,\nu}(z)=[\mathbf{H}_\nu(z)-N_\nu(z)]\,2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)$. ВТФ II 42 (84)

8.574 Связь с другими специальными функциями:

1. $\mathbf{J}_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\sin(\nu\pi)\,[s_{0,\,\nu}(z)-\nu s_{1,\,\nu}(z)]$. ВТФ II 41 (82)

2. $\mathbf{E}_\nu(z)=-\frac{1}{\pi}\,[(1+\cos\nu\pi)\,s_{0,\,\nu}(z)+\nu\,(1-\cos\nu\pi)\,s_{-1,\,\nu}(z)]$. ВТФ II 42 (83)

Связь с гипергеометрической функцией

3. $s_{\mu,\,\nu}(z)=\frac{z^{\mu+1}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)}\,{}_1F_2\left(1;\ \frac{\mu-\nu+3}{2},\ \frac{\mu+\nu+3}{2};\ -\frac{z^2}{4}\right)$.

ВТФ II 40 (69), В 378 (10)

8.575 Функциональные соотношения:

1. $s_{\mu+2,\,\nu}(z)=z^{\mu+1}-[(\mu+1)^2-\nu^2]\,s_{\mu,\,\nu}(z)$. ВТФ II 41 (73), В 380 (1)

2. $s'_{\mu,\,\nu}(z)+\left(\frac{\nu}{z}\right)s_{\mu,\,\nu}(z)=(\mu+\nu-1)\,s_{\mu-1,\,\nu-1}(z)$.

ВТФ II 41 (74), В 380 (2)

3. $s'_{\mu,\,\nu}(z)-\left(\frac{\nu}{z}\right)s_{\mu,\,\nu}(z)=(\mu-\nu-1)\,s_{\mu-1,\,\nu+1}(z)$.

ВТФ II 41 (75), В 380 (3)

4. $\left(2\frac{\nu}{z}\right)s_{\mu,\,\nu}(z)=(\mu+\nu-1)\,s_{\mu-1,\,\nu-1}(z)-(\mu-\nu-1)\,s_{\mu-1,\,\nu+1}(z)$.

ВТФ II 41 (76), В 380 (4)

5. $2s'_{\mu,\,\nu}(z)=(\mu+\nu-1)\,s_{\mu-1,\,\nu-1}(z)+(\mu-\nu-1)\,s_{\mu-1,\,\nu+1}(z)$

ВТФ II 41 (77), В 380 (5)

В формулах 8.575 1.—5. $s_{\mu,\,\nu}(z)$ могут быть заменены на $S_{\mu,\,\nu}(z)$.

8.576 Асимптотическое разложение для $S_{\mu,\,\nu}(z)$. В случае, если $\mu\pm\nu$ не есть нечетное положительное число, для $S_{\mu,\,\nu}(z)$ справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$S_{\mu,\,\nu}(z)=z^{\mu-1}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(-1)^m\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+m\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^m\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu\right)}+O(z^{\mu-2p}).$$

В 385

8.577 Функции Ломмеля удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению.

$$z^2w''+zw'+(z^2-\nu^2)\,w=z^{\mu+1}.$$ В 377 (1), ВТФ II 40 (68)

8.578 Функции Ломмеля двух переменных $U_\nu(w, z)$, $V_\nu(w, z)$:

Определение

1. $U_\nu(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{w}{z}\right)^{\nu+2m} J_{\nu+2m}(z).$ ВТФ II 42 (87), В 591 (5)

2. $V_\nu(w, z) = \cos\left[\frac{1}{2}\left(w + \frac{z^2}{w} + \nu\pi\right)\right] + U_{-\nu+2}(w, z).$

ВТФ II 42 (88), В 591 (6)

Частные значения:

3. $U_0(z, z) = V_0(z, z) = \frac{1}{2}\{J_0(z) + \cos z\}.$ В 591 (9)

4. $U_1(z, z) = -V_1(z, z) = \frac{1}{2}\sin z.$ В 591 (10)

5. $U_{2n}(z, z) = V_{2n}(z, z) = \frac{(-1)^n}{2}\left\{\cos z - \sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m \varepsilon_{2m} J_{2m}(z)\right\}$

$[n \geqslant 1], \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2, & m > 0, \\ 1, & m = 0. \end{cases}$ В 591 (11)

6. $U_{2n+1}(z, z) = -V_{2n+1}(z, z) = \frac{(-1)^n}{2}\left\{\sin z - \sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m \varepsilon_{2m+1} J_{2m+1}(z)\right\},$

$[n \geqslant 0], \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2, & m > 0, \\ 1, & m = 0. \end{cases}$ В 591 (12)

7. $V_n(w, z) = (-1)^n U_n\left(\frac{z^2}{w}, z\right).$

8. $U_\nu(w, 0) = \frac{\left(\frac{w}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu-1)} s_{\nu-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}\left(\frac{w}{2}\right).$ В 593 (9)

9. $V_{-\nu+2}(w, 0) = \frac{\left(\frac{w}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu-1)} S_{\nu-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}\left(\frac{w}{2}\right).$ В 593 (10)

8.579 Функциональные соотношения:

1. $2\frac{\partial}{\partial w} U_\nu(w, z) = U_{\nu-1}(w, z) + \left(\frac{z}{w}\right)^2 U_{\nu+1}(w, z).$ В 593 (2)

2. $2\frac{\partial}{\partial w} V_\nu(w, z) = V_{\nu+1}(w, z) + \left(\frac{z}{w}\right)^2 V_{\nu-1}(w, z).$ В 593 (4)

3. Функция $U_\nu(w, z)$ представляет собой частное решение дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{z}\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{z^2 U}{w^2} = \left(\frac{w}{z}\right)^{\nu-2} J_\nu(z).$$ В 592 (2)

4. Функция $V_\nu(w, z)$ представляет собой частное решение дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{z}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{z^2 V}{w^2} = \left(\frac{w}{z}\right)^{-\nu} J_{-\nu+2}(z). \qquad \text{B 592(3)}$$

8.58 Функции Ангера и Вебера $\mathbf{J}_\nu(z)$ и $\mathbf{E}_\nu(z)$

8.580 Определения:

1. Функция Ангера $\mathbf{J}_\nu(z)$:

$$\mathbf{J}_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\nu\theta - z\sin\theta)\,d\theta. \qquad \text{B 336(1), ВТФ II 35(32)}$$

2. Функция Вебера $\mathbf{E}_\nu(z)$:

$$\mathbf{E}_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\nu\theta - z\sin\theta)\,d\theta. \qquad \text{B 336(2), ВТФ II 35(32)}$$

8.581 Представления в виде ряда:

1. $$\mathbf{J}_\nu(z) = \cos\frac{\nu\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(n+1-\frac{1}{2}\nu\right)} + \sin\frac{\nu\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}.$$

ВТФ II 36(36), B 337(3)

2. $$\mathbf{E}_\nu(z) = \sin\frac{\nu\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(n+1-\frac{1}{2}\nu\right)} - \cos\frac{\nu\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}.$$

ВТФ II 36(37), B 338(4)

8.582 Функциональные соотношения:

1. $2\mathbf{J}_\nu(z) = \mathbf{J}_{\nu-1}(z) - \mathbf{J}_{\nu+1}(z).$ ВТФ II 36(40), B 340(2)

2. $2\mathbf{E}'_\nu(z) = \mathbf{E}_{\nu-1}(z) - \mathbf{E}_{\nu+1}(z).$ ВТФ II 36(41), B 340(6)

3. $\mathbf{J}_{\nu-1}(z) + \mathbf{J}_{\nu+1}(z) = 2\nu z^{-1}\mathbf{J}_\nu(z) - 2(\pi z)^{-1}\sin(\nu\pi).$

ВТФ II 36(42), B 340(1)

4. $\mathbf{E}_{\nu-1}(z) + \mathbf{E}_{\nu+1}(z) = 2\nu z^{-1}\mathbf{E}_\nu(z) - 2(\pi z)^{-1}(1 - \cos\nu\pi).$

ВТФ II 36(43), B 340(5)

8.583 Асимптотические разложения:

1. $$\mathbf{J}_\nu(z)=J_\nu(z)+\frac{\sin\nu\pi}{\pi z}\left[\sum_{n=0}^{p-1}(-1)^n 2^{2n}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}z^{-2n}+\right.$$
$$+O(|z|^{-2p})+\nu\sum_{n=0}^{p-1}(-1)^n 2^{2n}\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(n+1-\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\nu\right)}z^{-2n-1}+$$
$$\left.+\nu O(|z|^{-2p-1})\right]\quad [|\arg z|<\pi].$$ ВТФ II 37 (47), В 344 (1)

2. $$\mathbf{E}_\nu(z)=-N_\nu(z)-$$
$$-\frac{1+\cos(\nu\pi)}{\pi z}\left[\sum_{n=0}^{p-1}(-1)^n 2^{2n}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}z^{-2n}+O(|z|^{-2p})\right]-$$
$$-\frac{\nu(1-\cos\nu\pi)}{z\pi}\times$$
$$\times\left[\sum_{n=0}^{p-1}(-1)^n 2^{2n}\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(n+1-\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\nu\right)}z^{-2n-1}+O(|z|^{-2p-1})\right].$$
В 344 (2), ВТФ II 37 (48)

Асимптотическое разложение для $J_\nu(z)$ и $N_\nu(z)$ см. 8.451.

8.584 Функции Ангера и Вебера удовлетворяют дифференциальному уравнению вида:

$$y''+z^{-1}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)y=f(\nu, z),$$

где для $\mathbf{J}_\nu(z)$ $f(\nu, z)=\frac{z-\nu}{\pi z^2}\sin\nu\pi$, В 341 (9), ВТФ II 37 (44),

а для $\mathbf{E}_\nu(z)$ $f(\nu, z)=-\frac{1}{\pi z^2}[z+\nu+(z-\nu)\cos\nu\pi]$.

ВТФ II 37 (45), В 341 (10)

8.59 Полиномы Неймана $O_n(z)$ и Шлефли $S_n(z)$

8.590 Определение полиномов Неймана:

1. $$O_n(z)=\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{n(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n-1}\quad [n\geqslant 1].$$
В 299 (2), ВТФ II 33 (6)

2. $O_{-n}(z)=(-1)^n O_n(z)\quad [n\geqslant 1]$. В 303 (8)

3. $O_0(z)=\frac{1}{z}$. В 299 (3), ВТФ II 33 (7)

4. $O_1(z)=\frac{1}{z^2}$. ВТФ II 33 (7)

5 $O_2(z) = \frac{1}{z} + \frac{4}{z^3}$. ВТФ II 33 (7)

Вообще, $O_n(z)$ представляет собой многочлен степени $n+1$ относительно z^{-1}.

8.591 Функциональные соотношения.

1. $O'_0(z) = -O_1(z)$ ВТФ II 33 (9), В 301 (3)
2. $2O'_n(z) = O_{n-1}(z) - O_{n+1}(z) \quad [n \geqslant 1]$. ВТФ II 33 (10), В 301 (2)
3. $(n-1)O_{n+1}(z) + (n+1)O_{n-1}(z) - 2z^{-1}(n^2-1)O_n(z) =$
   $= 2nz^{-1}\left(\sin n\frac{\pi}{2}\right)^2 \quad [n \geqslant 1]$. ВТФ II 33 (11), В 301 (1)
4. $nzO_{n-1}(z) - (n^2-1)O_n(z) = (n-1)zO'_n(z) + n\left(\sin n\frac{\pi}{2}\right)^2$.
   ВТФ II 33 (12), В 303 (4)
5. $nzO_{n+1}(z) - (n^2-1)O_n(z) = -(n+1)zO'_n(z) + n\left(\sin n\frac{\pi}{2}\right)^2$
   ВТФ II 33 (13), В 303 (5)и

8.592 Производящая функция:

$$\frac{1}{z-\xi} = J_0(\xi)z^{-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(\xi)O_n(z) \qquad [|\xi| < |z|].$$

ВТФ II 32 (1), В 298 (1)

8.593 Интегральное представление:

$$O_n(z) = \int_0^{\infty} \frac{[u+\sqrt{u^2+z^2}]^n + [u-\sqrt{u^2+z^2}]^n}{2z^{n+1}} e^{-u}\, du.$$

См также **3.547** 6., 8., **3.549** 1., 2. ВТФ II 32 (3), В 305 (1)

8.594 Неравенство.

$$|O_n(z)| \leqslant 2^{n-1}n!\,|z|^{-n-1}e^{\frac{1}{4}|z|^2} \qquad [n > 1] \qquad \text{ВТФ II 33 (8), В 300 (8)}$$

8.595 Полином Неймана $O_n(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + 3z\frac{dy}{dz} + (z^2+1-n^2)y = z\left(\cos n\frac{\pi}{2}\right)^2 + n\left(\sin n\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

ВТФ II 33 (14), В 303 (1)

8.596 Полиномы Шлефли $S_n(z)$. Так называются функции, определяемые формулами.

1. $S_0(z) = 0$. ВТФ II 34 (18), В 312 (2)
2. $S_n(z) = \frac{1}{n}\left[2zO_n(z) - 2\left(\cos n\frac{\pi}{2}\right)^2\right] \quad [n \geqslant 1]$,
   ВТФ II 34 (19), В 312 (3)
   $$= \sum_{m=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n} \qquad [n \geqslant 1] \qquad \text{ВТФ II 34 (18)}$$
3. $S_{-n}(z) = (-1)^{n+1}S_n(z)$. В 313 (6)

8.597 Функциональные соотношения:

1. $S_{n-1}(z)+S_{n+1}(z)=4O_n(z)$. В 313 (7)

Другие функциональные соотношения можно получить из 8.591, подставляя вместо $O_n(z)$ его выражение через $S_n(z)$ из 8.596 2.

8.6 ФУНКЦИИ МАТЬЕ

8.60 Уравнение Матье

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(a-2k^2\cos 2z)y=0, \quad k^2=q. \qquad \text{М 18 (1)}$$

8.61 Периодические функции Матье

8.610 Уравнение Матье 8.60, вообще говоря, не имеет периодических решений. Если k — действительное число, то существует бесконечное множество *собственных значений* a, которым соответствуют периодические решения

$$y(z)=y(2\pi+z),$$

отличные от тождественного нуля. Если k отлично от нуля, то не существует никаких других линейно независимых периодических решений. Периодические решения уравнения Матье называются *периодическими функциями Матье*, или *функциями Матье первого рода*, или просто *функциями Матье*.

8.611 Уравнение Матье имеет четыре ряда различных периодических решений:

1. $\mathrm{ce}_{2n}(z, q)=\sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}\cos 2rz$. М 30 (1)

2. $\mathrm{ce}_{2n+1}(z, q)=\sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}\cos(2r+1)z$. М 30 (2)

3. $\mathrm{se}_{2n+1}(z, q)=\sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}\sin(2r+1)z$. М 30 (3)

4. $\mathrm{se}_{2n+2}(z, q)=\sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)}\sin(2r+2)z$. М 30 (4)

5. Коэффициенты A и B зависят от q; собственные значения a, принадлежащие функциям ce_{2n}, ce_{2n+1}, se_{2n}, se_{2n+1}, обозначаются так: a_{2n}, a_{2n+1}, b_{2n}, b_{2n+1}.

8.612 Решения уравнения Матье нормируются так, чтобы

$$\int_0^{2\pi} y^2\,dx=\pi. \qquad \text{МО 65}$$

8.613

1. $\lim\limits_{q\to 0}\mathrm{ce}_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. $\lim\limits_{q\to 0}\mathrm{ce}_n(x)=\cos nx \quad [n\neq 0]$.

3. $\lim\limits_{q\to 0}\mathrm{se}_n(x)=\sin nx$. МО 65

8.62 Рекуррентные соотношения для коэффициентов $A_{2r}^{(2n)}$, $A_{2r+1}^{(2n+1)}$, $B_{2r+1}^{(2n+1)}$, $B_{2r+2}^{(2n+2)}$

8.621

1. $aA_0^{(2n)} - qA_2^{(2n)} = 0.$ М 37 (1)
2. $(a-4) A_2^{(2n)} - q(A_4^{(2n)} + 2A_0^{(2n)}) = 0.$ М 37 (1)
3. $(a-4r^2) A_{2r}^{(2n)} - q(A_{2r+2}^{(2n)} + A_{2r-2}^{(2n)}) = 0 \quad [r \geqslant 2].$ М 37 (1)

8.622

1. $(a-1-q) A_1^{(2n+1)} - qA_3^{(2n+1)} = 0.$ М 37 (2)
2. $[a-(2r+1)^2] A_{2r+1}^{(2n+1)} - q(A_{2r+3}^{(2n+1)} + A_{2r-1}^{(2n+1)}) = 0 \quad [r \geqslant 1].$ М 37 (2)

8.623

1. $(a-1+q) B_1^{(2n+1)} - qB_3^{(2n+1)} = 0.$ М 37 (3)
2. $[a-(2r+1)^2] B_{2r+1}^{(2n+1)} - q(B_{2r+3}^{(2n+1)} + B_{2r-1}^{(2n+1)}) = 0 \quad [r \geqslant 1].$ М 37 (3)

8.624

1. $(a-4) B_2^{(2n+2)} - qB_4^{(2n+2)} = 0.$ М 37 (4)
2. $(a-4r^2) B_{2r}^{(2n+2)} - q(B_{2r+2}^{(2n+2)} - B_{2r-2}^{(2n+2)}) = 0 \quad [r \geqslant 2].$ М 37 (4)

8.625 Из равенств 8.612, 8.613 и 8.621 — 8.624 можно определить коэффициенты A и B, если только a известно Пусть, например, требуется определить коэффициенты $A_{2r}^{(2n)}$ для функции $\mathrm{ce}_{2n}(z, q)$. Из рекуррентных формул получают как следствие соотношение

$$1. \quad \begin{vmatrix} a & -q & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -2q & a-4 & -q & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -q & a-16 & -q & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -q & a-36 & -q & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -q & a-64 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Ст 40

При данном q из уравнения 8.625 1. можно определить **собственные числа**

2. $a = a_0, a_2, a_4, \dots \quad [|a_0| \leqslant |a_2| \leqslant |a_4| \leqslant \dots].$

Положив, далее, $a = a_{2n}$, из рекуррентных формул 8.621 можно определить коэффициенты $A_{2r}^{(2n)}$ с точностью до коэффициента пропорциональности. Этот последний определяется из формулы

3. $2[A_0^{(2n)}]^2 + \sum_{r=1}^{\infty} [A_{2r}^{(2n)}]^2 = 1,$ М 34 (2)

вытекающей из условий нормирования.

8.63 Функции Матье с чисто мнимым аргументом

8.630 Заменив в уравнении 8.60 z через iz, мы придем к дифференциальному уравнению

1. $\dfrac{d^2y}{dz^2} + (-a + 2q\,\mathrm{ch}\,2x)\, y = 0.$

Решения этого уравнения можно найти, заменив в функциях $\mathrm{ce}_n(z, q)$ и $\mathrm{se}_n(z, q)$ аргумент z через iz. Получающиеся таким образом функции называются *присоединенными функциями Матье первого рода* и обозначаются так:

2. $\mathrm{Ce}_{2n}(z, q)$, $\mathrm{Ce}_{2n+1}(z, q)$, $\mathrm{Se}_{2n+1}(z, q)$, $\mathrm{Se}_{2n+2}(z, q)$.

8.631

1. $\mathrm{Ce}_{2n}(z, q) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \operatorname{ch} 2rz.$ M 35 (2)

2. $\mathrm{Ce}_{2n+1}(z, q) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} \operatorname{ch}(2r+1) z.$ M 35 (3)

3. $\mathrm{Se}_{2n+1}(z, q) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} \operatorname{sh}(2r+1) z.$ M 36 (4)

4. $\mathrm{Se}_{2n+2}(z, q) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} \operatorname{sh}(2r+2) z.$ M 36 (5)

8.64 Непериодические решения уравнения Матье

Наряду с каждым периодическим решением уравнения 8.60 существует линейно независимое с ним второе, непериодическое решение. Непериодические решения обозначаются соответственно через

$$\mathrm{fe}_{2n}(z, q), \quad \mathrm{fe}_{2n+1}(z, q), \quad \mathrm{ge}_{2n+1}(z, q), \quad \mathrm{ge}_{2n+2}(z, q).$$

Аналогично вторые решения уравнения 8.630 1. обозначаются через

$$\mathrm{Fe}_{2n}(z, q), \quad \mathrm{Fe}_{2n+1}(z, q), \quad \mathrm{Ge}_{2n+1}(z, q), \quad \mathrm{Ge}_{2n+2}(z, q).$$

8.65 Функции Матье для отрицательного q

8.651 Замена аргумента z в уравнении 8.60 на $\pm\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right)$ приводит к уравнению

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (a + 2q\cos 2z)\, y = 0. \qquad \text{M 30 (1)}$$

Это уравнение имеет следующие решения:

8.652

1. $\mathrm{ce}_{2n}(z, -q) = (-1)^n \mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{1}{2}\pi - z, q\right).$ M 30 (2)

2. $\mathrm{ce}_{2n+1}(z, -q) = (-1)^n \mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\pi - z, q\right).$ M 31 (3)

3. $\mathrm{se}_{2n+1}(z, -q) = (-1)^n \mathrm{ce}_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\pi - z, q\right).$ M 31 (4)

4. $\mathrm{se}_{2n+2}(z, -q) = (-1)^n \mathrm{se}_{2n+2}\left(\frac{1}{2}\pi - z, q\right).$ M 31 (5)

5. $\mathrm{fe}_{2n}(z, -q) = (-1)^{n+1} \mathrm{fe}_{2n}\left(\frac{1}{2}\pi - z, q\right).$ M 187 (1)

6. $\mathrm{fe}_{2n+1}(z, -q) = (-1)^n \mathrm{ge}_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\pi - z, q\right).$ M 187 (3)

7. $\mathrm{ge}_{2n+1}(z, -q) = (-1)^n \mathrm{fe}_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\pi - z, q\right).$ M 187 (5)

8. $\mathrm{ge}_{2n+2}(z, -q) = (-1)^n \mathrm{ge}_{2n+2}\left(\frac{1}{2}\pi - z, q\right)$. М 188 (7)

8.653 Аналогичным образом замена z на $\frac{\pi}{2}i + z$ в уравнении 8.630 1. приводит к уравнению

$$\frac{d^2y}{dz^2} - (a + 2q\,\mathrm{ch}\,z)\,y = 0.$$

Оно имеет решения:

8.654

1. $\mathrm{Ce}_{2n}(z, -q) = (-1)^n \mathrm{Ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}i + z, q\right)$. М 200 (1)

2. $\mathrm{Ce}_{2n+1}(z, -q) = (-1)^{n+1} i\, \mathrm{Se}_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\pi i + z, q\right)$. М 200 (11)

3. $\mathrm{Se}_{2n+1}(z, -q) = (-1)^{n+1} i\, \mathrm{Ce}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}i + z, q\right)$. М 201 (21)

4. $\mathrm{Se}_{2n+2}(z, -q) = (-1)^{n+1} \mathrm{Se}_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}i + z, q\right)$. М 202 (31)

5. $\mathrm{Fe}_{2n}(z, -q) = (-1)^n \mathrm{Fe}_{2n}\left(\frac{1}{2}\pi i + z, q\right)$. М 200 (4)

6. $\mathrm{Fe}_{2n+1}(z, -q) = (-1)^{n+1} i\, \mathrm{Ge}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}i + z, q\right)$. М 201 (14)

7. $\mathrm{Ge}_{2n+1}(z, -q) = (-1)^{n+1} i\, \mathrm{Fe}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}i + z, q\right)$. М 201 (24)

8. $\mathrm{Ge}_{2n+2}(z, -q) = (-1)^{n+1} \mathrm{Ge}_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}i + z, q\right)$. М 202 (34)

8.66 Представление функций Матье в виде рядов по функциям Бесселя

8.661

1. $$\mathrm{ce}_{2n}(z, q) = \frac{\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} J_{2r}(2k\cos z);$$ М 199 (1)

$$= \frac{\mathrm{ce}_{2n}(0, q)}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} I_{2r}(2k\sin z).$$ М 199 (2)

2. $$\mathrm{ce}_{2n+1}(z, q) = -\frac{\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{kA_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} J_{2r+1}(2k\cos z);$$

М 199 (3)

$$= \frac{\mathrm{ce}_{2n+1}(0, q)}{kA_1^{(2n+1)}} \,\mathrm{ctg}\, z \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) A_{2r+1}^{(2n+1)} I_{2r+1}(2k\sin z).$$

М 199 (4)

3. $$\mathrm{se}_{2n+1}(z, q) = \frac{\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{kB_1^{(2n+1)}} \operatorname{tg} z \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) B_{2r+1}^{(2n+1)} J_{2r+1}(2k \cos z); \qquad \text{M 199 (5)}$$

$$= \frac{\mathrm{se}'_{2n+1}(0, q)}{kB_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)} I_{2r+1}(2k \sin z). \qquad \text{M 199 (6)}$$

4 $$\mathrm{se}_{2n+2}(z, q) = \frac{-\mathrm{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{k^2 B_2^{(2n+2)}} \operatorname{tg} z \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} J_{2r+2}(2k \cos z); \qquad \text{M 199 (7)}$$

$$= \frac{\mathrm{se}'_{2n+2}(0, q)}{k^2 B_2^{(2n+2)}} \operatorname{ctg} z \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} I_{2r+2}(2k \sin z). \qquad \text{M 199 (8)}$$

8.662

1. $$\mathrm{fe}_{2n}(z, q) = -\frac{\pi \mathrm{fe}'_{2n}(0, q)}{2\,\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} \operatorname{Im}\left[J_r(ke^{iz}) N_r(ke^{-iz})\right].$$

M 310 (6)

2. $$\mathrm{fe}_{2n+1}(z, q) = \frac{\pi k \mathrm{fe}'_{2n+1}(0, q)}{2\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} \operatorname{Im}\left[J_r(ke^{iz}) N_{r+1}(ke^{-iz}) + J_{r+1}(ke^{iz}) N_r(ke^{-iz})\right]. \qquad \text{M 311 (1)}$$

3. $$\mathrm{ge}_{2n+1}(z, q) = -\frac{\pi k\, \mathrm{ge}_{2n+1}(0, q)}{2\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)} \operatorname{Re}\left[J_r(ke^{iz}) N_{r+1}(ke^{-iz}) - J_{r+1}(ke^{iz}) N_r(ke^{-iz})\right]. \qquad \text{M 311 (3)}$$

4. $$\mathrm{ge}_{2n+2}(z, q) = -\frac{\pi k^2\, \mathrm{ge}_{2n+2}(0, q)}{2\mathrm{se}_{2n+2}\left(\frac{1}{2}\pi, q\right)} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \operatorname{Re}\left[J_k(ke^{iz}) N_{r+2}(ke^{-iz}) - J_{r+2}(ke^{iz}) N_r(ke^{-iz})\right] \qquad \text{M 311 (6)}$$

Разложения функций Fe_n и Ge_n по функциям N_ν обозначаются соответственно через Fey_n и Gey_n, а разложения этих функции по функциям K_ν — соответственно через Fek_n и Gek_n.

8.663

1. $$\mathrm{Fey}_{2n}(z,\ q)=\frac{\mathrm{ce}_{2n}(0,\ q)}{A_0^{(2n)}}\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}^{(2n)}N_{2r}(2k\,\mathrm{sh}\,z),$$

$$k^2=q \qquad [|\mathrm{sh}\,z|>1,\quad \mathrm{Re}\,z>0]; \qquad \text{M 193 (2)}$$

$$=\frac{\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right)}{A_0^{(2n)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}^{(2n)}N_{2r}(2k\,\mathrm{ch}\,z)$$

$$[|\mathrm{ch}\,z|>1]; \qquad \text{M 193 (1)}$$

$$=\frac{\mathrm{ce}_{2n}(0,\ q)\,\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right)}{[A_0^{(2n)}]^2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}^{(2n)}J_r(ke^{-z})N_r(ke^{z}).$$

M 300 (1)

2. $$\mathrm{Fey}_{2n+1}(z,\ q)=\frac{\mathrm{ce}_{2n+1}(0,\ q)\,\mathrm{cth}\,z}{kA_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)A_{2r+1}^{(2n+1)}N_{2r+1}(2k\,\mathrm{sh}\,z),$$

$$k^2=q \quad [|\mathrm{sh}\,z|>1,\quad \mathrm{Re}\,z>0]; \qquad \text{M 194 (4)}$$

$$=-\frac{\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right)}{kA_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)}N_{2r+1}(2k\,\mathrm{ch}\,z)$$

$$[|\mathrm{ch}\,z|>1]; \qquad \text{M 194 (3)}$$

$$=-\frac{\mathrm{ce}_{2n+1}(0,\ q)\,\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right)}{k\,[A_1^{(2n+1)}]^2}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)}\left[J_r(ke^{-z})N_{r+1}(ke^{z})+J_{r+1}(ke^{-z})N_r(ke^{z})\right]. \qquad \text{M 301 (7)}$$

3. $$\mathrm{Gey}_{2n+1}(z,\ q)=\frac{\mathrm{se}'_{2n+1}(0,\ q)}{kB_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+1}^{(2n+1)}N_{2r+1}(2k\,\mathrm{sh}\,z)$$

$$[|\mathrm{sh}\,z|>1,\quad \mathrm{Re}\,z>0]; \qquad \text{M 196 (9)}$$

$$=\frac{\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right)}{kB_1^{(2n+1)}}\,\mathrm{th}\,z\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(2r+1)B_{2r+1}^{(2n+1)}N_{2r+1}(2k\,\mathrm{ch}\,z)$$

$$[|\mathrm{ch}\,z|>1]; \qquad \text{M 196 (8)}$$

$$=\frac{\mathrm{se}_{2n+1}(0,\ q)\,\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right)}{k\,[B_1^{(2n+1)}]^2}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)}\left[J_r(ke^{-z})N_{r+1}(ke^{z})-J_{r+1}(ke^{-z})N_r(ke^{z})\right]. \qquad \text{M 301 (8)}$$

4. $$\mathrm{Gey}_{2n+2}(z,\ q)=\frac{\mathrm{se}_{2n+2}(0,\ q)}{k^2B_2^{(2n+2)}}\,\mathrm{cth}\,z\sum_{r=0}^{\infty}(2r+2)B_{2r+2}^{(2n+2)}N_{2r+2}(2k\,\mathrm{sh}\,z)$$

$$[|\mathrm{sh}\,z|>1,\quad \mathrm{Re}\,z>0]; \qquad \text{M 196 (13)}$$

$$= -\frac{\operatorname{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{k^2 B_2^{(2n+2)}} \operatorname{th} z \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} N_{2r+2}(2k \operatorname{ch} z) \qquad [|\operatorname{ch} z| > 1]; \qquad \text{M 196 (12)}$$

$$= \frac{\operatorname{se}'_{2n+2}(0, q) \operatorname{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{k^2 [B_2^{(2n+2)}]^2} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2n+2)} [J_r(ke^{-z}) N_{r+2}(ke^z) - J_{r+2}(ke^{-z}) N_r(ke^z)]. \qquad \text{M 301 (9)}$$

8.664

1. $$\operatorname{Fek}_{2n}(z, q) = \frac{\operatorname{ce}_{2n}(0, q)}{\pi A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} K_{2r}(-2ik \operatorname{sh} z),$$
$$k^2 = q \qquad [|\operatorname{sh} z| > 1, \quad \operatorname{Re} z > 0]. \qquad \text{M 197 (6)}$$

2. $$\operatorname{Fek}_{2n+1}(z, q) = \frac{\operatorname{ce}_{2n+1}(0, q)}{\pi k A_1^{(2n+1)}} \operatorname{cth} z \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) A_{2r+1}^{(2n+1)} K_{2r+1}(-2ik \operatorname{sh} z),$$
$$k^2 = q \qquad [|\operatorname{sh} z| > 1, \ \operatorname{Re} z > 0]. \qquad \text{M 198 (9)}$$

3. $$\operatorname{Gek}_{2n+1}(z, q) = \frac{\operatorname{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{\pi k B_1^{(2n+1)}} \operatorname{th} z \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) B_{2r+1}^{(2n+1)} K_{2r+1}(-2ik \operatorname{ch} z).$$
M 198 (11)

4. $$\operatorname{Gek}_{2n+2}(z, q) = \frac{\operatorname{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{\pi k^2 B_2^{(2n+2)}} \operatorname{th} z \sum_{r=0}^{\infty} (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} K_{2r+2}(-2ik \operatorname{ch} z).$$
M 198 (14)

8.67 Общая теория

Общее решение уравнения 8.60 может быть найдено (если $i\mu$ не есть целое число) в виде

8.671

1. $$y = Ae^{\mu z} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{2r} e^{2rzi} + Be^{-\mu z} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{2r} e^{-2rzi}. \qquad \text{M 73 (5)}$$

Коэффициенты c_{2r} определяются из однородной системы линейных алгебраических уравнений

2. $c_{2r} + \xi_{2r}(c_{2r+2} + c_{2r-2}) = 0, \ r = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$ M 82 (1)

где

$$\xi_{2r} = \frac{q}{(2r - i\mu)^2 - a}.$$

Условие совместности этой системы дает уравнение, которому должно удовлетворять μ.

$$3.\quad \Delta(i\mu)=\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \xi_{-4} & 1 & \xi_{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \xi_{-2} & 1 & \xi_{-2} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \xi_0 & 1 & \xi_0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & 1 & \xi_2 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}=0. \qquad \text{M 83 (3)}$$

Это уравнение может быть записано также в виде

4. $\operatorname{ch}\mu\pi=1-2\Delta(0)\sin^2\left(\frac{\pi\sqrt{a}}{2}\right)$, где $\Delta(0)$ — значение, которое принимает детерминант предыдущей таблицы, если в выражениях для ξ_{2r} положить $\mu=0$. M 85 (2), ВТФ III 101 (15) *и*

5. Если пара (a, q) такова, что $|\operatorname{ch}\mu\pi|<1$, то $\mu=i\beta$, $\operatorname{Im}\beta=0$ и решение 8.671 1 ограничено на действительной оси.

6. Если $|\operatorname{ch}\mu\pi|>1$, то μ — действительное или комплексное и решение 8.671 1 не ограничено на действительной оси.

7. При $\operatorname{ch}\mu\pi=\pm 1$ $i\mu$ — целое число. Одно из решений имеет в этом случае период π или 2π (в зависимости от того, четно n или не четно); второе решение непериодично (см. 8.61 и 8.64).

8.7 — 8.8 ШАРОВЫЕ (СФЕРИЧЕСКИЕ) ФУНКЦИИ

8.70 Введение

8.700 *Шаровые функции* являются решением дифференциального уравнения

$$1.\quad (1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right]u=0,$$

в котором ν и μ являются произвольными комплексными постоянными.

Это уравнение является частным случаем гипергеометрического (риманова) уравнения (см. 9.151). Точки

$$+1,\quad -1,\quad \infty$$

являются, вообще говоря, его особыми точками, а именно обыкновенными точками ветвления.

Интерес представляют, с одной стороны, решения уравнения, соответствующие действительным значениям независимой переменной z и лежащие на отрезке $[-1\leqslant z\leqslant +1]$, с другой стороны, решения, соответствующие любому комплексному значению z, для которого $\operatorname{Re} z>1$. Эти последние в плоскости z многозначны, для выделения однозначных ветвей этих функций проводится разрез вдоль действительной оси от $-\infty$ до $+1$. Далее нас интересуют те решения уравнения 8.700 1, для которых ν или μ или ν и μ суть целые числа. Особое значение имеет тот случай, когда $\mu=0$.

8.701 В соответствии с этим мы будем пользоваться следующими обозначениями.

Буквой z мы будем обозначать *любую комплексную* величину, буквой x мы будем обозначать *действительную* переменную, изменяющуюся на отрезке $[-1 \leqslant x \leqslant +1]$; мы будем иногда полагать $x = \cos\varphi$, где φ — действительное число.

Символами $\mathrm{P}_\nu^\mu(z)$, $\mathrm{Q}_\nu^\mu(z)$ мы будем обозначать те решения уравнения 8.700 1., которые при $|z| < 1$ однозначны и регулярны и, в частности, однозначно определены при $z = x$

Символами $P_\nu^\mu(z)$, $Q_\nu^\mu(z)$ мы будем обозначать те решения уравнения 8.700 1., которые при $\operatorname{Re} z > 1$ однозначны и регулярны; когда эти функции не могут быть неограниченно продолжены без нарушения их однозначности, то производят разрез вдоль действительной оси слева от точки $z = 1$. Значения функции $P_\nu^\mu(z)$ и $Q_\nu^\mu(z)$ на верхней и нижней границах части разреза, лежащей между точками -1 и $+1$, обозначаются соответственно так:

$$P_\nu^\mu(x \pm i0), \qquad Q_\nu^\mu(x \pm i0).$$

Буквы n, m означают натуральные числа или нуль. Буквы ν, μ, если нет никаких оговорок, означают любые комплексные числа.

Верхний индекс, если он равен нулю, опускают, т. е. полагают

$$P_\nu^0(z) = P_\nu(z), \quad Q_\nu^0(z) = Q_\nu(z), \quad \mathrm{P}_\nu^0(z) = \mathrm{P}_\nu(z), \quad \mathrm{Q}_\nu^0(z) = \mathrm{Q}_\nu(z).$$

Две линейно независимые функции

8.702 $$P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right)$$

$\left[\arg \frac{z+1}{z-1} = 0\right.$, если z действительно и больше $\left.1\right]$ и МО 80, УВ II 122

8.703 $$Q_\nu^\mu(z) = \frac{e^{\mu\pi i}\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} z^{-\nu-\mu-1} \times$$
$$\times F\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}, \frac{\nu+\mu+1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right)$$

[$\arg(z^2-1) = 0$, когда z действительно и больше 1; $\arg z = 0$, когда z действительно и больше нуля], X 109 (44), МО 80

являющиеся решениями дифференциального уравнения 8.700 1., называются *шаровыми функциями* (или *присоединенными функциями Лежандра*) соответственно *1-го* и *2-го рода*. Они определены и притом однозначно соответственно в областях $|1-z| < 2$ и $|z| > 1$, из которых исключена часть действительной оси, лежащая между $-\infty$ и $+1$; с помощью гипергеометрических рядов они могут быть неограниченно продолжены на всю z-плоскость, в которой сделан указанный разрез. Эти выражения для $P_\nu^\mu(z)$ и $Q_\nu^\mu(z)$ теряют смысл, когда $1-\mu$, соответственно $\nu+\frac{3}{2}$, являются целыми отрицательными числами или равны нулю. МО 80

Когда z — действительное число, лежащее на отрезке $[-1, +1]$ ($z = x = \cos\varphi$), за линейно независимые решения уравнения принимают функции:

8.704 $$\mathrm{P}_\nu^\mu(x) = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{1}{2}\mu\pi i} P_\nu^\mu(\cos\varphi + i0) + e^{-\frac{1}{2}\mu\pi i} P_\nu^\mu(\cos\varphi - i0)\right]; \quad \text{ВТФ I 143 (1)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right). \quad \text{ВТФ I 143 (6)}$$

8.705 $Q_\nu^\mu(z)=\frac{1}{2}e^{-\mu\pi i}\left[e^{-\frac{1}{2}\mu\pi i}Q_\nu^\mu(x+i0)+e^{\frac{1}{2}\mu\pi i}Q_\nu^\mu(x-i0)\right]$; ВТФ I 143(2)

$$=\frac{\pi}{2\sin\mu\pi}\left[\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\cos\mu\pi-\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\mathrm{P}_\nu^{-\mu}(x)\right]$$ (сравни 8.732 5.)

ВТФ I 143(13)

При $\mu=\pm m$ целом последнее равенство теряет смысл; для этого случая при помощи предельного перехода получается.

8.706

1. $Q_\nu^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}Q_\nu(x)$ (сравни 8.752 1). ВТФ I 149(7)

2. $Q_\nu^{-m}(x)=(-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}Q_\nu^m(x)$. ВТФ I 144(18)

Функции $Q_\nu^\mu(z)$ при $\nu+\mu$, равном целому отрицательному числу, не определены. Поэтому из последующих формул следует исключить случаи, когда $\nu+\mu=-1,\ -2,\ -3,\ \ldots$

Линейно независимыми решениями дифференциального уравнения при $\nu+\mu\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ служат функции

$$P_\nu^{\pm\mu}(\pm z),\quad Q_\nu^{\pm\mu}(\pm z),\quad P_{-\nu-1}^{\pm\mu}(\pm z),\quad Q_{-\nu-1}^{\pm\mu}(\pm z).$$

8.707 Все же определение двух линейно независимых решений возможно в любом случае, а именно

Дифференциальное уравнение 8.700 1 при $\nu\pm\mu$, не равном целому числу, имеет следующие решения

1. $P_\nu^{\pm\mu}(\pm z),\quad Q_\nu^{\pm\mu}(\pm z),\quad P_{-\nu-1}^{\pm\mu}(\pm z),\quad Q_{-\nu-1}^{\pm\mu}(\pm z)$

или соответственно при $z=x=\cos\varphi$

2. $\mathrm{P}_\nu^{\pm\mu}(\pm x),\quad \mathrm{Q}_\nu^{\pm\mu}(\pm x),\quad \mathrm{P}_{-\nu-1}^{\pm\mu}(\pm x),\quad \mathrm{Q}_{-\nu-1}^{\pm\mu}(\pm x)$.

Если $\nu\pm\mu$ не равно целому числу, то решения

3. $P_\nu^\mu(z)$, $Q_\nu^\mu(z)$ и соответственно $\mathrm{P}_\nu^\mu(x)$, $\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)$

линейно независимы. Если $\nu\pm\mu$ — целое число, но μ не равно целому числу, то линейно независимыми решениями уравнения 8.700 1. являются функции:

4. $P_\nu^\mu(z)$, $P_\nu^{-\mu}(z)$ и соответственно $\mathrm{P}_\nu^\mu(x)$, $\mathrm{P}_\nu^{-\mu}(x)$

Если $\mu=\pm m$, $\nu=n$ или $\nu=-n-1$, то линейно независимыми решениями уравнения 8.700 1 при $n\geqslant m$ являются функции

5. $P_n^m(z)$, $Q_n^m(z)$ и соответственно $\mathrm{P}_n^m(x)$, $\mathrm{Q}_n^m(x)$,

а при $n<m$ — функции

6. $P_n^{-m}(z)$, $Q_n^m(z)$ и соответственно $\mathrm{P}_n^{-m}(x)$, $\mathrm{Q}_n^m(x)$.

8.71 Интегральные представления

8.711

1. $$P_\nu^{-\mu}(z)=\frac{(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{\mu-\frac{1}{2}}}{(z+t\sqrt{z^2-1})^{\mu-\nu}}\,dt$$

$\left[\operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2},\ |\arg(z\pm 1)|<\pi\right]$. МО 88

2. $$P_\nu^m(z) = \frac{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+m)}{\pi}\int_0^\pi \left[z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\right]^\nu \cos m\varphi\, d\varphi;$$

$$= (-1)^m \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-m+1)}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos m\varphi\, d\varphi}{\left[z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\right]^{\nu+1}}$$

$\left[|\arg z| < \frac{\pi}{2},\ \arg\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\right) = \arg z \text{ при } \varphi = \frac{\pi}{2}\right]$

(сравни 8.822 1.). См III 483(15), УВ II 123

3 $$Q_\nu^\mu(z) = \sqrt{\pi}\,\frac{e^{\mu\pi i}\,\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^\mu\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu-\mu+1)}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^{2\mu} t\, dt}{(z+\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} t)^{\nu+\mu+1}}$$

$[\operatorname{Re}(\nu\pm\mu) > -1,\ |\arg(z\pm 1)| < \pi]$ (сравни 8.822 2.). МО 88

4 $$Q_\nu^\mu(z) = \frac{e^{\mu\pi i}\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\mu t\, dt}{(z+\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} t)^{\nu+1}}$$

$[\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1,\ \nu \neq -1, -2, -3, \dots,\ |\arg(z\pm 1)| < \pi]$

УВ II 134и, МО 88

8.712 $$Q_\nu^\mu(z) = \frac{e^{\mu\pi i}\,\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}\int_{-1}^1 (1-t^2)^\nu (z-t)^{-\nu+\mu-1}\, dt$$

$[\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1,\ \operatorname{Re}\mu > -1,\ |\arg(z\pm 1)| < \pi]$ (сравни 8.821 2.).

МО 88и, ВТФ I 155(5)и

8.713

1 $$Q_\nu^\mu(z) = \frac{e^{\mu\pi i}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \times$$

$$\times\left\{\int_0^\pi \frac{\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\, dt}{(z-\cos t)^{\mu+\frac{1}{2}}} - \cos\nu\pi\int_0^\infty \frac{e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}\, dt}{(z+\operatorname{ch} t)^{\mu+\frac{1}{2}}}\right\}$$

$\left[\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1,\ |\arg(z\pm 1)| < \pi\right]$. МО 89

2 $$P_\nu^{-\mu}(z) = \frac{(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{2^\nu\Gamma(\mu-\nu)\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^{2\nu+1} t}{(z+\operatorname{ch} t)^{\nu+\mu+1}}\, dt$$

$[\operatorname{Re} z > -1,\ |\arg(z\pm 1)| < \pi,\ \operatorname{Re}(\nu+1) > 0,\ \operatorname{Re}(\mu-\nu) > 0]$. МО 89

3 $$P_\nu^{-\mu}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\, dt}{(z+\operatorname{ch} t)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$[\operatorname{Re} z > -1,\ |\arg(z\pm 1)| < \pi,\ \operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1,\ \operatorname{Re}(\mu-\nu) > 0]$ МО 89

8.714

1. $$P_\nu^\mu(\cos\varphi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin^\mu\varphi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_0^\varphi\frac{\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\,dt}{(\cos t-\cos\varphi)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$
$\left[0<\varphi<\pi,\ \operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}\right]$; (сравни 8.823) МО 87

2 $$P_\nu^{-\mu}(\cos\varphi)=\frac{\Gamma(2\mu+1)\sin^\mu\varphi}{2^\mu\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\int_0^\infty\frac{t^{\nu+\mu}\,dt}{(1+2t\cos\varphi+t^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$
$[\operatorname{Re}(\nu+\mu)>-1,\ \operatorname{Re}(\mu-\nu)>0]$. МО 89

3 $$Q_\nu^\mu(\cos\varphi)=\frac{1}{2^{\mu+1}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\frac{\sin^\mu\varphi}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\times$$
$$\times\int_0^\infty\left[\frac{\operatorname{sh}^{2\mu}t}{(\cos\varphi+i\sin\varphi\operatorname{ch}t)^{\nu+\mu+1}}+\frac{\operatorname{sh}^{2\mu}t}{(\cos\varphi-i\sin\varphi\operatorname{ch}t)^{\nu+\mu+1}}\right]dt$$
$\left[\operatorname{Re}(\nu+\mu+1)>0,\ \operatorname{Re}(\nu-\mu+1)>0,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2}\right]$. МО 89

4 $$P_\nu^\mu(\cos\varphi)=\frac{i}{2^\mu}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\frac{\sin^\mu\varphi}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\times$$
$$\times\int_0^\infty\left[\frac{\operatorname{sh}^{2\mu}t}{(\cos\varphi+i\sin\varphi\operatorname{ch}t)^{\nu+\mu+1}}\right]-\frac{\operatorname{sh}^{2\mu}t}{(\cos\varphi-i\sin\varphi\operatorname{ch}t)^{\nu+\mu+1}}\right]dt$$
$\left[\operatorname{Re}(\nu\pm\mu+1)>0,\ \operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2}\right]$. МО 89

8.715

1. $$P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\alpha)=\frac{\sqrt{2}\operatorname{sh}^\mu\alpha}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_0^\alpha\frac{\operatorname{ch}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\,dt}{(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}t)^{\mu+\frac{1}{2}}}\qquad\left[\alpha>0,\ \operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}\right].$$
МО 87

2. $$Q_\nu^\mu(\operatorname{ch}\alpha)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\mu\pi i}\operatorname{sh}^\mu\alpha}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_\alpha^\infty\frac{e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}\,dt}{(\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\alpha)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$
$\left[\alpha>0,\ \operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}(\nu+\mu)>-1\right]$. МО 87

См. также 3.277 1., 4., 5., 7., **3.318**, **3.516** 3., 3.518 1., 2., **3.542** 2., **3.663** 1., **3.894**, **3.988** 3., **6.622** 3., **6.628** 1., 4.—7., а также **8.742**.

8.72 Асимптотические ряды для больших $|\nu|$

8.721 Для действительных значений μ, $|\nu|\gg 1$, $|\nu|\gg|\mu|$, $|\arg\nu|<\pi$, имеем:

1. $P_\nu^\mu(\cos\varphi)=$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\nu+\mu+1)\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu-k+\frac{1}{2}\right)}\frac{\cos\left[\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{4}(2k+1)+\frac{\mu\pi}{2}\right]}{k!\Gamma\left(\nu-k+\frac{3}{2}\right)(2\sin\varphi)^{k+\frac{1}{2}}}$$
$\left[\nu+\mu\neq-1,-2,-3,\ldots;\ \nu\neq-\frac{3}{2},-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\ldots;\ \text{при}\ \frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{5\pi}{6}\right.$

этот ряд сходится и при комплексных значениях ν и μ; в остальных случаях он представляет собой асимптотическое разложение

при $|\nu| \gg |\mu|$, $|\nu| \gg 1$, если $\nu > 0$, $\mu > 0$ и $0 < \varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \pi - \varepsilon$]. МО 92

2 $$Q_\nu^\mu(\cos\varphi) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1) \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu-k+\frac{1}{2}\right)} \frac{\cos\left[\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)\varphi+\frac{\pi}{4}(2k+1)+\frac{\mu\pi}{2}\right]}{k!\,\Gamma\left(\nu-k+\frac{3}{2}\right)(2\sin\varphi)^{k+\frac{1}{2}}}$$

[$\nu+\mu \neq -1, -2, -3, \ldots$; $\nu \neq -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, \ldots$; при $\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{5}{6}\pi$

этот ряд сходится и при комплексных значениях ν и μ; в остальных случаях он представляет собой асимптотическое разложение

при $|\nu| \gg |\mu|$, $|\nu| \gg 1$, если $\nu > 0$, $\mu > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \pi - \varphi$].

ВТФ I 147 (6), МО 92

3. $$P_\nu^\mu(\cos\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \frac{\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{4}+\frac{\mu\pi}{2}\right]}{\sqrt{2\sin\varphi}} \left[1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right]$$

$\left[0 < \varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \pi-\varepsilon,\ |\nu| \gg \frac{1}{\varepsilon}\right]$. МО 92

При $\nu > 0$, $\mu > 0$ и $\nu > \mu$ из формул **8.721** 1. и **8.721** 2. следует, что

4 $$\nu^{-\mu} P_\nu^\mu(\cos\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\nu\pi\sin\varphi}} \cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{4}+\frac{\mu\pi}{2}\right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu^3}}\right).$$

5 $$\nu^{-\mu} Q_\nu^\mu(\cos\varphi) = \sqrt{\frac{\pi}{2\nu\sin\varphi}} \cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\varphi+\frac{\pi}{4}+\frac{\mu\pi}{2}\right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu^3}}\right)$$

$\left[0 < \varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \pi-\varepsilon;\ \nu \gg \frac{1}{\varepsilon}\right]$. МО 92

8.722 Если φ настолько близко к 0 или π, что $\nu\varphi$ или $\nu(\pi-\varphi)$ невелики по сравнению с 1, то асимптотические формулы **8.721** становятся непригодными; в таком случае при $\nu > 0$, $\mu \geqslant 0$, $\nu \gg 1$ для небольших значений φ применимо следующее асимптотическое представление:

1 $$\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}\right]^\nu P_\nu^{-\mu}(\cos\varphi) =$$
$$= J_\mu(\eta) + \sin^2\frac{\varphi}{2}\left[\frac{J_{\mu+1}(\eta)}{2\eta} - J_{\mu+2}(\eta) + \frac{\eta}{6} J_{\mu+3}(\eta)\right] + O\left(\sin^4\frac{\varphi}{2}\right),$$

где $\eta = (2\nu+1)\sin\frac{\varphi}{2}$. В частности, отсюда следует, что

2. $$\lim_{\nu\to\infty} \nu^\mu P_\nu^{-\mu}\left(\cos\frac{x}{\nu}\right) = J_\mu(x) \quad [x \geqslant 0, \mu \geqslant 0].$$ МО 93

8.723 О поведении функций $P_\nu^\mu(z)$ и $Q_\nu^\mu(z)$ при больших $|\nu|$ и действительных значениях $z > \frac{3}{2\sqrt{2}}$ можно судить на основании равенств.

1. $$P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{2^\mu}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\Gamma\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-\nu-\mu)}\frac{e^{(\mu-\nu)\alpha}\operatorname{sh}^\mu\alpha}{(e^{2\alpha}-1)^{\mu+\frac{1}{2}}}\times\right.$$
$$\times F\left(\mu+\frac{1}{2}, -\mu+\frac{1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{1-e^{2\alpha}}\right)+$$
$$\left.+\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\frac{e^{(\nu+\mu+1)\alpha}\operatorname{sh}^\mu\alpha}{(e^{2\alpha}-1)^{\mu+\frac{1}{2}}}F\left(\mu+\frac{1}{2}, -\mu+\frac{1}{2}; -\nu+\frac{1}{2}, \frac{1}{1-e^{2\alpha}}\right)\right\}$$
$$\left[\nu \neq \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots; \alpha > \frac{1}{2}\ln 2\right] \qquad \text{МО 94}$$

2. $$Q_\nu^\mu(\operatorname{ch}\alpha) = e^{\mu\pi i}2^\mu\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\frac{e^{-(\nu+\mu+1)\alpha}}{(1-e^{-2\alpha})^{\mu+\frac{1}{2}}}\operatorname{sh}^\mu\alpha\times$$
$$\times F\left(\mu+\frac{1}{2}, -\mu+\frac{1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{1-e^{2\alpha}}\right)$$
$$\left[\mu+\nu+1 \neq 0, -1, -2, \ldots, \alpha > \frac{1}{2}\ln 2\right]. \qquad \text{МО 94}$$

См. также 8.776

8.724 Неравенства

1. $$|\mathrm{P}_\nu^{\pm\mu}(\cos\varphi)| < \sqrt{\frac{8}{\nu\pi}}\frac{\Gamma(\nu\pm\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{\sin^{\mu+\frac{1}{2}}\varphi}$$

2. $$|\mathrm{Q}_\nu^{\pm\mu}(\cos\varphi)| < \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}\frac{\Gamma(\nu\pm\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{\sin^{\mu+\frac{1}{2}}\varphi},$$

3. $$|\mathrm{P}_\nu^{\pm m}(\cos\varphi)| < \frac{2}{\sqrt{\nu\pi}}\frac{\Gamma(\nu\pm m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{\sin^{m+\frac{1}{2}}\varphi},$$

4. $$|\mathrm{Q}_\nu^{\pm m}(\cos\varphi)| < \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\frac{\Gamma(\nu\pm m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{\sin^{m+\frac{1}{2}}\varphi}$$

[ν и μ — любые действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $\nu \geqslant 1$, $\nu-\mu+1 > 0$, $\mu \geqslant 0$] МО 91—92

8.73—8.74 Функциональные соотношения

8.731

1. $$(z^2-1)\frac{dP_\nu^\mu(z)}{dz} = (\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z) - (\nu+1)zP_\nu^\mu(z)$$
(сравни 8.832 1., 8.914 2.). ВТФ I 161 (10), МО 81

2. $$(2\nu+1)zP_\nu^\mu(z) = (\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z) + (\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z)$$
(сравни 8.832 2., 8.914 1.). ВТФ I 160 (2), МО 81

3. $$P_\nu^{\mu+2}(z) + 2(\mu+1)\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}P_\nu^{\mu+1}(z) = (\nu-\mu)(\nu+\mu+1)P_\nu^\mu(z).$$
МО 82, ВТФ I 160 (1)

4 $P^{\mu}_{\nu+1}(z)-P^{\mu}_{\nu-1}(z)=(2\nu+1)\sqrt{z^2-1}\,P^{\mu-1}_{\nu}(z).$ ВТФ I 160(3), МО 82

5 $P^{\mu}_{-\nu-1}(z)=P^{\mu}_{\nu}(z)$ (сравни 8.820, 8.832 4.). ВТФ I 140(1), МО 82

8.732

1 $$(z^2-1)\frac{dQ^{\mu}_{\nu}(z)}{dz}=(\nu-\mu+1)Q^{\mu}_{\nu+1}(z)-(\nu+1)zQ^{\mu}_{\nu}(z)$$

(сравни 8.832 3.) МО 82

2 $$(2\nu+1)zQ^{\mu}_{\nu}(z)=(\nu-\mu+1)Q^{\mu}_{\nu+1}(z)+(\nu+\mu)zQ^{\mu}_{\nu-1}(z)$$

(сравни 8.832 4.). МО 82

3 $$Q^{\mu+2}_{\nu}(z)+2(\mu+1)\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}Q^{\mu+1}_{\nu}(z)=(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)Q^{\mu}_{\nu}(z)$$ МО 82

4 $$Q^{\mu}_{\nu-1}(z)-Q^{\mu}_{\nu+1}(z)=-(2\nu+1)\sqrt{z^2-1}\,Q^{\mu-1}_{\nu}(z).$$ МО 82 *и*

5 $$e^{-\mu\pi i}Q^{\mu}_{\nu}(x\pm i0)=e^{\pm\frac{1}{2}\mu\pi i}\left[\mathrm{Q}^{\mu}_{\nu}(x)\mp i\frac{\pi}{2}\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(x)\right].$$ МО 83

8.733

1 $$(1-x^2)\frac{d\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(x)}{dx}=(\nu+1)x\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(x)-(\nu-\mu+1)\mathrm{P}^{\mu}_{\nu+1}(x)$$ (сравни 8.731 1),

$$=-\nu x\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(x)+(\nu+\mu)\mathrm{P}^{\mu}_{\nu-1}(x);$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}^{\mu+1}_{\nu}(x)-\mu x\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(x),$$

$$=(\nu-\mu+1)(\nu+\mu)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}^{\mu-1}_{\nu}(x)+\mu x\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(x)$$ МО 82

2 $$(2\nu+1)x\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(x)=(\nu-\mu+1)\mathrm{P}^{\mu}_{\nu+1}(x)+(\nu+\mu)\mathrm{P}^{\mu}_{\nu-1}(x)$$

(сравни 8.731 2) МО 82

3 $$\mathrm{P}^{\mu+2}_{\nu}(x)+2(\mu+1)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{P}^{\mu+1}_{\nu}(x)+(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(x)=0$$

(сравни 8.731 3) МО 82

4 $$\mathrm{P}^{\mu}_{\nu-1}(x)-\mathrm{P}^{\mu}_{\nu+1}(x)=(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}^{\mu-1}_{\nu}(x)$$

(сравни 8.731 4) МО 82

5 $\mathrm{P}^{\mu}_{-\nu-1}(x)=\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(x)$ (сравни 8.731 5)

8.734

1 $$(\nu+\mu+1)zQ^{\mu}_{\nu}(z)+\sqrt{z^2-1}\,Q^{\mu+1}_{\nu}(z)=(\nu-\mu+1)Q^{\mu}_{\nu+1}(z).$$ МО 82

2 $$(\nu+\mu)Q^{\mu}_{\nu-1}(z)+\sqrt{z^2-1}\,Q^{\mu+1}_{\nu}(z)=(\nu-\mu)zQ^{\mu}_{\nu}(z).$$ МО 82

3. $$Q^{\mu}_{\nu-1}(z)-zQ^{\mu}_{\nu}(z)=-(\nu-\mu+1)\sqrt{z^2-1}\,Q^{\mu-1}_{\nu}(z)$$ МО 82

4 $$zQ^{\mu}_{\nu}(z)-Q^{\mu}_{\nu+1}(z)=-(\nu+\mu)\sqrt{z^2-1}\,Q^{\mu-1}_{\nu}(z)$$ МО 82

5. $$(\nu+\mu)(\nu+\mu+1)Q^{\mu}_{\nu-1}(z)+(2\nu+1)\sqrt{z^2-1}\,Q^{\mu+1}_{\nu}(z)=$$

$$=(\nu-\mu)(\nu-\mu+1)Q^{\mu}_{\nu+1}(z)$$ МО 82

8.735

1. $$(\nu+\mu+1)x\,\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(x)+\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}^{\mu+1}_{\nu}(x)=(\nu-\mu+1)\,\mathrm{P}^{\mu}_{\nu+1}(x).$$ МО 83

2. $$(\nu-\mu)x\,\mathrm{P}^{\mu}_{\nu}(x)-(\nu+\mu)\mathrm{P}^{\mu}_{\nu-1}(x)=\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}^{\mu+1}_{\nu}(x).$$ МО 83

3. $\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)-x\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)=(\nu-\mu+1)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu-1}(x).$ МО 83

4. $x\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)-\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu}(x)=(\nu+\mu)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu-1}(x).$ МО 83

5. $(\nu-\mu)(\nu-\mu+1)\,\mathrm{P}_{\nu+1}^{\mu}(x)=(\nu+\mu)(\nu+\mu+1)\,\mathrm{P}_{\nu-1}^{\mu}(x)+$
$+(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu+1}(x).$ МО 83

8.736

1. $P_{\nu}^{-\mu}(z)=\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left[P_{\nu}^{\mu}(z)-\frac{2}{\pi}e^{-\mu\pi i}\sin\mu\pi\,Q_{\nu}^{\mu}(z)\right].$ МО 83

2. $P_{\nu}^{\mu}(-z)=e^{\nu\pi i}P_{\nu}^{\mu}(z)-\frac{2}{\pi}\sin[(\nu+\mu)\pi]\,e^{-\mu\pi i}Q_{\nu}^{\mu}(z)$
$[\operatorname{Im} z<0]$ (сравни 8.833 1.). МО 83

3. $P_{\nu}^{\mu}(-z)=e^{-\nu\pi i}P_{\nu}^{\mu}(z)-\frac{2}{\pi}\sin[(\nu+\mu)\pi]\,e^{-\mu\pi i}Q_{\nu}^{\mu}(z)$
$[\operatorname{Im} z>0]$ (сравни 8.833 2.). МО 83

4. $Q_{\nu}^{-\mu}(z)=e^{-2\mu\pi i}\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}Q_{\nu}^{\mu}(z).$ МО 82

5. $Q_{\nu}^{\mu}(-z)=-e^{-\nu\pi i}Q_{\nu}^{\mu}(z)$ $[\operatorname{Im} z<0]$ (сравни 8.833 3.). МО 82

6. $Q_{\nu}^{\mu}(-z)=-e^{\nu\pi i}Q_{\nu}^{\mu}(z)$ $[\operatorname{Im} z>0]$ (сравни 8.833 4.). МО 82

7. $Q_{\nu}^{\mu}(z)\sin[(\nu+\mu)\pi]-Q_{-\nu-1}^{\mu}(z)\sin[(\nu-\mu)\pi]=\pi e^{\mu\pi i}\cos\mu\pi\,P_{\nu}^{\mu}(z).$
МО 83

8.737

1. $\mathrm{P}_{\nu}^{-\mu}(x)=\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left[\cos\mu\pi\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)-\frac{2}{\pi}\sin(\mu\pi)\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)\right].$ МО 84

2. $\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(-x)=\cos[(\nu+\mu)\pi]\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)-\frac{2}{\pi}\sin[(\nu+\mu)\pi]\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x).$ МО 84

3. $\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(-x)=-\cos[(\nu+\mu)\pi]\,\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)-\frac{\pi}{2}\sin[(\nu+\mu)\pi]\,\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x).$
МО 83, ВТФ I 144 (15)

4. $\mathrm{Q}_{-\nu-1}^{\mu}(x)=\frac{\sin[(\nu+\mu)\pi]}{\sin[(\nu-\mu)\pi]}\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)-\frac{\pi\cos\nu\pi\cos\mu\pi}{\sin[(\nu-\mu)\pi]}\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x).$ МО 84

8.738

1. $Q_{\nu}^{\mu}(i\operatorname{ctg}\varphi)=\exp\left[i\pi\left(\mu-\frac{\nu+1}{2}\right)\right]\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)\times$
$\times\sqrt{\frac{1}{2}\sin\varphi}\,P_{-\nu-\frac{1}{2}}^{-\mu-\frac{1}{2}}(\cos\varphi)\quad\left[0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right].$ МО 83

2. $P_{\nu}^{\mu}(i\operatorname{ctg}\varphi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left[i\pi\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]\frac{\sqrt{\sin\varphi}}{\Gamma(-\nu-\mu)}Q_{-\mu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\frac{1}{2}}(\cos\varphi-i0)$
$\left[0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right].$ МО 83

8.739 $e^{-\mu\pi i}Q_{\nu}^{\mu}(\operatorname{ch}\alpha)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)}{\sqrt{2\operatorname{sh}\alpha}}P_{-\mu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\frac{1}{2}}(\operatorname{cth}\alpha)$ $[\operatorname{Re}\operatorname{ch}\alpha>0].$ МО 83

8.741

1. $\mathrm{P}_{\nu}^{-\mu}(x)\frac{d\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)}{dx}-\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)\frac{d\mathrm{P}_{\nu}^{-\mu}(x)}{dx}=\frac{2\sin\mu\pi}{\pi(1-x^2)}.$ МО 83

2 $$P_\nu^\mu(x)\frac{dQ_\nu^\mu(x)}{dx}-Q_\nu^\mu(x)\frac{dP_\nu^\mu(x)}{dx}=\frac{2^{2\mu}}{1-x^2}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)}.$$ МО 83

8.742

1 $$\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left\{\cos\mu\pi\,P_\nu^\mu(\cos\varphi)-\frac{2}{\pi}\sin\mu\pi\,Q_\nu^\mu(\cos\varphi)\right\}=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{cosec}^\mu\varphi}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\varphi\frac{\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\,dt}{(\cos t-\cos\varphi)^{\frac{1}{2}-\mu}}\quad\left[\operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2}\right].$$ МО 88

2 $$\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left\{\cos\nu\pi\,P_\nu^\mu(\cos\varphi)-\frac{2}{\pi}\sin\nu\pi\,Q_\nu^\mu(\cos\varphi)\right\}=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{cosec}^\mu\varphi}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\int_\varphi^\pi\frac{\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(t-\pi)\right]dt}{(\cos\varphi-\cos t)^{\frac{1}{2}-\mu}}\quad\left[\operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2}\right].$$ МО 88

3 $$P_\nu^\mu(\cos\varphi)\cos(\nu+\mu)\pi-\frac{2}{\pi}Q_\nu^\mu(\cos\varphi)\sin(\nu+\mu)\pi=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin^\mu\varphi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_\varphi^\pi\frac{\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(t-\pi)\right]dt}{(\cos\varphi-\cos t)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$
$$\left[\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}\right].$$ МО 88

4 $$\cos\mu\pi\,P_\nu^\mu(\cos\varphi)-\frac{2}{\pi}\sin\mu\pi\,Q_\nu^\mu(\cos\varphi)=$$
$$=\frac{1}{2^\mu\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\frac{\sin^\mu\varphi}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi\frac{\sin^{2\mu}t\,dt}{(\cos\varphi\pm i\sin\varphi\cos t)^{\nu-\mu}}$$
$$\left[\operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2},\ 0<\varphi<\pi\right].$$ МО 38

Интегралы от шаровых функций см 7.11—7.21.

8.75 Частные случаи и частные значения

Частные случаи

8.751

1. $$P_\nu^m(x)=(-1)^m\frac{\Gamma(\nu+m+1)(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m\Gamma(\nu-m+1)\,m!}F\left(m-\nu,m+\nu+1;m+1;\frac{1-x}{2}\right).$$ МО 84

2. $$P_\nu^m(z)=\frac{\Gamma(\nu+m+1)(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{2^m m!\,\Gamma(\nu-m+1)}F\left(m-\nu,m+\nu+1;m+1;\frac{1-z}{2}\right).$$ МО 84

3 $$Q^{\mu}_{-n-\frac{3}{2}}(z)=\frac{e^{\mu\pi i}\Gamma\left(\mu+n+\frac{3}{2}\right)}{2^{n+\frac{3}{2}}(n+1)!}\times$$
$$\times(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}z^{2n-\mu+\frac{3}{2}}F\left(\frac{\mu+n+\frac{5}{2}}{2},\ \frac{\mu+n+\frac{3}{2}}{2};\ n+2;\ \frac{1}{z^2}\right).$$ МО 84

8.752

1. $$\mathrm{P}^m_\nu(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}\mathrm{P}_\nu(x).$$ УВ II 119 *и*, МО 84, ВТФ I 148 (6)

2. $$\mathrm{P}^{-m}_\nu(x)=(-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}\mathrm{P}^m_\nu(x)=$$
$$=(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\int_x^1\ldots\int_x^1\mathrm{P}_\nu(x)(dx)^m.$$ Х 99 *и*, МО 85, ВТФ I 149 (10) *и*

3. $$P^{-m}_\nu(z)=(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}\int_1^z\ldots\int_1^z P_\nu(z)(dz)^m.$$ МО 85, ВТФ I 149 (8)

4. $$Q^m_\nu(z)=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}Q_\nu(z)$$ УВ II 119 *и*, МО 85, ВТФ I 148 (5)

5. $$Q^{-m}_\nu(z)=(-1)^m(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}\int_z^\infty\ldots\int_z^\infty Q_\nu(z)(dz)^m.$$ МО 85, ВТФ I 149 (9)

Частные значения индексов

8.753

1. $$\mathrm{P}^\mu_0(\cos\varphi)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\operatorname{ctg}^\mu\frac{\varphi}{2}.$$ МО 84

2. $$\mathrm{P}^{-1}_\nu(\cos\varphi)=-\frac{1}{\nu(\nu+1)}\frac{d\mathrm{P}_\nu(\cos\varphi)}{d\varphi}.$$ МО 84

3. $P^m_n(z)\equiv 0,\ \mathrm{P}^m_n(x)\equiv 0$ при $m>n$. МО 85

8.754

1. $$P^{\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi\operatorname{sh}\alpha}}\operatorname{ch}\nu\alpha.$$ МО 85

2. $$\mathrm{P}^{\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\varphi)=\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\varphi}}\cos\nu\varphi.$$ МО 85

3. $$\mathrm{P}^{-\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\varphi)=\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\varphi}}\frac{\sin\nu\varphi}{\nu}.$$ МО 85

4 $$Q^{\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha)=i\sqrt{\frac{\pi}{2\operatorname{sh}\alpha}}e^{-\nu\alpha}.$$ МО 85

8.755

1 $$\mathrm{P}^{-\nu}_\nu(\cos\varphi)=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^\nu.$$ МО 85

2 $$P^{-\nu}_\nu(\operatorname{ch}\alpha)=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{2}\right)^\nu.$$ МО 85

Частные значения шаровых функций

8.756

1. $$P_\nu^\mu(0) = \frac{2^\mu \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{-\nu-\mu+1}{2}\right)}.$$ МО 84

2. $$\frac{dP_\nu^\mu(0)}{dx} = \frac{2^{\mu+1}\sin\frac{1}{2}(\nu+\mu)\pi\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}.$$ МО 84

3. $$Q_\nu^\mu(0) = -2^{\mu-1}\sqrt{\pi}\sin\frac{1}{2}(\nu+\mu)\pi\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)}.$$ МО 84

4. $$\frac{dQ_\nu^\mu(0)}{dx} = 2^\mu\sqrt{\pi}\cos\frac{1}{2}(\nu+\mu)\pi\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}.$$ МО 84

8.76 Производные по индексу

8.761 $$\frac{\partial P_\nu^{-\mu}(x)}{\partial\nu} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\mu}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\nu)(1-\nu)\dots(n-1-\nu)(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+n)}{(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+n)\,1\cdot2\dots n}\times$$
$$\times[\psi(\nu+n+1)-\psi(\nu-n+1)]\left(\frac{1-x}{2}\right)^n$$
$$[\nu\neq 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots;\ \operatorname{Re}\mu>-1].$$ МО 94

8.762

1. $$\left[\frac{\partial P_\nu(\cos\varphi)}{\partial\nu}\right]_{\nu=0} = 2\ln\cos\frac{\varphi}{2}.$$ МО 94

2. $$\left[\frac{\partial P_\nu^{-1}(\cos\varphi)}{\partial\nu}\right]_{\nu=0} = -\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 2\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\ln\cos\frac{\varphi}{2}.$$ МО 94

3. $$\left[\frac{\partial P_\nu^{-1}(\cos\varphi)}{\partial\nu}\right]_{\nu=1} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \sin\varphi\ln\cos\frac{\varphi}{2}.$$ МО 94

Связь с полиномами $C_n^\lambda(x)$ см. 8.936.
Связь с гипергеометрической функцией см. 8.77.

8.77 Представление в виде ряда

Представление в виде ряда см. 8.721. Представление шаровых функций в виде ряда можно также дать, выражая их через гипергеометрическую функцию.

8.771

1. $$P_\nu^\mu(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}F\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right).$$ МО 15

2. $$Q_\nu^\mu(z) = \frac{e^{\mu\pi i}}{2^{\nu+1}} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{z^{\nu+\mu+1}} \times$$
$$\times F\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1, \frac{\nu+\mu+1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right).$$ MO 15

См. также 8.702, 8.703, 8.704, 8.723, 8.751, 8.772

Аналитическое продолжение для $|z| \gg 1$

Из теорем об аналитическом продолжении гипергеометрических рядов (см. 9.154 и 9.155) вытекают следующие формулы:

8.772

1. $$P_\nu^\mu(z) = \frac{\sin(\nu+\mu)\pi\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}\cos\nu\pi\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \times$$
$$\times (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} z^{-\nu-\mu-1} F\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1, \frac{\nu+\mu+1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right) +$$
$$+ \frac{2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-\mu+1)} (z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} z^{\nu-\mu} F\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}, \frac{\mu-\nu}{2}; \frac{1}{2}-\nu; \frac{1}{z^2}\right)$$
$[2\nu \neq \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots; |z| > 1; |\arg(z \pm 1)| < \pi]$. MO 85

2 $$P_\nu^\mu(z) = \frac{\Gamma\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)(z^2-1)^{-\frac{\nu+1}{2}}}{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu-\mu)} \times$$
$$\times F\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}, \frac{\nu+\mu+1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{1-z^2}\right) +$$
$$+ \frac{2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-\mu+1)} (z^2-1)^{\frac{\nu}{2}} F\left(\frac{\mu-\nu}{2}, -\frac{\mu+\nu}{2}; \frac{1}{2}-\nu; \frac{1}{1-z^2}\right)$$
$[2\nu \neq \pm 1, \pm 3, \pm 5; \ldots, |1-z^2| > 1; |\arg(z \pm 1)| < \pi]$. MO 85

3. $$P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{-\frac{\mu}{2}} \left(\frac{z+1}{2}\right)^{-\nu} \times$$
$$\times F\left(-\nu, -\nu-\mu; 1-\mu; \frac{z-1}{z+1}\right) \qquad \left[\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1\right]$$ MO 86

8.773

1. $$Q_\nu^\mu(z) = e^{\mu\pi i} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} (z^2-1)^{-\frac{\nu+1}{2}} \times$$
$$\times F\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}, \frac{\nu-\mu+1}{2}; \mu+\frac{3}{2}, \frac{1}{1-z^2}\right)$$
$[\nu+\mu \neq -1, -2, -3, \ldots; |\arg(z \pm 1)| < \pi; |1-z^2| > 1]$. MO 86

2. $$Q_\nu^\mu(z) = \frac{1}{2} e^{\mu\pi i} \left\{\Gamma(\mu) \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu, \frac{1-z}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\Gamma(-\mu)\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, \nu+1; 1+\mu; \frac{1-z}{2}\right)\right\}$$
$[|\arg z \pm 1)| < \pi, |1-z| < 2]$. MO 86

8.774 $$P_\nu^\mu(i\operatorname{ctg}\varphi)=\sqrt{\frac{\sin\varphi}{2\pi}}\frac{\Gamma\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-\nu-\mu)}\times$$
$$\times e^{-i(\nu+1)\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{2}+\mu,\ \frac{1}{2}-\mu;\ \nu+\frac{3}{2};\ \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)+$$
$$+\sqrt{\frac{\sin\varphi}{2\pi}}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}e^{i\nu\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{2}+\mu,\ \frac{1}{2}-\mu;\ \frac{1}{2}-\nu;\ \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$\left[2\nu\neq\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \ldots,\ 0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right].$$ MO 86

8.775

1. $$\mathrm{P}_\nu^\mu(x)=\frac{2^\mu\cos\frac{1}{2}(\nu+\mu)\pi\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)}\times$$
$$\times(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}F\left(\frac{\nu+\mu+1}{2},\ \frac{\mu-\nu}{2};\ \frac{1}{2};\ x^2\right)+$$
$$+\frac{2^{\mu+1}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin\frac{1}{2}(\nu+\mu)\pi\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}F\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1,\ \frac{\nu-\mu+1}{2};\ \frac{3}{2};\ x^2\right).$$
MO 87

2. $$\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)=-\frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-\mu}}\frac{\sin\frac{1}{2}(\nu+\mu)\pi\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)}\times$$
$$\times(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}F\left(\frac{\nu+\mu+1}{2},\ \frac{\mu-\nu}{2},\ \frac{1}{2};\ x^2\right)+$$
$$+2^\mu\sqrt{\pi}\frac{\cos\frac{1}{2}(\nu+\mu)\pi\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}x(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}F\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1,\ \frac{\mu-\nu+1}{2};\ \frac{3}{2};x^2\right).$$
MO 87

8.776 При $|z|\gg1$

1. $$P_\nu^\mu(z)=\left\{\frac{2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-\mu+1)}z^\nu+\frac{\Gamma\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)}{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu-\mu)}z^{-\nu-1}\right\}\left(1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)$$
$$[2\nu\neq\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \ldots,\ |\arg z|<\pi].$$ MO 87

2. $$Q_\nu^\mu(z)=\sqrt{\pi}\frac{e^{\mu\pi i}}{2^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}z^{-\nu-1}\left(1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)$$
$$[2\nu\neq-3,\ -5,\ -7,\ \ldots;\ |\arg z|<\pi].$$ MO 87

8.777 Пусть $\zeta=z+\sqrt{z^2-1}$. Этим равенством переменная ζ определяется однозначно во всей плоскости z, в которой сделан разрез от $-\infty$ до $+1$;

при этом рассматривается та ветвь переменной ζ, для которой действительным значениям z, бо́льшим 1, соответствуют значения ζ, также бо́льшие 1. В таком случае

1. $$P_\nu^\mu(z)=\frac{2^\mu\Gamma\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu-\mu)}\frac{(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{\zeta^{\nu+\mu+1}}F\left(\frac{1}{2}+\mu,\ \nu+\mu+1;\ \nu+\frac{3}{2},\ \frac{1}{\zeta^2}\right)+$$
$$+\frac{2^\mu}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\frac{(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{\zeta^{\mu-\nu}}F\left(\frac{1}{2}+\mu,\ \mu-\nu;\ \frac{1}{2}-\nu;\ \frac{1}{\zeta^2}\right)$$
$[2\nu\neq\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \ldots;\ |\arg(z-1)|<\pi]$. МО 86

2. $$Q_\nu^\mu(z)=2^\mu e^{\mu\pi i}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\frac{(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{\zeta^{\nu+\mu+1}}\times$$
$$\times F\left(\frac{1}{2}+\mu,\ \nu+\mu+1;\ \nu+\frac{3}{2};\ \frac{1}{\zeta^2}\right)$$
$[|\arg(z-1)|<\pi]$. МО 86

8.78 Нули шаровых функций

8.781 $\mathrm{P}_\nu^{-\mu}(\cos\varphi)$, рассматриваемая как функция от ν, имеет при $\mu\geqslant 0$ бесконечное множество нулей; все они просты и действительны. Если число ν_0 является нулем функции $\mathrm{P}_\nu^{-\mu}(\cos\varphi)$, то число $-\nu_0-1$ также является нулем этой функции МО 91

8.782 Если ν и μ оба действительны и $\mu\leqslant 0$ или если ν и μ являются целыми числами, то функция $P_\nu^\mu(t)$ не имеет действительных нулей, бо́льших 1. Если ν и μ оба действительны, но $\mu<0$, то функция $P_\nu^\mu(t)$ при $\mu>\nu$ не имеет действительных нулей, бо́льших 1, в том случае, когда $\sin\mu\pi\sin(\mu-\nu)\pi>0$, и имеет один такой нуль в том случае, когда $\sin\mu\pi\sin(\mu-\nu)\pi<0$; наконец, если $\mu\leqslant\nu$, то функция $P_\nu^\mu(t)$ при $E(\mu)$ четном не имеет указанных нулей, а при $E(\mu)$ нечетном имеет один нуль

8.783 Если $\nu>-\frac{3}{2}$ и $\nu+\mu+1>0$, то функция $Q_\nu^\mu(t)$ не имеет действительных нулей, бо́льших 1. МО 91

8.784 Функция $P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(z)$ при λ действительном имеет бесчисленное множество нулей; все ее нули действительны и больше единицы.

8.785 Функция $\mathrm{P}_n(x)$ (n — натуральное число) имеет ровно n действительных нулей, которые лежат в промежутке $-1,\ +1$.

8.786 Функция $Q_n(z)$, где n — натуральное число, не имеет нулей, для которых $|\arg(z-1)|<\pi$, функция $\mathrm{Q}_n(\cos\varphi)$ имеет ровно $n+1$ нулей, лежащих в промежутке $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$. МО 91

8.787 Вычисление значений ν, при которых для заданных малых значений φ имеет место равенство $\mathrm{P}_\nu^{-\mu}(\cos\varphi)=0$, может быть выполнено по следующей приближенной формуле:

$$\nu+\frac{1}{2}=\frac{j_\mu}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\left\{1-\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{6}\left(1-\frac{4\mu-1}{j_\mu^2}\right)+O\left(\sin^4\frac{\varphi}{2}\right)\right\}; \qquad \text{MO 93}$$

здесь j_μ означает любой не равный нулю корень уравнения $J_\mu(z)=0$ $(\mu\geqslant 0)$. Если φ близко к π, то вместо этой формулы можно пользоваться формулами:

1. $$\nu\approx\mu+k+\frac{\Gamma(2\mu+k+1)}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(k+1)}\left(\frac{\pi-\varphi}{3}\right)^{2\mu}$$

$[\mu>0;\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots]$. MO 93

2. $$\nu\approx k+\frac{1}{2\ln\left(\frac{2}{\pi-\varphi}\right)} \qquad [\mu=0,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots].$$ MO 93

8.79 Ряды шаровых функций

8.791

1. $$\frac{1}{z-t}=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\,P_k(t)\,Q_k(z) \qquad \left[\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|<\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|\right];$$

t должно лежать внутри эллипса, проходящего через точку z и имеющего фокусы в точках ± 1.

2. $$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}}\ln\frac{z-t+\sqrt{1-2tz+t^2}}{\sqrt{z^2-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}t^kQ_k(z)$$

$[\operatorname{Re} z>1,\ |t|<1]$. MO 78

8.792 $$\mathrm{P}_\nu^{-\alpha}(\cos\varphi)\mathrm{P}_\nu^{-\beta}(\cos\psi)=$$
$$=\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{\nu-k}-\frac{1}{\nu+k+1}\right]\mathrm{P}_k^{-\alpha}(\cos\varphi)\,\mathrm{P}_k^{-\beta}(\cos\psi)$$

$[\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0,\ \nu$ действительно, $-\pi<\varphi\pm\psi<\pi]$. MO 94

8.793 $$\mathrm{P}_\nu^{-\mu}(\cos\varphi)=\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{\nu-k}-\frac{1}{\nu+k+1}\right)\mathrm{P}_k^{-\mu}(\cos\varphi)$$

$[\mu\geqslant 0,\ 0<\varphi<\pi]$. MO 94

Теоремы сложения

8.794

1. $$\mathrm{P}_\nu(\cos\psi_1\cos\psi_2+\sin\psi_1\sin\psi_2\cos\varphi)=$$
$$=\mathrm{P}_\nu(\cos\psi_1)\,\mathrm{P}_\nu(\cos\psi_2)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\mathrm{P}_\nu^{-k}(\cos\psi_1)\,\mathrm{P}_\nu^{k}(\cos\psi_2)\cos k\varphi;$$
$$=\mathrm{P}_\nu(\cos\psi_1)\,\mathrm{P}_\nu(\cos\psi_2)+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu-k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\mathrm{P}_\nu^{k}(\cos\psi_1)\,\mathrm{P}_\nu^{k}(\cos\psi_2)\cos k\varphi$$

$[0\leqslant\psi_1<\pi,\ 0\leqslant\psi_2<\pi,\ \psi_1+\psi_2<\pi;\ \varphi$ действительно$]$

(сравни 8.814, 8.844 1.). MO 90

2. $Q_\nu(\cos\psi_1\cos\psi_2+\sin\psi_1\sin\psi_2\cos\varphi)=$

$$=P_\nu(\cos\psi_1)Q_\nu(\cos\psi_2)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k P_\nu^{-k}(\cos\psi_1)Q_\nu^k(\cos\psi_2)\cos k\varphi$$

$\left[0<\psi_1<\frac{\pi}{2},\ 0<\psi_2<\pi,\ 0<\psi_1+\psi_2<\pi;\ \varphi \text{ действительно}\right]$

(сравни 8.844 3.). МО 90

8.795

1. $P_\nu\left(z_1z_2-\sqrt{z_1^2-1}\sqrt{z_2^2-1}\cos\varphi\right)=$

$$=P_\nu(z_1)P_\nu(z_2)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k P_\nu^k(z_1)P^{-k}(z_2)\cos k\varphi$$

$[\operatorname{Re} z_1>0,\ \operatorname{Re} z_2>0,\ |\arg(z_1-1)|<\pi,\ |\arg(z_2-1)|<\pi]$. МО 91

2. $Q_\nu\left(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi\right)=$

$$=P_\nu(x_1)Q_\nu(x_2)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k P_\nu^{-k}(x_1)Q_\nu^k(x_2)\cos k\varphi$$

$[1<x_1<x_2,\ \nu\neq-1,\ -2,\ -3,\ \ldots;\ \varphi \text{ действительно}]$. МО 91

3. $Q_n\left(x_1x_2+\sqrt{x_1^2+1}\sqrt{x_2^2+1}\operatorname{ch}\alpha\right)=$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k-n-1)!\,(k+n)!}Q_n^k(ix_1)Q_n^k(ix_2)e^{-k\alpha}\quad [x_1>0,\ x_2>0;\ \alpha>0].$$

МО 91

8.796

$$P_\nu(-\cos\psi_1\cos\psi_2-\sin\psi_1\sin\psi_2\cos\varphi)=P_\nu(-\cos\psi_1)P_\nu(\cos\psi_2)+$$
$$+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu-k+1)}P_\nu^{-k}(-\cos\psi_1)P_\nu^{-k}(\cos\psi_2)\cos k\varphi$$

$[0<\psi_2<\psi_1<\pi;\ \varphi \text{ действительно}]$ (сравни 8.844 2.). МО 91

См. также 8.934 3.

8.81. Шаровые функции (присоединенные функции Лежандра) с целочисленными индексами

8.810 Для целочисленных значений ν и μ дифференциальное уравнение 8.700 1. (при условии, что $|\nu|>|\mu|$) в действительной области имеет особенно простое решение, а именно:

$$u=P_n^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x).$$

Функции $P_n^m(x)$ называются *присоединенными функциями Лежандра* или *шаровыми функциями 1-го рода*. Число n называется *степенью*, а число m — *порядком функции* $P_n^m(x)$. Функции

$$\cos m\vartheta P_n^m(\cos\varphi),\qquad \sin m\vartheta P_n^m(\cos\varphi),$$

зависящие от углов φ и ϑ, *также* называются *шаровыми функциями 1-го рода*, а именно: *тесеральными* (т. е. клеточными) при $m<n$ и *телесными* при $m=n$. Эти последние функции периодичны относительно углов φ и ϑ, причем

периоды их соответственно равны π и 2π. Они однозначны и непрерывны повсюду на поверхности единичной сферы $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ ($x_1=\sin\varphi\cos\vartheta$, $x_2=\sin\varphi\sin\vartheta$, $x_3=\cos\varphi$) и являются решением дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial Y}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 Y}{\partial\vartheta^2}+n(n+1)Y=0.$$

8.811 Интегральное представление:

$$\mathrm{P}_n^m(\cos\varphi)=\frac{(-1)^m(n+m)!}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)(n-m)!}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin^{-m}\varphi\times$$
$$\times\int_0^\varphi(\cos t-\cos\varphi)^{m-\frac{1}{2}}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt. \qquad \text{МО 75}$$

8.812 Представление в виде ряда:

$$\mathrm{P}_n^m(x)=\frac{(-1)^m(n+m)!}{2^m m!(n-m)!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left\{1-\frac{(n-m)(m+n+1)}{1!(m+1)}\frac{1-x}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-m)(n-m+1)(m+n+1)(m+n+2)}{2!(m+1)(m+2)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2-\ldots\right\}; \qquad \text{МО 73}$$
$$=\frac{(-1)^m(2n-1)!!}{(n-m)!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left\{x^{n-m}-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}x^{n-m-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}x^{n-m-4}-\ldots\right\}; \qquad \text{МО 73}$$
$$=\frac{(-1)^m(2n-1)!!}{(n-m)!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}x^{n-m}F\left(\frac{m-n}{2},\ \frac{n-m+1}{2};\ \frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{x^2}\right). \qquad \text{МО 73}$$

8.813 Частные случаи:

1. $\mathrm{P}_1^1(x)=-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=-\sin\varphi.$ МО 73

2. $\mathrm{P}_2^1(x)=-3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}x=-\frac{3}{2}\sin 2\varphi.$ МО 73

3. $\mathrm{P}_2^2(x)=3(1-x^2)=\frac{3}{2}(1-\cos 2\varphi).$ МО 73

4. $\mathrm{P}_3^1(x)=-\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(5x^2-1)=-\frac{3}{8}(\sin\varphi+5\sin 3\varphi).$ МО 73

5. $\mathrm{P}_3^2(x)=15(1-x^2)x=\frac{15}{4}(\cos\varphi-\cos 3\varphi).$ МО 73

6. $\mathrm{P}_3^3(x)=-15(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=-\frac{15}{4}(3\sin\varphi-\sin 3\varphi).$ МО 73

Функциональные соотношения

Рекуррентные формулы см. 8.731.

8.814 $P_n(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\Theta)=$

$$=P_n(\cos\varphi_1)P_n(\cos\varphi_2)+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\mathrm{P}_n^m(\cos\varphi_1)\mathrm{P}_n^m(\cos\varphi_2)\cos m\Theta$$

(«теорема сложения»). МО 74

8.815 Если

$$Y_{n_1}(\varphi, \vartheta) = a_0 P_{n_1}(\cos\varphi) + \sum_{m=1}^{n_1} (a_m \cos m\vartheta + b_m \sin m\vartheta) \mathrm{P}_{n_1}^m(\cos\varphi),$$

$$Z_{n_2}(\varphi, \vartheta) = \alpha_0 P_{n_2}(\cos\varphi) + \sum_{m=1}^{n_2} (\alpha_m \cos m\vartheta + \beta_m \sin m\vartheta) \mathrm{P}_{n_2}^m(\cos\varphi),$$

то

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \, Y_{n_1}(\varphi, \vartheta) Z_{n_2}(\varphi, \vartheta) = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \, Y_n(\varphi, \vartheta) P_n[\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos(\vartheta - \theta)] =$$

$$= \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\psi, \theta). \qquad \text{МО 75}$$

8.816 $(\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\vartheta)^n = P_n(\cos\varphi) +$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \frac{n!}{(n+m)!} \cos m\vartheta \mathrm{P}_n^m(\cos\varphi). \qquad \text{МО 75}$$

Интегралы от функций $\mathrm{P}_n^m(x)$ см. **7.112 1.**, **7.122 1.**

8.82—8.83 Функции Лежандра

8.820 Дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{du}{dz}\right] + \nu(\nu+1)u = 0 \quad (\text{сравни } \mathbf{8.700\ 1.}),$$

в котором параметр ν может быть любым числом, имеет следующие два линейно независимых решения:

1. $P_\nu(z) = F\left(-\nu, \nu+1; 1; \frac{1-z}{2}\right)$.

2. $Q_\nu(z) = \dfrac{\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} z^{-\nu-1} F\left(\frac{\nu+2}{2}, \frac{\nu+1}{2}; \frac{\nu+3}{2}; \frac{1}{z^2}\right)$.

См III 518 (137)

Функции $P_\nu(z)$ и $Q_\nu(z)$ называются *функциями Лежандра* соответственно *1-го* и *2-го рода*. Если ν не равно целому числу, то в точках $z = -1$ и $z = \infty$ функция $P_\nu(z)$ имеет особенности; если же $\nu = n = 0, 1, 2, \ldots$, то функция $P_\nu(z)$ обращается в полином Лежандра $P_n(z)$ (см. **8.91**); при $\nu = -n = -1, -2, \ldots$ имеем:

$$P_{-n-1}(z) = P_n(z).$$

3. Функция $Q_\nu(z)$, если только $\nu \neq 0, 1, 2, \ldots$, имеет в точках $z = \pm 1$ и $z = \infty$ особенности; эти точки служат для нее точками ветвления. Если же $\nu = n = 0, 1, 2, \ldots$, то функция $Q_n(z)$ при $|z| > 1$ однозначна и при $z = \infty$ регулярна.

4. В правой полуплоскости

$$P_\nu(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^\nu F\left(-\nu, -\nu; 1; \frac{z-1}{z+1}\right) \quad [\operatorname{Re} z > 0].$$

5. Равенствами 8.820 1. и 8.820 4. функция $P_\nu(z)$ однозначно определяется внутри круга радиуса 2 с центром в точке $z = 1$ и в правой полуплоскости z.

Для $z = x = \cos\varphi$ решением уравнения 8.820 служит функция

6. $\mathrm{P}_\nu(x) = P_\nu(x) = F\left(-\nu, \nu+1; 1; \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$;

и вообще имеют место равенства

7. $P_\nu(z) = P_{-\nu-1}(z) = \mathrm{P}_\nu(z) = \mathrm{P}_{-\nu-1}(z)$.

8. Равенством 8.820 2. функция $Q_\nu(z)$ при $|z| > 1$ однозначно определена в плоскости z, в которой сделан разрез от точки $z = -\infty$ до точки $z = 1$. С помощью гипергеометрического ряда функцию можно аналитически продолжить внутрь единичного круга На отрезке $(-1 \leqslant x \leqslant +1)$ действительной оси функция $Q_\nu(x)$ определяется равенством

9. $\mathrm{Q}_\nu(x) = \frac{1}{2}[Q_\nu(x+i0) + Q_\nu(x-i0)]$. X 52(53), УВ II 113

Интегральные представления

8.821

1. $$P_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_A^{(1+,\, z+)} \frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu (t-z)^{\nu+1}}\, dt.$$

A — точка на вещественной оси справа от точки $t = 1$ (и справа от z, если z действительно); в точке A положено:

$$\arg(t-1) = \arg(t+1) = 0 \text{ и } [|\arg(t-z)| < \pi].$$ УВ II 97

2. $$Q_\nu(z) = \frac{1}{4i \sin\nu\pi} \int_A^{(1-,\, 1+)} \frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu (z-t)^{\nu+1}}\, dt.$$

[ν — нецелое число, причем точка A — конец большой оси эллипса справа от $t = 1$, построенного в плоскости t с фокусами в точке ± 1, у которого вторая полуось настолько мала, что точка z лежит вне его Контур начинается от точки A, описывает путь $(1-, -1+)$ и возвращается в A; $|\arg z| \leqslant \pi$ и $|\arg(z-t)| \to \arg z$, когда $t \to 0$ на контуре, $\arg(t+1) = \arg(t-1) = 0$ в точке A; z не лежит на вещественной оси между -1 и 1.]
УВ II 109

При $\nu = n$ целом

3. $$Q_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n (z-t)^{-n-1}\, dt.$$ См III 517(134), УВ II 109

8.822

1. $$P_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\right)^{\nu+1}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\right)^\nu d\varphi$$

$$\left[\operatorname{Re} z > 0 \text{ и } \arg\{z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\} = \arg z \text{ при } \varphi = \frac{\pi}{2}\right].$$

УВ II 105, УВ II 106

2. $Q_\nu(z) = \int\limits_0^\infty \frac{d\varphi}{\left(z+\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{ch}\,\varphi\right)^{\nu+1}}$, $[\mathrm{Re}\,\nu > -1$; если ν не является целым числом, то $\arg\left\{\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)\mathrm{ch}\,\varphi\right\}$ при $\varphi=0$ имеет главное значение$]$. УВ II 113

8.823 $\mathrm{P}_\nu(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\theta \frac{\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}\,d\varphi.$ УВ II 108

8.824 $Q_n(z) = 2^n n! \int\limits_z^\infty \ldots \int\limits_z^\infty \frac{(dz)^{n+1}}{(z^2-1)^{n+1}} = 2^n \int\limits_z^\infty \frac{(t-z)^n}{(t^2-1)^{n+1}}\,dt;$

$$= \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!}\frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2-1)^n \int\limits_z^\infty \frac{dt}{(t^2-1)^{n+1}}\right]$$

$[\mathrm{Re}\,z > 1]$. УВ II 111—112, МО 78

8.825 $Q_n(z) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}_n(t)}{z-t}\,dt$ $[|\arg(z-1)| < \pi]$. УВ II 114—115, МО 78

См. также 6.622 3., 8.842.

8.826 Тригонометрические ряды:

1. $P_n(\cos\varphi) = \frac{2^{n+2}}{\pi}\frac{n!}{(2n+1)!!}\left[\sin(n+1)\varphi + \frac{1}{1}\frac{n+1}{2n+3}\sin(n+3)\varphi + \right.$
$\left. + \frac{1\cdot 3\,(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\,(2n+3)(2n+5)}\sin(n+5)\varphi + \ldots\right]$ $[0 < \varphi < \pi]$. МО 79

2. $Q_n(\cos\varphi) = 2^{n+1}\frac{n!}{(2n+1)!!}\left[\cos(n+1)\varphi + \frac{1}{1}\frac{n+1}{2n+3}\cos(n+3)\varphi + \right.$
$\left. + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}\cos(n+5)\varphi + \ldots\right]$ $[0 < \varphi < \pi]$ МО 79

Другие представления функций Лежандра в виде ряда дают нам их выражения через гипергеометрическую функцию, см. 8.820.

Частные случаи и частные значения

8.827

1. $Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \mathrm{Arth}\,x.$ ЯЭ 207

2. $Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1.$ ЯЭ 207

3. $Q_2(x) = \frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x.$ ЯЭ 207

4. $Q_3(x) = \frac{1}{4}(5x^3-3x)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}.$ ЯЭ 207

5. $Q_4(x) = \frac{1}{16}(35x^4-30x^2+3)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{35}{8}x^3 + \frac{55}{24}x.$ ЯЭ 207

6. $Q_5(x) = \frac{1}{16}(63x^5-70x^3+15x)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{63}{8}x^4 + \frac{49}{8}x^2 - \frac{8}{15}.$ ЯЭ 207

8.828

1. $P_\nu(1)=1.$ МО 79

2. $P_\nu(0)=-\frac{\sin\nu\pi}{\sqrt{\pi^3}}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right).$ МО 79

8.829 $Q_\nu(0)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}(1-\cos\nu\pi)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right).$ МО 79

Функциональные соотношения

8.831

1. $Q_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}[\cos\nu\pi P_\nu(x)-P_\nu(-x)]$ $[\nu\neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots].$ МО 76

2. $Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x}-W_{n-1}(x)$ $[n=0, 1, 2, \ldots],$

где

3. $W_{n-1}(x)=\sum_{k=0}^{2E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{2(n-2k)-1}{(2k+1)(n-k)}P_{n-2k-1}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}P_{k-1}(x)P_{n-k}(x)$

и

$W_{-1}(x)\equiv 0$ (см. также 8.839). См III 516 (131), МО 76

4. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{\nu-k}-\frac{1}{\nu+k+1}\right)P_k(\cos\varphi)=\frac{\pi}{\sin\nu\pi}P_\nu(\cos\varphi)$

[ν не равно целому числу; $0\leqslant\varphi<\pi$]. МО 77

5. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{\nu-k}-\frac{1}{\nu+k+1}\right)P_k(\cos\varphi)P_k(\cos\psi)=$

$=\frac{\pi}{\sin\nu\pi}P_\nu(\cos\varphi)P_\nu(\cos\psi)$

[ν не равно целому числу, $-\pi<\varphi+\psi<\pi$, $-\pi<\varphi-\psi<\pi$]. МО 77

См. также 8.521 4.

8.832

1. $(z^2-1)\frac{d}{dz}P_\nu(z)=(\nu+1)[P_{\nu+1}(z)-zP_\nu(z)].$ УВ II 99 *и*

2. $(2\nu+1)zP_\nu(z)=(\nu+1)P_{\nu+1}(z)+\nu P_{\nu-1}(z).$ УВ II 98

3. $(z^2-1)\frac{d}{dz}Q_\nu(z)=(\nu+1)[Q_{\nu+1}(z)-zQ_\nu(z)].$ УВ II 112 *и*

4. $(2\nu+1)zQ_\nu(z)=(\nu+1)Q_{\nu+1}(z)+\nu Q_{\nu-1}(z).$ УВ II 112

8.833

1. $P_\nu(-z)=e^{\nu\pi i}P_\nu(z)-\frac{2}{\pi}\sin\nu\pi Q_\nu(z)$ $[\operatorname{Im} z<0].$ МО 77

2. $P_\nu(-z)=e^{-\nu\pi i}P_\nu(z)-\frac{2}{\pi}\sin\nu\pi Q_\nu(z)$ $[\operatorname{Im} z>0].$ МО 77

3. $Q_\nu(-z) = -e^{-\nu\pi i}Q_\nu(z) \quad [\operatorname{Im} z < 0].$ МО 77

4. $Q_\nu(-z) = -e^{\nu\pi i}Q_\nu(z) \quad [\operatorname{Im} z > 0].$ МО 77

8.834

1. $Q_\nu(x \pm i0) = \mathrm{Q}_\nu(x) \mp \frac{\pi i}{2}\mathrm{P}_\nu(x).$ МО 77

2. $Q_n(z) = \frac{1}{2}P_n(z)\ln\frac{z+1}{z-1} - W_{n-1}(z)$ (см. 8.831 3.). МО 77

8.835

1. $Q_\nu(z) - Q_{-\nu-1}(z) = \pi \operatorname{ctg} \nu\pi\, \mathrm{P}_\nu(z) \quad [\sin\nu\pi \neq 0].$ МО 77

2. $\mathrm{Q}_{-\nu-1}(\cos\varphi) = \mathrm{Q}_\nu(\cos\varphi) - \pi\operatorname{ctg}\nu\pi\,\mathrm{P}_\nu(\cos\varphi) \quad [\sin\nu\pi \neq 0].$ МО 77

3. $\mathrm{Q}_\nu(-\cos\varphi) = -\cos\nu\pi\,\mathrm{Q}_\nu(\cos\varphi) + \frac{\pi}{2}\sin\nu\pi\,\mathrm{P}_\nu(\cos\varphi).$ МО 77

8.836

1. $Q_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2-1)^n\ln\frac{z+1}{z-1}\right] - \frac{1}{2}P_n(z)\ln\frac{z+1}{z-1}.$ МО 79

2. $Q_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\ln\frac{1+x}{1-x}\right] - \frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x}.$ МО 79

8.837

1. $\mathrm{P}_\nu(x) = \mathrm{P}_\nu(\cos\varphi) = F\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1;\ \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$ (сравни 8.820 6.). МО 76

2. $$P_\nu(z) = \frac{\operatorname{tg}\nu\pi}{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}z^{-\nu-1}F\left(\frac{\nu}{2}+1,\ \frac{\nu+1}{2};\ \nu+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right) + \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)}z^\nu F\left(\frac{1-\nu}{2},\ -\frac{\nu}{2};\ \frac{1}{2}-\nu;\ \frac{1}{z^2}\right).$$ МО 78

См. также **8.820.**

Интегралы от функций Лежандра см. **7.1—7.2.**

8.838 Неравенства:

1. $|\mathrm{P}_\nu(\cos\varphi) - \mathrm{P}_{\nu+2}(\cos\varphi)| \leqslant 2C_0\sqrt{\frac{1}{\nu\pi}}.$ МО 78

2. $|\mathrm{Q}_\nu(\cos\varphi) - \mathrm{Q}_{\nu+2}(\cos\varphi)| < C_0\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}.$ МО 78

$[0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ \nu > 1,\ C_0$ — число, не зависящее от значений ν и $\varphi]$.

О нулях функций Лежандра 2-го рода см 8.784, 8.785, 8.786 Разложение функций Лежандра по шаровым функциям см. 8.794, 8.795, 8.796

8.839 Дифференциальное уравнение, приводящее к функции $W_{n-1}(x)$ (см. 8.831 3.):

$$(1-x^2)\frac{d^2W_{n-1}}{dx^2} - 2x\frac{dW_{n-1}}{dx} + (n+1)nW_{n-1} = 2\frac{dP_n(x)}{dx}.$$ МО 76

8.84 Функции конуса

8.840 Если в дифференциальном уравнении 8.700 1., определяющем шаровые функции, положить

$$\nu = -\frac{1}{2} + i\lambda,$$

где λ — действительный параметр, то получится дифференциальное уравнение так называемых функций конуса. Функции конуса являются частным случаем шаровых функций. Однако шаровые функции

$$P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(x), \quad Q_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(x)$$

имеют некоторые особенности, заставляющие выделить их в особый класс — функции конуса. Важнейшая из этих особенностей следующая:

8.841 Функции

$$P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cos\varphi) = 1 + \frac{4\lambda^2+1^2}{2^2}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{(4\lambda^2+1^2)(4\lambda^2+3^2)}{2^2 4^2}\sin^4\frac{\varphi}{2} + \ldots$$

при φ действительном действительны, причем

$$P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(x) \equiv P_{-\frac{1}{2}-i\lambda}(x). \qquad \text{MO 95}$$

8.842 Интегральные представления:

1. $$P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cos\varphi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\varphi}\frac{\operatorname{ch}\lambda u\,du}{\sqrt{2(\cos u-\cos\varphi)}} = \frac{2}{\pi}\operatorname{ch}\lambda\pi\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda u\,du}{\sqrt{2(\cos\varphi+\operatorname{ch}u)}}.$$ MO 95

2. $$Q_{-\frac{1}{2}\mp\lambda i}(\cos\varphi) = \pm i\operatorname{sh}\lambda\pi\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda u\,du}{\sqrt{2(\operatorname{ch}u+\cos\varphi)}} + \int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\lambda u\,du}{\sqrt{2(\operatorname{ch}u-\cos\varphi)}}.$$ MO 95

Функциональные соотношения (см. также 8.73)

8.843 $$P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(-\cos\varphi) = \frac{\operatorname{ch}\lambda\pi}{\pi}\left[Q_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cos\varphi) + Q_{-\frac{1}{2}-i\lambda}(\cos\varphi)\right].$$ MO 95

8.844

1. $$P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cos\psi\cos\vartheta + \sin\psi\sin\vartheta\cos\varphi) =$$
$$= P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cos\psi)\,P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cos\vartheta) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k} P^k_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cos\psi)\,P^k_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cos\vartheta)\cos m\varphi}{(4\lambda^2+1^2)(4\lambda^2+3^2)\ldots[4\lambda^2+(2k-1)^2]}$$
$$\left[0<\vartheta<\frac{\pi}{2},\ 0<\psi<\pi,\ 0<\psi+\vartheta<\pi\right]$$ (сравни 8.794 1.). MO 95

2. $$P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(-\cos\psi\cos\vartheta - \sin\psi\sin\vartheta\cos\varphi) =$$
$$= P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cos\psi)\,P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(-\cos\vartheta) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k} P^k_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cos\psi)\,P^k_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(-\cos\vartheta)\cos m\varphi}{(4\lambda^2+1)(4\lambda^2+3^2)\ldots[4\lambda^2+(2k-1)^2]}$$
$$\left[0<\psi<\frac{\pi}{2}<\vartheta,\ \psi+\vartheta<\pi\right]$$ (сравни 8.796). MO 95

3. $$Q_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cos\psi\cos\vartheta+\sin\psi\sin\vartheta\cos\varphi)=P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cos\psi)Q_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cos\vartheta)+$$
$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k} P^k_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cos\psi)\,Q^k_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cos\vartheta)\cos m\varphi}{(4\lambda^2+1)(4\lambda^2+3^2)\ldots[4\lambda^2+(2k-1)^2]}$$
$$\left[0<\psi<\frac{\pi}{2}<\vartheta,\ \psi+\vartheta<\pi\right]$$ (сравни 8.794 2.). МО 96

О нулях функций конуса см 8.784.

8.85 Функции тора (или кольца)

8.850 *Функциями тора* называют решения дифференциального уравнения

1 $$\frac{d^2u}{d\eta^2}+\frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{sh}\eta}\frac{du}{d\eta}-\left(n^2-\frac{1}{4}+\frac{m^2}{\operatorname{sh}^2\eta}\right)u=0,$$

являющиеся одними из видов шаровых функций В частности, решениями уравнения 8.850 1. служат функции

$$P^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta),\quad Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{sh}\eta).$$ МО 96

Для функций тора существенны следующие формулы, получающиеся как следствия из приведенных раньше формул для шаровых функций:

8.851 Интегральные представления:

1 $$P^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=$$
$$=\frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}\frac{(\operatorname{sh}\eta)^m}{2^m\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2m}\varphi\,d\varphi}{(\operatorname{ch}\eta+\operatorname{sh}\eta\cos\varphi)^{n+m+\frac{1}{2}}}=$$
$$=\frac{(-1)^m}{2\pi}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{2\pi}\frac{\cos m\varphi\,d\varphi}{(\operatorname{ch}\eta+\operatorname{sh}\eta\cos\varphi)^{n+\frac{1}{2}}}$$ МО 96

2 $$Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=(-1)^m\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}mt\,dt}{(\operatorname{ch}\eta+\operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}t)^{n+\frac{1}{2}}};\quad [n\geqslant m]$$
$$=(-1)^m\frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\ln\operatorname{cth}\frac{\eta}{2}}(\operatorname{ch}\eta-\operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}t)^{n-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}mt\,dt.$$ МО 96

8.852 Функциональные соотношения:

1. $$Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=(-1)^m\frac{2^m\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1)}\operatorname{sh}^m\eta\, e^{-\left(n+m+\frac{1}{2}\right)\eta}\times$$
$$\times F\left(m+\frac{1}{2},\ n+m+\frac{1}{2};\ n+1;\ e^{-2\eta}\right).$$ МО 96

2. $$P^{-m}_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=\frac{2^{-m}}{\Gamma(m+1)}(1-e^{-2\eta})^m e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta}\times$$
$$\times F\left(m+\frac{1}{2},\ n+m+\frac{1}{2};\ 2m+1;\ 1-e^{-2\eta}\right).$$ МО 96

8.853 Асимптотическое представление $P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)$ при больших значениях n.

$$P_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta)=\frac{\Gamma(n)\,e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)\eta}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\times$$
$$\times\left[\frac{2\Gamma^2\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\pi n!\,\Gamma(n)}\ln(4e^{\eta})\,e^{-2n\eta}F\left(\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2};\ n+1;\ e^{-2\eta}\right)+A+B\right],$$

где

$$A=1+\frac{1}{2^2}\frac{1\cdot(2n-1)}{1\cdot(n-1)}e^{-2\eta}+\frac{1}{2^4}\frac{1\cdot3\cdot(2n-1)(2n-3)}{1\cdot2\cdot(n-1)(n-2)}e^{-4\eta}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2^{2n-2}}\left(\frac{(2n-1)!!}{(n-1)!}\right)^2 e^{-2(n-1)\eta}.$$

$$B=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi^3}\,\Gamma(n)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+k+1)\,\Gamma(k+1)}\times$$
$$\times\left(u_{n+k}+u_k-v_{n+k-\frac{1}{2}}-v_{k-\frac{1}{2}}\right)e^{-2(n+k)\eta};$$

здесь

$$u_r=\sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s},\quad v_{r-\frac{1}{2}}=\sum_{s=1}^{r}\frac{2}{2s-1}$$ [r — натуральное число]. МО 97

8.9 ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

8.90 Введение

8.901 Пусть $w(x)$ — неотрицательная действительная функция действительного переменного x, и пусть (a, b) — фиксированный промежуток на оси X. Положим далее, что при $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ интеграл

$$\int_a^b x^n w(x)\,dx$$

существует и, кроме того, что интеграл

$$\int_a^b w(x)\,dx$$

положителен В таком случае существует последовательность многочленов $p_0(x),\ p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x),\ \ldots$, однозначно определяемых следующими условиями:

1. $p_n(x)$ есть многочлен степени n, причем коэффициент при x^n в этом многочлене положителен

2. Многочлены $p_0(x)$, $p_1(x)$, ... **ортогональны и нормированы**, т. е.

$$\int_a^b p_n(x)\,p_m(x)\,w(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ 1 & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Говорят, что многочлены $p_n(x)$ образуют *систему ортогональных в интервале* (a, b) *полиномов с весом* $w(x)$.

8.902 Если q_n — коэффициент при x^n в многочлене $p_n(x)$, то

1. $$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\,p_k(y) = \frac{q_n}{q_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)\,p_n(y) - p_n(x)\,p_{n+1}(y)}{x-y}$$

(формула Кристоффеля — Дарбу). ВТФ II 159 (10)

2. $$\sum_{k=0}^{n} [p_k(x)]^2 = \frac{q_n}{q_{n+1}} [p_n(x)\,p'_{n+1}(x) - p'_n(x)\,p_{n+1}(x)].$$ ВТФ II 159 (11)

8.903 Между любыми тремя последовательными ортогональными полиномами существует зависимость

$$p_n(x) = (A_n x + B_n)\,p_{n-1}(x) - C_n p_{n-2}(x) \quad [n = 2, 3, 4, \ldots].$$

В этой формуле A_n, B_n, C_n — постоянные, причем

$$A_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}, \quad C_n = \frac{q_n q_{n-2}}{q_{n-1}^2}.$$ МО 102

8.904 Примеры нормированных систем ортогональных полиномов.

Обозначение и название	Промежуток	Вес
$\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(x)$, см. 8.91	$(-1, +1)$	1
$2^{\lambda}\,\Gamma(\lambda)\left[\frac{(n+\lambda)\,n!}{2\pi\Gamma(2\lambda+n)}\right]^{\frac{1}{2}} C_n^{\lambda}(x)$, см. 8.93	$(-1, +1)$	$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$
$\sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi}}\,T_n(x)$, $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_n=2$ при $n=1, 2, 3, \ldots$, см. 8.94	$(-1, +1)$	$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$
$2^{-\frac{n}{2}}\pi^{-\frac{1}{4}}(n!)^{-\frac{1}{2}} H_n(x)$, см. 8.95	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}
$\left[\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+1+n)\,(\alpha+\beta+1+2n)}{\Gamma(\alpha+1+n)\,\Gamma(\beta+1+n)\,2^{\alpha+\beta+1}}\right]^{\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, см. 8.96	$(-1, +1)$	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$
$\left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\right]^{\frac{1}{2}} L_n^{\alpha}(x)$, см. 8.97	$(0, \infty)$	$x^{\alpha}e^{-x}$

Сравни 7.221 1., 7.313, 7.343, 7.374 1., 7.391 1., 7.414 3.

8.91 Полиномы Лежандра

8.910 Определение. *Полиномы Лежандра* $P_n(z)$ суть многочлены, удовлетворяющие уравнению 8.700 1., в котором $\mu=0$, $\nu=n$, т. е. уравнению

1. $$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+n(n+1)u=0.$$

Это уравнение имеет решение, представляющее собой многочлен, в том и только в том случае, когда n есть число целое. Таким образом, полиномы Лежандра представляют собой частный вид шаровых функций.

Полиномы Лежандра степени n имеют вид

2. $$P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n.$$

8.911 Развернутая запись полиномов Лежандра:

1. $$P_n(z)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}z^{n-2k}=$$
$$=\frac{(2n)!}{n\,(n!)^2}\left(z^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}z^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}z^{n-4}-\dots\right);$$
$$=\frac{(2n-1)!!}{n!}z^nF\left(-\frac{n}{2},\ \frac{1-n}{2};\ \frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{z^2}\right).$$ X 13, A (9001), MO 69

2. $$P_{2n}(z)=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\left(1-\frac{2n(2n+1)}{2!}z^2+\right.$$
$$\left.+\frac{2n(2n-2)(2n+1)(2n+3)}{4!}z^4-\dots\right);$$
$$=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}F\left(-n,\ n+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ z^2\right).$$ A (9002), MO 69

3. $$P_{2n+1}(z)=(-1)^n\frac{(2n+1)!!}{2^n n!}\left(z-\frac{2n(2n+3)}{3!}z^3+\right.$$
$$\left.+\frac{2n(2n-2)(2n+3)(2n+5)}{5!}z^5-\dots\right);$$
$$=(-1)^n\frac{(2n+1)!!}{2^n n!}zF\left(-n,\ n+\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ z^2\right).$$ A (9002), MO 69

4. $$P_n(\cos\varphi)=\frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}n!}\left(\cos n\varphi+\frac{1}{1}\,\frac{n}{2n-1}\cos(n-2)\varphi+\right.$$
$$+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\,\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\varphi+$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\cos(n-6)\varphi-\dots\right).$$ УВ II 92

5. $$P_{2n}(\cos\varphi)=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\left\{\sin^{2n}\varphi-\frac{(2n)^2}{2!}\sin^{2n-2}\varphi\cos^2\varphi+\dots\right.$$
$$\left.\dots+(-1)^n\frac{2^n n!}{(2n-1)!!}\cos^{2n}\varphi\right\}.$$ A (9011)

6. $$P_{2n+1}(\cos\varphi)=(-1)^n\frac{(2n+1)!!}{2^n n!}\cos\varphi\left\{\sin^{2n}\varphi-\frac{(2n)^2}{3!}\sin^{2n-2}\varphi\cos^2\varphi+\dots\right.$$
$$\left.\dots+(-1)^n\frac{2^n n!}{(2n+1)!!}\cos^{2n}\varphi\right\}.$$ A (9012)

7. $$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(n+k)!}{(n-k)!\,(k!)^2\,2^{k+1}}\left[(1-z)^k+(-1)^n(1+z)^k\right].$$ УВ II 128

8.912 Частные случаи:

1. $P_0(x) = 1.$ ЯЭ 206

2. $P_1(x) = x = \cos\varphi.$ ЯЭ 206

3. $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\varphi + 1).$ ЯЭ 206

4. $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \frac{1}{8}(5\cos 3\varphi + 3\cos\varphi).$ ЯЭ 206

5. $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) = \frac{1}{64}(35\cos 4\varphi + 20\cos 2\varphi + 9).$ ЯЭ 206

6. $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) = \frac{1}{128}(63\cos 5\varphi + 35\cos 3\varphi + 30\cos\varphi).$
ЯЭ 206

8.913 Интегральное представление:

$$P_n(\cos\varphi) = \frac{2}{\pi}\int_\varphi^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos t)}}\,dt.$$ УВ II 108

См. также 3.611 3., 3.661 3., 4.

Функциональные соотношения

8.914 Рекуррентные формулы:

1. $(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0$ См 490 (37), УВ II 98

2. $(z^2 - 1)\frac{dP_n}{dz} = n[zP_n(z) - P_{n-1}(z)] = \frac{n(n+1)}{2n+1}[P_{n+1}(z) - P_{n-1}(z)].$
УВ II 99

8.915

1. $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x)P_k(y) = (n+1)\frac{P_n(x)P_{n+1}(y) - P_n(y)P_{n+1}(x)}{y-x}.$ МО 70

2. $\sum_{k=0}(2n - 4k - 1)P_{n-2k-1}(z) = P_n'(z)$ (теорема сложения) МО 72

[суммирование обрывается на первом члене с отрицательным индексом].

3. $\sum_{k=0}(2n - 4k - 3)P_{n-2k-2}(z) = zP_n'(z) - nP_n(z)$ См III 491 (42), УВ II 128

[суммирование обрывается на первом члене с отрицательным индексом].

4. $\sum_{k=1}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}(2n - 4k + 1)[k(2n - 2k + 1) - 2]P_{n-2k}(z) =$
$= z^2P_n''(z) - n(n-1)P_n(z).$ УВ II 129

5. $\sum_{k=0}^{m}\frac{a_{m-k}a_ka_{n-k}}{a_{n+m-k}}\left(\frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1}\right)P_{n+m-2k}(z) = P_n(z)P_m(z)$
$\left[a_k = \frac{(2k-1)!!}{k!},\ m \leqslant n\right].$ А (9036)

8.916

1. $P_n(\cos\varphi) = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} e^{\mp in\varphi} F\left(\frac{1}{2}, -n; \frac{1}{2}-n; e^{\pm 2i\varphi}\right)$. МО 69

2. $P_n(\cos\varphi) = F\left(n+1, -n; 1; \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$. МО 69

3. $P_n(\cos\varphi) = (-1)^n F\left(n+1, -n; 1; \cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$. УВ II 103

4. $P_n(\cos\varphi) = \cos^n\varphi F\left(-\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}n; 1; -\operatorname{tg}^2\varphi\right)$. Х 23

5. $P_n(\cos\varphi) = \cos^{2n}\frac{\varphi}{2} F\left(-n, -n; 1; -\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)$. Х 23, Х 29, УВ II 109и

См. также 8.911 1., 8.911 2., 8.911 3. Связь с другими функциями см. 8.936 3., 8.836, 8.962 2. Интегралы от полиномов Лежандра см. 7.22—7.25. О корнях полиномов Лежандра см. 8.785.

8.917 Неравенства:

1. При $x > 1$ $P_0(x) < P_1(x) < P_2(x) < \ldots < P_n(x) < \ldots$ МО 71

2. При $x > -1$ $P_0(x) + P_1(x) + \ldots + P_n(x) > 0$. МО 71

3. $[P_n(\cos\varphi)]^2 > \frac{\sin(2n+1)\varphi}{(2n+1)\sin\varphi}$ $[0 < \varphi < \pi]$. МО 71

4. $\sqrt{n\sin\varphi}\,|P_n(\cos\varphi)| \leqslant 1$. МО 71

5. $|P_n(\cos\varphi)| \leqslant 1$. УВ II 92

8.92 Ряды полиномов Лежандра

8.921 Производящая функция:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(z) \qquad \left[|t| < \min|z \pm \sqrt{z^2-1}|\right];$$

См III 489 (31), УВ II 91

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{t^{k+1}} P_k(z) \qquad \left[|t| > \max|z \pm \sqrt{z^2-1}|\right].$$ МО 70

8.922

1. $$z^{2n} = \frac{1}{2n+1} P_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (4k+1) \frac{2n(2n-2)\ldots(2n-2k+2)}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2k+1)} P_{2k}(z).$$

МО 72

2. $$z^{2n+1} = \frac{3}{2n+3} P_1(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (4k+3) \frac{2n(2n-2)\ldots(2n-2k+2)}{(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2k+3)} P_{2k+1}(z).$$

МО 72

3. $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (4k+1) \left\{\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\right\}^2 P_{2k}(x) \qquad [|x| < 1, \ (-1)!! \equiv 1].$$

МО 72, Ла 385 (15)

4. $$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(4k+3)\frac{(2k-1)!!\,(2k+1)!!}{2^{2k+1}k!\,(k+1)!}P_{2k+1}(x)$$

$[|x|<1,\ (-1)!!\equiv 1]$. Ла 385 (17)

5. $$\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}(4k+1)\frac{(2k-3)!!\,(2k-1)!!}{2^{2k+1}k!\,(k+1)!}P_{2k}(x)\right\}$$

$[|x|<1,\ (-1)!!\equiv 1]$. Ла 385 (18)

8.923 $$\arcsin x=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\right\}^2[P_{2k+1}(x)-P_{2k-1}(x)]$$

$[|x|<1,\ (-1)!!\equiv 1]$. УВ II 132

8.924

1. $$-\frac{1+\cos n\pi}{2(n^2-1)}P_0(\cos\theta)-$$
$$-\frac{1+\cos n\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+5)\,n^2(n^2-2^2)\dots[n^2-(2k)^2]}{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots[n^2-(2k+3)^2]}P_{2k+2}(\cos\theta)-$$
$$-\frac{3(1-\cos n\pi)}{2(n^2-2^2)}P_1(\cos\theta)-$$
$$-\frac{1-\cos n\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(4k+3)(n^2-1^2)\dots[n^2-(2k-1)^2]}{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\dots[n^2-(2k+2)^2]}P_{2k+1}(\cos\theta)=\cos n\theta.$$

A (9062.1)

2. $$\frac{-\sin n\pi}{2(n^2-1)}P_0(\cos\theta)-$$
$$-\frac{\sin n\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+5)\,n^2(n^2-2^2)\dots[n^2-(2k)^2]}{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots[n^2-(2k+3)^2]}P_{2k+2}(\cos\theta)+$$
$$+\frac{3\sin n\pi}{2(n^2-2^2)}P_1(\cos\theta)+$$
$$+\frac{\sin n\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(4k+3)(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots[n^2-(2k-1)^2]}{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\dots[n^2-(2k+2)^2]}P_{2k+1}(\cos\theta)=\sin n\theta.$$

A (9060.2)

3. $$\frac{2^{n-1}n!}{(2n-1)!!}P_n(\cos\theta)+$$
$$+n\sum_{k=1}^{\infty}(2n-4k+1)\frac{2^{n-2k-1}(n-k-1)!\,(2k-3)!!}{(2n-2k+1)!!\,k!}P_{n-2k}(\cos\theta)=\cos n\theta.$$

A (9061.1)

4. $$\frac{(2n-1)!!\,P_{n-1}(\cos\theta)}{2^{n-1}(n-1)!}-$$
$$-\frac{n}{2^{n+2k+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2n+2k-1)!!\,(2k-1)!!\,(2n+4k+3)}{(n+k+1)!\,(k+1)!}P_{n+2k+1}(\cos\theta)=\frac{4\sin n\theta}{\pi}.$$

A (9061.2)

8.925

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k-1}{2^{2k}(2k-1)^2}\left[\frac{(2k-1)!!}{k!}\right]^2 P_{2k-1}(\cos\theta) = 1 - \frac{2\theta}{\pi}.$$

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2^{2k+1}(2k-1)(k+1)}\left[\frac{(2k-1)!!}{k!}\right]^2 P_{2k}(\cos\theta) = \frac{1}{2} - \frac{2\sin\theta}{\pi}.$$

A (9062.2)

3. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(4k-1)}{2^{2k-1}(2k-1)}\left[\frac{(2k-1)!!}{k!}\right]^2 P_{2k-1}(\cos\theta) = \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{\pi}.$$ A (9062.3)

4. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2^{2k}}\left[\frac{(2k-1)!!}{k!}\right]^2 P_{2k}(\cos\theta) = \frac{2}{\pi\sin\theta} - 1.$$ A (9062.4)

8.926

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P_n(\cos\theta) = \ln\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi-\theta}{4}}{\sin\theta} = -\ln\sin\frac{\theta}{2} - \ln\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

A (9063.2)

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} P_n(\cos\theta) = \ln\frac{1+\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} - 1.$$ A (9063.1)

8.927 $$\sum_{k=0}^{\infty} \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta P_k(\cos\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2(\cos\beta-\cos\varphi)}} \quad [0 \leqslant \beta < \varphi < \pi];$$

$$= 0 \quad [0 < \varphi < \beta < \pi].$$ MO 72

8.928

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(4n+1)[(2n-1)!!]^3}{2^{3n}(n!)^3} P_{2n}(\cos\theta) = \frac{4K}{\pi^2} - 1.$$ A (9064.1)

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(4n+1)[(2n-1)!!]^3}{(2n-1)(2n+2)2^{3n}(n!)^3} P_{2n}(\cos\theta) = \frac{4E}{\pi^2} - \frac{1}{2}.$$ A (9064.2)

Ряды произведений функций Бесселя и полиномов Лежандра см. 8.511 4., 8.531 3., 8.533 1., 8.543 2., 8.534.

8.93 Многочлены $C_n^\lambda(t)$ (Гегенбауэра)

8.930 Определение. Многочлены $C_n^\lambda(t)$ степени n являются коэффициентами при α^n в разложении в степенной ряд функции

$$(1-2t\alpha+\alpha^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(t)\,\alpha^n.$$ УВ II 127

Таким образом, многочлены $C_n^\lambda(t)$ служат обобщением полиномов Лежандра.

8.931 Интегральное представление:

$$C_n^\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!\,\Gamma(2\lambda)} \frac{\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\pi \left(t + \sqrt{t^2-1}\cos\varphi\right)^n \sin^{2\lambda-1}\varphi\, d\varphi. \qquad \text{МО 99}$$

См. также 3.252 11., 3.663 2., 3.664 4.

Функциональные соотношения

8.932 Выражения через гипергеометрическую функцию:

1. $$C_n^\lambda(t) = \frac{\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2\lambda)} F\left(2\lambda+n,\ -n;\ \lambda+\frac{1}{2};\ \frac{1-t}{2}\right)^{*)}; \qquad \text{МО 97}$$
$$= \frac{2^n\,\Gamma(\lambda+n)}{n!\,\Gamma(\lambda)} t^n F\left(-\frac{n}{2},\ \frac{1-n}{2};\ 1-\lambda-n;\ \frac{1}{t^2}\right). \qquad \text{МО 99}$$

2. $$C_{2n}^\lambda(t) = \frac{(-1)^n}{(\lambda+n)\,\mathrm{B}(\lambda,\ n+1)} F\left(-n,\ n+\lambda;\ \frac{1}{2};\ t^2\right). \qquad \text{МО 99}$$

3. $$C_{2n+1}^\lambda(t) = \frac{(-1)^n\, 2t}{\mathrm{B}(\lambda,\ n+1)} F\left(-n,\ n+\lambda+1;\ \frac{3}{2};\ t^2\right). \qquad \text{МО 99}$$

8.933 Рекуррентные формулы:

1. $(n+2)\,C_{n+2}^\lambda(t) = 2(\lambda+n+1)\,tC_{n+1}^\lambda(t) - (2\lambda+n)\,C_n^\lambda(t).$ МО 98
2. $nC_n^\lambda(t) = 2\lambda\left[tC_{n-1}^{\lambda+1}(t) - C_{n-2}^{\lambda+1}(t)\right].$ УВ II 128
3. $(2\lambda+n)\,C_n^\lambda(t) = 2\lambda\left[C_n^{\lambda+1}(t) - tC_{n-1}^{\lambda+1}(t)\right].$ УВ II 128
4. $nC_n^\lambda(t) = (2\lambda+n-1)\,tC_{n-1}(t) - 2\lambda(1-t^2)\,C_{n-2}^{\lambda-1}(t).$ УВ II 128

8.934

1. $$C_n^\lambda(t) = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)\,\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}+n\right)} \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{n!} \frac{d^n}{dt^n}\left[(1-t^2)^{\lambda+n-\frac{1}{2}}\right].$$
УВ II 127

2. $$C_n^\lambda(\cos\varphi) = \sum_{\substack{k,\ l=0\\ k+l=n}}^{n} \frac{\Gamma(\lambda+k)\,\Gamma(\lambda+l)}{k!\,l!\,[\Gamma(\lambda)]^2} \cos(k-l)\,\varphi. \qquad \text{МО 99}$$

3. $$C_n^\lambda(\cos\psi\cos\vartheta + \sin\psi\sin\vartheta\cos\varphi) =$$
$$= \frac{\Gamma(2\lambda-1)}{[\Gamma(\lambda)]^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k}(n-k)!\,[\Gamma(\lambda+k)]^2}{\Gamma(2\lambda+n+k)} (2\lambda+2k-1)\sin^k\psi\sin^k\vartheta \times$$
$$\times C_{n-k}^{\lambda+k}(\cos\psi)\, C_{n-k}^{\lambda+k}(\cos\vartheta)\, C_k^{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos\varphi)$$
$\left[\psi,\ \vartheta,\ \varphi \text{ действительны; } \lambda \neq \frac{1}{2}\right]$ [«теорема сложения»]
(см. также 8.794—8.796). УВ II 136 и

4. $$\lim_{\lambda\to 0} \Gamma(\lambda)\, C_n^\lambda(\cos\varphi) = \frac{2\cos n\varphi}{n}. \qquad \text{МО 98}$$

Ортогональность см. 8.904, 7.313.

---

*) Это равенство служит для определения обобщенных функций $C_n^\lambda(t)$, у которых индекс n может быть любым числом.

8.935 Производные.

1. $\frac{d^k}{dt^k} C_n^\lambda(t) = 2^k \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)} C_{n-k}^{\lambda+k}(t).$ МО 99

В частности,

2. $\frac{dC_n^\lambda(t)}{dt} = 2\lambda C_{n-1}^{\lambda+1}(t).$ УВ II 128

Интегралы от многочленов $C_n^\lambda(x)$ см. 7.31 — 7.33.

8.936 Связь с другими функциями.

1. $C_n^\lambda(t) = \frac{\Gamma(2\lambda+n)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+1)} \left\{\frac{1}{4}(t^2-1)\right\}^{\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}} P_{\lambda+n-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\lambda}(t).$ МО 98

2. $C_{n-m}^{m+\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{(2m-1)!!} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m} = (-1)^m \frac{(1-t^2)^{-\frac{m}{2}} m!\, 2^m}{(2m)!} P_n^m(t)$

[$m+1$ — натуральное число]. МО 98, УВ II 127

3 $C_n^{\frac{1}{2}}(t) = P_n(t).$

4. $J_{\lambda+k-\frac{1}{2}}(r\sin\vartheta\sin\alpha)(r\sin\vartheta\sin\alpha)^{-\lambda+\frac{1}{2}} e^{-ir\cos\vartheta\cos\alpha} =$

$$= \sqrt{2}\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k) i^{-k} \frac{J_{\lambda+k}(r) C_k^\lambda(\cos\vartheta) C_k^\lambda(\cos\alpha)}{r^\lambda C_k^\lambda(1)}.$$ МО 99

5 $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\frac{n}{2}} C_n^{\frac{\lambda}{2}}\left(t\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{n!} H_n(t).$ МО 99 и

См. также 8.932.

8.937 Частные случаи и частные значения:

1. $C_n^1(\cos\varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}.$ МО 99

2 $C_0^0(\cos\varphi) = 1.$ МО 98

3 $C_0^\lambda(t) \equiv 1.$ МО 98

4. $C_n^\lambda(1) = \binom{2\lambda+n-1}{n}.$ МО 98

8.938 Дифференциальное уравнение, приводящее к многочленам $C_n^\lambda(t)$:

$$y'' + \frac{(2\lambda+1)t}{t^2-1} y' - \frac{n(2\lambda+n)}{t^2-1} y = 0$$ (сравни 9.174). УВ II 127

Ряды произведений бесселевых функций и многочленов $C_n^\lambda(x)$ см. 8.532, 8.534.

8.94 Полиномы Чебышёва $T_n(x)$ и $U_n(x)$

8.940 Определение

1. Полиномы Чебышёва 1-го рода:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right] =$$

$$= x^n - \binom{n}{2} x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4} x^{n-4}(1-x^2)^2 - \binom{n}{6} x^{n-6}(1-x^2)^3 + \ldots$$

На 66, На 71

2. Полиномы Чебышёва 2-го рода:

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin x} =$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{1-x^2}}\left[\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^{n+1} - \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^{n+1}\right] =$$

$$= \binom{n+1}{1} x^n - \binom{n+1}{3} x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n+1}{5} x^{n-4}(1-x^2)^2 - \ldots$$

Функциональные соотношения

8.941 Рекуррентные формулы:

1. $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x + T_{n-1}(x) = 0.$ На 358
2. $U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0.$
3. $T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x).$ ВТФ II 184(3)
4. $(1-x^2)U_{n-1}(x) = xT_n(x) - T_{n+1}(x).$ ВТФ II 184(4)

Ортогональность см. 7.343, 8.904.

8.942 Связь с другими функциями:

1. $T_n(x) = F\left(n, -n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right).$ МО 104
2. $T_n(x) = (-1)^n \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.$ МО 104
3. $U_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1)}{\sqrt{1-x^2}\,(2n+1)!!} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}.$ ВТФ II 185(15)

См. также 8.962 3.

8.943 Частные случаи:

1. $T_0(x) = 1.$
2. $T_1(x) = x.$
3. $T_2(x) = 2x^2 - 1.$
4. $T_3(x) = 4x^3 - 3x.$
5. $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$
6. $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$
7. $U_0(x) = 1.$
8. $U_1(x) = 2x.$
9. $U_2(x) = 4x^2 - 1.$
10. $U_3(x) = 8x^3 - 4x$
11. $U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1.$

8.944 Частные значения:

1. $T_n(1) = 1.$
2. $T_n(-1) = (-1)^n.$

3. $T_{2n}(0)=(-1)^n$.
4. $T_{2n+1}(0)=0$
5. $U_{2n+1}(0)=0$.
6. $U_{2n}(0)=(-1)^n$.

8.945 **Производящая функция:**

1. $$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2}=T_0(x)+2\sum_{k=1}^{\infty}T_k(x)t^k.$$ МО 104

2. $$\frac{1}{1-2tx+t^2}=\sum_{k=0}^{\infty}U_k(x)t^k.$$ МО 104 *и*, ВТФ II 186 (31)

8.946 Нули Полиномы $T_n(x)$ и $U_n(x)$ имеют только действительные простые нули; все эти нули лежат в промежутке $(-1, +1)$. На 73

8.947 **Функции** $T_n(x)$ и $\sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x)$ **являются двумя линейно независимыми решениями дифференциального уравнения**

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0.$$ На 69 (58)

8.948 **Из всех многочленов степени со старшим коэффициентом, равным** 1, наименее уклоняется от нуля на отрезке $[-1, +1]$ многочлен $2^{-n+1}T_n(x)$. На 63

8.95 Полиномы Эрмита $H_n(x)$

8.950 Определение.

1. $$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$ См III 567 (14)

или

2. $$H_n(x)=2^nx^n-2^{n-1}\binom{n}{2}x^{n-2}+2^{n-2}\cdot 1\cdot 3\cdot\binom{n}{4}x^{n-4}-$$
$$-2^{n-3}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\binom{n}{6}x^{n-6}+\ldots$$ МО 105 *и*

8.951 **Интегральное представление:**

$$H_n(x)=\frac{\sqrt{2^n}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x+it)^n e^{-t^2}\,dt.$$ МО 106 *и*

Функциональные соотношения

8.952 **Рекуррентные формулы:**

1. $$\frac{dH_n(x)}{dx}=2nH_{n-1}(x).$$ См III 569 (22)

2. $H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$. См III 570 (23)

Ортогональность см. 7.374 1., 8.904.

8.953 **Связь с другими функциями:**

1. $$H_{2n}(x)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\Phi\left(-n, \frac{1}{2}; x^2\right).$$ МО 106 *и*

2. $$H_{2n+1}(x)=(-1)^n 2\frac{(2n+1)!}{n!}x\,\Phi\left(-n, \frac{3}{2}; x^2\right).$$ МО 106 *и*

Связь с многочленами $C_n^{\lambda}(x)$ см. 8.936 5

Связь с полиномами Лагерра см 8.972 2. и 8.972 3

Связь с функциями параболического цилиндра см. 9.253.

8.954 Неравенства:

$$|H_n(x)| \leqslant 2^{\frac{n}{2}-E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{n!}{\left[E\left(\frac{n}{2}\right)\right]!} e^{2x\sqrt{E\left(\frac{n}{2}\right)}} \quad [x > 0]. \qquad \text{МО 106 } u$$

8.955 Асимптотическое представление:

1. $$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^n (2n-1)!!\, e^{\frac{x^2}{2}} \left[\cos\left(\sqrt{4n+1}\,x\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\right] \qquad \text{См III 579}$$

2. $$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{n+\frac{1}{2}} (2n-1)!! \sqrt{2n+1}\, e^{\frac{x^2}{2}} \left[\sin\left(\sqrt{4n+3}\,x\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\right]$$

См III 579

8.956 Частные случаи и частные значения:

1 $H_0(x) = 1.$

2 $H_1(x) = 2x$

3. $H_2(x) = 4x^2 - 2.$

4. $H_3(x) = 8x^3 - 12x.$

5. $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$

6. $H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n (2n-1)!!.$ См III 570 (24)

7. $H_{2n+1}(0) = 0.$

Ряды полиномов Эрмита

8.957 Производящая функция.

1 $$\exp(-t^2 + 2tx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} H_k(x). \qquad \text{СМ III 569 (21)}$$

2 $$\frac{1}{e} \operatorname{sh} 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} H_{2k+1}(x) \qquad \text{МО 106 } u$$

3. $$\frac{1}{e} \operatorname{ch} 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} H_{2k}(x). \qquad \text{МО 106 } u$$

4. $$e \sin 2x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} H_{2k+1}(x). \qquad \text{МО 106 } u$$

5. $$e \cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} H_{2k}(x). \qquad \text{МО 106 } u$$

8.958 «Теорема сложения»:

1. $$\frac{\left(\sum_{k=1}^{r} a_k^2\right)^{\frac{n}{2}}}{n!} H_n\left(\frac{\sum_{k=1}^{r} a_k x_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{r} a_k^2}}\right) = \sum_{m_1+m_2+\ldots+m_r=n} \prod_{k=1}^{r} \left\{\frac{a_k^{m_k}}{m_k!} H_{m_k}(x_k)\right\}.$$ МО 106 *и*

2. Частный случай:

$$2^{\frac{n}{2}} H_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_{n-k}\left(x\sqrt{2}\right) H_k\left(y\sqrt{2}\right)$$ МО 107 *и*

8.959 Полиномы Эрмита удовлетворяют дифференциальному уравнению:

1. $$\frac{d^2u_n}{dx^2} - 2x\frac{du_n}{dx} + 2nu_n = 0;$$ См III 566 (9)

вторым решением этого дифференциального уравнения служат функции:

2. $$u_{2n} = (-1)^n Ax\Phi\left(\frac{1}{2} - n;\ \frac{3}{2};\ x^2\right),$$

3. $$u_{2n+1} = (-1)^n B\Phi\left(-\frac{1}{2} - n;\ \frac{1}{2};\ x^2\right)$$

[A и B — произвольные постоянные]. МО 107

8.96 Полиномы Якоби

8.960 Определение.

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right];$$ ВТФ II 169 (10), КГ 83 *и*

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n+\alpha}{m}\binom{n+\beta}{n-m}(x-1)^{n-m}(x+1)^m.$$ ВТФ II 169 (2)

8.961 Функциональные соотношения:

1. $$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x).$$ ВТФ II 169 (13)

2. $$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) =$$
$$= (2n+\alpha+\beta+1)\left[(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)x + \alpha^2 - \beta^2\right]P_n^{(\alpha,\beta)}(x) -$$
$$- 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$ ВТФ II 169 (11)

3. $$(2n+\alpha+\beta)(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) =$$
$$= n\left[(\alpha-\beta) - (2n+\alpha+\beta)x\right]P_n^{(\alpha,\beta)}(x) +$$
$$+ 2(n+\alpha)(n+\beta)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$ ВТФ II 170 (15)

4. $$\frac{d^m}{dx^m}\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right] = \frac{1}{2^m}\frac{\Gamma(n+m+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}P_{n-m}^{(\alpha+m,\beta+m)}(x)$$

[$m = 1, 2, \ldots, n$]. ВТФ II 170 (17)

5. $$\left(n+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+1\right)(1-x)P_n^{(\alpha+1,\,\beta)}(x)=$$
$$=(n+\alpha+1)P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)-(n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\,\beta)}(x).$$ ВТФ II 173 (32)

6. $$\left(n+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+1\right)(1+x)P_n^{(\alpha,\,\beta+1)}(x)=$$
$$=(n+\beta+1)P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)+(n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\,\beta)}(x)$$ ВТФ II 173 (33)

7. $$(1-x)P_n^{(\alpha+1,\,\beta)}(x)+(1+x)P_n^{(\alpha,\,\beta+1)}(x)=2P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x).$$ ВТФ II 173 (34)

8. $$(2n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha-1,\,\beta)}(x)=(n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)-(n+\beta)P_{n-1}^{(\alpha,\,\beta)}(x).$$ ВТФ II 173 (35)

9. $$(2n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha,\,\beta-1)}(x)=(n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)+(n+\alpha)P_{n-1}^{(\alpha,\,\beta)}(x).$$ ВТФ II 173 (36)

10. $$P_n^{(\alpha,\,\beta-1)}(x)-P_n^{(\alpha-1,\,\beta)}(x)=P_{n-1}^{(\alpha,\,\beta)}(x).$$ ВТФ II 173 (37)

8.962 Связь с другими функциями:

1. $$P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n\Gamma(n+1+\beta)}{n!\,\Gamma(1+\beta)}F\left(n+\alpha+\beta+1,\ -n;\ 1+\beta;\ \frac{1+x}{2}\right);$$ КГ 83 и, ВТФ II 170 (16)
$$=\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{n!\,\Gamma(1+\alpha)}F\left(n+\alpha+\beta+1,\ -n;\ 1+\alpha;\ \frac{1-x}{2}\right);$$ ВТФ II 170 (16)
$$=\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{n!\,\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^nF\left(-n,\ -n-\beta;\ \alpha+1;\ \frac{x-1}{x+1}\right);$$ ВТФ II 170 (16)
$$=\frac{\Gamma(n+1+\beta)}{n!\,\Gamma(1+\beta)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^nF\left(-n,\ -n-\alpha;\ \beta+1;\ \frac{x+1}{x-1}\right).$$ ВТФ II 170 (16)

2. $$P_n(x)=P_n^{(0,\,0)}(x).$$ КГ 83 и, ВТФ II 179 (3)

3. $$T_n(x)=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}P_n^{\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(x).$$ КГ 83 и, ВТФ II 184 (5) и

4. $$C_n^{\nu}(x)=\frac{\Gamma(n+2\nu)\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\nu)\,\Gamma\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)}P_n^{\left(\nu-\frac{1}{2},\,\nu-\frac{1}{2}\right)}(x).$$ МО 108 и, ВТФ II 174 (4)

8.963 Производящая функция:

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)z^n=2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-z+R)^{-\alpha}(1+z+R)^{-\beta},$$
$$R=\sqrt{1-2xz+z^2}\qquad [|z|<1].$$ ВТФ II 172 (29)

8.964 Полиномы Якоби представляют единственное целое рациональное решение дифференциального (гипергеометрического) уравнения.

$$(1-x^2)y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y'+n(n+\alpha+\beta+1)y=0.$$ ВТФ II 169 (14)

8.965 Асимптотическое представление:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=\frac{\cos\left\{\left[n+\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)\right]\theta-\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}\right)\pi\right\}}{\sqrt{\pi n}\left(\sin\frac{1}{2}\theta\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)^{\beta+\frac{1}{2}}}+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$[\operatorname{Im}\alpha=\operatorname{Im}\beta=0,\ 0<\theta<\pi]$. ВТФ II 198 (10)

8.966 Предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{-\alpha}P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\cos\frac{z}{n}\right)\right]=\left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha}J_\alpha(z).$$ ВТФ II 173 (41)

8.967 Если $\alpha>-1$, $\beta>-1$, то все нули полинома $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ простые и лежат в интервале $(-1, 1)$.

8.97 Полиномы Лагерра

8.970 Определение.

1. $$L_n^\alpha(x)=\frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha});$$ ВТФ II 188 (5), МО 108

$$=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n+\alpha}{n-m}\frac{x^m}{m!}.$$ МО 109, ВТФ II 188 (7)

2. $L_n^0(x)=L_n(x)$. ИП I 369

8.971 Функциональные соотношения:

1. $$\frac{d}{dx}[L_n^\alpha(x)-L_{n+1}^\alpha(x)]=L_n^\alpha(x).$$ ВТФ II 189 (16)

2. $$\frac{d}{dx}L_n^\alpha(x)=-L_{n-1}^{\alpha+1}(x).$$ ВТФ II 189 (15), См III 575 (42) и

3. $$x\frac{d}{dx}L_n^\alpha(x)=nL_n^\alpha(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x);$$

$$=(n+1)L_{n+1}^\alpha(x)-(n+\alpha+1-x)L_n^\alpha(x).$$ ВТФ II 189 (12), МО 109

4. $$xL_n^{\alpha+1}(x)=(n+\alpha+1)L_n^\alpha(x)-(n+1)L_{n+1}^\alpha(x);$$

$$=(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)-(n-x)L_n^\alpha(x).$$ См III 575 (43) и, ВТФ II 190 (23)

5. $$L_n^{\alpha-1}(x)=L_n^\alpha(x)-L_{n-1}^\alpha(x).$$ См III 575 (44) и, ВТФ II 190 (24)

6. $$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x)-(2n+\alpha+1-x)L_n^\alpha(x)+(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)=0$$

$[n=1, 2, \ldots]$. МО 109, ВТФ II 190 (25), (24)

8.972 Связь с другими функциями:

1. $$L_n^\alpha(x)=\binom{n+\alpha}{n}\Phi(-n,\ \alpha+1;\ x).$$ МО 109, Ф II 189 (14)

2. $$H_{2n}(x)=(-1)^n 2^{2n}n!\,L_n^{-\frac{1}{2}}(x^2).$$ ВТФ II 193 (2), См III 576 (47)

3. $$H_{2n+1}(x)=(-1)^n 2^{2n+1}n!\,xL_n^{\frac{1}{2}}(x^2).$$ ВТФ II 193 (3), См III 577 (48)

8.973 Частные случаи:

1. $L_0^\alpha(x) = 1$ ВТФ II 188 (6)
2. $L_1^\alpha(x) = \alpha + 1 - x.$ ВТФ II 188 (6)
3. $L_n^\alpha(0) = \binom{n+\alpha}{n}.$ ВТФ II 189 (13)
4. $L_n^{-n}(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n!}.$ МО 109
5. $L_1(x) = 1 - x.$
6. $L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}.$ МО 109

8.974 Конечные суммы:

1. $$\sum_{m=0}^{n} \frac{m!}{\Gamma(m+\alpha+1)} L_m^\alpha(x) L_m^\alpha(y) = \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)(x-y)} [L_n^\alpha(x) L_{n+1}^\alpha(y) - L_{n+1}^\alpha(x) L_n^\alpha(y)]$$ ВТФ II 188 (9)
2. $$\sum_{m=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha-\beta+m)}{\Gamma(\alpha-\beta)\, m!} L_{n-m}^\beta(x) = L_n^\alpha(x).$$ МО 110, ВТФ II 192 (39)
3. $$\sum_{m=0}^{n} L_m^\alpha(x) = L_n^{\alpha+1}(x).$$ ВТФ II 192 (38)
4. $$\sum_{m=0}^{n} L_m^\alpha(x) L_{n-m}^\beta(x) = L_n^{\alpha+\beta+1}(x+y).$$ ВТФ II 192 (41)

8.975 Производящие функции:

1. $$(1-z)^{-\alpha-1} \exp \frac{xz}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) z^n \quad [|z| < 1].$$ ВТФ II 189 (17), МО 109
2. $$e^{-xz}(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha-n}(x) z^n \quad [|z| < 1].$$ МО 110, ВТФ II 189 (19)
3. $$J_\alpha\left(2\sqrt{xz}\right) e^z (xz)^{-\frac{1}{2}\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^\alpha(x) \quad [\alpha > -1].$$ ВТФ II 189 (18), МО 109

8.976 Другие ряды полиномов Лагерра:

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y) z^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} = \frac{(xyz)^{-\frac{1}{2}\alpha}}{1-z} \exp\left(-z\frac{x+y}{1-z}\right) I_\alpha\left(2\frac{\sqrt{xyz}}{1-z}\right) \quad [|z| < 1].$$ ВТФ II 189 (20)
2. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^\alpha(x)}{n+1} = e^x x^{-\alpha} \Gamma(\alpha, x) \quad [\alpha > -1,\ x > 0].$$ ВТФ II 215 (19)

3. $[L_n^{\alpha}(x)]^2=\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2n-2k)!\,(2k)!}{\Gamma(1+\alpha-k)}\frac{L_{2k}^{2\alpha}(2x)}{(n-k)!}$. МО 110

4. $L_n^{\alpha}(x)L_n^{\alpha}(y)=\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L_{n-k}^{\alpha+2k}(x+y)}{\Gamma(1+\alpha+k)}\frac{(xy)^k}{k!}$.

МО 110, ВТФ II 192 (42)

8.977 Теоремы сложения:

1. $L_n^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k+k-1}(x_1+x_2+\ldots+x_k)=$
$$=\sum_{(i_1+i_2+\ldots+i_k=n)}L_{i_1}^{\alpha_1}(x_1)L_{i_2}^{\alpha_2}(x_2)\ldots L_{i_k}^{\alpha_k}(x_k).$$ МО 110

2. $L_n^{\alpha}(x+y)=e^y\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}y^kL_n^{\alpha+k}(x)$. МО 110

8.978 Предельные соотношения и асимптотическое поведение:

1. $L_n^{\alpha}(x)=\lim_{\beta\to\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{2x}{\beta}\right)$. ВТФ II 191 (35)

2. $\lim_{n\to\infty}\left[n^{-\alpha}L_n^{\alpha}\left(\frac{x}{n}\right)\right]=x^{-\frac{1}{2}\alpha}J_{\alpha}(2\sqrt{x})$. ВТФ II 191 (36)

3. $L_n^{\alpha}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{1}{2}x}x^{-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}}\cos\left[2\sqrt{nx}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]+O\left(n^{\frac{1}{2}\alpha-\frac{3}{4}}\right)$

$[\operatorname{Im}\alpha=0,\ x>0]$. ВТФ II 199 (1)

8.979 Полиномы Лагерра удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению.

$$x\frac{d^2u}{dx^2}+(\alpha-x+1)\frac{du}{dx}+nu=0.$$ ВТФ II 188 (10), См III 574 (34)

9.1 ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

9.10 Определение

9.100 *Гипергеометрическим рядом* называется ряд

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot 1}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 1\cdot 2}z^2+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\,1\cdot 2\cdot 3}z^3+\ldots$$

9.101 Гипергеометрический ряд обрывается, если α или β равно отрицательному целому числу или нулю Если $\gamma=-n$ $(n=0,1,2,\ldots)$, то гипергеометрический ряд неопределен, если ни α, ин β не равны $-m$ ($m<n$, m — натуральное число). Однако

1. $\lim_{\gamma\to-n}\frac{F(\alpha,\beta;\gamma,z)}{\Gamma(\gamma)}=$
$$=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{(n+1)!}z^{n+1}F(\alpha+n+1,\ \beta+n+1;\ n+2;\ z).$$
ВТФ I 62 (16)

9.102 Исключая указанные значения параметров α, β, γ, гипергеометрический ряд сходится в единичном круге $|z|\leqslant 1$. При этом имеют место следующие условия сходимости:

1. $1>\operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma)\geqslant 0$. Ряд сходится во всем единичном круге, исключая точку $z=1$.
2. $\operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma)<0$. Ряд сходится (абсолютно) во всем единичном круге, включая точку $z=1$.
3. $\operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma)\geqslant 1$. Ряд сходится во всем единичном круге, исключая точки $z=1$ и $z=-1$.

ФII 410, УВI 134, УВII 76

9.11 Интегральные представления

9.111 $$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)=\frac{1}{\mathrm{B}(\beta,\ \gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}\,dt$$

$[\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\beta>0]$. УВII 79

9.112 $$F(p,\ n+p;\ n+1;\ z^2)=\frac{z^{-n}}{2\pi}n\mathrm{B}(p,\ n)\int_0^{2\pi}\frac{\cos nt\,dt}{(1-2z\cos t+z^2)^p}$$

$[n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ \operatorname{Re}p>0]$. ВТФ I 81 (10), МО 16

9.113 $$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)\Gamma(-t)}{\Gamma(\gamma+t)}(-z)^t\,dt,$$

причем $|\arg(-z)|<\pi$ и путь интегрирования выбран так, чтобы полюсы функций $\Gamma(\alpha+t)$, $\Gamma(\beta+t)$ лежали слева от пути, а полюсы функции $\Gamma(-t)$ — справа от него. УВII 71—72

9.114 $$F\left(-m,\ -\frac{p+m}{2};\ 1-\frac{p+m}{2};\ -1\right)=\frac{(-2)^m(p+m)}{\sin p\pi}\int_0^{\pi}\cos^m\varphi\cos p\varphi\,d\varphi$$

$[m+1$ — натуральное число; $p\neq 0,\ \pm 1,\ \ldots]$.

ВТФ I 80 (8), МО 16

См. также **3.194** 1., 2., 5., **3.196** 1., **3.197** 6., 9., **3.259** 3., **3.312** 3., **3.518** 4.—6., **3.665** 2., **3.671** 1., 2., **3.681** 1., **3.984** 7.

9.12 Представление элементарных функций с помощью гипергеометрической функции

9.121

1. $F(-n,\ \beta;\ \beta;\ -z)=(1+z)^n$ [β произвольно]

ВТФ I 101 (4), Га 127 I *и*

2. $F\left(-\frac{n}{2},\ -\frac{n-1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{z^2}{t^2}\right)=\frac{(t+z)^n+(t-z)^n}{2t^n}$. Га 127 II

3. $\lim\limits_{\omega\to\infty}F\left(-n,\ \omega;\ 2\omega;\ -\frac{z}{t}\right)=\left(1+\frac{z}{2t}\right)^n$. Га 127 III *и*

4. $F\left(-\frac{n-1}{2},\ -\frac{n-2}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{z^2}{t^2}\right)=\frac{(t+z)^n-(t-z)^n}{2nzt^{n-1}}$. Га 127 IV

5. $F\left(1-n,\ 1;\ 2;\ -\frac{z}{t}\right)=\frac{(t+z)^n-t^n}{nzt^{n-1}}.$ Га 127 V

6. $F(1,\ 1;\ 2;\ -z)=\frac{\ln(1+z)}{z}.$ Га 127 VI

7. $F\left(\frac{1}{2},\ 1;\ \frac{3}{2};\ z^2\right)=\frac{\ln\frac{1+z}{1-z}}{2z}.$ Га 127 VII

8. $\lim\limits_{k\to\infty} F\left(1,\ k;\ 1;\ \frac{z}{k}\right)=1+z\lim\limits_{k\to\infty} F\left(1,\ k;\ 2;\ \frac{z}{k}\right)=$

$=1+z+\frac{z^2}{2}\lim\limits_{k\to\infty} F\left(1,\ k;\ 3;\ \frac{z}{k}\right)=\ldots=e.$ Га 127 VIII

9. $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ k'\to\infty}} F\left(k,\ k';\ \frac{1}{2},\ \frac{z^2}{4kk'}\right)=\frac{e^z+e^{-z}}{2}=\operatorname{ch} z.$ Га 127 IX

10. $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ k'\to\infty}} F\left(k,\ k';\ \frac{3}{2};\ \frac{z^2}{4kk'}\right)=\frac{e^z-e^{-z}}{2z}=\frac{\operatorname{sh} z}{z}.$ Га 127 X

11. $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ k'\to\infty}} F\left(k,\ k';\ \frac{3}{2};\ -\frac{z^2}{4kk'}\right)=\frac{\sin z}{z}.$ Га 127 XI

12. $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ k'\to\infty}} F\left(k,\ k';\ \frac{1}{2};\ -\frac{z^2}{4kk'}\right)=\cos z.$ Га 127 XII

13. $F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \sin^2 z\right)=\frac{z}{\sin z}.$ Га 127 XIII

14. $F\left(1,\ 1;\ \frac{3}{2};\ \sin^2 z\right)=\frac{z}{\sin z\cos z}.$ Га 127 XIV

15. $F\left(\frac{1}{2},\ 1;\ \frac{3}{2};\ -\operatorname{tg}^2 z\right)=\frac{z}{\operatorname{tg} z}.$ Га 127 XV

16. $F\left(\frac{n+1}{2},\ -\frac{n-1}{2};\ \frac{3}{2};\ \sin^2 z\right)=\frac{\sin nz}{n\sin z}.$ Га 127 XVI

17. $F\left(\frac{n+2}{2},\ -\frac{n-2}{2};\ \frac{3}{2};\ \sin^2 z\right)=\frac{\sin nz}{n\sin z\cos z}.$ Га 127 XVII

18. $F\left(-\frac{n-2}{2},\ -\frac{n-1}{2};\ \frac{3}{2};\ -\operatorname{tg}^2 z\right)=\frac{\sin nz}{n\sin z\cos^{n-1} z}.$ Га 127 XVIII

19. $F\left(\frac{n+2}{2},\ \frac{n+1}{2},\ \frac{3}{2};\ -\operatorname{tg}^2 z\right)=\frac{\sin nz\cos^{n+1} z}{n\sin z}.$ Га 127 XIX

20. $F\left(\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2};\ \frac{1}{2};\ \sin^2 z\right)=\cos nz.$ ВТФ I 101 (11), Га 127 XX

21. $F\left(\frac{n+1}{2},\ -\frac{n-1}{2};\ \frac{1}{2};\ \sin^2 z\right)=\frac{\cos nz}{\cos z}.$ ВТФ I 101 (11), Га 127 XXI

22. $F\left(-\frac{n}{2},\ -\frac{n-1}{2};\ \frac{1}{2};\ -\operatorname{tg}^2 z\right)=\frac{\cos nz}{\cos^n z}.$

ВТФ I 101 (11), Га 127 XXII

23. $F\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{n}{2};\ \frac{1}{2};\ -\operatorname{tg}^2 z\right)=\cos nz\cos^n z.$ Га 127 XXIII

24. $F\left(\frac{1}{2},\ 1;\ 2;\ 4z(1-z)\right)=\frac{1}{1-z}$ $\left[|z|\leqslant\frac{1}{2},\ |z(1-z)|\leqslant\frac{1}{4}\right].$

25. $F\left(\frac{1}{2},\ 1;\ 1;\ \sin^2 z\right)=\sec z.$

26. $F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ z^2\right)=\frac{\arcsin z}{z}$ (сравни 9.121 13.).

27. $F\left(\frac{1}{2},\ 1;\ \frac{3}{2};\ -z^2\right)=\frac{\operatorname{arctg} z}{z}$ (сравни 9.121 15.).

28. $F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ -z^2\right)=\frac{\operatorname{Arsh} z}{z}$ (сравни 9.121 26.).

29. $F\left(\frac{1+n}{2},\ \frac{1-n}{2};\ \frac{3}{2};\ z^2\right)=\frac{\sin(n\arcsin z)}{nz}$ (сравни 9.121 16.).

30. $F\left(1+\frac{n}{2},\ 1-\frac{n}{2};\ \frac{3}{2};\ z^2\right)=\frac{\sin(n\arcsin z)}{nz\sqrt{1-z^2}}$ (сравни 9.121 17.).

31. $F\left(\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2};\ \frac{1}{2};\ z^2\right)=\cos(n\arcsin z)$ (сравни 9.121 20.).

32. $F\left(\frac{1+n}{2},\ \frac{1-n}{2};\ \frac{1}{2};\ z^2\right)=\frac{\cos(n\arcsin z)}{\sqrt{1-z^2}}$ (сравни 9.121 21.).

Представление специальных функций через гипергеометрическую функцию см.:

для полных эллиптических интегралов 8.113 1., 8.114 1.;
для интегралов от цилиндрических функций 6.574 1., 3., 6.576 2. — 5., 6.621 1 — 3.;
для полиномов Лежандра 8.911, 8.916
(все эти гипергеометрические ряды обрываются, т. е. эти ряды обращаются в конечные суммы);
для функций Лежандра 8.840, 8.837,
для шаровых функций 8.702, 8.703, 8.751, 8.77, 8.852, 8.853;
для полиномов Чебышева 8.942 1.;
для полиномов Якоби 8.962;
для полиномов Гегенбауэра $C_n^{\lambda}(x)$ 8.932;
для интегралов от функций параболического цилиндра 7.726 6.

9.122 Частные значения.

1. $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ 1)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}$

$[\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}(\alpha+\beta),\ \operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\beta>0]$. Га 147 (48), Ф II 793

2. $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ 1)=F(-\alpha,\ -\beta;\ \gamma-\alpha-\beta;\ 1)$ $[\operatorname{Re}\gamma>0]$; Га 148 (49)

$=\frac{1}{F(-\alpha,\ \beta,\ \gamma-\alpha,\ 1)}$ $[\operatorname{Re}(\gamma-\beta)>0]$; Га 148 (50)

$=\frac{1}{F(\alpha,\ -\beta,\ \gamma-\beta,\ 1)}$ $[\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)>0]$. Га 148 (51)

3. $F\left(1,\ 1;\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

9.13 Формулы преобразования и аналитическое продолжение для функций, определяемых гипергеометрическими рядами

9.130 Ряд $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ определяет аналитическую функцию, которая имеет, вообще говоря, в точках $z=0,\ 1,\ \infty$ особенности (в общем случае точки ветвления). Разрежем z-плоскость вдоль действительной оси от точки $z=1$ до точки $z=\infty$, т. е. потребуем, чтобы при $|z|\geqslant 1$ имело место неравенство $|\arg(-z)|<\pi$. Тогда ряд $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ в разрезанной плоскости будет давать однозначное аналитическое продолжение, которое (если только $\gamma+1$ не является натуральным числом, а $\alpha-\beta$ и $\gamma-\alpha-\beta$ не являются целыми числами) осуществляется с помощью нижеприведенных формул. Эти формулы дают возможность вычислить значения F в заданной области также и в том случае, когда $|z|>1$. К ним примыкают еще некоторые дальнейшие формулы преобразования, которые в случае наличия соответствующих соотношений между α, β, γ могут служить также для аналитического продолжения. МО 12

Формулы преобразования

9.131

1. $$F(\alpha, \beta; \gamma; z)=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha, \gamma-\beta; \gamma; \frac{z}{z-1}\right);$$ Га 218 (91)

$$=(1-z)^{-\beta}F\left(\beta, \gamma-\alpha; \gamma; \frac{z}{z-1}\right);$$ Га 218 (92)

$$=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; z).$$

2. $$F(\alpha, \beta; \gamma; z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\gamma+1; 1-z)+$$
$$+(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma-\alpha-\beta+1; 1-z).$$

ВТФ I 94, МО 13

9.132

1. $$F(\alpha, \beta; \gamma; z)=(1-z)^{-\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}F\left(\alpha, \gamma-\beta; \alpha-\beta+1; \frac{1}{1-z}\right)+$$
$$+(1-z)^{-\beta}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F\left(\beta, \gamma-\alpha; \beta-\alpha+1; \frac{1}{1-z}\right).$$ МО 13

2. $$F(\alpha, \beta; \gamma; z)=$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-1)^{\alpha}z^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma; \alpha+1-\beta; \frac{1}{z}\right)+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-1)^{\beta}z^{-\beta}F\left(\beta, \beta+1-\gamma; \beta+1-\alpha; \frac{1}{z}\right).$$

Га 220 (93)

9.133 $$F\left(2\alpha, 2\beta; \alpha+\beta+\frac{1}{2}; z\right)=F\left[\alpha, \beta; \alpha+\beta+\frac{1}{2}; 4z(1-z)\right]$$
$$\left[|z|\leqslant\frac{1}{2}, |z(1-z)|\leqslant\frac{1}{4}\right].$$ УВ II 85

9.134

1. $$F(\alpha, \beta; 2\beta; z)=\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-\alpha}F\left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}; \beta+\frac{1}{2}; \left(\frac{z}{2-z}\right)^{2}\right].$$

МО 13, ВТФ I 111 (4)

2. $$F(2\alpha, 2\alpha+1-\gamma; \gamma; z)=(1+z)^{-2\alpha}F\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{2}; \gamma; \frac{4z}{(1+z)^{2}}\right).$$

Га 225 (100)

3. $$F\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{2}-\beta; \beta+\frac{1}{2}; z^{2}\right)=(1+z)^{-2\alpha}F\left(\alpha, \beta; 2\beta; \frac{4z}{(1+z)^{2}}\right).$$

Га 225 (101)

9.135 $$F\left(\alpha, \beta; \alpha+\beta+\frac{1}{2}; \sin^2\varphi\right)=F\left(2\alpha, 2\beta; \alpha+\beta+\frac{1}{2}; \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\left[x=\sin^2\frac{\varphi}{2}\text{ действительно; } \frac{1-\sqrt{2}}{2}<x<\frac{1}{2}\right].$$ МО 13

9.136 Положим

$$A=\frac{\Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)},\qquad B=\frac{\Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)};$$

тогда

1. $$F\left(2\alpha, 2\beta; \alpha+\beta+\frac{1}{2}; \frac{1-\sqrt{z}}{2}\right)=$$
$$=AF\left(\alpha, \beta; \frac{1}{2}; z\right)+B\sqrt{z}F\left(\alpha+\frac{1}{2}, \beta+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z\right)$$ Га 227 (106)

2. $$F\left(2\alpha, 2\beta; \alpha+\beta+\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{z}}{2}\right)=$$
$$=AF\left(\alpha, \beta; \frac{1}{2}; z\right)-B\sqrt{z}F\left(\alpha+\frac{1}{2}, \beta+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right).$$ Га 228 (107)

3. $$\frac{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}{\alpha+\beta-\frac{1}{2}}A\sqrt{z}F\left(\alpha, \beta; \frac{3}{2}; z\right)=$$
$$=F\left(2\alpha-1, 2\beta-1; \alpha+\beta-\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{z}}{2}\right)-$$
$$-F\left(2\alpha-1, 2\beta-1; \alpha+\beta-\frac{1}{2}; \frac{1-\sqrt{z}}{2}\right).$$ Га 229 (110)

9.137 Рекуррентные формулы Гаусса.

1. $$\gamma[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)z]F(\alpha, \beta; \gamma; z)+$$
$$+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)zF(\alpha, \beta; \gamma+1; z)+\gamma(\gamma-1)(z-1)F(\alpha, \beta; \gamma-1; z)=0.$$
2. $$(2\alpha-\gamma-\alpha z+\beta z)F(\alpha, \beta; \gamma; z)+(\gamma-\alpha)F(\alpha-1, \beta; \gamma; z)+$$
$$+\alpha(z-1)F(\alpha+1, \beta; \gamma; z)=0.$$
3. $$(2\beta-\gamma-\beta z+\alpha z)F(\alpha, \beta; \gamma; z)+(\gamma-\beta)F(\alpha, \beta-1; \gamma; z)+$$
$$+\beta(z-1)F(\alpha, \beta+1; \gamma; z)=0.$$
4. $$\gamma F(\alpha, \beta-1; \gamma; z)-\gamma F(\alpha-1, \beta; \gamma; z)+(\alpha-\beta)zF(\alpha, \beta; \gamma+1; z)=0.$$
5. $$\gamma(\alpha-\beta)F(\alpha, \beta; \gamma; z)-\alpha(\gamma-\beta)F(\alpha+1, \beta; \gamma+1; z)+$$
$$+\beta(\gamma-\alpha)F(\alpha, \beta+1; \gamma+1; z)=0$$
6. $$\gamma(\gamma+1)F(\alpha, \beta; \gamma; z)-\gamma(\gamma+1)F(\alpha, \beta; \gamma+1; z)-$$
$$-\alpha\beta zF(\alpha+1, \beta+1; \gamma+2; z)=0.$$
7. $$\gamma F(\alpha, \beta; \gamma; z)-(\gamma-\alpha)F(\alpha, \beta+1; \gamma+1; z)-$$
$$-\alpha(1-z)F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z)=0.$$
8. $$\gamma F(\alpha, \beta; \gamma; z)+(\beta-\gamma)F(\alpha+1, \beta; \gamma+1; z)-$$
$$-\beta(1-z)F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z)=0.$$

9. $\gamma(\gamma-\beta z-\alpha)F(\alpha, \beta; \gamma; z)-\gamma(\gamma-\alpha)F(\alpha-1, \beta; \gamma; z)+$
$+\alpha\beta z(1-z)F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z)=0.$

10. $\gamma(\gamma-\alpha z-\beta)F(\alpha, \beta; \gamma; z)-\gamma(\gamma-\beta)F(\alpha, \beta-1; \gamma; z)+$
$+\alpha\beta z(1-z)F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z)=0.$

11. $\gamma F(\alpha, \beta; \gamma; z)-\gamma F(\alpha, \beta+1; \gamma; z)+\alpha z F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z)=0.$

12. $\gamma F(\alpha, \beta; \gamma; z)-\gamma F(\alpha+1, \beta; \gamma; z)+\beta z F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z)=0.$

13. $\gamma[\alpha-(\gamma-\beta)z]F(\alpha, \beta; \gamma; z)-\alpha\gamma(1-z)F(\alpha+1, \beta; \gamma; z)+$
$+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)zF(\alpha, \beta; \gamma+1; z)=0.$

14. $\gamma[\beta-(\gamma-\alpha)z]F(\alpha, \beta; \gamma; z)-\beta\gamma(1-z)F(\alpha, \beta+1; \gamma; z)+$
$+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)zF(\alpha, \beta; \gamma+1; z)=0.$

15. $\gamma(\gamma+1)F(\alpha, \beta; \gamma; z)-\gamma(\gamma+1)F(\alpha, \beta+1; \gamma+1; z)+$
$+\alpha(\gamma-\beta)zF(\alpha+1, \beta+1; \gamma+2; z)=0.$

16. $\gamma(\gamma+1)F(\alpha, \beta; \gamma; z)-\gamma(\gamma+1)F(\alpha+1, \beta; \gamma+1; z)+$
$+\beta(\gamma-\alpha)zF(\alpha+1, \beta+1; \gamma+2; z)=0$

17. $\gamma F(\alpha, \beta; \gamma; z)-(\gamma-\beta)F(\alpha, \beta; \gamma+1; z)-\beta F(\alpha, \beta+1; \gamma+1; z)=0.$

18. $\gamma F(\alpha, \beta; \gamma; z)-(\gamma-\alpha)F(\alpha, \beta; \gamma+1; z)-\alpha F(\alpha+1, \beta; \gamma+1; z)=0.$

МО 13—14

9.14 Обобщенный гипергеометрический ряд

Ряд

1. $${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q; z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_k(\alpha_2)_k\ldots(\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k(\beta_2)_k\ldots(\beta_q)_k}\frac{z^k}{k!}$$

называется *обобщенным гипергеометрическим рядом* (см. также **9.210**). МО 14

2. ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)\equiv F(\alpha, \beta; \gamma; z).$ МО 15

Интегральные представления см. 3.254 2., 3.259 2., 3.478 3.

9.15 Гипергеометрическое дифференциальное уравнение

9.151 Гипергеометрический ряд является одним из решений дифференциального уравнения

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{du}{dz}-\alpha\beta u=0,$$ УВ II 67

называемого *гипергеометрическим*.

Решение гипергеометрического дифференциального уравнения

9.152 Гипергеометрическое дифференциальное уравнение **9.151** обладает **двумя линейно независимыми решениями**. Эти решения могут быть **неограниченно аналитически продолжаемы** на всю z-плоскость, за исключением, быть может, трех точек: $z=0$, 1 и ∞. Вообще говоря, точки $z=0$, 1, ∞ являются **точками ветвления** по крайней мере одной из ветвей каждого решения гипергеометрического дифференциального уравнения. Отношение $w(z)$ любых двух линейно независимых решений удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$2\frac{w'''}{w'}-3\left(\frac{w''}{w'}\right)^2=\frac{1-a_1^2}{z^2}+\frac{1-a_2^2}{(z-1)^2}+\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2-1}{z(z-1)},$$

где

$$a_1^2=(1-\gamma)^2, \quad a_2^2=(\gamma-\alpha-\beta)^2, \quad a_3^2=(\alpha-\beta)^2.$$

Если α, β, γ действительны, то функция $w(z)$ отображает верхнюю ($\operatorname{Im} z > 0$) или нижнюю ($\operatorname{Im} z < 0$) полуплоскости на криволинейный треугольник, углы при вершинах которого равны πa_1, πa_2, πa_3. Вершины этого треугольника являются образами точек $z=0$, $z=1$, $z=\infty$.

9.153 Внутри единичного круга $|z|<1$ линейно независимые решения $u_1(z)$ и $u_2(z)$ гипергеометрического дифференциального уравнения даются следующими формулами:

1. Если γ не является целым числом, то

$$u_1=F(\alpha, \beta; \gamma; z),$$

$$u_2=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\gamma, z).$$

2. Если $\gamma=1$, то

$$u_1=F(\alpha, \beta; 1; z),$$

$$u_2=F(\alpha, \beta; 1; z)\ln z+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} z^k\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(k!)^2}\{\psi(\alpha+k)-\psi(\alpha)+\psi(\beta+k)-\psi(\beta)-2\psi(k+1)+2\psi(1)\}$$

(см. 9.14 2.).

3. Если $\gamma=m+1$ (m — число натуральное) и в то же время и α и β отличны от положительного числа, меньшего или равного m, то

$$u_1=F(\alpha, \beta; m+1; z),$$

$$u_2=F(\alpha, \beta; m+1; z)\ln z+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} z^k\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(1+m)_k}\{h(k)-h(0)\}-\sum_{k=1}^{m}\frac{(k-1)!\,(-m)_k}{(1-\alpha)_k(1-\beta)_k}z^{-k}$$

(см. 9.14 2.),

где

$$h(n)=\psi(\alpha+n)+\psi(\beta+n)-\psi(m+1+n)-\psi(n+1)$$

[$n+1$ — число натуральное].

4. Пусть $\gamma=m+1$ (m — число натуральное) и в то же время α или β равно $m'+1$, где $0\leqslant m'<m$. Тогда, например, при $\alpha=m'+1$ мы получим:

$$u_1=F(1+m', \beta; 1+m; z),$$

$$u_2=z^{-m}F(1+m'-m, \beta-m; 1-m; z).$$

В этом случае u_2 является многочленом относительно z^{-1}.

5. Если $\gamma = 1 - m$ (m — число натуральное) и в то же время как α, так и β отличны от чисел: $0, -1, -2, \ldots, 1-m$, то

$$u_1 = z^m F(\alpha+m,\ \beta+m;\ 1+m;\ z),$$

$$u_2 = z^m F(\alpha+m,\ \beta+m;\ 1+m;\ z)\ln z + z^m \sum_{k=1}^{\infty} z^k \frac{(\alpha+m)_k (\beta+m)_k}{(1+m)_k\, k!} \{h^*(k) - h^*(0)\} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!\,(-m)_k}{(1-\alpha-m)_k\,(1-\beta-m)_k} z^{m-n} \quad \text{(см. 9.14 2.)},$$

где

$$h^*(n) = \psi(\alpha+m+n) + \psi(\beta+m+n) - \psi(1+m+n) - \psi(1+n).$$

Заметим, что

$$\psi(\alpha+n) - \psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \ldots + \frac{1}{\alpha+n-1} \qquad \text{(сравни 8.365 3.)}$$

и что при $\alpha = -\lambda$, где λ — натуральное число или нуль и $n = \lambda+1, \lambda+2, \ldots$, выражение

$$(\alpha)_n [\psi(\alpha+n) - \psi(\alpha)]$$

в формулах 9.153 2. — 5. следует заменить выражением

$$(-1)^\lambda \lambda!\,(n-\lambda-1)!.$$

6. Пусть $\gamma = 1 - m$ (m — число натуральное) и в то же время α или β равно целому числу $-m'$, где m' — одно из следующих чисел $0, 1, \ldots, m-1$. Пусть, например, $\alpha = -m'$. Тогда

$$u_1 = F(-m',\ \beta;\ 1-m;\ z),$$

$$u_2 = F(-m'+m,\ \beta+m;\ 1+m;\ z). \qquad \text{МО 18}$$

7. При $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)$

$$u_1 = F\left(\alpha,\ \beta;\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1);\ z\right),$$

$$u_2 = F\left(\alpha,\ \beta;\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1);\ 1-z\right)$$

являются двумя линейно независимыми решениями гипергеометрического дифференциального уравнения, если только α, β и γ отличны как от нуля, так и от целых отрицательных чисел. МО 17—19

Аналитическое продолжение решения, правильного в точке $z=0$

9.154 Формулы 9.153 делают возможным аналитическое продолжение в область $|z| > 1$, $|\arg(-z)| < \pi$ функции $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$, определенной внутри круга $|z| < 1$ гипергеометрическим рядом При этом предполагается, что $\alpha - \beta$ не является целым числом Если же $\alpha - \beta$ — целое число, например, если $\beta = \alpha + m$ [m — число натуральное], то при $|z| > 1$, $|\arg(-z)| < \pi$ имеем:

1. $\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-m)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\ \alpha+m;\ \gamma;\ z)=$

$$=\frac{\sin\pi(\gamma-\alpha)}{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(1-\gamma+\alpha+k)\Gamma(m-k)}{k!}(-z)^{-\alpha-k}+\right.$$

$$\left.+(-z)^{-\alpha-m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+m+k)\Gamma(1-\gamma+\alpha+m+k)}{k!\,(k+m)!}g(k)z^{-k}\right\},$$

где

2. $g(n)=\ln(-z)+\pi\operatorname{ctg}\pi(\gamma-\alpha)+\psi(n+1)+\psi(n+m+1)-$

$$-\psi(\alpha+m+n)-\psi(1-\gamma+\alpha+m+n).$$

При $m=0$ следует положить $\sum\limits_{k=0}^{m-1}=0$

9.155 Эта формула теряет смысл, когда α, γ или $\alpha-\gamma+1$ равно одному из чисел $0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ В этом последнем случае имеем

1. Если α — целое отрицательное число или нуль, а γ не равно целому числу, то $F(\alpha,\ \alpha+m;\ \gamma;\ z)$ представляет собой многочлен относительно z.

2. Пусть γ — целое отрицательное число или нуль, а α не является целым числом Положим тогда $\gamma=-\lambda$, где $\lambda=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Тогда

$$\frac{\Gamma(\alpha+\lambda+1)\Gamma(\alpha+\lambda+m+1)}{\Gamma(\lambda+2)}z^{\lambda+1}F(\alpha+\lambda+1,\ \alpha+\lambda+m+1;\ \lambda+2;\ z)$$

является решением гипергеометрического уравнения, правильным в точке $z=0$ Это решение равно правой части формулы 9.154 1., если в ней и в формуле 9.154 2. γ заменить через λ

3. Если $\alpha-\gamma+1$ — целое отрицательное число или нуль, а α и γ не представляют собой целых чисел, то можно воспользоваться формулой

$$F(\alpha,\ \alpha+m;\ \gamma;\ z)=(1-z)^{\gamma-2\alpha-m}F(\gamma-\alpha-m,\ \gamma-\alpha;\ \gamma;\ z)$$

и применить к ее правой части формулу 9.154 1., если только $\gamma-\alpha-m>0$; если же $\alpha-\gamma-m<0$, то правая часть этого выражения представляет собой многочлен, умноженный на степень $1-z$

4. Если α, β и γ суть целые числа, то гипергеометрическое дифференциальное уравнение всегда имеет решение, правильное при $z=0$ и имеющее вид

$$R_1(z)+\ln(1-z)R_2(z),$$

где $R_1(z)$ и $R_2(z)$ — рациональные функции от z Чтобы получить эту форму решения, следует к функции $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)$ применить формулы 9.137 1. — 9.137 3. Однако если $\gamma=-\lambda$, где $\lambda+1$ — натуральное число, то формулы 9.137 1. и 9.137 2. следует применять не к $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$, а к функции $z^{\lambda+1}F(\alpha+\lambda+1,\ \beta+\lambda+1;\ \lambda+2,\ z)$

Последовательным применением указанных формул можно положительные значения параметров привести к двойке, единице и нулю Далее из формул

$$F(1,\ 1;\ 2;\ z)=-z^{-1}\ln(1-z),$$

$$F(0,\ \beta;\ \gamma;\ z)=F(\alpha,\ 0;\ \gamma;\ z)=1$$

получается указанная форма решения.

МО 19 — 20

9.16 Дифференциальное уравнение Римана

9.160 Гипергеометрическое дифференциальное уравнение представляет собой частный случай *дифференциального уравнения Римана*

$$1\quad \frac{d^2u}{dz^2}+\left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right]\frac{du}{dz}+$$
$$+\left[\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right]\frac{u}{(z-a)(z-b)(z-c)}=0. \qquad \text{УВ I 284}$$

Коэффициенты этого уравнения имеют полюсы в точках a, b, c, а числа α, α'; β, β'; γ, γ' называют *показателями*, соответствующими этим полюсам. Показатели α, α'; β, β'; γ, γ' связаны следующим соотношением:

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'-1=0. \qquad \text{УВ I 283}$$

2. Дифференциальные уравнения **9.160** 1. записывают схематически так.

$$3.\quad u=P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

Особые точки уравнения помещены в этой схеме в первой строке, соответствующие им показатели — непосредственно под ними, а независимая переменная помещена в четвертом столбце. УВ I 284

9.161 Имеют место следующие две формулы преобразования для P-уравнения Римана:

$$1.\quad \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^k\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^l P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha+k & \beta-k-l & \gamma+l & z \\ \alpha'+k & \beta'-k-l & \gamma'+l & \end{Bmatrix}.$$

УВ I 284

$$2.\quad P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & z_1 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}. \qquad \text{УВ I 284}$$

Первая из этих формул означает следующее: если

$$u=P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix},$$

то функция

$$u_1=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^k\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^l u$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка, имеющему те же особые точки, что и уравнение **9.161** 2., и показатели, равные $\alpha+k$, $\alpha'+k$; $\beta-k-l$, $\beta'-k-l$; $\gamma+l$, $\gamma'+l$. Вторая формула преобразования переводит дифференциальное уравнение с особенностями в точках a, b, c, показателями α, α'; β, β'; γ, γ' и независимой переменной z в дифференциальное уравнение с теми же показателями, особыми точками a_1, b_1, c_1

и независимой переменной z_1. Переменная z_1 связана с переменной z дробно-линейным преобразованием

$$z=\frac{Az_1+B}{Cz_1+D} \qquad [AD-BC\neq 0].$$

Тем же дробнолинейным преобразованием связаны точки a_1, b_1, c_1 с точками a, b, c. УВ I 285, МО 20

9.162 При помощи последовательного применения обеих формул преобразования 9.161 1. и 9.161 2. дифференциальное уравнение Римана переходит в гипергеометрическое дифференциальное уравнение; таким образом, решение дифференциального уравнения Римана можно выразить через гипергеометрическую функцию.

При $k=-\alpha$, $l=-\gamma$ и $z_1=\frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}$ имеем:

1. $$u=P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ 0 & \beta+\alpha+\gamma & 0 & z \\ \alpha'-\alpha & \beta'+\alpha+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{Bmatrix}=$$

$$=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \beta+\alpha+\gamma & 0 & \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)} \\ \alpha'-\alpha & \beta'+\alpha+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{Bmatrix}.$$

МО 23

Таким образом, это решение следующим образом выражается через гипергеометрический ряд:

2. $$u=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}F\left(\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta'+\gamma;\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}\right).$$

Если постоянные a, b, c; α, α'; β, β'; γ, γ' соответствующим образом переставить, то риманово уравнение не изменится Таким образом получается совокупность 24 решении дифференциальных уравнений, которые (при условии, что ни одна из разностей $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ не является целым числом) имеют следующий вид: УВ II 67, МО 23

9.163

1. $$u_1=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}F\left\{\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta'+\gamma;\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right\}$$

2. $$u_2=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}F\left\{\alpha'+\beta+\gamma,\ \alpha'+\beta'+\gamma;\ 1+\alpha'-\alpha;\ \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right\}.$$

3. $$u_3=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'}F\left\{\alpha+\beta+\gamma',\ \alpha+\beta'+\gamma';\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right\}.$$

4. $$u_4=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'}F\left\{\alpha'+\beta+\gamma',\ \alpha'+\beta'+\gamma';\ 1+\alpha'-\alpha;\ \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right\}.$$

9.164

1. $$u_5=\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta}\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha}F\left\{\beta+\gamma+\alpha,\ \beta+\gamma'+\alpha;\ 1+\beta-\beta';\ \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right\}.$$

2. $$u_6=\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta'}\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha}F\left\{\beta'+\gamma+\alpha,\ \beta'+\gamma'+\alpha;\ 1+\beta'-\beta;\ \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right\}$$

3. $$u_7=\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta}\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha'}F\left\{\beta+\gamma+\alpha',\ \beta+\gamma'+\alpha';\ 1+\beta-\beta';\ \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right\}.$$

4. $$u_8=\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta'}\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha'}F\left\{\beta'+\gamma+\alpha',\ \beta'+\alpha'+\gamma';\ 1+\beta'-\beta;\ \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right\}.$$

9.165

1. $u_9=\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}F\left\{\gamma+\alpha+\beta,\ \gamma+\alpha'+\beta;\ 1+\gamma-\gamma';\ \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}\right\}$

2. $u_{10}=\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma'}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}F\left\{\gamma'+\alpha+\beta,\ \gamma'+\alpha'+\beta;\ 1+\gamma'-\gamma;\ \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}\right\}.$

3. $u_{11}=\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta'}F\left\{\gamma+\alpha+\beta',\ \gamma+\alpha'+\beta';\ 1+\gamma-\gamma';\ \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}\right\}$

4. $u_{12}=\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma'}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta'}F\left\{\gamma'+\alpha+\beta',\ \gamma'+\alpha'+\beta';\ 1+\gamma'-\gamma;\ \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}\right\}.$

9.166

1. $u_{13}=\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta}F\left\{\alpha+\gamma+\beta,\ \alpha+\gamma'+\beta;\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}\right\}$

2. $u_{14}=\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha'}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta}F\left\{\alpha'+\gamma+\beta,\ \alpha'+\gamma'+\beta;\ 1+\alpha'-\alpha;\ \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}\right\}.$

3. $u_{15}=\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta'}F\left\{\alpha+\gamma+\beta',\ \alpha+\gamma'+\beta';\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}\right\}.$

4. $u_{16}=\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha'}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta'}F\left\{\alpha'+\gamma+\beta',\ \alpha'+\gamma'+\beta';\ 1+\alpha'-\alpha;\ \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}\right\}.$

9.167

1. $u_{17}=\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}F\left\{\gamma+\beta+\alpha,\ \gamma+\beta'+\alpha;\ 1+\gamma-\gamma';\ \frac{(a-b)(z-c)}{(a-c)(z-b)}\right\}.$

2. $u_{18}=\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}F\left\{\gamma'+\beta+\alpha,\ \gamma'+\beta'+\alpha;\ 1+\gamma'-\gamma;\ \frac{(a-b)(z-c)}{(a-c)(z-b)}\right\}.$

3. $u_{19}=\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'}F\left\{\gamma+\beta+\alpha',\ \gamma+\beta'+\alpha';\ 1+\gamma-\gamma';\ \frac{(a-b)(z-c)}{(a-c)(z-b)}\right\}.$

4. $u_{20}=\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'}F\left\{\gamma'+\beta+\alpha',\ \gamma'+\beta'+\alpha';\ 1+\gamma'-\gamma;\ \frac{(a-b)(z-c)}{(a-c)(z-b)}\right\}.$

9.168

1. $u_{21}=\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma}F\left\{\beta+\alpha+\gamma,\ \beta+\alpha'+\gamma;\ 1+\beta-\beta';\ \frac{(c-a)(z-b)}{(c-b)(z-a)}\right\}.$

2. $u_{22}=\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta'}\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma}F\left\{\beta'+\alpha+\gamma,\ \beta'+\alpha'+\gamma;\ 1+\beta'-\beta;\ \frac{(c-a)(z-b)}{(c-b)(z-a)}\right\}.$

3. $u_{23}=\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma'}F\left\{\beta+\alpha+\gamma',\ \beta+\alpha'+\gamma';\ 1+\beta-\beta';\ \frac{(c-a)(z-b)}{(c-b)(z-a)}\right\}.$

4. $u_{24}=\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta'}\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma'}F\left\{\beta'+\alpha+\gamma',\ \beta'+\alpha'+\gamma';\ 1+\beta'-\beta;\ \frac{(c-a)(z-b)}{(c-b)(z-a)}\right\}.$

УВ II 68—69

9.17 Запись некоторых дифференциальных уравнений второго порядка с помощью схемы Римана

9.171 Гипергеометрическое уравнение (см. 9.151).

$$u=P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha & 0 & z \\ 1-\gamma & \beta & \gamma-\alpha-\beta & \end{Bmatrix}.$$ УВ II 78

9.172 Уравнение Лежандра, определяющее функции $P_n^m(z)$ [n и m — целые числа] (см 8.700 1.):

1 $$u=P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{2}m & n+1 & \frac{1}{2}m & \frac{1-z}{2} \\ -\frac{1}{2}m & -n & -\frac{1}{2}m & \end{Bmatrix}.$$ УВ II 120

2 $$u=P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{1}{2}n & \frac{1}{2}m & 0 & \frac{1}{1-z^2} \\ \frac{n+1}{2} & -\frac{1}{2}m & \frac{1}{2} & \end{Bmatrix}.$$ УВ II 134

9.173 Функция $P_n^m\left(1-\frac{z^2}{2n^2}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$u=P\begin{Bmatrix} 4n^2 & \infty & 0 & \\ \frac{1}{2}m & n+1 & \frac{1}{2}m & z^2 \\ -\frac{1}{2}m & -n & -\frac{1}{2}m & \end{Bmatrix}.$$ УВ II 168

Функция $J_m(z)$ удовлетворяет предельной форме этого уравнения, получающейся при $n\to\infty$

9.174 Уравнение, определяющее многочлены $C_n^\lambda(z)$ (см. 8.938).

$$u=P\begin{Bmatrix} -1 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{2}-\lambda & n+2\lambda & \frac{1}{2}-\lambda & z \\ 0 & -n & 0 & \end{Bmatrix}.$$ УВ II 135

9.175 Уравнение Бесселя (см 8.401) есть предельная форма уравнений

1. $$u=P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & c & \\ n & ic & \frac{1}{2}+ic & z \\ -n & -ic & \frac{1}{2}-ic & \end{Bmatrix},$$ УВ II 181

2. $u = e^{icz} P \left\{ \begin{matrix} 0 & \infty & c & \\ n & \frac{1}{2} & 0 & z \\ -n & \frac{3}{2}-2ic & 2ic-1 & \end{matrix} \right\},$ УВ II 181 u

3. $u = P \left\{ \begin{matrix} 0 & \infty & c^2 & \\ \frac{1}{2}n & \frac{1}{2}(c-n) & 0 & z^2 \\ -\frac{1}{2}n & -\frac{1}{2}(c+n) & n+1 & \end{matrix} \right\},$ УВ II 181

получающаяся при $c \to \infty$.

9.18 Гипергеометрические функции двух переменных

9.180

1. $$F_1(\alpha, \beta, \beta'; \gamma; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_m (\beta')_n}{(\gamma)_{m+n} m!\, n!} x^m y^n.$$

ВТФ I 224(6), АК 14(11)

Область сходимости

$$|x| < 1, \ |y| < 1.$$ АК 16

2. $$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_m (\beta')_n}{(\gamma)_m (\gamma')_n m!\, n!} x^m y^n.$$

ВТФ I 224(7), АК 14(12)

Область сходимости

$$|x| + |y| < 1.$$ АК 17

3. $$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\alpha')_n (\beta)_m (\beta')_n}{(\gamma)_{m+n} m!\, n!} x^m y^n.$$

ВТФ I 224(8), АК 14(13)

Область сходимости

$$|x| < 1, \ |y| < 1.$$ АК 17

4. $$F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma'; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_{m+n}}{(\gamma)_m (\gamma')_n m!\, n!} x^m y^n.$$

ВТФ 224(9), АК 14(14)

Область сходимости

$$|\sqrt{x}| + |\sqrt{y}| < 1.$$ АК 18

9.181 Функции F_1, F_2, F_3, F_4 удовлетворяют следующим системам дифференциальных уравнений в частных производных относительно z.

1. Система уравнений для $z=F_1$:

$$\left.\begin{aligned} & x(1-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y(1-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\\ &\qquad +[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{\partial z}{\partial x}-\beta y\frac{\partial z}{\partial y}-\alpha\beta z=0,\\ & y(1-y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x(1-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\\ &\qquad +[\gamma-(\alpha+\beta'+1)y]\frac{\partial z}{\partial y}-\beta' x\frac{\partial z}{\partial x}-\alpha\beta' z=0. \end{aligned}\right\}$$ ВТФ I 233 (9)

2 Система уравнений для $z=F_2$:

$$\left.\begin{aligned} & x(1-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{\partial z}{\partial x}-\\ &\qquad -\beta y\frac{\partial z}{\partial y}-\alpha\beta z=0,\\ & y(1-y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+[\gamma'-(\alpha+\beta'+1)y]\frac{\partial z}{\partial y}-\\ &\qquad -\beta' x\frac{\partial z}{\partial x}-\alpha\beta' z=0 \end{aligned}\right\}$$ ВТФ I 234 (10)

3 Система уравнений для $z=F_3$:

$$\left.\begin{aligned} & x(1-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\\ &\qquad +[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{\partial z}{\partial x}-\alpha\beta z=0,\\ & y(1-y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\\ &\qquad +[\gamma-(\alpha'+\beta'+1)y]\frac{\partial z}{\partial y}-\alpha'\beta' z=0 \end{aligned}\right\}$$ ВТФ I 234 (11)

4. Система уравнений для $z=F_4$

$$\left.\begin{aligned} & x(1-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\\ & +[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{\partial z}{\partial x}-(\alpha+\beta+1)y\frac{\partial z}{\partial y}-\alpha\beta z=0,\\ & y(1-y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\\ & +[\gamma'-(\alpha+\beta+1)y]\frac{\partial z}{\partial y}-(\alpha+\beta+1)x\frac{\partial z}{\partial x}-\alpha\beta z=0. \end{aligned}\right\}$$ ВТФ I 234 (12), АК 44

9.182 При некоторых соотношениях между параметрами или аргументами гипергеометрические функции двух переменных выражаются через гипергеометрические функции одной переменной или через элементарные функции:

1. $F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \beta+\beta';\ x,\ y)=(1-y)^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \beta;\ \beta+\beta';\ \frac{x-y}{1-y}\right).$

ВТФ I 238 (1), АК 24 (28)

2. $F_2(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \beta,\ \gamma';\ x,\ y)=(1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \beta';\ \gamma';\ \frac{y}{1-x}\right).$

ВТФ I 238 (2), АК 23

3. $F_2(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \alpha,\ \alpha;\ x,\ y)=(1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'}F\left[\beta,\ \beta';\ \alpha;\frac{xy}{(1-x)(1-y)}\right].$ ВТФ I 238 (3)

4. $F_3(\alpha,\ \gamma-\alpha,\ \beta,\ \gamma-\beta,\ \gamma;\ x,\ y)=(1-y)^{\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ x+y-xy).$ ВТФ I 238 (4), АК 25 (35)

5. $F_4[\alpha,\ \gamma+\gamma'-\alpha-1,\ \gamma,\ \gamma';\ x(1-y),\ y(1-x)]=$
$=F(\alpha,\ \gamma+\gamma'-\alpha-1;\ \gamma;\ x)F(\alpha,\ \gamma+\gamma'-\alpha-1;\ \gamma';\ y).$ ВТФ I 238 (5)

6. $F_4\left[\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta;\ -\frac{x}{(1-x)(1-y)},\ \frac{-y}{(1-x)(1-y)}\right]=\frac{(1-x)^{\beta}(1-y)^{\alpha}}{(1-xy)}.$ ВТФ I 238 (6)

7. $F_4\left[\alpha,\ \beta,\ \beta,\ \beta;\ -\frac{x}{(1-x)(1-y)},\ -\frac{y}{(1-x)(1-y)}\right]=$
$=(1-x)^{\alpha}(1-y)^{\alpha}F(\alpha,\ 1+\alpha-\beta;\ \beta;\ xy).$ ВТФ I 238 (7)

8. $F_4\left[\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha-\beta,\ \beta;\ -\frac{x}{(1-x)(1-y)},\ -\frac{y}{(1-x)(1-y)}\right]=$
$=(1-y)^{\alpha}F\left[\alpha,\ \beta;\ 1+\alpha-\beta;\ -\frac{x(1-y)}{1-x}\right].$ ВТФ I 238 (8)

9. $F_4\left(\alpha,\ \alpha+\frac{1}{2},\ \gamma,\ \frac{1}{2};\ x,\ y\right)=$
$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{y})^{-2\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha+\frac{1}{2};\ \gamma;\ \frac{x}{(1+\sqrt{y})^2}\right)+$
$+\frac{1}{2}(1-\sqrt{y})^{-2\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha+\frac{1}{2};\ \gamma;\ \frac{x}{(1-\sqrt{y})^2}\right).$ АК 23

10 $F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \gamma;\ x,\ 1)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta')}F(\alpha,\ \beta;\ \gamma-\beta';\ x).$
ВТФ I 239 (10), АК 22 (23)

11. $F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \gamma;\ x,\ x)=F(\alpha,\ \beta+\beta';\ \gamma;\ x).$ ВТФ I 239 (11), АК 23 (25)

9.183 Функциональные соотношения между гипергеометрическими функциями двух переменных:

1. $F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \gamma;\ x,\ y)=$
$=(1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'}F_1\left(\gamma-\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \gamma;\ \frac{x}{x-1},\ \frac{y}{y-1}\right);$ ВТФ I 239 (1)
$=(1-x)^{-\alpha}F_1\left(\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ \beta',\ \gamma;\ \frac{x}{x-1},\ \frac{y-x}{1-x}\right);$ ВТФ I 239 (2)
$=(1-y)^{-\alpha}F_1\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ \gamma;\ \frac{y-x}{y-1},\ \frac{y}{y-1}\right);$ ВТФ I 239 (3)
$=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'}F_1\left(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ \beta',\ \gamma;\ x,\ \frac{x-y}{1-y}\right);$
ВТФ I 240 (4)
$=(1-x)^{-\beta}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}F_1\left(\gamma-\alpha,\ \beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ \gamma;\ \frac{x-y}{x-1},\ y\right).$
ВТФ I 240 (5), АК 30 (5)

2. $F_2(\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y) =$

$$= (1-x)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \gamma-\beta, \beta', \gamma, \gamma'; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{1-x}\right); \qquad \text{ВТФ I 240 (6)}$$

$$= (1-y)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \beta, \gamma'-\beta', \gamma, \gamma'; \frac{x}{1-y}, \frac{y}{y-1}\right); \qquad \text{ВТФ I 240 (7)}$$

$$= (1-x-y)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma'-\beta', \gamma, \gamma'; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right)$$

ВТФ I 240 (8), АК 32 (6)

3. $F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma'; x, y) =$

$$= \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma'-\alpha)\Gamma(\beta)}(-y)^{-\alpha} F_4\left(\alpha, \alpha+1-\gamma', \gamma, \alpha+1-\beta; \frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma'-\beta)\Gamma(\alpha)}(-y)^{\beta} F_4\left(\beta+1-\gamma', \beta, \gamma, \beta+1-\alpha; \frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right).$$

ВТФ I 240 (9), АК 26 (37)

9.184 Интегральные представления:

Двойные интегралы эйлерова типа

1. $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')} \times$

$$\times \iint\limits_{\substack{u\geqslant 0,\ v\geqslant 0 \\ u+v\leqslant 1}} u^{\beta-1} v^{\beta'-1}(1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1}(1-ux-vy)^{-\alpha}\, du\, dv$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0, \operatorname{Re}\beta' > 0, \operatorname{Re}(\gamma-\beta-\beta') > 0]$. ВТФ I 230 (1), АК 28 (1)

2. $F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y) = \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma'-\beta')} \times$

$$\times \int_0^1\!\!\int_0^1 u^{\beta-1} v^{\beta'-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\gamma'-\beta'-1}(1-ux-vy)^{-\alpha}\, du\, dv$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0, \operatorname{Re}\beta' > 0, \operatorname{Re}(\gamma-\beta) > 0, \operatorname{Re}(\gamma'-\beta') > 0]$.

ВТФ I 230 (2), АК 28 (2)

3. $F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; x, y) = \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')} \times$

$$\times \iint\limits_{\substack{u\geqslant 0,\ v\geqslant 0 \\ u+v\leqslant 1}} u^{\beta-1} v^{\beta'-1}(1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1}(1-ux)^{-\alpha}(1-vy)^{-\alpha'}\, du\, dv$$

$[\operatorname{Re}\beta > 0, \operatorname{Re}\beta' > 0, \operatorname{Re}(\gamma-\beta-\beta') > 0]$. ВТФ I 230 (3), АК 28 (3)

4. $F_4[\alpha, \beta, \gamma, \gamma'; x(1-y), y(1-x)] =$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma'-\beta)} \int_0^1\!\!\int_0^1 u^{\alpha-1} v^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-v)^{\gamma'-\beta-1} \times$$

$$\times (1-ux)^{\alpha-\gamma-\gamma'+1}(1-vy)^{\beta-\gamma-\gamma'+1}(1-ux-vy)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-1}\, du\, dv$$

$[\operatorname{Re}\alpha > 0, \operatorname{Re}\beta > 0, \operatorname{Re}(\gamma-\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\gamma'-\beta) > 0]$. ВТФ I 230 (4)

Интегралы типа Меллина—Бэрнса

9.185 Функции F_1, F_2, F_3 и F_4 представляются с помощью двойных интегралов следующей формы:

$$F(x,\ y)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(2\pi i)^2}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\Psi(s,\ t)\Gamma(-s)\Gamma(-t)(-x)^s(-y)^t\,ds\,dt.$$

$\Psi(s,\ t)$	$F(x,\ y)$
$\dfrac{\Gamma(\alpha+s+t)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma+s+t)}$	$F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \gamma;\ x,\ y)$
$\dfrac{\Gamma(\alpha+s+t)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\beta'+t)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma+s)\Gamma(\gamma'+t)}$	$F_2(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \gamma,\ \gamma';\ x,\ y)$
$\dfrac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\alpha'+t)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma+s+t)}$	$F_3(\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta'\ \gamma;\ x,\ y)$
$\dfrac{\Gamma(\alpha+s+t)\Gamma(\beta+s+t)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\gamma+s)\Gamma(\gamma'+t)}$	$F_4(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \gamma';\ x,\ y)$

[α, α', β, β' не должны быть целыми отрицательными].

ВТФ I 232(9)—(13), АК 41(33)

9.19 Гипергеометрическая функция нескольких переменных

$$F_A(\alpha;\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_n;\ \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_n;\ z_1,\ \ldots,\ z_n)=$$
$$=\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+\ldots+m_n}(\beta_1)_{m_1}\ldots(\beta_n)_{m_n}}{(\gamma_1)_{m_1}\ldots(\gamma_n)_{m_n}m_1!\ldots m_n!}z_1^{m_1}z_2^{m_2}\ldots z_n^{m_n}.$$

ИП I 385

9.2 ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

9.20 Введение

9.201 *Вырожденная гипергеометрическая функция* получается в результате предельного перехода по c к $+\infty$ в решении дифференциального уравнения Римана

$$P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & c & \\ \frac{1}{2}+\mu & -c & c-\lambda & z \\ \frac{1}{2}-\mu & 0 & \lambda & \end{Bmatrix}.$$ УВ II 139

9.202 Уравнение, которое получается в результате этого предельного перехода, имеет вид.

1. $$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{du}{dz}+\left(\frac{\lambda}{z}+\frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{z^2}\right)u=0.$$ УВ II 139

Уравнение 9.202 1. имеет следующие два линейно независимых решения:

2. $z^{\frac{1}{2}+\mu}e^{-z}\Phi\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda,\ 2\mu+1;\ z\right)$,

3. $z^{\frac{1}{2}-\mu}e^{-z}\Phi\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda,\ -2\mu+1;\ z\right)$,

которые определены для всех значений $\mu \neq \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{2}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \ldots$ МО 111

9.21 Функции $\Phi(\alpha,\ \gamma;\ z)$ и $\Psi(\alpha,\ \gamma;\ z)$

9.210 Ряд

1. $\Phi(\alpha,\ \gamma;\ z)=1+\frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{z^3}{3!}+\ \ldots$

также называется вырожденной гипергеометрической функцией.

Другое обозначение: $\Phi(\alpha,\ \gamma,\ z)={}_1F_1(\alpha,\ \gamma;\ z)$.

2. $\Psi(\alpha,\ \gamma;\ z)=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\Phi(\alpha,\ \gamma;\ z)+$
$+\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}z^{1-\gamma}\Phi(\alpha-\gamma+1,\ 2-\gamma;\ z).$ ВТФ I 257 (7)

9.211 Интегральное представление:

1. $\Phi(\alpha,\ \gamma;\ z)=\frac{2^{1-\gamma}e^{\frac{1}{2}z}}{B(\alpha,\ \gamma-\alpha)}\int\limits_{-1}^{1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1+t)^{\alpha-1}e^{\frac{1}{2}zt}\,dt$
$[0<\operatorname{Re}\alpha<\operatorname{Re}\gamma]$. МО 114

2. $\Phi(\alpha,\ \gamma;\ z)=\frac{1}{B(\alpha,\ \gamma-\alpha)}z^{1-\gamma}\int\limits_{0}^{z}e^{t}t^{\alpha-1}(z-t)^{\gamma-\alpha-1}\,dt$
$[0<\operatorname{Re}\alpha<\operatorname{Re}\gamma]$. МО 114

3. $\Phi(-\nu,\ \alpha+1;\ z)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\nu+1)}e^{z}z^{-\frac{\alpha}{2}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-t}t^{\nu+\frac{\alpha}{2}}J_{\alpha}(2\sqrt{zt})\,dt$
$\left[\operatorname{Re}(\alpha+\nu+1)>0,\quad |\arg z|<\frac{\pi}{2}\right]$. МО 115

4. $\Psi(\alpha,\ \gamma;\ z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-zt}t^{\alpha-1}(1+t)^{\gamma-\alpha-1}\,dt\quad[\operatorname{Re}\alpha>0]$. ВТФ I 255 (2)

Функциональные соотношения

9.212

1. $\Phi(\alpha,\ \gamma;\ z)=e^{z}\Phi(\gamma-\alpha,\ \gamma;\ -z)$. МО 112

2. $\frac{z}{\gamma}\Phi(\alpha+1,\ \gamma+1;\ z)=\Phi(\alpha+1,\ \gamma;\ z)-\Phi(\alpha,\ \gamma;\ z)$.

3. $\alpha\Phi(\alpha+1,\ \gamma+1;\ z)=(\alpha-\gamma)\Phi(\alpha,\ \gamma+1;\ z)+\gamma\Phi(\alpha,\ \gamma;\ z)$. МО 112

4. $\alpha\Phi(\alpha+1,\ \gamma;\ z)=$
$=(z+2\alpha-\gamma)\Phi(\alpha,\ \gamma;\ z)+(\gamma-\alpha)\Phi(\alpha-1,\ \gamma;\ z)$. МО 112

9.213 $\frac{d\Phi}{dz}=\frac{\alpha}{\gamma}\Phi(\alpha+1,\ \gamma+1;\ z)$. МО 112

9.214 $\lim\limits_{\gamma\to -n} \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\Phi(\alpha, \gamma; z) = z^{n+1}\binom{\alpha+n}{n+1}\Phi(\alpha+n+1, n+2; z)$

$[n=0, 1, 2, \ldots]$. MO 112

9.215

1 $\Phi(\alpha, \alpha; z) = e^z$. MO 15

2. $\Phi(\alpha, 2\alpha; 2z) = 2^{\alpha-\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{1}{4}(1-2\alpha)\pi i\right]\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)e^z z^{\frac{1}{2}-\alpha} J_{\alpha-\frac{1}{2}}\left(ze^{\frac{\pi}{2}i}\right)$.

MO 112

3. $\Phi\left(p+\frac{1}{2}, 2p+1; 2iz\right) = \Gamma(p+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-p} e^{iz} J_p(z)$. MO 15

Представление специальных функций через вырожденную гипергеометрическую функцию $\Phi(\alpha, \gamma; z)$ см.:

для интеграла вероятности 9.236;

для интегралов от цилиндрических функций 6.631 1.;

для полиномов Эрмита 8.953, 8.959,

для полиномов Лагерра 8.972 1.;

для функции параболического цилиндра 9.240;

для функции $M_{\lambda,\mu}(z)$ 9.220 2., 9.220 3.;

для функции $W_{p,q}(z)$ 9.239.

9.216 Функция $\Phi(\alpha, \gamma; z)$ является решением дифференциального уравнения

1. $z\frac{d^2F}{dz^2} + (\gamma - z)\frac{dF}{dz} - \alpha F = 0$. MO 111

Это уравнение имеет два линейно независимых решения:

2 $\Phi(\alpha, \gamma; z)$

3. $z^{1-\gamma}\Phi(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma; z)$ MO 112

9.22—9.23 Функции Уиттекера $M_{\lambda,\mu}(z)$ и $W_{\lambda,\mu}(z)$

9.220 Сделав в уравнении 9.202 1. замену переменных $u = e^{-\frac{z}{2}}W$, мы придем к уравнению

1. $\frac{d^2W}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} + \frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{z^2}\right)W = 0$. MO 115

Уравнение 9.220 1. имеет следующие два линейно независимых решения.

2. $M_{\lambda,\mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{z}{2}}\Phi\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}, 2\mu+1; z\right)$.

3. $M_{\lambda,-\mu}(z) = z^{-\mu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{z}{2}}\Phi\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}, -2\mu+1; z\right)$. MO 115

Для получения решений, пригодных также и при $2\mu = \pm 1, \pm 2, \ldots$, вводится функция Уиттекера.

4 $W_{\lambda,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)}M_{\lambda,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)}M_{\lambda,-\mu}(z)$, УВ II 152

которая при 2μ, стремящемся к целому числу, также служит решением уравнения 9.220 1.

Для функций $M_{\lambda,\mu}(z)$ и $W_{\lambda,\mu}(z)$ $z=0$ является точкой ветвления, а $z=\infty$ — существенно особой точкой Поэтому мы будем рассматривать эти функции только при $|\arg z|<\pi$.

Функции $W_{\lambda,\mu}(z)$ и $W_{-\lambda,\mu}(-z)$ являются линейно независимыми решениями уравнения 9.220 1

Интегральные представления

9.221 $M_{\lambda,\mu}(z)=$

$$=\frac{z^{\mu+\frac{1}{2}}}{2^{2\mu}B\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2},\ \mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}(1+t)^{\mu-\lambda-\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu+\lambda-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}zt}\,dt,$$ УВ II 159

если интеграл сходится См также 6.631 1., 7.623 3.

9.222

1. $$W_{\lambda,\mu}(z)=\frac{z^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}e^{-zt}t^{\mu-\lambda-\frac{1}{2}}(1+t)^{\mu+\lambda-\frac{1}{2}}\,dt.$$ МО 118

2. $$W_{\lambda,\mu}(z)=\frac{z^{\lambda}e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}t^{\mu-\lambda-\frac{1}{2}}e^{-t}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\mu+\lambda-\frac{1}{2}}dt$$

$$\left[\operatorname{Re}(\mu-\lambda)>-\frac{1}{2},\ |\arg z|<\pi\right].$$ УВ II 143

9.223 $$W_{\lambda,\mu}(z)=\frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(u-\lambda)\,\Gamma\left(-u-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-u+\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\lambda-\mu+\frac{1}{2}\right)}z^{u}\,du$$

[путь интегрирования выбирается так, чтобы полюсы функции $\Gamma(u-\lambda)$ оказались отделенными от полюсов функции $\Gamma\left(-u-\mu+\frac{1}{2}\right)$ и $\Gamma\left(-u+\mu+\frac{1}{2}\right)$]. См также 7.142. МО 118

9.224 $$W_{\mu,\frac{1}{2}+\mu}(z)=z^{\mu+1}e^{-\frac{1}{2}z}\int_{0}^{\infty}(1+t)^{2\mu}e^{-zt}\,dt=$$

$$=z^{-\mu}e^{\frac{1}{2}z}\int_{z}^{\infty}t^{2\mu}e^{-t}\,dt\qquad[\operatorname{Re}z>0].$$ УВ II 160

9.225

1. $W_{\lambda,\mu}(x)W_{-\lambda,\mu}(x)=$

$$=-x\int_{0}^{\infty}\operatorname{th}^{2\lambda}\frac{t}{2}\{J_{2\mu}(x\operatorname{sh}t)\sin(\mu-\lambda)\pi+N_{2\mu}(x\operatorname{sh}t)\cos(\mu-\lambda)\pi\}\,dt$$

$$\left[|\operatorname{Re}\mu|-\operatorname{Re}\lambda<\frac{1}{2};\ x>0\right]$$ МО 119

2. $$W_{\varkappa,\mu}(z_1)W_{\lambda,\mu}(z_2)=\frac{(z_1z_2)^{\mu+\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(z_1+z_2)\right]}{\Gamma(1-\varkappa-\lambda)}\times$$
$$\times\int_0^\infty e^{-t}t^{-\varkappa-\lambda}(z_1+t)^{-\frac{1}{2}+\varkappa-\mu}(z_2+t)^{-\frac{1}{2}+\lambda-\mu}\times$$
$$\times F\left(\frac{1}{2}-\varkappa+\mu,\ \frac{1}{2}-\lambda+\mu;\ 1-\varkappa-\lambda;\ \Theta\right)dt,\quad \Theta=\frac{t(z_1+z_2+t)}{(z_1+t)(z_2+t)}$$
$[z_1\neq 0,\ z_2\neq 0,\ |\arg z_1|<\pi,\ |\arg z_2|<\pi,\ \operatorname{Re}(\varkappa+\lambda)<1]$ МО 119

См также 3.334, 3.381 6, 3.382 3., 3.383 4., 8., 3.384 3., 3.471 2.

9.226 Представления в виде ряда

$$M_{0,\mu}(z)=z^{\frac{1}{2}+\mu}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k}}{2^{4k}k!\,(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+k)}\right\}.$$ УВ II 141

Асимптотические представления

9.227 Для больших значений $|z|$

$$W_{\lambda,\mu}(z)\sim e^{-\frac{z}{2}}z^{\lambda}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[\mu^2-\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[\mu^2-\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)^2\right]\dots\left[\mu^2-\left(\lambda-k+\frac{1}{2}\right)^2\right]}{k!z^k}\right)$$
$[|\arg z|\leqslant\pi-\alpha<\pi].$ УВ II 147

9.228 Для больших значений индекса $|\lambda|$

$$M_{\lambda,\mu}(z)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(2\mu+1)\lambda^{-\mu-\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}}\cos\left(2\sqrt{\lambda z}-\mu\pi-\frac{1}{4}\pi\right).$$ МО 118

9.229

1. $$W_{\lambda,\mu}\sim-\left(\frac{4z}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\lambda+\lambda\ln\lambda}\sin\left(2\sqrt{\lambda z}-\lambda\pi-\frac{\pi}{4}\right).$$ МО 118

2. $$W_{-\lambda,\mu}\sim\left(\frac{z}{4\lambda}\right)^{\frac{1}{4}}e^{\lambda-\lambda\ln\lambda-2\sqrt{\lambda z}}$$ МО 118

[формулы 9.228 и 9.229 применимы при $|\lambda|\gg 1$, $|\lambda|\gg|z|$, $|\lambda|\gg|\mu|$, $z\neq 0$, $|\arg\sqrt{z}|<\frac{3\pi}{4}$ и $|\arg\lambda|<\frac{\pi}{2}$]. МО 118

Функциональные соотношения

9.231

1. $$M_{n+\mu+\frac{1}{2},\mu}(z)=\frac{z^{\frac{1}{2}-\mu}e^{\frac{1}{2}z}}{(2\mu+1)(2\mu+2)\dots(2\mu+n)}\frac{d^n}{dz^n}(z^{n+2\mu}e^{-z})$$
$[n=0,\ 1,\ 2,\ \dots;\ 2\mu\neq-1,\ -2,\ -3,\ \dots].$ МО 117

2. $$z^{-\frac{1}{2}-\mu}M_{\lambda,\mu}(z)=(-z)^{-\frac{1}{2}-\mu}M_{-\lambda,\mu}(-z)\quad[2\mu\neq-1,\ -2,\ -3,\ \dots].$$ УВ II 140

9.232

1. $W_{\lambda,\mu}(z)=W_{\lambda,-\mu}(z)$. МО 116

2. $$W_{-\lambda,\mu}(-z)=\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+\lambda\right)}M_{-\lambda,\mu}(-z)+\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\lambda\right)}M_{-\lambda,-\mu}(-z)$$
$$\left[|\arg(-z)|<\frac{3}{2}\pi\right].$$ УВ II 152

9.233

1. $$M_{\lambda,\mu}(z)=\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}e^{i\pi\lambda}W_{-\lambda,\mu}(e^{i\pi}z)+$$
$$+\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}\exp\left[i\pi\left(\lambda-\mu-\frac{1}{2}\right)\right]W_{\lambda,\mu}(z)$$
$$\left[-\frac{3}{2}\pi<\arg z<\frac{\pi}{2};\ 2\mu\neq-1,\ -2,\ \ldots\right].$$ МО 117

2. $$M_{\lambda,\mu}(z)=\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}e^{-i\pi\lambda}W_{-\lambda,\mu}(e^{-i\pi}z)+$$
$$+\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}\exp\left[-i\pi\left(\lambda-\mu-\frac{1}{2}\right)\right]W_{\lambda,\mu}(z)$$
$$\left[-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3}{2}\pi;\ 2\mu\neq-1,\ -2,\ \ldots\right].$$ МО 117

9.234 Рекуррентные формулы:

1. $W_{\mu,\lambda}(z)=\sqrt{z}\,W_{\mu-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}}(z)+\left(\frac{1}{2}+\lambda-\mu\right)W_{\mu-1,\lambda}(z)$. УВ II 159

2. $W_{\mu,\lambda}(z)=\sqrt{z}\,W_{\mu-\frac{1}{2},\lambda+\frac{1}{2}}(z)+\left(\frac{1}{2}-\lambda-\mu\right)W_{\mu-1,\lambda}(z)$ УВ II 159

3. $$z\frac{d}{dz}W_{\lambda,\mu}(z)=\left(\lambda-\frac{1}{2}z\right)W_{\lambda,\mu}(z)-\left[\mu^2-\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2\right]W_{\lambda-1,\mu}(z).$$ УВ II 159

4. $$\left[\left(\mu+\frac{1-z}{2}\right)W_{\lambda,\mu}(z)-z\frac{d}{dz}W_{\lambda,\mu}(z)\right]\left(\mu+\frac{1}{2}+\lambda\right)=$$
$$=\left[\left(\mu+\frac{1+z}{2}\right)W_{\lambda,\mu+1}(z)+z\frac{d}{dz}W_{\lambda,\mu+1}(z)\right]\left(\mu+\frac{1}{2}-\lambda\right)$$ МО 117

5. $$\left(\frac{3}{2}+\lambda+\mu\right)\left(\frac{1}{2}+\lambda+\mu\right)zW_{\lambda,\mu}(z)=z(z+2\mu+1)\frac{d}{dz}W_{\lambda+1,\mu+1}(z)+$$
$$+\left[\frac{1}{2}z^2+\left(\mu-\lambda-\frac{1}{2}\right)z+2\mu^2+2\mu+\frac{1}{2}\right]W_{\lambda+1,\mu+1}(z).$$ МО 117

Связь с другими функциями

9.235

1. $M_{0,\mu}(z)=2^{2\mu}\Gamma(\mu+1)\sqrt{z}\,I_\mu\left(\frac{z}{2}\right)$. МО 125и

2. $W_{0,\mu}(z)=\sqrt{\frac{z}{\pi}}K_\mu\left(\frac{z}{2}\right)$. МО 125

9.236

1. $$\Phi(x)=1-\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi x}}W_{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(x^2)=\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\Phi\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2};-x^2\right).$$ УВ II 144, МО 126

2. $$\operatorname{li}(z)=-\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{\ln\frac{1}{z}}}W_{-\frac{1}{2},0}(-\ln z).$$ УВ II 145

3. $$\Gamma(\alpha,x)=e^{-x}\Psi(1-\alpha,1-\alpha;x).$$ ВТФ I 266 (21)

4. $$\gamma(\alpha,x)=\frac{x^\alpha}{\alpha}\Phi(\alpha,\alpha+1;-x).$$ ВТФ I 266 (22)

9.237

1. $$W_{\lambda,\mu}(z)=\frac{(-1)^{2\mu}z^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}z}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)}\times$$
$$\times\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\mu+k-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{k!\,(2\mu+k)!}z^k\left[\psi(k+1)+\psi(2\mu+k+1)-\psi\left(\mu+k-\lambda+\frac{1}{2}\right)-\ln z\right]+\right.$$
$$\left.+(-z)^{-2\mu}\sum_{k=0}^{2\mu-1}\frac{\Gamma(2\mu-k)\Gamma\left(k-\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{k!}(-z)^k\right\}\ ^{*)}$$
$$\left[|\arg z|<\frac{3\pi}{2};\ 2\mu+1 - \text{натуральное число}\right].$$ МО 116

2. Пусть $\lambda-\mu-\frac{1}{2}=l$, где $l+1$ — натуральное число. Тогда
$$W_{l+\mu+\frac{1}{2},\mu}(z)=(-1)^l z^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}z}(2\mu+1)(2\mu+2)\ldots(2\mu+l)\Phi(-l,2\mu+1;z)=$$
$$=(-1)^l z^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}z}L_l^{2\mu}(z).$$ МО 116

9.238

1. $$I_\nu(x)=\frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)}x^\nu e^{-ix}\Phi\left(\frac{1}{2}+\nu,1+2\nu;2ix\right).$$ ВТФ I 265 (9)

2. $$I_\nu(x)=\frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)}x^\nu e^{-x}\Phi\left(\frac{1}{2}+\nu,1+2\nu;2x\right).$$ ВТФ I 265 (10)

3. $$K_\nu(x)=\sqrt{\pi}\,e^{-x}(2x)^\nu\Psi\left(\frac{1}{2}+\nu,1+2\nu;2x\right).$$ ВТФ I 265 (13)

*) При $\mu=0$ последняя сумма равна нулю.

9.24—9.25 Функции параболического цилиндра $D_p(z)$

9.240 $$D_p(z) = 2^{\frac{1}{4}+\frac{p}{2}} W_{\frac{1}{4}+\frac{p}{2}, -\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right) =$$

$$= 2^{\frac{p}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)} \Phi\left(-\frac{p}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2\pi} z}{\Gamma\left(-\frac{p}{2}\right)} \Phi\left(\frac{1-p}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \right\}$$

МО 120 и

называются *функциями параболического цилиндра*

Интегральные представления

9.241

1. $$D_p(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{p+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}pi} e^{\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} x^p e^{-2x^2+2ixz} \, dx$$

[$\operatorname{Re} p > -1$; при $x < 0$ $\arg x^p = p\pi i$] МО 122

2. $$D_p(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\Gamma(-p)} \int_0^{\infty} e^{-zx-\frac{x^2}{2}} x^{-p-1} \, dx \qquad [\operatorname{Re} p < 0]$$

(сравни 3.462 1.) МО 122

9.242

1. $$D_p(z) = -\frac{\Gamma(p+1)}{2\pi i} e^{-\frac{1}{4}z^2} \int_{\infty}^{(0+)} e^{-zt-\frac{1}{2}t^2} (-t)^{-p-1} \, dt \qquad [|\arg(-t)| \leqslant \pi]$$

УВ II 157

2. $$D_p(z) = 2^{\frac{1}{2}(p-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{i\pi} \int_{-\infty}^{(-1+)} e^{\frac{1}{4}z^2 t} (1+t)^{-\frac{1}{2}p-1} (1-t)^{\frac{1}{2}(p-1)} \, dt$$

$\left[|\arg z| < \frac{\pi}{4};\ |\arg(1+t)| \leqslant \pi\right]$ УВ II 161

3. $$D_p(z) = \frac{1}{2\pi i} e^{-\frac{1}{4}z^2} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}p\right)\Gamma(-t)}{\Gamma(-p)} \left(\sqrt{2}\right)^{t-p-2} z^t \, dt$$

$\left[|\arg z| < \frac{3}{4}\pi;\ p \text{ не есть целое положительное число}\right]$ УВ II 161

4. $$D_p(z) = \frac{1}{2\pi i} e^{-\frac{1}{4}z^2} \int_{\infty}^{(0-)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}p\right)\Gamma(-t)}{\Gamma(-p)} \left(\sqrt{2}\right)^{t-p-2} z^t \, dt$$

[для всех значений $\arg z$, причем контуры окружают полюсы функции $\Gamma(-t)$, но не окружают полюсы функции $\Gamma\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}p\right)$] УВ II 161

9.243

1. $$D_n(z)=(-1)^{\mu}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{n})^{n+1}\,e^{\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{2}n}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-n(t-1)^2}\frac{\cos}{\sin}(zt\sqrt{n})\,dt+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{0}^{\infty}\left[e^{\frac{1}{2}n(1-t^2)}t^n-e^{-n(t-1)^2}\right]\frac{\cos}{\sin}(zt\sqrt{n})\,dt-\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-n(t-1)^2}\frac{\cos}{\sin}(zt\sqrt{n})\,dt\right\}$$

[n — натуральное число]. УВ II 162

2. $$D_n(z)=(-1)^{\mu}\,2^{n+2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}z^2}\int\limits_{0}^{\infty} t^n e^{-2t^2}\frac{\cos}{\sin}(2zt)\,dt$$

$\left[n\right.$ — натуральное число, $\mu=E\left(\frac{n}{2}\right)$, а косинус или синус берутся смотря по тому, будет ли n числом четным или нечетным$\left.\right]$ УВ II 162

9.244

1. $$D_{-p-1}[(1+i)z]=\frac{e^{-\frac{iz^2}{2}}}{2^{\frac{p-1}{2}}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-ix^2z^2}x^p}{(1+x^2)^{1+\frac{p}{2}}}\,dx$$

[$\operatorname{Re} p>-1$, $\operatorname{Re} iz^2\geqslant 0$]. МО 122

2. $$D_p[(1+i)z]=\frac{2^{\frac{p+1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{p}{2}\right)}\int\limits_{1}^{\infty} e^{-\frac{i}{2}z^2x}\frac{(x+1)^{\frac{p-1}{2}}}{(x-1)^{1+\frac{p}{2}}}\,dx$$

[$\operatorname{Re} p<0$; $\operatorname{Re} iz^2\geqslant 0$]. МО 122

См. также **3.383** 6., 7., **3.384** 2., 6., **3.966** 5., 6.

9.245

1. $$D_p(x)D_{-p-1}(x)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\operatorname{cth}^{p+\frac{1}{2}}\frac{t}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} t}}\sin\frac{x^2\operatorname{sh} t+p\pi}{2}$$

[x действительно, $\operatorname{Re} p<0$]. МО 122

2. $$D_p\left(ze^{\frac{\pi}{4}i}\right)D_p\left(ze^{-\frac{\pi}{4}i}\right)=\frac{1}{\Gamma(-p)}\int\limits_{0}^{\infty}\operatorname{cth}^p t\exp\left(-\frac{z^2}{2}\operatorname{sh} 2t\right)\frac{dt}{\operatorname{sh} t}$$

$\left[|\arg z|<\frac{\pi}{4};\ \operatorname{Re} p<0\right]$ МО 122

См. также **6.613**.

9.246 Асимптотические разложения. Если $|z|\gg 1$, $|z|\gg p$, то

1. $$D_p(z)\sim e^{-\frac{z^2}{4}}z^p\left(1-\frac{p(p-1)}{2z^2}+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2\cdot 4z^4}-\ldots\right)$$

$\left[|\arg z|<\frac{3}{4}\pi\right]$ МО 121

2. $$D_p(z) \sim e^{-\frac{z^2}{4}} z^p \left(1 - \frac{p(p-1)}{2z^2} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2\cdot 4z^4} - \dots\right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-p)} e^{p\pi i} e^{\frac{z^2}{4}} z^{-p-1} \left(1 + \frac{(p+1)(p+2)}{2z^2} + \frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{2\cdot 4z^4} + \dots\right)$$
$\left[\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5}{4}\pi\right]$ МО 121

3. $$D_p(z) \sim e^{-\frac{z^2}{4}} z^p \left(1 - \frac{p(p-1)}{2z^2} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2\cdot 4z^4} - \dots\right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-p)} e^{-p\pi i} e^{\frac{z^2}{4}} z^{-p-1} \left(1 + \frac{(p+1)(p+2)}{2z^2} + \frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{2\cdot 4z^4} + \dots\right)$$
$\left[-\frac{\pi}{4} > \arg z > -\frac{5}{4}\pi\right]$ МО 121

Функциональные соотношения

9.247 Рекуррентные формулы:

1. $D_{p+1}(z) - zD_p(z) + pD_{p-1}(z) = 0.$ УВ II 157

2. $\frac{d}{dz} D_p(z) + \frac{1}{2} zD_p(z) - pD_{p-1}(z) = 0.$ УВ II 157

3. $\frac{d}{dz} D_p(z) - \frac{1}{2} zD_p(z) + D_{p+1}(z) = 0.$ МО 121

9.248 Линейные соотношения:

1. $$D_p(z) = \frac{\Gamma(p+1)}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{\frac{\pi}{2}pi} D_{-p-1}(iz) + e^{-\frac{\pi}{2}pi} D_{-p-1}(-iz)\right];$$

2. $$= e^{-p\pi i} D_p(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-p)} e^{-\frac{\pi}{2}(p+1)i} D_{-p-1}(iz);$$

3. $$= e^{p\pi i} D_p(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-p)} e^{\frac{\pi}{2}(p+1)i} D_{-p-1}(-iz).$$ МО 121

9.249 $$D_p[(1+i)x] + D_p[-(1+i)x] = \frac{2^{1+\frac{p}{2}}}{\Gamma(-p)} \exp\left[-\frac{i}{2}\left(x^2 + p\frac{\pi}{2}\right)\right] \int_0^\infty \frac{\cos xt}{t^{p+1}} e^{-\frac{i}{4}t^2}\, dt$$
[x действительно; $-1 < \operatorname{Re} p < 0$]. МО 122

9.251 $D_n(z) = (-1)^n e^{\frac{z^2}{4}} \frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-\frac{z^2}{2}}\right)$ $[n = 0, 1, 2, \dots]$. УВ II 157

9.252 $$D_p(ax+by) = \exp\frac{(bx-ay)^2}{4} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^p \times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} D_{p-k}\left(\sqrt{a^2+b^2}\, x\right) D_k\left(\sqrt{a^2+b^2}\, y\right) \left(\frac{b}{a}\right)^k$$
[$a > b >$, $x > 0$, $y > 0$, $\operatorname{Re} p \geqslant 0$] [«теорема сложения»] МО 124

Связь с другими функциями

9.253 $D_n(z) = 2^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right).$ МО 123 *u*

9.254

1. $D_{-1}(z) = e^{\frac{z^2}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]$ МО 123

2. $D_{-2}(z) = e^{\frac{z^2}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{z\left[1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\right\}.$ МО 123

9.255 Дифференциальные уравнения, приводящие к функциям параболического цилиндра:

1 $\frac{d^2u}{dz^2} + \left(p + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) u = 0,$

$$u = D_p(z),\ D_p(-z),\ D_{-p-1}(iz),\ D_{-p-1}(-iz)$$

(между этими четырьмя решениями существуют линейные зависимости, см 9.248).

2 $\frac{d^2u}{dz^2} + (z^2 + \lambda) u = 0, \qquad u = D_{-\frac{1+i\lambda}{2}}[\pm(1+i) z].$

ВТФ II 118 (12), (13)*u*, МО 123

3. $\frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + (p+1) u = 0, \qquad u = e^{-\frac{z^2}{4}} D_p(z)$ МО 123

9.26 Вырожденные гипергеометрические ряды двух переменных

9.261

1. $\Phi_1(\alpha, \beta, \gamma, x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_n}{(\gamma)_{m+n}\, m!\, n!} x^m y^n$

$[|x| < 1]$. ВТФ I 225 (20)

2 $\Phi_2(\beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_m (\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}\, m!\, n!} x^m y^n.$

ВТФ I 225 (21) *u*, ИП I 385

3 $\Phi_3(\beta, \gamma, x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_m}{(\gamma)_{m+n}\, m!\, n!} x^m y^n.$ ВТФI 225 (22)

Функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 удовлетворяют следующим системам дифференциальных уравнений с частными производными:

9.262

1. $z = \Phi_1(\alpha, \beta, \gamma, x, y).$

$$\begin{cases} x(1-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y(1-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1) x]\frac{\partial z}{\partial x} - \beta y \frac{\partial z}{\partial y} - \alpha\beta z = 0, \\ y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (\gamma - y)\frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial x} - \alpha z = 0. \end{cases}$$

ВТФ I 235 (23)

2 $z=\Phi_2(\beta, \beta', \gamma, x, y)$

$$\left\{\begin{array}{l} x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+(\gamma-x)\dfrac{\partial z}{\partial x}-\beta z=0, \\ y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+(\gamma-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}-\beta' z=0 \end{array}\right.$$ ВТФ I 235 (24)

3 $z=\Phi_3(\beta, \gamma, x, y)$

$$\left\{\begin{array}{l} x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+(\gamma-x)\dfrac{\partial z}{\partial x}-\beta z=0, \\ y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\gamma\dfrac{\partial z}{\partial y}-z=0. \end{array}\right.$$ ВТФ I 235 (25)

9.3 G-ФУНКЦИЯ МЕЙЕРА

9.30 Определение

9.301 $G_{p,q}^{m,n}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q\end{matrix}\right)=$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-s)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+s)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-s)}x^s\,ds$$

[$0\leqslant m\leqslant q$, $0\leqslant n\leqslant p$, полюсы $\Gamma(b_j-s)$ не должны совпадать с полюсами $\Gamma(1-a_k+s)$ ни при каких j и k ($j=1, \dots, m$, $k=1, \dots, n$)]. Кроме 9.301 приняты еще следующие обозначения·

$$G_{pq}^{mn}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix} a_r \\ b_s\end{matrix}\right), \quad G_{pq}^{mn}(x), \quad G(x)$$ ВТФ I 207 (1)

9.302 Можно указать три различных типа путей интегрирования L в правой части 9.301

1) Путь L идет от $-\infty$ к $+\infty$ так, что полюсы функций $\Gamma(1-a_k+s)$ лежат слева, а полюсы функций $\Gamma(b_j-s$ справа от L; $j=1, 2, \dots, m$, $k=1, 2, \dots, n$ Условия сходимости интеграла 9.301 имеют в этом случае вид:

$$p+q<2(m+n), \quad |\arg x|<\left(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q\right)\pi$$ ВТФ I 207 (2)

2) L представляет собой петлю, начинающуюся и кончающуюся в $+\infty$ и охватывающую один раз в отрицательном направлении полюсы функций $\Gamma(b_j-s)$, $j=1, 2, \dots, m$, все полюсы функции $\Gamma(1-a_k+s)$ должны оставаться вне этой петли. Тогда условия сходимости интеграла 9.301.

$$q\geqslant 1 \text{ и либо } p<q, \text{ либо } p=q \text{ и } |x|<1.$$ ВТФ I 207 (3)

3) L представляет собой петлю, начинающуюся и кончающуюся в $-\infty$ и охватывающую один раз в положительном направлении полюсы функций $\Gamma(1-a_k+s)$, $k=1, 2, \dots, n$, все полюсы функции $\Gamma(b_j-s)$, $j=1, 2, \dots, m$, должны оставаться вне этой петли

Условия сходимости интеграла 9.301

$$p\geqslant 1 \text{ и либо } p>q, \text{ либо } p=q \text{ и } |x|>1$$ ВТФ I 207 (4)

Функция $G_{pq}^{mn}\left(x\left|{a_r \atop b_s}\right.\right)$ — аналитическая по x; она симметрична по параметрам $a_1, \ldots, a_n$, а также по $a_{n+1}, \ldots, a_p$; $b_1, \ldots, b_m$; $b_{m+1}, \ldots, b_q$.

ВТФ I 208

9.303 Если никакая пара b_j, $j=1, 2, \ldots, n$, не отличается на целое число, то при условиях либо $p<q$, либо $p=q$ и $|x|<1$

$$G_{pq}^{mn}\left(x\left|{a_r \atop b_s}\right.\right)=\sum_{h=1}^{m}\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}{}' \Gamma(b_j-b_h)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(1+b_h-a_j)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1+b_h-b_j)\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-b_h)}x^{b_h}\times$$

$$\times {}_pF_{q-1}[1+b_h-a_1, \ldots, 1+b_h-a_p; 1+b_h-b_1, \ldots$$

$$\ldots, *, \ldots, 1+b_h-b_q; (-1)^{p-m-n}x] \text{ *)}.$$ ВТФ I 208 (5)

9.304 Если никакая пара a_k, $l=1, 2, \ldots, n$, не отличается на целое число, то при условиях $q<p$ либо $q=p$ и $|x|>1$

$$G_{pq}^{mn}\left(x\left|{a_r \atop b_s}\right.\right)=\sum_{h=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}{}' \Gamma(a_h-a_j)\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-a_h+1)}{\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-a_h+1)\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(a_h-b_j)}x^{a_h-1}\times$$

$$\times {}_qF_{p-1}[1+b_1-a_h, \ldots, 1+b_q-a_h; 1+a_1-a_h, \ldots$$

$$\ldots, *, \ldots, 1+a_p-a_h; (-1)^{q-m-n}x^{-1}] \text{ *)}.$$ ВТФ I 208 (6)

9.31 Функциональные соотношения

Если один из параметров a_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ совпадает с одним из параметров b_j $(j=m+1, m+2, \ldots, q)$, то порядок G-функции уменьшается Например,

1 $$G_{pq}^{mn}\left(x\left|{a_1, \ldots, a_p \atop b_1, \ldots, b_{q-1}, a_1}\right.\right)=G_{p-1,q-1}^{m,n-1}\left(x\left|{a_2, \ldots, a_p \atop b_1, \ldots, b_{q-1}}\right.\right) \quad [n, p, q \geqslant 1].$$

Аналогичное соотношение возникает в случае, когда один из параметров b_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ совпадает с одним из a_j $(j=n+1, \ldots, p)$ В этом случае на единицу уменьшается не n, а m ВТФ I 209 (7)

G-функция с $p>q$ может быть преобразована в G-функцию с $p<q$ с помощью соотношения:

2 $$G_{pq}^{mn}\left(x^{-1}\left|{a_r \atop b_s}\right.\right)=G_{qp}^{nm}\left(x\left|{1-b_s \atop 1-a_r}\right.\right).$$ ВТФ I 209 (9)

3 $$x\frac{d}{dx}G_{pq}^{mn}\left(x\left|{a_r \atop b_s}\right.\right)=G_{pq}^{mn}\left(x\left|{a_1-1, a_2, \ldots, a_p \atop b_1, \ldots, b_q}\right.\right)+$$

$$+(a_1-1)G_{pq}^{mn}\left(x\left|{a_r \atop b_s}\right.\right) \quad [n \geqslant 1].$$ ВТФ I 210 (13)

*) Штрих у знака произведения означает пропуск сомножителя для $j=h$. Звездочка под знаком функции ${}_pF_{q-1}$ означает пропуск h-го параметра.

9.32 Дифференциальное уравнение для G-функции

$G_{pq}^{mn}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} a_r \\ b_s \end{matrix}\right)$ удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению q-го порядка

$$\left[(-1)^{p-m-n} x \prod_{j=1}^{p}\left(x\frac{d}{dx}-a_j+1\right)-\prod_{j=1}^{q}\left(x\frac{d}{dx}-b_j\right)\right] y=0 \qquad [p \leqslant q]$$

ВТФ I 210(1)

9.33 Ряды G-функций

$$G_{pq}^{mn}\left(\lambda x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right)=$$

$$=\lambda^{b_1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}(1-\lambda)^r G_{pq}^{mn}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1+r, b_2, \ldots, b_q \end{matrix}\right)$$

$[|\lambda-1|<1,\ m \geqslant 1,$ если $m=1$ и $p<q$, λ может быть произвольным];

ВТФ I 213(1)

$$=\lambda^{b_q}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}(\lambda-1)^r G_{pq}^{mn}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_{q-1}, b_q+r \end{matrix}\right)$$

$[m<q,\ |\lambda-1|<1]$; ВТФ I 213(2)

$$=\lambda^{a_1-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^r G_{pq}^{mn}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1-r, a_2, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right)$$

$\left[n \geqslant 1,\ \operatorname{Re}\lambda>\frac{1}{2}\right.$ (если $n=1$ и $p>q$, то λ может быть произвольным)$\left.\right]$,

ВТФ I 213(3)

$$=\lambda^{a_p-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)^r G_{pq}^{mn}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p-r \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right)$$

$\left[n<p,\ \operatorname{Re}\lambda>\frac{1}{2}\right]$. ВТФ I 213(4)

Интегралы от G-функции см. 7.8

9.34 Связь с другими специальными функциями

1. $J_\nu(x)x^\mu=2^\mu G_{02}^{10}\left(\frac{1}{4}x^2 \,\middle|\, \frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu,\ \frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu\right)$. ВТФ I 219(44)

2. $N_\nu(x)x^\mu=2^\mu G_{13}^{20}\left(\frac{1}{4}x^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2} \end{matrix}\right)$.

ВТФ I 219(46)

3. $K_\nu(x)x^\mu=2^{\mu-1}G_{02}^{20}\left(\frac{1}{4}x^2 \,\middle|\, \frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu\right)$. ВТФ I 219(47)

4. $K_\nu(x) = e^x \sqrt{\pi}\, G_{12}^{20}\left(2x \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \nu, \; -\nu \end{matrix}\right).$ ВТФ I 219(49)

5. $\mathbf{H}_\nu(x)\, x^\mu = 2^\mu G_{13}^{11}\left(\frac{1}{4}x^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu, \; \frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu, \; \frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right).$

ВТФ I 220(51)

6. $S_{\mu,\nu}(x) = 2^{\mu-1}\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}\right)} \times$

$$\times G_{13}^{31}\left(\frac{1}{4}x^2 \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu, \; \frac{1}{2}\nu, \; -\frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right).$$ ВТФ I 220(55)

7. ${}_2F_1(a, b; c; -x) = \dfrac{\Gamma(c)\, x}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} G_{22}^{12}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} -a, & -b \\ -1, & -c \end{matrix}\right).$ ВТФ I 222(74) и

8. ${}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q, x) =$

$$= \frac{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)}{\prod\limits_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)} G_{p,q+1}^{1,p}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} 1-a_1, \ldots, 1-a_p \\ 0, \; 1-b_1, \ldots, 1-b_q \end{matrix}\right);$$

$$= \frac{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)}{\prod\limits_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)} G_{q+1,p}^{p,1}\left(-\frac{1}{x} \,\middle|\, \begin{matrix} 1, b_1, \ldots, b_q \\ a_1, \ldots, a_p \end{matrix}\right).$$ ВТФ I 215(1)

9. $W_{k,m}(x) = \dfrac{2^k \sqrt{x}\, e^{\frac{1}{2}x}}{\sqrt{2\pi}} G_{24}^{40}\left(\frac{x^2}{4} \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{1}{4}-\frac{1}{2}k, \; \frac{3}{4}-\frac{1}{2}k \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}m, \; \frac{1}{2}-\frac{1}{2}m, \; \frac{1}{2}m, \; -\frac{1}{2}m \end{matrix}\right).$

ВТФ I 221(70)

9.4 E-ФУНКЦИЯ МАК-РОБЕРТА

9.41 Представление с помощью кратных интегралов

$$E(p;\; \alpha_r : q;\; \varrho_s : x) = \frac{\Gamma(\alpha_{q+1})}{\Gamma(\varrho_1-\alpha_1)\,\Gamma(\varrho_2-\alpha_2)\ldots\Gamma(\varrho_q-\alpha_q)} \times$$

$$\times \prod_{\mu=1}^{q}\int_0^\infty \lambda_\mu^{\varrho_\mu-\alpha_\mu-1}(1+\lambda_\mu)^{-\varrho_\mu}\, d\lambda_\mu \prod_{\nu=2}^{p-q-1}\int_0^\infty e^{-\lambda_{q+\nu}}\lambda_{q+\nu}^{\alpha_{q+\nu}-1}\, d\lambda_{q+\nu} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-\lambda_p}\lambda_p^{\alpha_p-1}\left[1+\frac{\lambda_{q+2}\,\lambda_{q+3}\ldots\lambda_p}{(1+\lambda_1)\ldots(1+\lambda_q)\,x}\right]^{-\alpha_{q+1}} d\lambda_p$$

[$|\arg x| < \pi$, $p \geqslant q+1$, α_r и β_s ограничены условием сходимости интегралов в правой части]. ВТФ I 204(3)

9.42 Функциональные соотношения

1. $$\alpha_1 xE(\alpha_1, \ldots, \alpha_p \cdot \varrho_1, \ldots, \varrho_q : x) = xE(\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \cdot \varrho_1, \ldots, \varrho_q : x) + E(\alpha_1+1, \alpha_2+1, \ldots, \alpha_p+1 : \varrho_1+1, \ldots, \varrho_q+1 : x).$$ ВТФ I 205 (7)

2. $$(\varrho_1 - 1)\, xE(\alpha_1, \ldots, \alpha_p : \varrho_1, \ldots, \varrho_q : x) = xE(\alpha_1, \ldots, \alpha_p : \varrho_1 - 1, \varrho_2, \ldots, \varrho_q : x) + E(\alpha_1+1, \ldots, \alpha_p+1 . \varrho_1+1, \ldots, \varrho_q+1 : x).$$ ВТФ I 205 (9)

3. $$\frac{d}{dx} E(\alpha_1, \ldots, \alpha_p : \varrho_1, \ldots, \varrho_q : x) = x^{-2}E(\alpha_1+1, \ldots, \alpha_p+1 : \varrho_1+1, \ldots, \varrho_q+1 : x).$$ ВТФ I 205 (8)

9.5 ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА $\zeta(z, q)$, $\zeta(z)$, ФУНКЦИИ $\Phi(z, s, v)$ и $\xi(s)$

9.51 Определение и интегральные представления

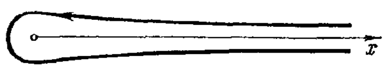
9.511 $$\zeta(z, q) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}e^{-qt}}{1-e^{-t}}\, dt;$$ УВ II 45

$$= \frac{1}{2} q^{-z} + \frac{q^{1-z}}{z-1} + 2\int_0^\infty (q^2+t^2)^{-\frac{z}{2}} \left[\sin\left(z \operatorname{arctg} \frac{t}{q}\right)\right] \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}$$

$[0 < q < 1, \ \mathrm{Re}\, z > 1]$. УВ II 50

9.512 $$\zeta(z, q) = -\frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i} \int_\infty^{(0+)} \frac{(-\theta)^{z-1}e^{-q\theta}}{1-e^{-\theta}}\, d\theta.$$

Это равенство справедливо для всех значений z, за исключением $z = 1, 2, 3, \ldots$ Предполагается, что контур интегрирования (см чертеж) не проходит через точки $2n\pi i$ (n — натуральное число).



См также **4.251** 4, 4.271 1., 4., 8., **4.272** 9., 12., **4.294** 11.

9.513

1. $$\zeta(z) = \frac{1}{(1-2^{1-z})\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t+1}\, dt \qquad [\mathrm{Re}\, z > 0].$$ УВ II 46

2. $$\zeta(z) = \frac{2^z}{(2^z-1)\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}e^t}{e^{2t}-1}\, dt \qquad [\mathrm{Re}\, z > 1].$$ УВ II 46

3. $$\zeta(z) = \frac{\pi^{\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} \left[\frac{1}{z(z-1)} + \int_1^\infty \left(t^{\frac{1-z}{2}} + t^{\frac{z}{2}}\right) t^{-1} \sum_{k=1}^\infty e^{-k^2\pi t}\, dt\right].$$ УВ II 54

4. $$\zeta(z) = \frac{2^{z-1}}{z-1} - 2^z \int_0^\infty (1+t^2)^{-\frac{z}{2}} \sin(z \operatorname{arc\,tg} t) \frac{dt}{e^{\pi t}+1}.$$ УВ II 62

5 $$\zeta(z)=\frac{2^{z-1}}{2^z-1}\frac{z}{z-1}+\frac{2}{2^z-1}\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{4}+t^2\right)^{-\frac{z}{2}}\sin(z\operatorname{arctg}2t)\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}.$$ УВ II 62

См. также 3.411 1., 3.523 1., 3.527 1., 3., 4.271 8.

9.52 Представление в виде ряда или бесконечного произведения

9.521

1 $$\zeta(z, q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(q+n)^z}\qquad [\operatorname{Re} z>1].$$ УВ II 44

2 $$\zeta(z, q)=\frac{2\Gamma(1-z)}{(2\pi)^{1-z}}\left[\sin\frac{z\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi qn}{n^{1-z}}+\cos\frac{z\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi qn}{n^{1-z}}\right]$$
$[\operatorname{Re} z<0]$. УВ II 49

3. $$\zeta(z, q)=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(q+n)^z}-\frac{1}{(1-z)(N+q)^{z-1}}-\sum_{n=N}^{\infty}F_n(z),$$

где $$F_n(z)=\frac{1}{1-z}\left(\frac{1}{(n+1+q)^{z-1}}-\frac{1}{(n+q)^{z-1}}\right)-\frac{1}{(n+1+q)^z}=z\int\limits_n^{n+1}\frac{(t-n)\,dt}{(t+q)^{z+1}}$$

$[\operatorname{Re} z>-1,\ N$ — натуральное число$]$. УВ II 55

9.522

1 $$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}\qquad [\operatorname{Re} z>1].$$ УВ II 44

2 $$\zeta(z)=\frac{1}{1-2^{1-z}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^z}\qquad [\operatorname{Re} z>0].$$ УВ II 46

9.523

1 $$\zeta(m)=\prod\frac{1}{1-p^{-m}},$$ УВ II 53

2 $$\ln\zeta(z)=\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kp^{kz}}$$ УВ II 63

Умножение и суммирование производятся по всем простым числам p.

9.524 $$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta(k)}{k^z},$$

где $\Delta(k)=0$, когда k не есть степень простого числа, и $\Delta(k)=\ln p$, когда k — степень простого числа p $[\operatorname{Re} z>1]$. УВ II 63

9.53 Функциональные соотношения

9.531 $$\zeta(-n, q)=-\frac{B_{n+1}(q)}{n+1}$$ [n — натуральное число или нуль]. УВ II 47

9.532 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k \zeta(k, q) = \ln \frac{e^{-Cz}\Gamma(q)}{\Gamma(z+q)} - \frac{z}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{qz}{k(q+k)}$ $\quad [|z| < q]$

УВ II 59

9.533

1. $\lim_{z \to 1} \frac{\zeta(z, q)}{\Gamma(1-z)} = -1.$ УВ II 46

2. $\lim_{z \to 1} \left\{ \zeta(z, q) - \frac{1}{z-1} \right\} = -\psi(q).$ УВ II 51

3. $\left\{ \frac{d}{dz} \zeta(z, q) \right\}_{z=0} = \ln \Gamma(q) - \frac{1}{2} \ln 2\pi$ УВ II 52

9.534 $\zeta(z, 1) = \zeta(z).$

9.535

1. $\zeta(z) = \frac{1}{2^z - 1} \zeta\left(z, \frac{1}{2}\right)$ $\quad [\operatorname{Re} z > 1].$ УВ II 46

2. $2^z \Gamma(1-z) \zeta(1-z) \sin \frac{z\pi}{2} = \pi^{1-z} \zeta(z).$ УВ II 57

3. $2^{1-z} \Gamma(z) \zeta(z) \cos \frac{z\pi}{2} = \pi^z \zeta(1-z).$ УВ II 49

4. $\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \pi^{-\frac{z}{2}} \zeta(z) = \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \pi^{\frac{z-1}{2}} \zeta(1-z).$ УВ II 49

9.536 $\lim_{z \to 1} \left\{ \zeta(z) - \frac{1}{z-1} \right\} = C.$

9.537 Пусть $z = \frac{1}{2} + it$; тогда $\Xi(t) = \frac{(z-1)\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)}{\sqrt{\pi^z}} \zeta(z) = \Xi(-t)$

есть четная относительно t функция, имеющая действительные коэффициенты в разложении по степеням t^2. ЯЭ 368

9.54 Особые точки и нули

9.541

1. $z = 1$ является единственной особой точкой функции $\zeta(z, q)$ УВ II 46

2. Функция $\zeta(z)$ имеет простые нули в точках $-2n$, где n — натуральное число. Все остальные нули функции $\zeta(z)$ лежат в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$

3. Гипотеза Римана: все нули функции $\zeta(z)$, лежащие в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$, лежат на прямой $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$. Доказано, что на этой прямой лежит бесчисленное множество нулей дзета функции. УВ II 53

9.542 Частные значения.

1. $\zeta(2m) = \frac{2^{2m-1} \pi^{2m} |B_{2m}|}{(2m)!}$, УВ II 49

2. $\zeta(1-2m) = -\frac{B_{2m}}{2m}$, $\quad$ [m — натуральное число]. УВ II 47

3. $\zeta(-2m) = 0$ УВ II 47

4. $\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \ln 2\pi.$ УВ II 52

9.55 Функция $\Phi(z, s, v)$

9.550 **Определение.**

$$\Phi(z, s, v) = \sum_{n=0}^{\infty} (v+n)^{-s} z^n$$

$$[|z| < 1, \quad v \neq 0, -1, \ldots].$$ ВТФ I 27 (1)

Функциональные соотношения

9.551 $$\Phi(z, s, v) = z^m \Phi(z, s, m+v) + \sum_{n=0}^{m-1} (v+n)^{-s} z^n$$

$$[m = 1, 2, 3, \ldots, \quad v \neq 0, -1, -2, \ldots]$$ ВТФ I 27 (2)

9.552 $$\Phi(z, s, v) = iz^{-v}(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\left[e^{-i\pi\frac{s}{2}}\Phi\left(e^{-2\pi iv}, 1-s, \frac{\ln z}{2\pi i}\right) - e^{i\pi\left(\frac{s}{2}+2v\right)}\Phi\left(e^{2\pi iv}, 1-s, 1-\frac{\ln z}{2\pi i}\right)\right].$$ ВТФ I 29 (7)

Представление в виде ряда

9.553 $$\Phi(z, s, v) = z^{-v}\Gamma(1-s)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-\ln z + 2\pi n i)^{s-1} e^{2\pi n v i}$$

$$[0 < v \leqslant 1, \quad \operatorname{Re} s < 0, \quad |\arg(-\ln z + 2\pi n i)| \leqslant \pi]$$ ВТФ I 28 (6)

9.554 $$\Phi(z, m, v) = z^{-v}\left\{{\sum_{n=0}^{\infty}}' \zeta(m-n, v)\frac{(\ln z)^n}{n!} + \frac{(\ln z)^{m-1}}{(m-1)!}\left[\psi(m) - \psi(v) - \ln\left(\ln\frac{1}{z}\right)\right]\right\}^{*)}$$

$$[m = 2, 3, 4, \ldots, \quad |\ln z| < 2\pi, \quad v \neq 0, -1, -2, \ldots].$$ ВТФ I 30 (9)

9.555 $$\Phi(z, -m, v) = \frac{m!}{z^v}\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{-m-1} - \frac{1}{z^v}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{B_{m+r+1}(v)(\ln z)^r}{r!\,(m+r+1)}$$

$$[|\ln z| < 2\pi]$$ ВТФ I 30 (11)

Интегральные представления

9.556 $$\Phi(z, s, v) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}e^{-vt}}{1-ze^{-t}}\,dt = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}e^{-(v-1)t}\,dt}{e^t - z}$$

$$[\operatorname{Re} v > 0, \text{ либо } |z| \leqslant 1, \quad z \neq 1, \quad \operatorname{Re} s > 0, \text{ либо } z = 1, \quad \operatorname{Re} s > 1].$$ ВТФ I 27 (3)

---

*) Штрих у знака $\sum$ означает, что член для $n = m-1$ опущен.

Предельные соотношения

9.557 $\lim\limits_{z\to1}(1-z)^{1-s}\Phi(z, s, v)=\Gamma(1-s)$ $[\operatorname{Re} s<1]$. ВТФ I 30 (12)

9.558 $\lim\limits_{z\to1}\frac{\Phi(z, 1, v)}{-\ln(1-z)}=1.$ ВТФ I 30 (13)

Связь с гипергеометрической функцией

9.559 $\Phi(z, 1, v)=v^{-1}{}_2F_1(1, v; 1+v; z)$ $[|z|<1]$. ВТФ I 30 (10)

9.56 Функция $\xi(s)$

9.561 $\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\pi^{\frac{1}{2}s}}\zeta(s).$ ВТФ III 190 (10)

9.562 $\xi(1-s)=\xi(s).$ ВТФ III 190 (11)

9.6 ЧИСЛА И ПОЛИНОМЫ БЕРНУЛЛИ, ЧИСЛА ЭЙЛЕРА, ФУНКЦИИ $\nu(x)$, $\nu(x, \alpha)$, $\mu(x, \beta)$, $\mu(x, \beta, \alpha)$, $\lambda(x, y)$

9.61 Числа Бернулли

9.610 Числа B_n, являющиеся коэффициентами при $\frac{t^n}{n!}$ в разложении функции

1. $\frac{t}{e^t-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}$,

называются числами Бернулли. Таким образом, функция $\frac{t}{e^t-1}$ является производящей функцией для чисел Бернулли. Ге 48 (57), Ф II 520

9.611 Интегральные представления:

1. $B_{2n}=(-1)^{n-1}4n\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{e^{2\pi x}-1}dx$ (сравни **3.411** 2.,4.). Ф II 721 *и*

2. $B_{2n}=(-1)^{n-1}\pi^{2n}\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{2n}}{\operatorname{sh}^2 x}dx.$

3. $B_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{2n(1-2n)}{\pi}\int\limits_0^{\infty}x^{2n-2}\ln(1-e^{-2\pi x})\,dx.$

См. также **3.523** 2., **4.271** 3.

Свойства и функциональные соотношения

9.612 Рекуррентная формула (символическая запись):

$$B^n=(B+1)^n;\quad B^0=B_0=1.$$ Ге 49 (60)

Для вычисления следует все степени после развертывания бинома в правой части превратить в индексы, т. е.

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \quad B_0 = 1.$$ Ге 49

9.613 Все числа Бернулли суть числа рациональные.

9.614 Всякое число B_n может быть представлено в форме

$$B_n = C_n - \sum \frac{1}{k+1},$$

где C_n есть некоторое целое число, а сумма распространяется на все $k > 0$, такие, что $k+1$ — простое число, а k является делителем n Ге 64

9.615 Все числа Бернулли с нечетным индексом равны нулю, кроме

$B_1 = -\frac{1}{2}$, т. е. $B_{2n+1} = 0$ [n — натуральное число]. Ге 52, Ф II 521

$$B_{2n} = -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{2n-2} \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-2k+2)}{k!} B_k.$$

9.616 $B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}} \zeta(2n).$ Ге 56 (79), Ф II 721 *и*

9.617 $B_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \frac{1}{\prod\limits_{p=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p^{2n}}\right)}$ (сравни **9.523**)

(произведение распространяется на все простые числа p).

Связь с дзета-функцией Римана см. 9.542

Связь с числами Эйлера см. **9.635**.

Таблицу значений чисел Бернулли см. **9.71**

9.618 Неравенство (символическая запись):

$$|(B-\theta)^n| \leqslant |B_n| \quad [0 < \theta < 1].$$ Ч 337

9.62 Полиномы Бернулли

9.620 Полиномами $B_n(x)$ Бернулли называют многочлены вида

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$ Ге 51 (62)

или, символически,

$$B_n(x) = (B+x)^n.$$ Ге 52 (68)

9.621 Производящая функция:

$$\frac{e^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}$$ сравни **1.213**). Ге 65 (89) *и*

9.622 Представление в виде ряда:

$$B_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n-1} 2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^{2n}} \quad [0 < x < 1].$$ Ге 71

9.623 Функциональные соотношения и свойства.

1. $B_{m+1}(n)=B_{m+1}+(m+1)\sum_{k=1}^{n-1}k^m$ [n и m — натуральные числа]
(см. также 0.121) Ге 51 (65)

2. $\Delta B_n(x)=B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$. Ге 65 (90)

3. $B_n'(x)=nB_{n-1}(x)$. Ге 66

4. $B_n(1-x)=(-1)^nB_n(x)$. Ге 66

9.624 $B_n(mx)=m^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}B_n\left(x+\frac{k}{m}\right)$ [«теорема умножения»]. Ге 67

9.625 Разности

$$B_n(x)-B_n$$

при n нечетном на отрезке [0, 1] обращаются в нуль только в точках $0, \frac{1}{2}, 1$, причем в точке $x=\frac{1}{2}$ они меняют знак. При n четном эти разности обращаются в нуль на концах отрезка [0, 1], а внутри этого отрезка сохраняют знак, принимая наибольшее по абсолютной величине значение в точке $x=\frac{1}{2}$.

9.626 В промежутке (0, 1) полиномы

$$B_{2n}(x)-B_{2n} \quad \text{и} \quad B_{2n+2}(x)-B_{2n+2}$$

имеют противоположные знаки. Ге 87

9.627 Частные случаи:

1. $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$.
2. $B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$.
3. $B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$.
4. $B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}$.
5. $B_5(x)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x$.

Ге 70

9.628 Частные значения:

1. $B_n(0)=B_n$.
2. $B_n(1)=(-1)^nB_n$.

Ге 76

9.63 Числа Эйлера

9.630 Числа E_n, являющиеся коэффициентами при $\frac{t^n}{n!}$ в разложении функции

$$\frac{1}{\operatorname{ch} t}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{t^n}{n!},$$

называются числами Эйлера. Таким образом, функция $\frac{1}{\operatorname{ch} t}$ является производящей функцией для чисел Эйлера. Ч 330

9.631 Рекуррентная формула (символическая запись):

$$(E+1)^n+(E-1)^n=0, \quad E_0=1. \qquad \text{Ч 329}$$

Свойства чисел Эйлера

9.632 Числа Эйлера суть целые числа.

9.633 Числа Эйлера с нечетным индексом равны нулю, знаки же двух соседних чисел с четными индексами противоположны, т. е.

$$E_{2n+1}=0, \quad E_{4n}>0, \quad E_{4n+2}<0. \qquad \text{Ч 329}$$

9.634 Если α, β, γ, ... являются делителями числа $n-m$, то разность $E_{2n}-E_{2m}$ делится на те из чисел $2\alpha+1$, $2\beta+1$, $2\gamma+1$, ..., которые являются простыми числами.

9.635 Связь с числами Бернулли (символическая запись):

1. $$E_{n-1}=\frac{(4B-1)^n-(4B-3)^n}{2n}. \qquad \text{Ч 330}$$

2. $$B_n=\frac{n(E+1)^{n-1}}{2^n(2^n-1)}. \qquad \text{Ч 330}$$

3. $$\left(B-\frac{1}{4}\right)^{2n+1}=\frac{2n+1}{4^{2n+1}}E_{2n}. \qquad \text{Ч 341}$$

Таблицу значений чисел Эйлера см. 9.72.

9.64 Функции $\nu(x)$, $\nu(x, \alpha)$, $\mu(x, \beta)$, $\mu(x, \beta, \alpha)$, $\lambda(x, y)$

9.640

1. $$\nu(x)=\int_0^\infty \frac{x^t\,dt}{\Gamma(t+1)}. \qquad \text{ВТФ III 217 (1)}$$

2. $$\nu(x, \alpha)=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+t}\,dt}{\Gamma(\alpha+t+1)}. \qquad \text{ВТФ III 217 (1)}$$

3. $$\mu(x, \beta)=\int_0^\infty \frac{x^t t^\beta\,dt}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(t+1)}. \qquad \text{ВТФ III 217 (2)}$$

4. $$\mu(x, \beta, \alpha)=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+t}t^\beta\,dt}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+t+1)}. \qquad \text{ВТФ III 217 (2)}$$

5. $$\lambda(x, y)=\int_0^y \frac{\Gamma(u+1)\,du}{x^u}. \qquad \text{МХд 9}$$

9.7 ПОСТОЯННЫЕ

9.71 Числа Бернулли

$$B_0=1, \qquad B_4=-\frac{1}{30},$$

$$B_1=-\frac{1}{2}, \qquad B_6=\frac{1}{42},$$

$$B_2=\frac{1}{6}, \qquad B_8=-\frac{1}{30},$$

$$B_{10}=\frac{5}{66},\qquad B_{24}=-\frac{236\,364\,091}{2730},$$
$$B_{12}=-\frac{691}{2730},\qquad B_{26}=\frac{8\,553\,103}{6},$$
$$B_{14}=\frac{7}{6},\qquad B_{28}=-\frac{23\,749\,461\,029}{870},$$
$$B_{16}=-\frac{3617}{510},\qquad B_{30}=\frac{8\,615\,841\,276\,005}{14\,322},$$
$$B_{18}=\frac{43\,867}{798},\qquad B_{32}=-\frac{7\,709\,321\,041\,217}{510},$$
$$B_{20}=-\frac{174\,611}{330},\qquad B_{34}=\frac{2\,577\,867\,858\,367}{6}.$$
$$B_{22}=\frac{854\,513}{138},$$

9.72 Числа Эйлера

$$F_0=1,\qquad E_{12}=2\,702\,765,$$
$$E_2=-1,\qquad E_{14}=-199\,360\,981,$$
$$E_4=5\qquad E_{16}=19\,391\,512\,145.$$
$$E_6=-61,\qquad E_{18}=-2\,404\,879\,675\,441,$$
$$E_8=1385,\qquad E_{20}=370\,371\,188\,237\,525$$
$$\Gamma_{10}=-50\,521,$$

Числа Бернулли и Эйлера с нечетными индексами (исключая B_1) равны нулю

9.73 Постоянные Эйлера и Каталана

Постоянная Эйлера

$$C=0{,}577\,215\,664\,901\,532\,5\ldots$$

Постоянная Каталана

$$G=0{,}915\,965\,594\ldots$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ОБОЗНАЧЕНИЕ

Продолжение

Обозначение	Наименование функции и номер формул, где дается ее определение	
$F_A(\alpha;\beta_1,\ldots,\beta_n,\gamma_1,\ldots,\ldots,\gamma_n,z_1,\ldots,z_n)$	Гипергеометрическая функция нескольких переменных	9.19
$F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4$	Гипергеометрические функции двух переменных	9.18
$\mathrm{fe}_n(z,q),\ \mathrm{Fe}_n(z,q)\ldots$ $\mathrm{Fey}_n(z,q),\ \mathrm{Fek}_n(z,q)\ldots$	Вторые непериодические решения уравнения Матье	8.64 8.663
G	Постоянная Каталана	9.73
$g_2,\ g_3$	Инварианты $\wp(u)$-функции	8.161
$\mathrm{gd}\,x$	Гудерманиан	1.49
$\mathrm{ge}_n(z,q),\ \mathrm{Ge}_n(z,q)$ $\mathrm{Gey}_n(z,q),\ \mathrm{Gek}_n(z,q)$	Вторые непериодические решения уравнения Матье	8.64 8.663
$\Gamma(z)$	Гамма-функция	8.31—8.33
$\gamma(a,x),\ \Gamma(a,x)$	Неполная гамма-функция	8.35
$G_{p,q}^{m,n}\left(x\left\lvert\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)$	Функция Мейера	9.3
$\mathrm{bei}_\nu(z)\quad \mathrm{ber}_\nu(z)$	Функции Томсона	8.56
$H_0^{(1)}(z)\ H_0^{(2)}(z)$		8.473, 8.531
$H_1^{(1)}(z),\ H_1^{(2)}(z)$		8.473
$H_\nu^{(1)}(z),\ H_\nu^{(2)}(z)$	Функции Ганкеля 1-го и 2-го рода	8.405, 8.42
$H(u)=\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2K}\right)$		8.192
$H_1(u)=\vartheta_2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)$		8.192
$H_n(z)$	Полиномы Эрмита	8.95
$\mathbf{H}_\nu(z)$	Функции Струве	8.55
$I_\nu(z)$	Функции Бесселя от мнимого аргумента	8.406, 8.43
$I_x(p,q)$	Неполная бэта-функция	8.39
$J_\nu(z)$	Функция Бесселя	8.402, 8.41
$\mathbf{J}_\nu(z)$	Функция Ангера	8.58
$K(k)=K,\ K(k')=K'$	Полный эллиптический интеграл 1-го рода	8.11—8.12
$K_\nu(z)$	Цилиндрические функции мнимого аргумента	8.407, 8.43
$\mathrm{kei}(z),\ \mathrm{ker}(z)$	Функции Томсона	8.56
$\xi(s)$		9.56
$L(x)$	Функция Лобачевского	8.26
$\mathbf{L}_\nu(z)$	Функция Струве	8.55
$L_n^\alpha(z)$	Полиномы Лагерра	8.97
$\mathrm{li}(x)$	Интегральный логарифм	8.24
$\lambda(x,y)$		9.640
$M_{\ ,\,\mu}(z)$	Функции Уиттекера	9.22, 9.23
$\mu(x,\beta)$		9.640
$N_\nu(z)$	Функции Неймана	8.403, 8.41
$\nu(x)$		9.640
$\nu(x,\alpha)$		9.640
$O_n(x)$	Полиномы Неймана	8.59
$\wp(u)$	Эллиптическая функция Вейерштрасса	8.16
$P_\nu^\mu(z),\ \mathrm{P}_\nu^\mu(x)$	Шаровые функции 1-го рода	8.7, 8.8
$P_\nu(z),\ \mathrm{P}_n(x)$	Функции и полиномы Лежандра	8.82, 8.83, 8.91
$P\begin{Bmatrix}a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z\\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$	Дифференциальное уравнение Римана (схема)	9.160

Продолжение

Обозначение	Наименование функции и номер формул, где дается ее определение	
$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$	**Полиномы Якоби**	8.96
$\Pi(x)$	Угол параллельности Лобачевского	1.48
$\Pi(\varphi, n, k)$	Эллиптический интеграл 3-го рода	8.11
$\Phi(x)$	Интеграл вероятности	8.25
$\Phi(z, s, v)$		9.55
$\Phi(\alpha, \gamma, x) = {}_1F_1(\alpha, \gamma; x)$		9.21
$\Phi_1(\alpha, \beta, \gamma, x, y)$, $\Phi_2(\beta, \beta', \gamma, x, y)$, $\Phi_3(\beta, \gamma, x, y)$	Вырожденные гипергеометрические ряды двух переменных	9.26
$\psi(x)$	Пси-функция Эйлера	8.36
$\Psi(a, c; x)$	Вырожденная гипергеометрическая функция	9.21
$Q_\nu^\mu(z)$, $\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)$	Шаровые функции второго рода	8.7, 8.8
$Q_\nu(z)$, $\mathrm{Q}_\nu(x)$	Присоединенные функции Лежандра 2-го рода	8.82, 8.83
$S(x)$	Синус-интеграл Френели	8.25
$S_n(x)$	Полиномы Шлефли	8.59
$s_{\mu, \nu}(z)$, $S_{\mu, \nu}(z)$	Функции Ломмеля	8.57
$\mathrm{se}_{2n+1}(z, q)$, $\mathrm{se}_{2n+2}(z, q)$	Периодические функции Матье	8.61
$\mathrm{Se}_{2n+1}(z, q)$, $\mathrm{Se}_{2n+2}(z, q)$	Функции Матье от мнимого аргумента	8.63
$\mathrm{shi}(x)$	Гиперболический интегральный синус	8.22
$\mathrm{si}(x)$	Интегральный синус	8.23
$\mathrm{sn}\, u$	Эллиптический синус	8.14
$\sigma(u)$	Сигма-функция Вейерштрасса	8.17
$T_n(x)$	Полиномы Чебышева 1-го рода	8 94
$\Theta(u)$, $\Theta_1(u)$	Тэта-функция Якоби	8.191—8.196
$\Theta_1(u) = \vartheta_3\left(\frac{\pi u}{2K}\right)$		8.192
$\Theta(u) = \vartheta_4\left(\frac{\pi u}{2K}\right)$		8.192
$\vartheta_0(v \mid \tau) = \vartheta_4(v \mid \tau)$, $\vartheta_1(v \mid \tau)$, $\vartheta_2(v \mid \tau)$, $\vartheta_3(v \mid \tau)$	Эллиптические тэта-функции	8.18, 8.19
$U_n(x)$	Полиномы Чебышева 2-го рода	8.94
$U_\nu(w, z)$, $V_\nu(w, z)$	Функции Ломмеля двух переменных	8.57
$W_{\lambda, \mu}(z)$	Функция Уиттекера	9.22, 9.23
$Z_\nu(z)$	Цилиндрические функции	8.401

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

	Буква k (когда она не служит индексом суммирования) означает число лежащее на отрезке $[0, 1]$. Этим обозначением пользуются в интегралах сводящихся к эллиптическим. При этом число $\sqrt{1-k^2}$ обозначают через k'
$R(x)$	Рациональная функция
$\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$	Действительная и мнимая части комплексного числа $z=x+iy$
$\bar{z}=x-iy$	Комплексное число сопряженное с $z=x+iy$
$\arg z$	Аргумент комплексного числа $z=x+iy$
$\operatorname{sign} x$	Знак действительного числа x, $\operatorname{sign} x=+1$ при $x>0$, $\operatorname{sign} x=-1$ при $x<0$
$E(x)$	Целая часть действительного числа x
$\int\limits_a^{(b+)}$ $\int\limits_a^{(b-)}$	Контурные интегралы, путь интегрирования исходя из точки a, приближается к точке b (по прямой, если нет противоположных указаний) обходит по небольшому кругу в положительном (отрицательном) направлении точку b и возвращается в точку a, пройдя первоначальный путь в противоположном направлении
$\int\limits_C$	Криволинейный интеграл, взятый вдоль кривой C.
$n!$	$=1\cdot 2\cdot 3\ldots n,\quad 0!=1.$
$(2n+1)!!$	$=1\cdot 3\ldots(2n+1).$
$(2n)!!$	$=2\cdot 4\ldots(2n).$
$\binom{p}{n}$	$=\dfrac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1\cdot 2\ldots n},\quad \binom{p}{0}=1.$
$(a)_n$	$=a(a+1)\ldots(a+n-1)=\dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$
$\sum\limits_{k=m}^{n} u_k$	$=u_m+u_{m+1}+\ldots+u_n$. Если $n<m$, то полагают $\sum\limits_{k=m}^{n} u_k=0.$
$\sum\limits_n{}'$, $\sum\limits_m\sum\limits_n{}'$	Суммы, распространенные на все целочисленные значения n или, соответственно, m и n, исключая $n=0$ или, соответственно, $m=n=0$.
$O(f(z))$	Порядок функции $f(z)$. Пусть точка z приближается к z_0. Если существует $M>0$, такое что в некоторой достаточно малой окрестности точки z_0 имеет место неравенство $\lvert g(z)\rvert \leqslant M \lvert f(z)\rvert$, то пишут $g(z)=O(f(z))$.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ, НА КОТОРУЮ ИМЕЮТСЯ ССЫЛКИ *)

А — Adams E., Smitsonian mathematical formulae, Washington, 1922.

АК — Appel P., Kampe J. de Fériet, Fonctions hypergéometriques et hypersfériques, Polinomes d'Hermite, Paris, 1926

Б — Bertrand J., Traité de calcul différentiel et de calcul intégral, v. 2, Calcul intégral, Intégrales définies et indéfinies Paris, Gauthier-Villars, 1870

$Бр_{08}$ — Bromwich, T. J., T'a, An introduction to the theory of infinite series. London, Mac Millan &, Co, 1908.

$Бр_{26}$ — То же, изд. 2-е, 1926.

Бу — Buchholz, Herbert, Die confluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1953.

БФ — Byrd P. F. and Friedman M. D., Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1954.

БХ — Bierens de Haan D., Nouvelles tables d'intégrales definies, Amsterdam, 1867.

В — Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций. Перев. с англ., ч. 1, М., ИЛ 1949.

ВТФ I — Higher transcendental function, v. I, McGraw-Hill Book Company. Inc, 1953.

ВТФ II — То же, v. II.

ВТФ III — То же, v III.

Га — Gauss K. F., Werke, Bd III, Göttingen, 1876.

Ге — Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, ч. 1, М.—Л., ОНТИ, 1936.

ГК I — Сборник задач по высшей математике под ред. Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина, т. I, М.—Л., Гостехиздат, 1947.

ГК II — То же, т. II.

ГК III — То же, т. III.

$Гу\ I_1$ — Гурса Э., Курс математического анализа, перев. с франц., т. 1, ч. 1, М., ГТТИ, 1933.

ГХ I — Gröbner W., Hofreiter M., Hofreiter N., Laub, J., Peschl E., Integraltafel, Teil I, Unbestimmte Integrale, Braunschweig, 1944.

ГХ — Gröbner W., Hofreiter N., Integraltafel. Teil II, Bestimmte Integrale. Wien und Innsbruck, Springer-Verlag, 1958

Дж — Теория следящих систем, ред. Х. Джеймс, Н. Никольс, Р. Филлипс, М., ИЛ. 1953.

Д — Двайт Г. Б., Таблицы интегралов и другие математические формулы, М, ИЛ, 1948.

Ж — Журавский А. М., Справочник по эллиптическим функциям, М.—Л., Изд. АН СССР, 1941.

Жл — Jolley L., Summation of Series, London, Chapman and Hall LTD, 1925.

ИП I — Tables of integral transforms, v. I, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1954.

ИП II — То же, v. II.

КГ — Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, перев. с нем., т. I, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

Кр — Кречмар В. А., Задачник по алгебре, изд. 2-е, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

Ку — Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, М.—Л., ОНТИ, 1935.

*) После шифра, указывающего книгу, в библиографических ссылках стоят числа. Числа, не заключенные ни в какие скобки, означают страницы; числа в круглых скобках — номера формул, цифры в квадратных скобках — номера таблиц.

Ла — Laska W., Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik, Braunschweig, Friedrich Vieweg und Sohn, 1888.

Ле — Legendre, Exercices calcul integral, Paris, 1811.

Ли — Lindman C. F., Examen des Nouvelles tables d'intégrales définies de M. Bierens de Haan, Amsterdam 1867, Kongl. Svenska Vetenskaps — Akademiens Handlingar 24, Nr 5, Stockholm, 1891.

Ло I — Лобачевский Н. И., Полное собрание сочинений, т. I, М. — Л., Гостехиздат, 1946.

Ло III — То же, т. III, 1951.

Ло V — То же, т. V (   ).

М — Мак-Лахлан Н., Теория и приложения функций Матье, М., ИЛ, 1953.

МО — Magnus W. und Oberhettinger F., Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Springer Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1948.

МфК — Meyer Zur Capellen, Integraltafeln, Sammlung unbestimmter Integrale elementarer Funktionen, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1950.

МХ — McLachlan N. W. et Humbert P., Formulaire pour le calcul symbolique (memorial des sciences mathématiques, Publ. sous le patronage de l'Acad. des sciences de Paris, des acad. de Belgrade, Bruxelles, Bucarest. Dir. Henri Villat, Fasc. 100, 1950).

МХд — McLachlan N. W., Humbert P. et Poli L., Supplément au formulaire pour le calcul simbolique, Fasc. 113, Paris, 1950.

НГ — Nielsen N., Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig, Teubner, 1906.

НИ — Nielsen N., Theorie des Integrallogaritmus und verwandter Transcendenten, Leipzig, Teubner, 1906.

На — Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М. — Л., Гостехиздат, 1949.

Но — Новоселов С. И., Обратные тригонометрические функции, Пособие для учителей, изд. 3-е, М. — Л., Учпедгиз, 1950.

П — Peirce B. O., A short table of integrals, Third edition, Boston, Ginn and Co., 1929.

Си — Сикорский Ю. С., Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике, М. — Л., ОНТИ, 1936.

См III — Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 2, изд. 4-е, М. — Л., Гостехиздат, 1949.

Ст — Стретт М. Д., Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, перев. с нем., Харьков — Киев, ГНТУ, 1935.

Т — Тимофеев А. Ф., Интегрирование функций, ч. 1, М. — Л., ГТТИ, 1933.

УВ I — Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, перев. с англ., ч. 1, М. — Л. ГТТИ, 1933.

УВ II — То же, ч. II, 1934.

Ф I — Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, М. — Л., Гостехиздат, 1947.

Ф II — То же, т. II, 1948.

Ф III — То же, т. III, 1949.

Ч — Чезаро Э., Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, ч. 1, Л. — М., ОНТИ, 1936.

Х — Hobson E. W., The theory of spherical and elipsoidal harmonics, Cambridge, University Press, 1931.

Э — Эйлер Л., Введение в анализ бесконечно малых, перев. с латинск., М. — Л., ОНТИ, 1936.

ЭД — Эфрос А. М. и Данилевский А. М., Операционное исчисление и контурные интегралы, Харьков, ГНТИУ, 1937.

ЯЭ — Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, перев. с нем., М. — Л., Гостехиздат, 1948.

СПИСОК ИСПРАВЛЕНИЙ

Стр.	Формула или строка	Напечатано	Следует читать
16	0.126	$\sum\limits_{k=1}^{n}$	$\sum\limits_{k=0}^{n}$
16	0.131	$A_4 = 19/80$	$A_4 = 19/120$
23	0.243 2	$[p+(k-1)q+l-1]$	$[p+(k-1)q+l]$
26	0.262 3	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}$	$\prod\limits_{k=1}^{\infty}$
36	1.216 2	$+7x^4/4!-$	$-7x^4/4!-$
46	1.361 3	$=\sin\left\{ny+\frac{n+1}{2}x\right\}\dots\operatorname{cosec}\frac{2y-x}{2}$	$=\frac{1}{2}\left[\sin\left\{ny+\frac{n+1}{2}x\right\}\dots\operatorname{cosec}\frac{2y-x}{2}\right]$
46	1.371 2	$-\frac{1}{2^{2n}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}$	$-\frac{1}{2^{2n}}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2^n}$
49	1.413 1	2^{2k}	2^{2k-1}
50	1.414 2	$=nx-n^2\sum\limits_{k=1}^{\infty}$	$=nx-n\sum\limits_{k=1}^{\infty}$
50	1.421 3	$+\frac{x}{\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k(x-k)}$	$+\frac{x}{\pi}\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{k(x-k)}$
51	1.434	$1+\sin x=\frac{1}{8}(\pi+2x)^2\ \dots$	$\cos^2 x=\frac{1}{4}(\pi+2x)^2\ \dots$
52	1.442 4	$=\frac{\pi}{4}\qquad [0<x<\pi]$	$=\begin{cases}\frac{\pi}{4} & \left[0<x<\frac{\pi}{2}\right]\\ -\frac{\pi}{4} & \left[\frac{\pi}{2}<x<\pi\right]\end{cases}$
52	1.443 1	$\sum\limits_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}B_{2n-k}\rho^k$	$\sum\limits_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}B_{2n-k}\rho^k$
52	1.443 1	$B_{2n}\binom{x}{2}$	$B_{2n}\left(\frac{x}{2}\right)$
53	1.443 2	$=(-1)^n 2^{2n}\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum\limits_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\binom{2n+1}{k}\dots$	$=(-1)^{n-1}2^{2n}\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\dots$
53	1.443 2	$=(-1)^n\frac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}\dots$	$=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}\dots$
53	1.444 5	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty}$
53	1.444 6	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty}$

Стр	Формула или строка	Напечатано	Следует читать
56	1.463 1	$\sum\limits_{k=0}^{\infty}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}$
56	1.463 2	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}$
74	2.122 1	$\int \frac{dx}{x z_1^5}$	$\int \frac{dx}{x z_1^1}$
76	6 сверху	$\alpha = \sqrt{a/b}$	$\alpha = \sqrt[4]{a/b}$
99	2.268	$(2n + 2m - 2)$	$(2n + m - 2)$
99	2.269 4	$= \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{bx} + \frac{4c}{b^2} - \frac{8c^2x}{b^3}\right)\frac{1}{\sqrt{bx+cx^2}}$	$= \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{bx} + \frac{4c}{b^2} + \frac{8c^2x}{b^3}\right)\frac{1}{\sqrt{bx+cx^2}}$
99	2.269 5	$= \left(-\frac{1}{ax} + \frac{2bc}{a\Delta} + \frac{c(3b^2-3ac)x}{a^2\Delta}\right)\frac{1}{\sqrt{R}} -$	$= \left(-\frac{1}{ax} - \frac{b(10ac-3b^2)}{a^2\Delta} - \frac{c(9ac-3b^2)x}{a^2\Delta}\right)\frac{1}{\sqrt{R}} -$
100	2.271 6	$\left(\frac{n-1}{k}\right)$	$\binom{n-1}{k}$
149	2.519 2	$(2l-1)(2l-2)$	$(2l-1)(2l-3)$
163	2.557 2	$\int \frac{\sin x\,dx}{a\cos x + b\sin x} =$	$\int \frac{\sin x\,dx}{a\sin x + b\cos x} =$
		$= \frac{ax - b\ln\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)}{a^2+b^2}$	$= \frac{ax - b\ln\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)}{a^2+b^2}$
171	2.581 1	$[m + n - 2(m + r - 1)k^2] \times$	$[m + n - 2 + (m + r - 1)k^2] \times$
171	2.581 1	$\int \sin^m x \cos^{n-} x\, \Delta^r dx$	$\int \sin^m x \cos^{n-1} x\, \Delta^r dx$
173	2.583 11	$+ \frac{2(2k^4 - k^2 - 1)}{15k^4} F(x, k) +$	$- \frac{2(2k^4 - k^2 - 1)}{15k^4} F(x, k) +$
173	2.583 16	$- \frac{8k^4\sin^4 x - 2k^2(5k^2-1)\sin^2 x - 15k^4 + 4k^2 + 3}{48k^4}$	$\frac{-9k^4\sin^4 x - 2k^2(5k^2-1)\sin^2 x - 15k^4 + 4k^2 + 3}{48k^4}$
183	2.586 8	$= \pm \frac{k\cos x\,\Delta}{k'^2(1 \pm \sin x)}$	$= \pm \frac{k\cos x\,\Delta}{k'^2(1 \pm k\sin x)}$
290	3.194 5	$\vert\arg(1 - u3)\vert$	$\vert\arg(1 + u3)\vert$
303	3.241 2	$[\operatorname{Re}\nu \geqslant \operatorname{Re}\mu > 0]$	$[\operatorname{Re}\nu > \operatorname{Re}\mu > 0]$
319	3.313	$[0 < \operatorname{Re}\mu < n]$	$[0 < \operatorname{Re}\mu < n,\ n$ — нечетное$]$
325	3.353 3	$\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-px}dx}{(a \pm x)^2} =$	$\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-px}dx}{(a + x)^2} =$
		$= pe^{\pm ap}\operatorname{Ei}(\mp ap) \pm \frac{1}{a}\quad [p > 0]$	$= pe^{ap}\operatorname{Ei}(-ap) + \frac{1}{a}\quad [p > 0,\ a > 0]$
326	3.355 3		формула неверна
326	3.355 4		формула неверна
329	3.361 1	$\int\limits_0^{u} \frac{e^{-qx}}{\sqrt{qx}}dx$	$\int\limits_0^{u} \frac{e^{-qx}}{\sqrt{x}}dx$

Стр.	Формула или строка	Напечатано	Следует читать
333	5—7 снизу		второй вариант ответа неверен
335	3.387 1	$\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$	$\operatorname{Re}\nu>0$
339	3.411 6	$\Gamma(\nu)\,{}_1F_1(\beta;\ \nu;\ \mu)$	$\Gamma(\nu)\,\Phi(\beta,\ \nu,\ \mu)$
344	1 сверху	1	$\frac{1}{2}$
344	3 сверху	$[\operatorname{Re}\mu>0,\ldots$	$[n\geqslant 2,\ldots$
353	3.469 1	$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\nu}{\mu}}$	$=2^{-\frac{5}{4}}\mu^{-\frac{3}{4}}\lvert\nu\rvert$
354	3.471 12	$\int\limits_{-\infty}^{\infty}$	$\int\limits_{0}^{\infty}$
356	3.478 1	$=\frac{1}{\lvert p\rvert}\mu^{-\frac{\nu}{p}}\Gamma\left(\frac{\nu}{p}\right)[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0]$	$=\frac{1}{p}\mu^{-\frac{\nu}{p}}\Gamma\left(\frac{\nu}{p}\right)[\operatorname{Re}\mu>0,\ \operatorname{Re}\nu>0,\ p>0]$
361	3.521 1	$=\frac{\pi^2}{2a^2}$	$=\frac{\pi^2}{4a^2}$
370	3.541 4		добавить: $[0<a<2]$
370	3.541 8	$=\beta(\mu/2)-1$	$=\mu\beta(\mu/2)-1$
378	3.557 5	$\int\limits_0^\infty \frac{x^q e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}x-\cos\lambda}\,dx=\frac{2\Gamma(q+1)}{\cos\frac{\lambda}{2}}\ldots$	$\int\limits_0^\infty \frac{x^q e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}x+\cos\lambda}\,dx=\frac{\Gamma(q+1)}{\cos\frac{\lambda}{2}}\ldots$
380	3.613 3	$=\frac{\pi}{2}a^{n-1}\quad[a^2<1]$	$=\begin{cases}\frac{\pi}{2}a^{n-1} & [n\geqslant 1]\\ 0 & [n=0]\end{cases}\quad[a^2<1]$
		$=\frac{\pi}{2a^{n+1}}\quad[a^2>1]$	$=\begin{cases}\frac{\pi}{2a^{n+1}} & [n\geqslant 1]\\ 0 & [n=0]\end{cases}\quad[a^2>1]$
381	3.613 4	$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1+a^2}{1-a^2}a^{n-1}\quad[a^2<1]$	$=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1+a^2}{1-a^2}a^{n-1} & [n\geqslant 1]\\ \frac{\pi a}{1-a^2} & [n=0]\end{cases}\quad[a^2<1]$
		$=\frac{\pi}{2a^{n+1}}\cdot\frac{a^2+1}{a^2-1}\quad[a^2>1]$	$=\begin{cases}\frac{\pi}{2a^{n+1}}\cdot\frac{a^2+1}{a^2-1} & [n\geqslant 1]\\ \frac{\pi}{a(a^2-1)} & [n=0]\end{cases}\quad[a^2>1]$
385	3.624 6	$=\frac{a\pi}{2}$	$=\frac{\pi\lvert a\rvert}{2}-\frac{\sin\pi\lvert a\rvert}{2}[2\lvert a\rvert\beta(\lvert a\rvert)-1]$
398	3.666 1	$(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}$	$(\beta^2-1)^{\frac{\mu}{2}}$
409	3.691 8		формула неверна
409	3.691 9		формула неверна
429	3.742 2	$\operatorname{Ei}[-\beta(a+\beta)]$	$\operatorname{Ei}[-\beta(a+b)]$
429	3.742 6	$[0<b<a]$	$[b>a>0]$

Стр	Формула и строка	Напечатано	Следует читать
430	3.745 1		формула неверна
430	3.745 2		формула неверна
438	3.768 4	$\int_0^1 (1-u)^\nu \cos(ax)\,dx =$	$\int_0^1 (1-x)^\nu \cos(ax)\,dx =$
439	3.768 13	$\sin(ax)$	$\sin(2ax)$
439	3.768 14	$\cos(ax)$	$\cos(2ax)$
472	3.836 5		формула неверна
494	3.897 1	$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ b > 0]$	$[\operatorname{Re}\beta > 0]$
494	3.897 2	$[\operatorname{Re}\beta > 0,\ b > 0]$	$[\operatorname{Re}\beta > 0]$
494	3.898 1	$[a > 0,\ b > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0]$	$[\operatorname{Re}\beta > 0]$
494	3.898 3	$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$	$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$
509	3.952 7	${}_1F_1\left(-\frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\gamma^2}{4\beta}\right)$	${}_1F_1\left(1-\frac{\mu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\gamma^2}{4\beta}\right)$
537	4.212 3		формула неверна
537	4.212 5		формула неверна
537	4.212 8	a^{-a}	e^{-a}
537	4.212 8	$[a > 0]$	$[a > 0,\ n$ — нечетное$]$
538	4.213 6		формула неверна
538	4.213 8		формула неверна
541	4.224 13	$2^k k!$	$2^{2k}(k!)^2$
568	4.285	$[p > 0,\ q > 0]$	$[p > 0,\ q < 0]$
580	4.311 1		формула неверна
591	4.355 2	$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots = \frac{\nu}{2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\exp\left(\frac{\nu^2}{\mu}\right)$	$\int_0^{\infty} \ldots = \frac{1}{4\mu} + \frac{\nu}{4\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\exp\left(\frac{\nu^2}{\mu}\right)\left[1+\Phi\left(\frac{\nu}{\sqrt{\mu}}\right)\right]$
592	4.358 2	$\zeta(2,\ \nu-1)$	$\zeta(2,\ \nu)$
592	4.358 3	$+ [2\psi(\nu) - 3\ln\mu]\,\zeta(2,\nu-1) - 2\zeta''_\nu(3,\nu-1)\}$	$+ 3\zeta''_\nu(2,\nu)[\psi(\nu) - \ln\mu] - \zeta''_\nu(3,\nu)\}$
613	4.425 2	$[a > 0,\ b > 0]$	$[a \geqslant 0,\ b > 0]$
619	4.441 1	$+ \frac{p}{2}\ln(p^2+q^2)$	$- \frac{p}{2}\ln(p^2+q^2)$
648	5.53	$\int [\ldots]\, Z_p(\alpha x)\, \mathfrak{Z}_p(\beta x)\,dx$	$\int [\ldots]\, Z_p(\alpha x)\, \mathfrak{Z}_q(\beta x)\,dx$
654	6.214 2	$[p > 0]$	$[0 < p < 1]$
655	6.216 2	$[0 < p \leqslant 1]$	$[0 < p < 1]$
655	6.224 1	$= 1$	$= -1/\beta$
657	6.244 1	$\int_0^{\infty}\left[\operatorname{si}(px) + \frac{\pi}{2}\right]\frac{x\,dx}{q^2+x^2} =$	$\int_0^{\infty}\operatorname{si}(px)\frac{x\,dx}{q^2+x^2} =$
657	6.244 2	$\int_0^{\infty}\left[\operatorname{si}(px) + \frac{\pi}{2}\right]\frac{x\,dx}{q^2-x^2} =$	$\int_0^{\infty}\operatorname{si}(px)\frac{x\,dx}{q^2-x^2} =$

Стр	Формула или строка	Напечатано	Следует читать
674	6.423 3	$=\mu(e^{-x},\ m)$	$=\Gamma(m+1)\mu(e^{-x},m)$
674	6.423 4	$=e^{nx}\mu(e^{-x},\ m,\ n)$	$=\Gamma(m+1)e^{nx}\mu(e^{-x},\ m,\ n)$
687	6.522 7	$b^{-2}(1+4a^2b^{-2})^{\frac{1}{2}}$	$b^{-2}(1+4a^2b^{-2})^{-\frac{1}{2}}$
693	6.539 1		добавить: [между a и b не должно быть нулей функции $J_\nu(x)$]
693	6.539 2		добавить [между a и b не должно быть нулей функции $N_\nu(x)$]
736	6.646 3		формула неверна
736	6.647 3	$=\ldots M_{\lambda,\mu}\left(\frac{1}{2}ae^t\right)\ldots$	$=\ldots e^{-\frac{a}{2}\operatorname{sh}t}M_{\lambda,\mu}\left(\frac{1}{2}ae^t\right)\ldots$
736	6.648	$\left(\frac{\alpha+\beta e^x}{\alpha e^x+\beta}\right)$	$\left(\frac{\alpha+\beta e^x}{\alpha e^x+\beta}\right)^\nu$
744	6.671 1	$[\operatorname{Re}p>-2]$	$[\operatorname{Re}\nu>-2]$
744	6.671 2	$[\operatorname{Re}p>-1]$	$[\operatorname{Re}\nu>-1]$
744	6.671 2	$=\frac{\alpha^\nu\sin\frac{\nu\pi}{2}}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha^2})^\nu}$	$=\frac{-\alpha^\nu\sin\frac{\nu\pi}{2}}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}(\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha^2})^\nu}$
747	6.672 8	$\sqrt{2ab}$	$2\sqrt{ab}$
753	6.681 13	$=(-1)^m\frac{\pi}{2}$	$=(-1)^m\frac{\pi^2}{4}$
753	6.682 1	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}{}_{\nu-\frac{1}{2}}(x\sin t)\sin^{\nu+\frac{1}{2}}t\,dt$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}J_{\nu-\frac{1}{2}}(x\sin t)\sin^{\nu+\frac{1}{2}}t\,dt$
783	6.784 2	$=\frac{a^{\frac{1}{2}-\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}b^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}$	$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a^{\frac{1}{2}-\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{b^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}$
847	7.343 2	$[m\neq n$ или $m=n=0]$	$[m\neq n]$
847	7.343 2	$[m=n\neq 0]$	$[m=n]$
851	7.374 4	$=\sqrt{\pi}\,2^{-m+\frac{1}{2}}$	$=\sqrt{\pi n}$
852	7.376 3	$=(-1)^n2^{2n-\frac{1}{2}\nu}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}x^{\frac{1}{2}\nu+1}}$	$=(-1)^n2^{2n-\frac{1}{2}\nu-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}x^{\frac{1}{2}\nu+1}}$
857	7.393 2	$\Gamma(2n+\nu-1)$	$\Gamma(2n+\nu+1)$
863	7.512 9	$(1-z)^\sigma$	$(1-z)^{-\sigma}$
918	9 сверху	$(1+nx^2)$	$(1-nx^2)$
918	15 сверху	Ф II 97—106	БФ (110.04)

Стр	Формула или строка	Напечатано	Следует читать
918	8.110 2	$\int \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ ФИ 1106	$\int \frac{d\varphi}{(1-n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$. БФ (110 04)
919	8.111 4	$(1+n\sin^2\alpha)$	$(1-n\sin^2\alpha)$
919	8.111 4	$(1+nx^2)$	$(1-nx^2)$
919	8.111 4	Сп 13	БФ (110 04)
920	8.117 2	$=\frac{2}{\pi}E\varphi-$	$=\frac{2}{\pi}E\varphi+$
923	8.129 1	$=\sqrt[4]{2}$	$=\sqrt{2}$
923	8.129 3	$K'\left(\sin\frac{\pi}{18}\right)=\sqrt{3}K\left(\sin\frac{\pi}{18}\right)$	$K'\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}K\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)$
923	8.130 8	...функция не...	..функция (отличная от постоянной) не...
934	8.174	$m\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}$	$n\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}$
943	8.232 2	$-\ln(x)$	$+\ln(x)$
945	8.254	$\sum\limits_{k=0}^{\infty}$	$\sum\limits_{k=0}^{n-1}$
950	8.326 1	$\frac{\Gamma(x)}{B(x+iy,\ x-iy)}$	$\frac{[\Gamma(x)]^2}{\Gamma(2x)B(x+iy,\ x-iy)}$
950	8.326 2	$\Gamma(y)$	$\Gamma(x)$
951	8.332 4	$\mathrm{sh}\ 2y\pi$	$\mathrm{ch}\ 2y\pi$
952	8.338 5	$\prod\limits_{k=1}^{\infty}$	$\prod\limits_{k=1}^{n}$
953	8.342 2	$\{1-\zeta(2n+1)\}$	$\zeta(2n+1)$
957	8.362 2	$\left[\frac{1}{z+k}-\ln\left(1+\frac{1}{z+k}\right)\right]$	$\left[\frac{1}{x+k}-\ln\left(1+\frac{1}{x+k}\right)\right]$
958	8.363 6	$\ln q$	$\ln 2q$
959	3 сверху	9.238	9.237
961	8.372 2	$-\frac{1}{2\sin\pi x}+$	$-\frac{\pi}{2\sin\pi x}+\ln 2+$
962	8.375 1	$[\ldots,\ p=1,2,3,\ldots]$	$[\ldots,\ p=1,2,3,\ldots,q-1]$
964	8.383	$B(x,y)=\prod\limits_{k=0}^{\infty}\cdot\ [x,y\neq 0,-1,-2,\ldots]$	$(x+y+1)B(x+1,y+1)=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\cdot[x,y\neq -1,-2,\ldots]$
966	8.406 2	$J_\nu(z)=$	$I_\nu(z)=$
973	8.432 6	$\int\limits_{-\infty}^{\infty}$	$\int\limits_{0}^{\infty}$
973	8.440	$(z/2)^k$	$(z/2)^{2k}$

Стр	Формула или строка	Напечатано	Следует читать
974	8.441 2	x^{2k}	z^{2k}
974	8.442 1	$\Gamma(\mu\ ,\ k+1)$	$\Gamma(\mu+k+1)\,k!$
974	8.444 2		добавить: $\left[\text{при } k=1 \text{ полагать } \sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{m}=1\right]$
975	8.446	$\ln\frac{Cz}{2}$	$\left(\ln\frac{z}{2}+C\right)$
981	8.467	$\left[e^z\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(n+k)!}{k!\,(n-k)!\,(2z)^k}+\cdots\right.$	$\left[e^z\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(n+k)!}{k!\,(n-k)!\,(2z)^k}\pm\cdots\right.$
987	8.511 3	$+2\sum_{k=0}^{\infty}$	$+2\sum_{k=1}^{\infty}$
987	8.511 4	$=1+2\sum_{k-1}^{\infty}$	$=J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}$
987	8.512 1	$+2\sum_{k=0}^{\infty}$	$+2\sum_{k=1}^{\infty}$
987	8.512 2	$=\left(\frac{z}{2}\right)^n$	$=\left(\frac{z}{2}\right)^n\ [n=1,2,\ldots]$
987	8.512 3	$=\sqrt{2z}$	$=\sqrt{2z/\pi}$
988	8.513 2	$\binom{m}{k}$	$\binom{k}{m}$
990	8.521 4	$\left\{\frac{1}{\sqrt{(2ki\pi+z)^2+x^2+y^2}}+\right.$	$\left\{\frac{1}{\sqrt{(2ki\pi+z)^2+x^2+y^2}}-\right.$
1019	8.732 2	$+(\nu+\mu)\,zQ^{\mu}_{\nu-1}(z)$	$+(\nu+\mu)\,Q^{\mu}_{\nu-1}(z)$
1022	8.751 3	$Q^{\mu}_{-n-\frac{3}{2}}(z)=$	$Q^{\mu}_{n-\frac{3}{2}}(z)=$
1024	8.772 3	$\left(\frac{z+1}{2}\right)^{-\nu}$	$\left(\frac{z+1}{2}\right)^{\nu}$
1024	8.773 1	$\mu+3/2$	$\nu+3/2$
1027	8.792	$\sum_{k=1}^{\infty}$	$\sum_{k=0}^{\infty}$
1029	8.812	$(n-m+1)$	$(n-m-1)$
1029	3 снизу	$\cos[\vartheta_1-\vartheta_2])=$	$\cos\vartheta)=$
1029	2 снизу	$\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)$	$\cos m\vartheta$
1030	8.820 2	$\frac{\nu+3}{2}$	$\nu+\frac{3}{2}$
		$2E\left(\frac{n-1}{2}\right)$	$E\left(\frac{n-1}{2}\right)$
1033	8.331 3	$\sum_{k-0}$	$\sum_{k=0}$

Стр	Формула или строка	Напечатано	Следует читать
1035	8.844 1	$\cos m\varphi$	$\cos k\varphi$
1035	8.844 2	$\cos m\varphi$	$\cos k\varphi$
1036	8.844 3	$\cos m\varphi$	$\cos k\varphi$
1037	8.852 2	2^{-m}	2^{-2m}
1039	8.911 1	$=\frac{(2n)!}{n\,(n!)^2}\dots$	$=\frac{(2n)!}{2^n\,(n!)^2}\dots$
1039	8.911 4	2^{n-1}	2^n
1042	8.923	$=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}$	$=\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}$
1042	8.924 1	(9062.1)	(9060 1)
1042	8.924 3	$+n\sum_{k=1}^{\infty}$	$-n\sum_{k=1}^{E(n/2)}$
1042	8.924 4	$-\frac{n}{2^{n+2k+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\dots$	$-n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2k+1}}\dots$
1043	8.928 1	$=\frac{4K}{\pi^2}-$	$=\frac{4K(\sin\theta)}{\pi^2}-$
1043	8.928 2	$=\frac{4E}{\pi^2}-$	$=\frac{4E(\sin\theta)}{\pi^2}-$
1046	8.940 2	$\sin x$	$\sin(\arccos x)$
1047	8.951	$\sqrt{2^n}$	2^n
1052	8.974 4	$L_{n-m}^{\beta}(x)$	$L_{n-m}^{\beta}(y)$
1056	16 сверху	8.840	8.820
1056	21 сверху	7.726 6	7.725 6
1073	16 сверху		фраза «для функции $W_{p,q}(z)$ 9.239.» не нужна.
1078	9.240	$2^{\frac{1}{4}+\frac{p}{2}}W_{\frac{1}{4}+\frac{p}{2},\,-\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right)$	$2^{\frac{1}{4}+\frac{p}{2}}z^{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{4}+\frac{p}{2},\,-\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right)$
1080	9.246 2	$+\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{2\cdot 4z^4}+$	$+\frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{2\cdot 4z^4}+$
1081	9.254 2	$=e^{z^2/4}$	$=-e^{z^2/4}$
1087	9.521 2	$[\operatorname{Re} z>0]$	$[\operatorname{Re} z<0,\ 0<q\leqslant 1]$
1090	9.612	$B^0=B_0=1$	$B^0=B_0=1\ [n\neq 1]$
1091	9.621	t^n	t^{n-1}
1093	9.635 1	$E_{n-1}=$	$E_{n-1}+4(-1)^n(3^{n-1}-1)B_1=$
1093	9.635 2		добавить: $[n\geqslant 2]$
1093	9.635 3	$(B-1/4)^{2n+1}=$	$(B-1/4)^{2n+1}-(B+1/4)^{2n+1}=$
1094	9.71	$B_{34}=\frac{2\,577\,867\,858\,367}{6}$	$B_{34}=\frac{2\,577\,687\,858\,367}{6}$